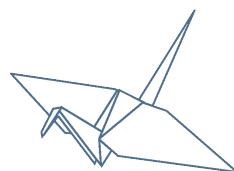


*Habilitation à diriger des recherches – Université d'Artois – le 12 décembre 2011*

## Incomparabilité et incommensurabilité dans le raisonnement et la dynamique des croyances

**Sylvain Lagrue**



### Composition du jury

<b>Philippe Besnard</b>	Directeur de recherche – CNRS – IRIT (Université de Toulouse)
<b>Lluís Godo Lacasa</b>	<i>Research Professor – Artificial Intelligence Research Institute (IIIA), Espagne</i>
<b>Ramón Pino-Pérez</b>	Professeur – <i>Universidad de Los Andes</i> , Vénézuela
<b>Salem Benferhat</b>	Professeur – Université d'Artois
<b>Tristan Cazenave</b>	Professeur – Université de Paris-Dauphine
<b>Éric Grégoire</b>	Professeur – Université d'Artois
<b>Pierre Marquis</b>	Professeur – Université d'Artois
<b>Odile Papini</b>	Professeur – Université d'Aix-Marseille







## Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier tout particulièrement *Lluís Godo Lacasa* de faire partie de mon jury et d'avoir accepter de rapporter mes travaux d'habilitation malgré un *timing* on ne peut plus serré. Je tiens également à remercier *Philippe Besnard* pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail en acceptant également d'être rapporteur : il était difficile de trouver une personne de la communauté experte en représentation des connaissances et étant un joueur aguerri à Pickomino. Enfin, je tiens à remercier *Ramón Pino-Pérez* non seulement d'avoir rapporté cette habilitation, mais également d'avoir traversé l'atlantique pour assister à ce jury. En outre, je le remercie chaleureusement pour toutes les discussions enrichissantes, qu'elles soient scientifiques ou autres, que nous avons pu avoir.

Ce jury à consonance très latine ne pouvait être complet sans la présence d'*Odile Papini*. Son dynamisme et son énergie m'ont accompagné depuis ma thèse jusqu'à aujourd'hui, qu'elle en soit remerciée. J'aimerais aussi remercier *Tristan Cazenave*, également membre de ce jury, pour les échanges extrêmement intéressants que nous avons pu avoir sur les jeux et pour les perspectives qu'il m'a ouvertes dans ce domaine. Par ailleurs, je souhaiterais remercier *Pierre Marquis* non seulement de prendre part à ce jury, mais également pour sa disponibilité pour échanger et confronter des idées. Je remercie également *Éric Grégoire* d'avoir accepté de diriger cette habilitation ainsi que pour les conditions exceptionnelles qui sont les nôtres dans le laboratoire.

Je tiens également à remercier du fond du cœur *Salem Benferhat* qui m'a accompagné depuis mon entrée dans le monde de la recherche (il y a de cela plus de 12 ans) et qui reste un collègue exceptionnel de compétence, de gentillesse et de bonne humeur. *Salem* m'a en outre inoculé le virus du bridge, tout en me démontrant jour après jour ce qu'était le « panache » dans ce jeu qui rend fou.

Je remercie également l'ensemble de mes coauteurs. Je remercie tout particulièrement *Mariette Sérayet*, *Safa Yahi* et *Julien Hué* que j'ai eu la chance de rencontrer alors qu'ils débutaient leur carrière. Que celle-ci soit pleine de réussite. Je fais un énorme merci à *Julien Rossit*, qui a été un collègue remarquable et l'un des rares que j'ai une chance de croiser à un concert de *Rammstein* : les nombreux échanges que nous avons eus ont toujours été pour moi source d'enrichissement. Je remercie également toutes les personnes avec qui nous « jouons »

sérieusement, en particulier *Nathalie*, *Fabien* et *Stéphane*.

Je remercie tous mes collègues du troisième étage de la faculté pour leur bonne humeur et leur aptitude à ne jamais laisser ni une cafetière ni une théière vide. Parmi eux, je remercie plus particulièrement le personnel administratif (*Nadine*, *Sandrine* et *Manuel*) et technique (*Stéphanie*, *Fabien* et *François*) du laboratoire pour leur convivialité, leur efficacité et leur disponibilité. De plus, je remercie l'ensemble des joueurs de bridge, aussi bien réguliers qu'occasionnels pour les réunions instructives que nous avons pu avoir ensemble. Je remercie en particulier *Sébastien* de partager le bureau C301 avec autant de patience et de courage, je le remercie par ailleurs pour les dernières relectures de ce document et pour ses remarques terriblement pertinentes. *Fabien* réapparaît une troisième fois dans ces remerciements, car il a lui aussi contribué par de nombreuses relectures, ainsi que par un soutien constant en théine, à ce document.

Enfin, j'aimerais remercier Nathalie, Sidonie et Ernest pour la joie et le bonheur qu'ils m'apportent jour après jour. Il me reste maintenant à rembourser la dette de temps que j'ai immanquablement contractée récemment auprès d'eux pour la rédaction de cette habilitation... Que celle-ci leur soit dédiée.





## Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Écosystème . . . . .	1
1.2 Objets de recherche . . . . .	2
1.3 Démarche scientifique . . . . .	5
1.4 Plan de lecture . . . . .	6
<b>2 Raisonnement en présence d'incohérences : le cas ordonné</b>	<b>9</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	10
2.2 Croyances totalement ordonnées et représentation par classement . . . . .	15
2.3 Généralisations aux ordres partiels . . . . .	17
<b>3 Raisonnez en présence d'incohérences : le cas pondéré</b>	<b>21</b>
3.1 Bases pondérées . . . . .	22
3.2 Bases pondérées à intervalles . . . . .	23
3.3 Logique des pénalités et prévention des collisions . . . . .	28
<b>4 Révision et croyances partiellement ordonnées</b>	<b>35</b>
4.1 Révision et information totalement ordonnée . . . . .	36
4.2 Généralisation aux ordres partiels . . . . .	41
4.3 Exemples d'opérateurs . . . . .	46

<b>5 Fusion sans hypothèse de commensurabilité</b>	<b>49</b>
5.1 Le cadre commensurable . . . . .	50
5.2 Traitement de l'incommensurabilité . . . . .	54
5.3 Comportement logique et postulats de rationalité . . . . .	56
<b>6 Prise de décision en environnement stochastique : Pickomino</b>	<b>59</b>
6.1 Règles du jeu . . . . .	60
6.2 Programmes jouant à Pickomino . . . . .	60
6.3 Les challenges Pickomino . . . . .	68
<b>7 Conclusion et perspectives</b>	<b>71</b>
7.1 Résumé des contributions . . . . .	71
7.2 Quelques perspectives et travaux en cours . . . . .	72
<b>A Bibliographies</b>	<b>75</b>
A.1 Références . . . . .	75
A.2 Publications de Sylvain Lagrue . . . . .	82
<b>B Sélection de publications</b>	<b>87</b>
B.1 FSS'04 : Reasoning with Partially Ordered Information in a Possibilistic Logic Framework . . . . .	88
B.2 KR'08 : A Lexicographic Inference for Partially Preordered Belief Bases . . . . .	109
B.3 KR'08 : How to Choose Weightings to Avoid Collisions in a Restricted Penalty Logic . . . . .	120
B.4 IJCAI'11 : Interval-Based Possibilistic Logic . . . . .	128
B.5 IJCAI'05 : Revision of Partially Ordered Information : Axiomatization, Semantics and Iteration . . . . .	134
B.6 JLC'09 : Max-Based Prioritized Information Fusion Without Commensurability	140
B.7 CG'10 : A Markovian Process Modelling for Pickomino . . . . .	176







## Introduction

Le but de ce document est de donner un aperçu synthétique de mes différents travaux de recherche depuis 2004, date de mon entrée en fonction en tant que de maître de conférences, poste que j'occupe actuellement à l'université d'Artois. Il a également pour objectif de présenter la démarche commune utilisée pour chacun des problèmes auxquels je me suis confronté.

Ce document se veut un panorama des idées, des travaux, des techniques ainsi que de la démarche utilisés. En revanche, il n'a pas vocation à être une synthèse et n'a donc aucune prétention à l'exhaustivité. Aussi, les travaux de recherche d'autres auteurs présentés tout au long de ce document ont pour seul but de mettre en relief et de contextualiser mes propres travaux. N'étant pas non plus un article de recherche, ce rapport ne contient aucune preuve et seuls quelques exemples sont donnés. Cependant, une sélection de publications, jointe en annexe, permettra au lecteur de se plonger de manière beaucoup plus détaillée dans les travaux présentés ici. Pour le lecteur désireux d'obtenir des détails particuliers sur des travaux n'apparaissant pas dans cette sélection, la plus grande part de mes autres publications est accessible directement depuis ma page web (<http://www.cril.fr/~lagrue>).

Mes travaux s'articulent autour de deux grands thèmes de recherche fédérateurs : le raisonnement à partir de croyances incertaines ainsi que leur dynamique. Un troisième thème de recherche, plus récent et amorcé lors du congé pour recherche et conversion thématique qui m'a été octroyé en 2009, concerne le jeu et plus particulièrement les jeux non-déterministes ou à informations incomplètes. S'ils paraissent connexes, des perspectives reliant tous ces travaux sont données en conclusion de ce rapport.

### 1.1 Écosystème

Mes travaux de recherche ont dans leur très grande majorité été réalisés au sein du Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL, CNRS UMR 8081) et de l'université d'Artois à la

## 1.2 Objets de recherche

---

faculté des sciences Jean Perrin. Ces travaux s'inscrivent majoritairement dans l'axe *Traitement des informations imparfaites, dynamiques, contextuelles et multi-sources* du laboratoire, même si un certains d'entre eux (en particulier ceux concernant le jeu) peuvent également être rattachés à l'axe *Algorithmique pour l'inférence et la prise de décision*. J'ai par ailleurs la plaisir d'animer un thème transversal au sein de ce laboratoire portant sur les jeux.

Ne me reconnaissant pas dans le mythe du chercheur solitaire et misanthrope, tous les travaux que j'ai réalisés ont été le fruit de rencontres, de discussions – parfois animées – d'émulation et de collaborations. Aucun de mes travaux n'aurait abouti sans les collègues chercheurs avec qui j'ai collaboré, qu'ils en soient remerciés. La figure 1.1 présente le nuage des 20 coauteurs avec qui j'ai eu la chance de travailler, ponctuellement ou de façon beaucoup plus récurrente : la taille de la fonte utilisée est proportionnelle au nombre d'articles publiés avec chacun d'entre eux. Ainsi, le « nous » utilisé à partir de la section suivante et tout au long de ce document est bien plus qu'un « nous » d'usage.



Figure 1.1 – Nuage des coauteurs

## 1.2 Objets de recherche

Nos travaux concernent l'Intelligence Artificielle et plus précisément la représentation des connaissances et des raisonnements et le traitement de données incertaines. Mes travaux se concentrent plus particulièrement sur les problèmes d'incomparabilité et d'incommensurabilité. Ils trouvent des applications dans le raisonnement en présence d'incohérences, en dynamique des croyances (fusion, révision, mise-à-jour), en apprentissage, dans les systèmes de gestion d'information géographique (SIG) et dans le domaine des jeux. Permettre à un agent artificiel de raisonner à partir d'informations malgré leurs incohérences et leurs incertitudes a toujours représenté un défi majeur pour l'IA.

### Modèles d'incertitude

Nous nous sommes toujours attelés à fournir plus de flexibilité pour la représentation des connaissances et des raisonnements. Nous nous sommes pour cela intéressés à différents

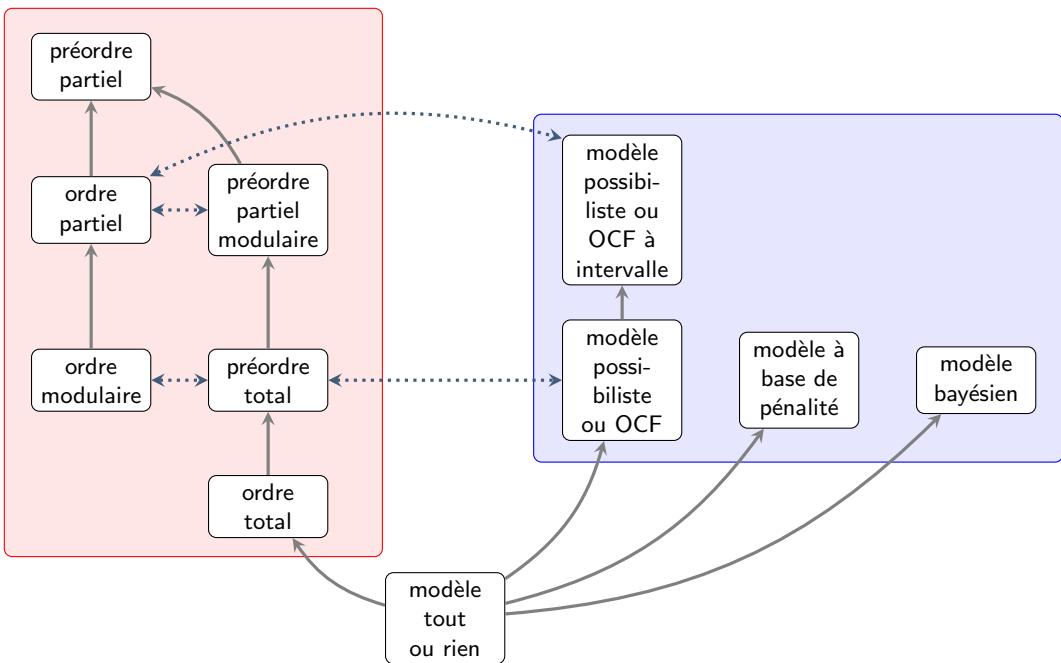


Figure 1.2 – Modèles d'incertitudes utilisés dans le mémoire

modèles d'incertitudes, tant qualitatifs (ou ordinaux) – c'est à dire basé sur des fonctions d'ordre – que quantitatifs – c'est à dire basé sur des nombres.

Les approches quantitatives sont plus fines et permettent de représenter une certaine intensité de l'incertitude ainsi que de gérer des phénomènes de compensation. Néanmoins, elles sont souvent sensibles au choix des pondérations utilisées et elles demandent de disposer d'une quantité d'informations plus importante. Pour contrer ce problème, différentes solutions peuvent être entrevues : apprendre ces poids ou donner encore plus de souplesse (par exemple en permettant l'utilisation d'intervalles). C'est essentiellement sous ce dernier angle que nous avons dirigé nos recherches.

S'ils peuvent sembler plus flexibles au premier abord, les modèles plus ordinaux de l'incertitude possèdent également leurs écueils. Il est par exemple difficile de représenter avec des méthodes purement ordinaires les concepts de « totalement sûr » ou « totalement exclu ». De plus, elles peuvent elles aussi manquer de souplesse. En effet, la plupart des méthodes existantes impose la comparabilité de toutes les informations, ce qui n'est pas forcément possible à obtenir.

La figure 1.2 (inspirée de [Lan03]) présente l'ensemble des modèles d'incertitudes utilisés dans ce mémoire. Les modèles ordinaux sont regroupés en rouge et les modèles plus quantitatifs en bleu sur la figure. Les flèches en pointillés représentent les passages (sous certaines conditions) possibles d'un formalisme à l'autre, tandis qu'une flèche  $A \rightarrow B$  signifie que le

## 1.2 Objets de recherche

---

formalisme *B* est une généralisation du formalisme *A*. Le modèle « tout ou rien » représente des états de croyances à deux niveaux : soit les informations sont totalement sûres, soit on est certain qu'elles sont fausses.

### Du besoin d'incomparabilité

La notion d'ordre a toujours jouer un rôle central dans la formalisation des raisonnements, la représentation des connaissances et leurs dynamiques [Rya92], par exemple dans le raisonnement plausible [KLM90, LM92, Pea90, Bre89], la révision de croyances [KM91], la fusion de croyances [KPP02]. Néanmoins, ces travaux aboutissent finalement pour la plupart à des caractérisations à base de préordres totaux, c'est à dire des préordres où chaque paire d'information est comparable. Cependant, obliger la comparabilité à tout prix induit bien souvent des contraintes supplémentaires sur les objets représentés et peut donc conduire à une certaine distorsion de l'information de départ, distorsion conduisant à des résultats faux ou contre-intuitifs.

Les deux principales notions traitées dans notre activité de recherche et qui en font son originalité sont celles, intimement liées, d'incomparabilité et d'incommensurabilité. Ainsi, nous avons voulu aller au delà de la trichotomie communément acceptée : si l'on considère deux assertions *A* et *B*, *A* est meilleure que *B*, *A* est moins bonne que *B* et enfin *A* et *B* sont tout aussi bonnes. Cette trichotomie peut être réécrite en :

- *A* est plus plausible/préféré/plus prioritaire que *B*
- *B* est préféré plausible/préféré/plus prioritaire que *A*
- *A* et *B* sont indissociables/équivalents/égaux/indifférents/indiscernables

Nous sommes partis du principe que cette trichotomie ne peut pas prendre en compte toutes les subtilités du raisonnement, de la prise de décision ou de la dynamique des croyances : pour décrire fidèlement les croyances d'un agent, l'incomparabilité et l'équivalence ne peuvent pas être confondues. On peut également trouver dans [Cha98] une somme de discussion importante concernant l'incomparabilité.

Le concept d'incomparabilité peut apparaître dans des cas très divers. Elle est également très présente dans le domaine de la gestion des préférences ou elle se confond souvent avec l'indifférence. Nous présentons ici une liste de cas d'incommensurabilité :

- Incomparabilité sur l'impossibilité de choix : « tu préfères ton papa ou ta maman ? ». Cette incomparabilité exprime le fait qu'il est impossible de choisir entre 2 éléments.
- Incomparabilité due à l'incongruité du choix : « Tu préfères avoir des bras de 9 mètres ou toujours être suivi par 30 canards ? »
- Incomparabilité due à une impossibilité de choix de type déontologique ou moral et donc à un refus de choix : « On sauve la maman ou le bébé ? ».
- Incomparabilité due à l'absence de contexte : « Tu préfères du chocolat ou un extincteur ? ».
- Incomparabilité du à l'impossibilité de calcul ou à un grand nombre d'alternatives.

- Incomparabilité du à l'incommensurabilité des concepts considérés : est-il possible de comparer le talent de Mozart et de Michel-Ange ou encore celui de Di Stephano et de Messi ?
- Incomparabilité épistémique : elle représente une réelle ignorance de l'agent qui ne peut déterminer entre deux situations laquelle est la plus plausible, mais qui il n'élimine pas non plus la possibilité que l'une d'elle pourrait s'avérer meilleure que l'autre s'il acquérait de nouvelles informations.

C'est ce dernier cas qui nous intéressera plus particulièrement. dans une perspective de dynamique des croyances, l'indifférence diffère notablement de l'incomparabilité. En effet, si deux informations sont incomparables, celles-ci peuvent être dissociées à l'aide d'une information les contenant toutes les deux ou aucune d'entre elles (principe de séparabilité). Nous montrons dans le chapitre 4 comment ce principe est intimement lié à la révision itérée et au concept de modularité.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux problèmes de commensurabilité. En effet, même si un agent est capable de comparer, voire de quantifier l'incertitude qu'il donne à chacune des informations qu'il possède, lorsque celui-ci doit mettre en commun ces informations, ils ne partagent pas forcément la même échelle (hypothèse de commensurabilité) avec les autres agents. Le cas peut se produire lorsque les sources sont très hétérogènes par exemple. Cette hypothèse de commensurabilité est implicite dans de nombreux travaux utilisant des opérateurs d'agrégations sur les nombres. Aussi, l'un des objectifs de nos travaux a donc été de généraliser les travaux existants en fusion en affaiblissant cette hypothèse de commensurabilité.

### 1.3 Démarche scientifique

Lorsque nous avons abordé les différents problèmes mentionnés précédemment, nous ne nous sommes jamais cantonnés à la production d'une solution *ad hoc*. Ainsi, tant que faire se peut et tel le naturaliste observant le dodo de la figure 1.3, nous essayons de caractériser, de classer et de comparer les différentes méthodes d'inférences, de révision ou de fusion que nous avons proposés en étudiant leur comportement. Ces caractérisations peuvent prendre différentes formes et sont complémentaires.



Figure 1.3 – Sujet d'expérience

## 1.4 Plan de lecture

---

- **Caractérisation au moyen de postulats de rationalité.** Ces postulats représentent des comportements attendus pour une méthode proposée et représentent des propriétés générales, souvent syntaxiques. Nous avons soit proposé des postulats, soit replacé nos travaux dans des contextes déjà existants.
- **Caractérisation au moyen de théorèmes de représentation.** Ces théorèmes de représentation permettent de représenter de façon canonique l'information traitée (typiquement de façon sémantique des ordres sur les mondes) et de modéliser le processus considéré à partir des modifications sur cet ordre.
- **Caractérisation en terme d'ensemble d'éléments compatibles.** Lorsque les méthodes étendent des méthodes connues en apportant soit des incomparabilités, des imprécisions ou encore de l'incommensurabilité, nous nous sommes souvent ramenés à des cas que l'on sait traiter et en considérant des familles d'éléments compatibles avec les généralisations proposées.

D'autre part, nous nous sommes toujours intéressés au côté pratique des différentes méthodes proposées, que ce soit du point de vue du calcul et en particulier de la complexité, soit en proposant des méthodes et des algorithmes constructifs directement utilisables.

- **Calcul de complexité théorique.** Lorsque cela a été possible, nous avons étudié les différentes approches proposées sous l'angle de la complexité théorique.
- **Versions syntaxiques équivalentes et solutions concrètes.** Lorsque les solutions que nous proposons sont basées sur des définitions sémantiques (c'est-à-dire sur des opérations basées sur les interprétations), nous avons également essayé au maximum de proposer une contrepartie syntaxique, basée sur les formules et ainsi de proposer des algorithmes basés sur des tests de cohérences de type SAT ou de recherche de minimaux incohérents. Cette démarche nous permet de bénéficier des avancées sur ces domaines de recherche.

## 1.4 Plan de lecture

Nous présentons enfin la structuration de ce document et par là-même, celle de notre activité de recherche. Les chapitres 2 et 3 présentent nos différentes contributions relatives au raisonnement en présence d'incohérence. Le chapitre 2 présente nos contributions lorsque les croyances d'un agent sont représentées à l'aide de formules simplement ordonnées. Nous montrons en particulier comment des méthodes bien connues de raisonnement en présence d'incohérences peuvent être étendues aux ordres partiels. Le chapitre 3 traite quant à lui le cas de bases de formules pondérées. La section 3.2 présente nos travaux permettant de traiter des imprécisions au niveau des poids associés à chacune des formules, tandis que la section 3.3 se concentre sur la robustesse de la logique des pénalités en proposant différentes méthodes pour éviter les collisions au niveau des pondérations.

Les chapitres 4 et 5 traitent du caractère évolutif des croyances précédemment définies. Ainsi, le chapitre 2 traite le cas de la révision de croyances dans le cas où l'état épistémique d'un agent peut être représenté par un préordre partiel sur les mondes. Il présente un jeu de postulat ainsi qu'un théorème de représentation. Le chapitre 5 s'attelle au problème de fusion

de bases pondérées lorsque celles-ci ne partagent pas d'échelle de référence, c'est-à-dire lorsque les poids sont incommensurables. Il propose différentes solution à ce problème et caractérise chacune tant d'un point de vue de postulat que d'ordre sur les interprétations.

Enfin le chapitre 6 présente nos travaux, beaucoup plus connexes, concernant un jeu non-déterministe à base de lancers de dés utilisant le principe de jeu « stop ou encore ». Il compare différents programmes qui peuvent être regroupés dans deux familles principales : les algorithmes de type Monte Carlo et ceux utilisant des processus décisionnels de Markov.

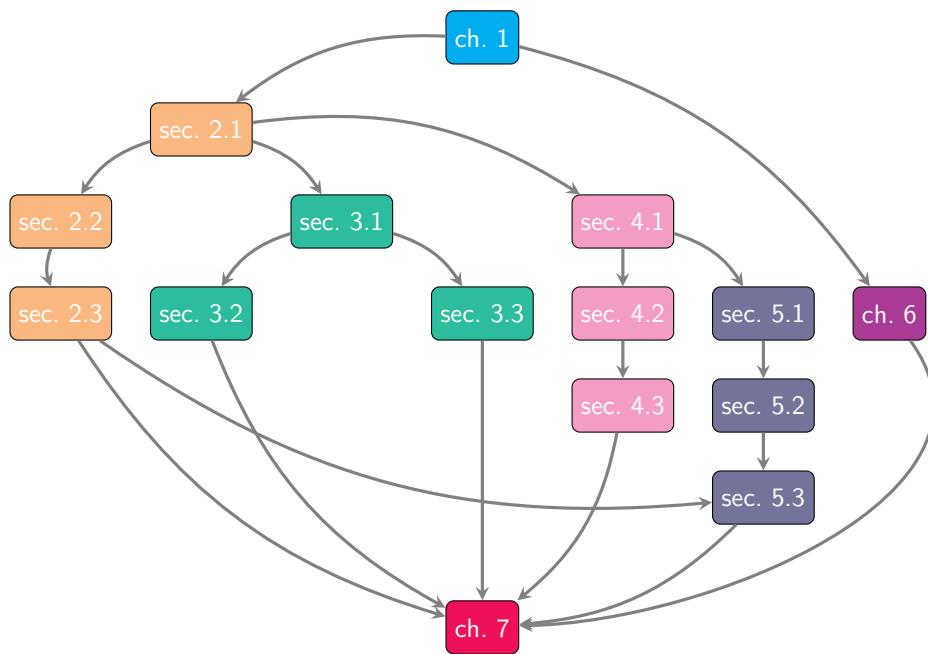
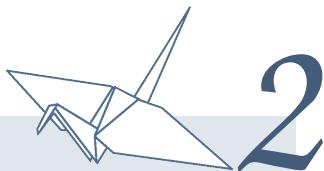


Figure 1.4 – Ordre partiel strict du plan de lecture

La figure 1.4 représente les différents chemins de lecture de ce document. La flèche  $sec\ 3.1 \rightarrow sec\ 3.3$  signifie qu'avant de lire la section 3.3, il est fortement recommandé d'avoir lu la section 3.1. Cette relation est transitive et irréflexive, il s'agit donc d'un ordre strict, mais seulement partiel.

#### **1.4 Plan de lecture**

---



## Raisonnement en présence d'incohérences : le cas ordonné

Le raisonnement en présence d'incohérences est un problème central de l'intelligence artificielle et la notion d'ordre y a toujours joué un rôle prépondérant (voir par exemple le panorama de [Rya92]). Ce type de raisonnement permet par exemple de modéliser des connaissances génériques de type « généralement, quand je lave ma voiture, il pleut » et les déductions, plausibles, qui peuvent en découler. Ainsi, si l'on considère en plus l'information « généralement il ne pleut pas quand je prends mon parapluie », que peut-on déduire de « je lave ma voiture avec mon parapluie dans la poche » ? Si une priorité est donnée à l'une des deux règles (par exemple à la première), on pourra déduire qu'il pleuvra dans ce cas. Cet exemple factice – et quelque peu pessimiste – montre néanmoins l'intérêt de gérer des informations ordonnées.

Nous présentons dans ce chapitre nos contributions dans le cas où les croyances d'un agent, exprimées à l'aide de formules de la logique propositionnelle, sont simplement ordonnées. La plupart des travaux existants se sont focalisés sur le cas où elle l'était totalement, c'est-à-dire le cas où chaque croyance doit pouvoir être comparée à toutes les autres. Ce manque de flexibilité peut induire des conclusions non attendues et par trop aventureuses.

Aussi, nous rappelons dans ce chapitre trois méthodes classiques de raisonnement à partir d'informations totalement ordonnées (*best-out*, *leximin* et *discrimin*) puis nous présentons les généralisations aux ordres partiels que nous avons proposées pour les deux premières. Pour compléter le panel, nous présentons également celles proposées pour *discrimin*. Ces extensions ont pour particularité d'être purement ordinaires, c'est-à-dire qu'elles n'utilisent que la notion d'ordre, sans passer par exemple par un classement. Nous donnons également leur caractérisation d'un point de vue de préordres totaux compatibles. Nous fournissons finalement une étude comparative, en termes d'inférence et de complexité, de ces différentes méthodes d'inférence.

## 2.1 Préliminaires

Nous regroupons dans cette section quelques rappels concernant la logique, les ordres ainsi que la complexité, notions qui pourront être utilisées au fil de ce document. Le propos n'est pas de fournir un descriptif exhaustif des différentes notions abordées mais est essentiellement de fixer les notations.

### 2.1.1 Langage logique

Nous nous plaçons dans la majeure partie de ce document dans le cadre d'un langage propositionnel  $\mathcal{L}$  contenant un nombre **fini** de variables propositionnelles. Nous nous dotons des connecteurs usuels  $\neg$  (négation),  $\vee$  (disjonction),  $\wedge$  (conjonction),  $\rightarrow$  (implication) et  $\leftrightarrow$  (équivalence) et des constantes  $\top$  (tautologie) et  $\perp$  (contradiction). Les lettres minuscules  $a, b, c, \dots$  représentent les variables propositionnelles tandis que les formules de  $\mathcal{L}$  sont représentées par des lettres grecques minuscules  $\varphi, \psi, \mu, \dots$

D'un point de vue sémantique, on notera  $\Omega$  l'ensemble des interprétations basées sur le langage  $\mathcal{L}$ . Une interprétation  $\omega \in \Omega$  satisfaisant (ou vérifiant) une formule  $\varphi$  est notée  $\omega \models \varphi$ . Dans ce cas,  $\omega$  est un modèle de  $\varphi$ . L'ensemble des interprétations qui vérifient une formule  $\varphi$  est noté  $Mod(\varphi)$ . Par extension, on notera  $\varphi \models \psi$  si et seulement si l'ensemble des modèles de  $\varphi$  satisfont  $\psi$ , c'est-à-dire si  $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)$ . Dans ce cas,  $\psi$  est dite conséquence logique de  $\varphi$ . Deux formules  $\varphi$  et  $\psi$  sont équivalentes (noté  $\varphi \equiv \psi$ ) si et seulement si  $Mod(\varphi) = Mod(\psi)$ . À nouveau par extension, si  $\Sigma$  est un ensemble de formules,  $\Sigma \models \psi$  si et seulement si  $\forall \varphi \in \Sigma : \varphi \models \psi$ .

Un ensemble de formules  $\Sigma$  est dit cohérent s'il existe une interprétation qui satisfait toutes les formules de  $\Sigma$ . Inversement, un ensemble de formules  $\Sigma$  est dit incohérent s'il n'existe pas d'interprétation qui satisfait toutes les formules de  $\Sigma$ .

D'un point de vue syntaxique, une formule  $\varphi$  est dite conséquence valide d'un ensemble de formules  $\Sigma$ , noté  $\Sigma \vdash \varphi$ , si et seulement si il existe une preuve de  $\varphi$  à partir de  $\Sigma$ . De façon équivalente, il suffit de prouver que  $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$ . L'ensemble des conclusions qui peuvent être obtenues à partir d'un ensemble de formules  $\Sigma$ , appelé fermeture déductive et noté  $Cn(\Sigma)$ , est défini par  $Cn(\Sigma) = \{\varphi : \Sigma \vdash \varphi\}$ . Une formule  $\varphi \in \Sigma$  est dite sous-sommée si  $Cn(\Sigma) = Cn(\Sigma \setminus \{\varphi\})$ , en d'autres termes, si  $\varphi$  peut être déduite de  $\Sigma \setminus \{\varphi\}$ . En logique propositionnelle,  $\models$  et  $\vdash$  sont équivalentes.

### 2.1.2 Complexité computationnelle

Nous rappelons succinctement certaines classes de complexité utilisées dans ce document. Pour plus de détails, on pourra par exemple se référer à l'ouvrage de référence de Papadimitriou [Pap94].

La classe **P** est la classe des langages reconnaissables par une machine de Turing *déterministe* en temps polynomial par rapport à la taille de la donnée. La classe **NP** est quant à elle la classe des langages reconnaissables par une machine de Turing *non-déterministe* en temps

polynomial par rapport à la taille de la donnée. La classe **co-NP** rassemble l'ensemble des problèmes complémentaires à la classe NP.

La hiérarchie polynomiale, étendant les classes précédentes, est définissable à l'aide de machines de Turing avec oracle, c'est-à-dire des machines de Turing disposant d'une boîte noire capable de résoudre un problème de décision en une seule opération. L'écriture  $A^B$  dénote la classe des machines de complexité A augmentées d'un oracle de complexité B. La hiérarchie polynomiale est ainsi composée de :

- $\Delta_2^P = P^{NP}$  est la classe des langages reconnaissables en temps polynomial par une machine de Turing déterministe munie d'oracles NP.
- $\Theta_2^P = \Delta_2^P[\mathcal{O}(\log n)]$  est le sous-ensemble de  $\Delta_2^P$  tel que le nombre d'oracles NP soit borné par une fonction logarithmique de la taille de la donnée.
- $\Sigma_2^P = NP^{NP}$  est la classe des langages reconnaissables en temps polynomial par une machine de Turing non-déterministe munie d'oracles NP. L'ensemble des problèmes complémentaires à  $\Sigma_2^P$  est noté  $\Pi_2^P = \text{co-}\Sigma_2^P$ .
- Plus généralement,  $\Sigma_{i+1}^P = NP^{\Sigma_i^P}$  et  $\Pi_{i+1}^P = \text{co-}\Sigma_{i+1}^P$

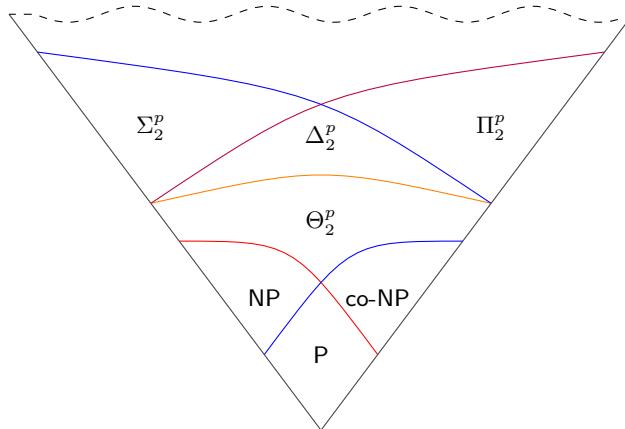


Figure 2.1 – Inclusion des classes de complexité

L'inclusion de ces différentes classes est donnée par la figure 2.1. Par exemple, P est à la fois contenu dans NP et dans co-NP.

Par ailleurs, d'autres classes de complexité peuvent être citées, incluant toutes celles précédemment citées et prenant comme point de vue l'espace nécessaire à la reconnaissance du langage : **PSPACE** est l'ensemble des langages reconnaissable par une machine de Turing (déterministe ou non) en utilisant un espace polynomial, tandis que **EXPSPACE** est l'ensemble des langages reconnaissable par une machine de Turing (déterministe ou non) en utilisant un espace exponentiel. Bien sûr  $\text{PSPACE} \subseteq \text{EXPSPACE}$ .

### 2.1.3 Ordres

Cette section fixe les notations concernant les relations de (pré)ordres qui seront utilisées dans ce document.

Soit un ensemble **fini**  $E$  et  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$ . Alors  $\mathcal{R}$  est un :

- **ordre (partiel)** :  $\mathcal{R}$  est réflexive ( $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$ ), transitive ( $\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$  implique  $x\mathcal{R}z$ ) et antisymétrique ( $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$  implique  $x = y$ ).
- **préordre (partiel)**, généralement noté  $\leq$  :  $\mathcal{R}$  est réflexive et transitive.
- **ordre strict (partiel)**, généralement noté  $<$  :  $\mathcal{R}$  est transitive et asymétrique ( $x\mathcal{R}y$  implique non( $y\mathcal{R}x$ )).
- **préordre total**, généralement noté  $\leq$  :  $\mathcal{R}$  est un préordre vérifiant la propriété de totalité ( $\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y$  ou  $y\mathcal{R}x$ )
- **ordre strict total**, généralement noté  $<$  :  $\mathcal{R}$  est transitive, totale et asymétrique.

Étant donné un préordre  $\leq$ , sa contrepartie stricte peut être définie par  $x < y$  si et seulement si on a  $x \leq y$  et pas  $y \leq x$ . L'équivalence associée à  $\leq$ , notée  $\approx$ , est définie quant à elle comme  $x \approx y$  si et seulement si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ . De même, deux éléments sont incomparables, noté  $x \sim y$  si et seulement si on n'a ni  $x \leq y$ , ni  $y \leq x$ . Ces différentes notations sont résumées par le tableau 2.1.

nom	symbole	définition
préordre	$x \leq y$	$x \leq y$
relation réciproque	$x \geq y$	$y \leq x$
équivalence	$x \approx y$	$x \leq y$ et $y \leq x$
incomparabilité	$x \sim y$	$x \not\leq y$ et $y \not\leq x$
ordre strict associé	$x < y$	$x \leq y$ et $y \not\leq x$

Table 2.1 – Résumé des notations

Nous reprenons également la définition **d'ordre modulaire** issue de [LM92] et qui étend la définition de modularité des treillis. Un ordre modulaire est un ordre strict tel que l'une de ces conditions (équivalentes pour un ordre strict) est satisfaite :

- (i)  $\forall x, y, z \in E$  si  $x \not\leq y$ ,  $y \not\leq z$  et  $z < x$  alors  $z < y$ .
- (ii)  $\forall x, y, z \in E$  si  $x < y$  alors on a soit  $z < y$ , soit  $x < z$ .
- (iii)  $\forall x, y, z \in E$  si  $x \not\leq y$ ,  $y \not\leq z$  alors  $x \not\leq z$ .
- (iv) Il existe un préordre total  $\leq$  sur  $E$  tel que  $\forall x, y \in E$   $x < y$  implique  $x \leq y$ .

Il n'est pas toujours possible de définir un ordre strict total à partir d'un préordre total. En revanche, la propriété (iv) montre qu'un ordre modulaire peut être vu comme la contrepartie stricte d'un préordre total. Nous généraliserons cette notion de modularité dans la section 4.2.2.

Les éléments minimaux de  $E$  pour  $\leq$  (et sa contrepartie stricte  $<$ ) sont définis classiquement ainsi :

$$\text{Min}(E, \leq) = \{x \in E, \nexists y \in E : y < x\}$$

Il peut être noté que comme l'ensemble  $E$  est fini, l'ensemble des éléments minimaux existe toujours. Par abus de langage  $\min_E$  désigne l'élément minimal de  $E$  lorsque les éléments minimaux sont réduits à un singleton et que l'ordre associé à  $E$  est évident.

Nous présentons enfin la notion de préordre total compatible d'un préordre partiel. Intuitivement, un préordre total est compatible avec un préordre partiel s'il étend ce dernier.

*Définition* 2.1.1. Un préordre total  $\leq$  est dit **compatible** avec un préordre  $\leq$  si et seulement si  $\forall x, y \in E : x \leq y$  implique  $x \leq y$ . La famille des préordres compatibles avec  $\leq$  est notée  $Comp(\leq)$ .

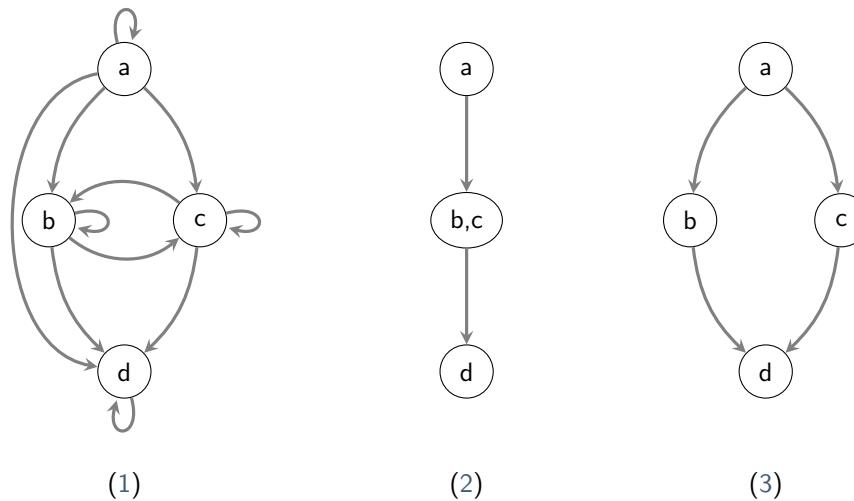


Figure 2.2 – Représentations graphiques d'ordres

La Figure 2.2 illustre ces concepts. Le graphe (1) représente un préordre total  $\leq$ , le plus petit élément étant  $d$  et le plus grand  $a$ , la flèche  $b \leftarrow a$  signifiant  $a \leq b$ . Pour plus de simplicité, les ordres seront représentés de façon équivalente à la façon du graphe (2) (la réflexivité et la transitivité ne sont pas représentées). L'ordre représenté par le graphe (3) représente l'ordre modulaire associé à (2). Inversement, (2) peut être vu comme un préordre total compatible avec (3).

#### 2.1.4 Le système $P$

Un ensemble de propriétés a été proposé par Kraus, Lehmann et Magidor dans [KLM90] afin de caractériser le raisonnement non-monotone et de capturer des inférences du type « généralement les  $\alpha$  sont des  $\beta$  » ou encore « en présence de  $\alpha$  je préfère déduire  $\beta$  ». À cette fin, ils introduisent une relation d'inférence plausible, noté  $\sim$ , affaiblissement de la déduction classique  $\vdash$ . L'ensemble de ces propriétés forme le système  $P$  :

## 2.1 Préliminaires

---

$$\begin{array}{c}
 \frac{\alpha \vdash \alpha}{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta, \alpha \vdash \gamma} \quad (\text{Réflexivité}) \\
 \frac{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta, \alpha \vdash \gamma}{\beta \vdash \gamma} \quad (\text{Équivalence logique à gauche}) \\
 \frac{\alpha \vdash \beta, \gamma \vdash \alpha}{\gamma \vdash \beta} \quad (\text{Affaiblissement à droite}) \\
 \frac{\alpha \wedge \beta \vdash \gamma, \alpha \vdash \beta}{\alpha \vdash \gamma} \quad (\text{Coupure}) \\
 \frac{\alpha \vdash \gamma, \beta \vdash \gamma}{\alpha \vee \beta \vdash \gamma} \quad (\text{Ou}) \\
 \frac{\alpha \vdash \beta, \alpha \vdash \gamma}{\alpha \wedge \beta \vdash \gamma} \quad (\text{Monotonie prudente})
 \end{array}$$

La propriété de réflexivité signifie qu'une formule est conséquence plausible d'elle-même. L'équivalence logique à gauche indique que si 2 formules  $\alpha$  et  $\beta$  sont équivalentes au sens de la logique classique, on peut substituer  $\alpha$  par  $\beta$  dans la partie gauche d'une conséquence plausible qui ne dépend donc pas de la syntaxe des formules classiques.

La propriété d'affaiblissement à droite est à mettre en parallèle de la précédente. Si on accepte  $\alpha$  comme conséquence plausible de  $\gamma$  alors il faut accepter les conséquences logiques de  $\alpha$  comme plausibles. Cette fois, c'est la partie droite de l'inférence plausible qui ne dépend pas de la syntaxe des formules classiques.

La propriété de coupure dit que si  $\gamma$  est conséquence plausible de  $\alpha$  et  $\beta$  et que  $\beta$  est conséquence plausible de  $\alpha$  alors on peut inférer  $\gamma$  directement à partir de  $\alpha$ . La propriété du « ou » exprime le fait que si  $\alpha$  infère plausiblement  $\gamma$  et  $\beta$  infère plausiblement  $\gamma$  alors la disjonction de  $\alpha$  et  $\beta$  infère aussi plausiblement  $\gamma$ .

Enfin, la propriété de monotonie prudente affaiblit la monotonie de la logique classique, si  $\alpha$  implique  $\gamma$  alors  $\alpha \wedge \beta$  implique  $\gamma$ . Ici, pour inférer plausiblement  $\gamma$  de  $\alpha \wedge \beta$ , il faut que  $\beta$  soit conséquence plausible de  $\alpha$ .

Notons qu'à partir de ces propriétés, on peut dériver cette autre propriété stipulant que si  $\beta$  et  $\gamma$  peuvent plausiblement être déduit de  $\alpha$ , alors leur conjonction peut également l'être.

$$\frac{\alpha \vdash \beta, \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \wedge \gamma} \quad (\text{Et})$$

Le système  $P$  est un système sain mais très prudent, parfois trop. Il est sujet au problème de non-pertinence, *irrelevance problem* en Anglais. Ce problème s'énonce ainsi : si  $\gamma$  est conséquence plausible d'une formule  $\alpha$  et si on n'a aucune information permettant de lier  $\gamma$  et  $\beta$  alors on ne pourra pas déduire  $\delta$  à partir de  $\alpha$  et  $\beta$ . Typiquement, si vous déduisez que les oiseaux volent, vous ne déduirez pas forcément que les oiseaux rouges volent. Il a été proposé pour résoudre ce problème d'utiliser une nouvelle règle dite de monotonie rationnelle :

$$\frac{\alpha \vdash \delta, \neg(\alpha \vdash \neg\beta)}{\alpha \wedge \beta \vdash \delta} \quad (\text{Monotonie rationnelle})$$

Cette règle signifie qui si à partir d' $\alpha$  on déduit  $\delta$  et si  $\alpha$  n'implique pas,  $\neg\beta$  alors de  $\alpha$  et  $\beta$  on peut déduire  $\delta$ . L'ensemble des règles système  $P$  auquel on ajoute la règle de monotonie

rationnelle forme le système  $R$ . Remarquons enfin que si cette méthode permet de résoudre le problème de non-pertinence, le système  $R$  peut parfois se révéler trop aventureux.

## 2.2 Croyances totalement ordonnées et représentation par classement

Nous discutons ici du cas où les croyances individuelles d'un agent sont représentées au moyen d'un ensemble fini de formules propositionnelles *totalement ordonnées*  $K = (\Sigma, \leq_{\Sigma})$ . La relation  $\varphi \leq_{\Sigma} \psi$  signifie que l'agent considère que  $\varphi$  est au moins aussi plausible ou prioritaire que  $\psi$ . L'ensemble de formules  $\Sigma$  pouvant être conflictuel, il est possible d'utiliser l'information supplémentaire contenue dans  $\leq_{\Sigma}$  pour restaurer la cohérence et établir des inférences tout en évitant la trivialisation. À cette fin, les formules de  $\Sigma$  peuvent être classées en fonction de  $\leq_{\Sigma}$ , et ainsi former une partition de  $\Sigma$  :

$$\Sigma = S_1 \cup \dots \cup S_n \text{ telle que } \forall \varphi \in S_i, \psi \in S_j : i \leq j \text{ ssi } \varphi \leq_{\Sigma} \psi$$

Dans ce type de classement<sup>1</sup>, l'indice le plus petit regroupe les formules les plus importantes : ce sont les « premières », celles qui sont de rang 1. La figure 2.3 illustre le passage d'un préordre total à un classement. La jauge représentée au milieu, et utilisée dans la plupart des schémas de ce document, permet de reconnaître d'un coup d'œil l'ordre d'importance. Ce classement en lui-même n'inclut pas de notion d'intensité, le deuxième n'étant pas deux fois moins important que le premier, mais apporte une facilité de notation et de représentation du préordre total et des inférences présentées dans cette section.

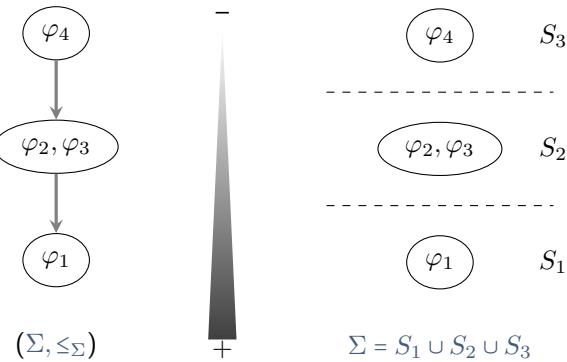


Figure 2.3 – D'un préordre à un classement

Le problème qui nous intéresse maintenant est de savoir quoi faire lorsque l'ensemble  $\Sigma$  est incohérent. Quand les formules initiales sont cohérentes, les inférences proposées doivent coïncider avec l'inférence propositionnelle classique. Dans le cas contraire, nous nous ramenons à celle-ci en générant un ensemble de sous-bases cohérentes « préférées<sup>2</sup> » (cette « préférence »

1. *Ranking* en anglais, on trouvera également le terme de stratification dans la littérature.

2. Ici, le terme préférence est à prendre dans son sens le plus large et est synonyme de « plus prioritaire ».

## 2.2 Croyances totalement ordonnées et représentation par classement

---

dépendant du préordre initial) et en appliquant la déduction classique à partir de ces dernières. Les définitions de conséquence à partir de ces sous-bases cohérentes préférées peuvent être regroupées dans trois familles dépendant de trois grands principes que l'on peut trouver par exemple dans [PL92, CLS95, BDP93] :

- $\varphi$  est une conséquence sceptique de  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  si elle est conséquence logique de toutes les sous-bases cohérentes préférées (principe universel) ;
- $\varphi$  est une conséquence crédule de  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  si elle est conséquence logique d'au moins une sous-base cohérente préférée (principe existentiel) ;
- $\varphi$  est une conséquence argumentative de  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  si elle est conséquence logique d'au moins une sous-base cohérente préférée et  $\neg\varphi$  n'est pas conséquence logique d'aucune sous-base cohérente préférée (principe argumentatif).

Nous nous plaçons principalement dans ce document dans le cadre de conséquences sceptiques.

Nous avons besoin de définir différents ordres sur les sous-bases cohérentes. Définissons pour cela  $bo(C) = \min\{i : \varphi \notin C \text{ et } \varphi \in S_i\}$  qui représente le rang de la formule la plus importante de  $\Sigma$  qui n'appartient pas au sous-ensemble cohérent  $C$ . Nous ne définissons ici que les composantes strictes de ces différents ordres, seuls les éléments minimaux étant utilisés pour l'inférence. On pourra se référer par exemple à [CMLLM04] pour leurs contreparties non strictes. La relation  $\subset$  représente ici l'inclusion ensembliste stricte.

*Définition* 2.2.1 (Ordres sur les sous-bases cohérentes). Soit deux sous-ensembles cohérents  $C, C' \in \Sigma$  et un classement  $\Sigma = S_1 \cup \dots \cup S_n$  :

- Ordre **best-out** [BCD<sup>+</sup>93] :  $C <_{bo} C' \quad \text{ssi } bo(C') < bo(C)$
- Ordre **discrimin** [Bre89, CRS92] :  $C <_{disc} C' \quad \text{ssi} :$ 
  - (i)  $\exists S_i : (C' \cap S_i) \subset (C \cap S_i)$
  - (ii)  $\forall S_j \text{ tel que } j < i : C' \cap S_i = C \cap S_i$
- Ordre **leximin** [BCD<sup>+</sup>93, Leh95] :  $C <_{lex} C' \quad \text{ssi} :$ 
  - (i)  $\exists S_i : |C' \cap S_i| < |C \cap S_i|$
  - (ii)  $\forall S_j \text{ tel que } j < i : |C' \cap S_i| = |C \cap S_i|$

L'ordre *best-out* ordonne les sous-bases cohérentes en fonction de la formule la plus importante qu'elles ne contiennent pas : plus celle-ci est importante, moins la sous-base est considérée. Les ordres *discrimin* et *leximin* sont deux ordres lexicographiques, le premier étant basé sur un critère d'inclusion et le second sur un critère de cardinalité. Les sous-ensembles cohérents sont ordonnés en fonction du résultat du critère sur le rang le plus important, puis en cas d'égalité sur le deuxième, etc. Les ordres induits par *best-out* et *leximin* sont des ordres modulaires, tandis que *discrimin* est un ordre partiel strict.

Ces relations établies, il est possible de définir une relation d'inférence basée sur le principe universel pour chacun de ces ordres. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des sous-ensembles cohérents de  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} (\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{bo} \varphi &\quad \text{ssi } \forall C \in \text{Min}(\mathcal{C}, \subset_{bo}) : C \vdash \varphi \\ (\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{disc} \varphi &\quad \text{ssi } \forall C \in \text{Min}(\mathcal{C}, \subset_{disc}) : C \vdash \varphi \\ (\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{lex} \varphi &\quad \text{ssi } \forall C \in \text{Min}(\mathcal{C}, \subset_{lex}) : C \vdash \varphi \end{aligned}$$

Le tableau suivant résume la complexité de chacune des opérations d'inférence. Le cas de *discrimin* est sans surprise. En effet, dans le cas de classements ne contenant qu'un seul élément, *discrimin* correspond à la recherche d'ensembles maximaux cohérents. En revanche, les inférences basées sur les critères *best-out* et *leximin* restent à des complexités abordables, puisque  $\vdash_{bo}$  (resp.  $\vdash_{lex}$ ) ne nécessite qu'un nombre d'appels logarithmique (resp. linéaire) à un oracle SAT.

inférence	complexité	référence
$\vdash_{bo}$	$\Theta_2^p$ -complet	[Neb98, Lan00]
$\vdash_{disc}$	$\Pi_2^p$ -complet	[Neb98]
$\vdash_{lex}$	$\Delta_2^p$ -complet	[CLSS98]

Table 2.2 – Complexité des inférences présentées

Enfin la figure suivante classe les inférences proposées en fonction de leur productivité :  $\vdash_{bo} \rightarrow \vdash_{disc}$  signifie par exemple que toutes les conclusions de  $\vdash_{bo}$  sont également des conclusions de  $\vdash_{disc}$ . Pour plus de détails sur les propriétés satisfaites du point de vue du raisonnement non-monotone et en particulier des règles du Système P [KLM90] pour chacune de ces relations, on pourra se référer par exemple à l'étude complète de [CLSS98]. Pour résumer succinctement, les inférences *leximin* et *best-out* vérifient le Système *R*, tandis que l'inférence basée sur *discrimin* ne vérifie que le Système *P*.

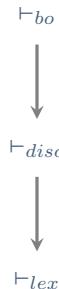


Figure 2.4 – Relation de productivité des inférences

Néanmoins, les méthodes proposées ici reposent toutes sur un classement et donc sur un préordre total pour être définies : elles nécessitent de passer par un classement. Aussi, nous présentons dans la section suivante différentes généralisations de ces méthodes pour traiter le cas purement ordinal, sans passer par une stratification, et leurs généralisations aux ordres partiels.

## 2.3 Généralisations aux ordres partiels

Nous présentons maintenant différentes généralisations des trois méthodes proposées dans la section précédente lorsque l'agent ne dispose que de croyances partiellement ordonnées. Les

## 2.3 Généralisations aux ordres partiels

---

premières d'entre elles étendent directement les inférences *best-out*, *discrimin* et *leximin* en utilisant le concept d'ordre compatible présenté par la définition 2.1.1. Puis nous présentons des extensions totalement ordinaires, basées sur des *comparateurs*, relations permettant d'ordonner des ensembles d'éléments à partir d'un préordre sur les éléments eux-mêmes. Enfin nous étudions comparativement ces inférences.

### Inférence basée sur les compatibles

Une première définition tout à fait naturelle pour l'extension aux ordres partiels consiste donc à considérer l'ensemble des déductions qui peuvent être réalisées pour chacune des inférences présentées à partir de la famille des préordres totaux compatibles. Les principes *universel*, *existentiel* et *argumentatif* peuvent s'appliquer ici également. Nous nous placerons néanmoins toujours dans le principe universel afin de garantir des déductions les moins aventureuses et souffrant le moins de contestations. Aussi nous pouvons définir de façon très naturelle des extensions aux ordres partiels :

$$(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_m^{Comp} \varphi \text{ ssi } \forall \leq_\Sigma \in Comp(\leq_\Sigma) : (\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_m \varphi \text{ avec } m \in \{bo, disc, lex\}$$

Les inférences ainsi définies sont bien des généralisations du cas totalement ordonné, puisque dans cette éventualité il n'existe qu'un seul préordre compatible (lui-même) et les définitions des inférences coïncident.

### Inférences basées sur les comparateurs

Nous présentons maintenant des contreparties ordinaires des inférences présentées dans la section précédente et en particulier leur généralisation aux ordres partiels où il n'est plus possible de générer simplement un classement. Ces méthodes ne peuvent donc utiliser que la relation d'ordre de départ  $\leq_\Sigma$  de  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$ .

Le point central de ce problème est la possibilité de classer les ensembles cohérents de formules à partir d'un ordre sur les formules. De nombreuses méthodes ont été proposées pour classer des ensembles d'éléments à partir d'un préordre sur les éléments (on peut en trouver un panorama très complet dans l'article de microéconomie [BBP04]). Nous nous focaliserons sur les suivantes car elles sont des généralisations des 3 méthodes d'inférence présentées dans la section précédente :

- $X \triangleleft_{sbo} Y$  **ssi**  $\exists y \notin Y, \forall x \notin X$  tel que  $y < x$
- $X \triangleleft_{wbo} Y$  **ssi**  $\forall x \notin X, \exists y \notin Y$  tel que  $y < x$
- $X \triangleleft_{elit} Y$  **ssi**  $\exists x \in X \setminus Y, \forall y \in Y \setminus X$  tel que  $x < y$
- $X \triangleleft_{demo} Y$  **ssi**  $\forall y \in Y \setminus X, \exists x \in X \setminus Y$  tel que  $x < y$

Les comparateurs *sbo* (pour *strong best-out*) et *wbo* (pour *weak best-out*) ont été proposés dans [BCD<sup>+</sup>93] (on peut également trouver des références à *wbo* dans [Hal97]) et nous les avons plus particulièrement étudiés dans le cas partiel dans [FSS'04]. Dans le premier cas, un ensemble  $X$  est préféré à un autre  $Y$  s'il existe un élément n'appartenant pas à  $Y$  qui soit préféré à tous les éléments n'appartenant pas à  $X$ , tandis que dans le second,  $X$  est préféré

si quelque soit l'élément  $n$  n'appartenant pas à  $X$ , il existe un élément préféré qui n'appartient pas à  $Y$ .

Les comparateurs *elit* (pour élitiste, proposé dans [CRS92]) et *demo* (pour démocratique, proposé également dans [CRS92], mais aussi dans [Gef92]) fonctionnent de la même façon si ce n'est qu'ils ne considèrent pas leurs éléments communs.

Pour définir le dernier comparateur, nous avons besoin de construire une partition de  $E$  basée sur la relation d'équivalence  $\approx$  dérivant de  $\leq$ . Ainsi, nous définissons  $E = S_1^\approx \cup S_2^\approx \cup \dots \cup S_n^\approx$  telle que :

- (i)  $\forall i, 1 \leq i \leq n, \forall x, y \in S_i^\approx : x \approx y$
- (ii)  $\forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $i \neq j : \forall x \in S_i^\approx, \forall y \in S_j^\approx : x \not\approx y$

Une classe d'équivalence  $S_i^\approx$  sera préférée à une classe d'équivalence  $S_j^\approx$ , noté  $S_i^\approx \in S_j^\approx$ , si et seulement si  $\exists e \in S_i^\approx, \exists e' \in S_j^\approx$  tel que  $e < e'$ . Ceci nous permet de définir le dernier comparateur,  $\triangleleft_\approx$ , que nous avons proposé dans [KR'08b].

- $X \triangleleft_\approx Y$  **ssi**  $\forall S_i^\approx$  tel que  $|S_i^\approx \cap Y| > |S_i^\approx \cap X|$ ,  $\exists S_j^\approx$  tel que  $|S_j^\approx \cap X| > |S_j^\approx \cap Y|$  et  $S_j^\approx \cap X \in S_i^\approx \cap Y$

Celui-ci exprime le fait qu'un ensemble est préféré à un autre ensemble si pour toute classe d'équivalence où les formules de  $Y$  sont majoritaires par rapport aux formules de  $X$ , il existe une autre classe d'équivalence préférée où  $X$  est cette fois majoritaire.

La définition des inférences associées à chacun des comparateurs se fait de la manière suivante :

$$(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_m \text{ssi } \forall C \in \text{Min}(\mathcal{C}, \triangleleft_m) : C \vdash \varphi \text{ (avec } m \in \{sbo, wbo, elit, demo, \approx\})$$

### Étude comparative et propriétés

Tout d'abord, il peut être noté que  $\vdash_{sbo}$ ,  $\vdash_{wbo}$  et  $\vdash_{bo}^{Comp}$  sont des généralisations de  $\vdash_{bo}$  : dans le cas où les informations sont totalement ordonnées, toutes ces méthodes d'inférences sont équivalentes et donnent les mêmes résultats que la logique possibiliste [BCD<sup>+</sup>93]. Il en va de même avec  $\vdash_{elit}$ ,  $\vdash_{demo}$  et  $\vdash_{disc}^{Comp}$  pour  $\vdash_{disc}$  et avec  $\vdash_\approx$  et  $\vdash_{lex}^{Comp}$  pour  $\vdash_{lex}$ . Néanmoins, leurs comportements divergent dans le cas de préordres partiels, comme le résume la figure 2.5.

Celle-ci représente les relations entre toutes les inférences définies dans cette section lorsque les croyances de l'agent ne sont que partiellement ordonnées (cas de gauche) ou bien totalement ordonnées (cas de droite) et compile un certain nombre de résultats de [FSS'04, CLSS98, BY09, Yah09]. Dans le cas partiel, la relation la moins productive est la relation basée sur le *strong best-out*, tandis que les relations  $\vdash_{elit}$  et  $\vdash_{wbo}$  sont incomparables. La relation la plus productive est  $\vdash_{lex}^{Comp}$ . On peut également remarquer que seule l'inférence basée sur le *weak best-out* est équivalente avec sa contrepartie basée sur les préordres totaux compatibles, les autres étant toutes moins productives que leurs contreparties respectives.

En revanche, dans le cas total, on assiste à l'aplatissement attendu dans les trois grandes classes d'inférences présentées, puisque les méthodes purement ordinaires et celles basées sur les préordres totaux compatibles sont des généralisations.

### 2.3 Généralisations aux ordres partiels

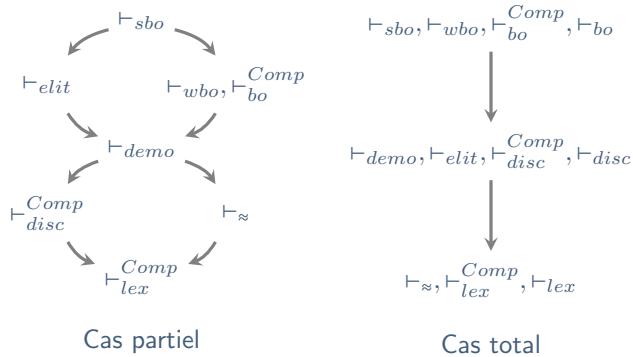


Figure 2.5 – Relation de productivité des inférences proposées

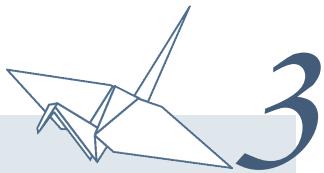
D'un point de vue du raisonnement non-monotone, dans le cas partiel, les différentes inférences vérifient toutes le système  $P$ . En revanche elles violent toutes la monotonie rationnelle. Enfin, il peut être remarqué que si nous avons pris le point de vue des bases cohérentes préférées, mais que des contreparties sémantiques (c'est-à-dire travaillant directement sur les interprétations), basées sur les mêmes comparateurs, ont également été présentées. En particulier, nous avons établi des équivalences sémantiques dans les cas *best-out* et *leximin* dans [FSS'04] et [KR'08b].

Les complexités associées à chacune des inférences présentées sont récapitulées dans le tableau 2.3 et proviennent de [Yah09, BY09, JELIA'10]. Les inférences proposées se trouvent au deuxième niveau de la hiérarchie polynomiale, le doute subsistant néanmoins pour  $\vdash_{sbo}$  et  $\vdash_{wbo}$  dont la complexité exacte reste un problème ouvert.

inférence	complexité
$\vdash_{\approx}$	$\Pi^P$ -complet
$\vdash_{lex}^{Comp}$	$\Pi_2^P$ -complet
$\vdash_{demo}$	$\Pi_2^P$ -complet
$\vdash_{disc}^{Comp}$	$\Pi_2^P$ -complet
$\vdash_{sbo}$	dans $\Pi_2^P$ et $\Theta_2^P$ difficile
$\vdash_{wbo}$	dans $\Pi_2^P$ et $\Theta_2^P$ difficile

Table 2.3 – Complexité des inférences présentées : cas partiel

Signalons toutefois que malgré ces résultats de complexité somme toute décevants, ces méthodes ont été utilisées dans des applications réelles. Tout d'abord, nous avons couplé certaines d'entre elles à un système d'information géographique (SIG) pour être utilisées pour de la planification urbaine [DEXA'04]. Mais surtout, ces différentes méthodes ont été testées et appliquées en pratique avec succès dans le cadre d'une application archéologique en utilisant des codages basés sur les  $R$ -ensembles [Sé10, SDP11]. Enfin, de récent travaux sur la recherche pratique et efficace de noyaux minimaux incohérents [GMP07] devraient pouvoir être adaptés afin de traiter efficacement des formules propositionnelles partiellement ordonnées.



## Raisonner en présence d'incohérences : le cas pondéré

Nous présentons dans cette section nos contributions pour le raisonnement en présence d'incohérences lorsque les informations sont *pondérées* et non plus simplement ordonnées. Ce type d'information est plus riche qu'un simple ordre, en effet ces pondérations permettent par exemple de représenter des notions d'intensité, une information pouvant désormais être considérée deux fois plus plausible qu'une autre. De plus, suivant les méthodes considérées, certaines formes de compensation peuvent être utilisées. Dans les méthodes décrites dans le chapitre précédent, ne pas considérer les informations les plus prioritaires est quasi rédhibitoire pour les ensembles cohérents concernés.

Pour cela, nous considérons comme pondération des poids entiers, positifs comme par exemple dans [Mey01]. Ils permettent, dans le cas fini qui nous intéresse ici, de capturer la logique possibiliste [DLP94], la logique de pénalités [Pin91], ainsi qu'un sous-ensemble des fonctions ordinaires conditionnelles (OCF) [Spo88]. Ils permettent également de capturer les méthodes *purement* ordinaires présentées dans le précédent chapitre. Le principal intérêt de cette méthode est qu'il est souvent plus intuitif pour un expert de représenter la plausibilité qu'il donne à chacune des informations qu'il veut modéliser, en se référant par exemple à des coûts.

Nous rappelons tout d'abord le cadre dans lequel nous nous situons, puis nous montrons comment étendre le formalisme basé sur l'opérateur max (et donc la logique possibiliste) à des intervalles [IJCAI'11], afin de traiter une certaine forme d'imprécision sur les poids considérés, toujours dans le but d'offrir le plus de flexibilité à la représentation des connaissances. En particulier, nous étendons les différentes notions habituellement utilisées et montrons que cette extension ne se révèle pas plus chère d'un point de vue calculatoire. Enfin nous nous intéressons à la logique des pénalités sous un angle original, la prévention des collisions et montrons comment éviter celles-ci à l'aide d'une sémantique majoritaire et de familles de pondérations particulières, les  $\sigma$ -pondérations [KR'08b, I3'09a].

### 3.1 Bases pondérées

Pour une plus grande cohérence dans ce document, nous allons utiliser un formalisme commun de représentation des connaissances, que l'on peut trouver par exemple dans [Mey01], permettant à la fois de retrouver la logique des pénalités [Pin91, DdSCLS94] (également étudiée sous d'autres aspects dans [CEL06, UW08]), les fonctions conditionnelles ordinaires restreintes aux entiers positifs [Spo88], la logique possibiliste [DLP94] ainsi que les représentations par polynômes [Pap01, Fl'02].

Une base pondérée  $B$  est un ensemble de formules pondérées de la forme  $B = \{\langle \varphi_i, r_i \rangle\}$ . Nous ne considérons ici comme domaine des poids que l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ , mais le formalisme peut être étendu aux entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  et aux réels  $\mathbb{R}$ . Plus un poids est élevé, plus la formule est importante. Le poids  $+\infty$  est réservé à l'expression de contraintes d'intégrité, c'est-à-dire de formules ne pouvant être insatisfaites.

À partir d'une base pondérée, il est possible de définir une pondération sur les interprétations en considérant le poids des formules qu'elles falsifient.

*Définition* 3.1.1 ( $\kappa$ -fonction). Soit  $B$  une base pondérée. La *fonction*  $\kappa_{\odot}$  est une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  telle que

$$\kappa_{\odot}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \models B^* \\ \odot_{(\varphi, r) \in False_B(\omega)} r & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $B^*$  correspond à  $B$  privé des poids, c'est-à-dire l'ensemble des formules propositionnelles apparaissant dans  $B$ ,  $\odot$  représente un opérateur quelconque d'agrégation et  $False_B(\omega) = \{\langle \varphi, r \rangle \in B : \omega \not\models \varphi\}$  l'ensemble des formules pondérées de  $B$  falsifiées par l'interprétation  $\omega$ .

À partir de la fonction  $\kappa$ , un ordre total sur l'ensemble des interprétations  $\Omega$  peut être défini comme suit :

$$\omega \leq_{\kappa_{\odot}} \omega' \text{ ssi } \kappa_{\odot}(\omega) \leq \kappa_{\odot}(\omega')$$

Contrairement aux formules, les interprétations de plus faible valeur sont les préférées. La conséquence logique peut donc être étendue : une formule est une conséquence d'une base pondérée si et seulement si ses modèles contiennent tous les modèles préférés pour  $\kappa_{\odot}$ . Plus formellement :

*Définition* 3.1.2. Soit  $B$  une base pondérée et  $\varphi$  une formule propositionnelle, alors :

$$B \vDash_{\kappa_{\odot}} \varphi \text{ ssi } Min(\Omega, \leq_{\kappa_{\odot}}) \subseteq Mod(\varphi)$$

Dans la littérature, deux opérateurs sont généralement utilisés pour  $\odot$  : l'opérateur *max* et l'opérateur  $\sum$ . Le premier donne la sémantique des OCF [Spo88] ainsi que la sémantique de la logique possibiliste [DLP94, Lan00] (voir également [UE08] pour des résultats complémentaires de compacité et d'expressivité), tandis que le second donne la sémantique de la logique des pénalités [Pin95, DdSCLS94].

Dans le cas général, il n'y a aucun lien entre les ordres qui peuvent être obtenus par les différents opérateurs et donc entre leurs inférences. La logique des pénalités prend en

considération les strates les plus basses et est moins affectée par le problème de la noyade [BCD<sup>+</sup>93] que la logique possibiliste. En logique possibiliste, une interprétation qui falsifie la formule la plus importante est automatiquement exclue alors qu'en logique des pénalités elle peut être conservée. En effet, l'opérateur  $\Sigma$  permet une certaine compensation. La logique possibiliste, basée sur le max, est quant à elle beaucoup moins sensible au choix des poids. En outre, l'inférence induite par  $\kappa_{\max}$  est équivalente à celle basée sur la *best-out* [BCD<sup>+</sup>93]. La correspondance entre le formalisme de la logique possibiliste et celui des OCF ayant été établie dans [DP91], nous nous focaliserons sur ces dernières. Enfin, signalons que la logique des pénalités peut être utilisée pour retrouver l'inférence basée sur *leximin* [DdSC96].

Une inférence syntaxique équivalente peut être définie pour chacun des opérateurs max [Wil95, DLP94] et  $\Sigma$  [DLP94]. Pour le premier d'entre eux, elle est définie à partir d'une  $r$ -coupure. La  $r$ -coupure  $B_{\geq r}$  est l'ensemble des formules dont le poids est supérieur ou égal à  $r$ .

$$B_{\geq r} = \{\varphi' : (\varphi', r') \in B \text{ et } r' \geq r\}$$

En particulier,  $B^* = B_{\geq 0}$  représente l'ensemble des formules qui apparaissent dans  $B$ , privées de leur poids. Le degré d'incohérence de  $B$  (noté  $Inc_B$ ) est le plus grand rang de  $B$  tel que la  $r$ -coupure associée soit incohérente :

$$Inc_B = \begin{cases} 0 & \text{if } B \text{ est cohérente} \\ \max\{r : B_{\geq r} \text{ est incohérente}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le degré d'incohérence peut ainsi être utilisé pour construire le sous-ensemble cohérent préféré des formules de  $B$ , noté  $Core_B$ , d'où pourront être faites les déductions tel que  $Core_B = B_{>Inc_B}$ . Ainsi une formule  $\varphi$  sera conséquence syntaxique de  $B$  si et seulement si elle est conséquence de  $Core_B$  :

$$B \vdash_{\kappa_{\max}} \varphi \text{ ssi } Core_B \vdash \varphi$$

Le cas de la logique des pénalités est similaire. Cette fois-ci les ensemble cohérents seront ordonnés en fonction de la somme des pénalités associées aux formules qu'ils ne contiennent pas [Pin95]. Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux sous-ensemble cohérents de  $B^*$ , alors :

$$C_1 \triangleleft_{\kappa_{\Sigma}} C_2 \text{ ssi } \sum_{\{r : (\varphi, r) \in B \text{ et } \varphi \in B^* \setminus C_1\}} r < \sum_{\{r : (\varphi, r) \in B \text{ et } \varphi \in B^* \setminus C_2\}} r$$

Une formule sera inférée de  $B$  si elle est inférée de toutes les sous-bases cohérentes préférées pour  $\triangleleft_{\kappa_{\Sigma}}$ .

$$B \vdash_{\kappa_{\Sigma}} \varphi \text{ ssi } \forall C \in Min(\mathcal{C}, \triangleleft_{\kappa_{\Sigma}}) : C \vdash \varphi$$

## 3.2 Bases pondérées à intervalles

Malgré leur rôle central dans le raisonnement sous incertitude et en dynamique des croyances, la logique possibiliste et les OCF peuvent s'avérer trop restrictives lorsque les poids et l'ordre

### 3.2 Bases pondérées à intervalles

entre les différentes formules ne peuvent pas être précisément justifiés. Nous nous sommes donc intéressés au cas où l'incertitude associée aux diverses informations n'était pas réduite à un singleton, mais étendue à un intervalle [IJCAI'11]. Ainsi, nous considérons ici des bases pondérées à intervalles de la forme  $IB = \{\langle \varphi_i, I_i \rangle : i = 1, \dots, n\}$  avec  $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$  un intervalle d'entiers<sup>1</sup>.

Nous avons considéré une interprétation disjonctive de ces intervalles, c'est-à-dire que l'expert considère que le vrai poids associé à  $\varphi_i$  est compris entre  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . Notons que différentes extensions de la logique possibiliste dont la vision était conjonctive ont également été proposées. Dans ces extensions,  $\langle \varphi_i, I_i \rangle$  signifie que  $\varphi_i$  est vrai quelle que soit la valeur contenue dans  $I_i$ . Citons par exemple *Timed Possibilistic Logic* [DLP92a] où chacun des intervalles représente un laps de temps où la formule est vraie, ou encore la logique des supporters [LLS99] où chaque intervalle représente une justification (au sens ATMS du terme) de la formule.

Dans le cas disjonctif où nous nous plaçons, une base pondérée à intervalles peut être vue comme une famille de bases pondérées compatibles, obtenues en considérant pour chaque formule un unique élément de l'intervalle considéré. Nous présentons une méthode basée sur les interprétations et nous montrons par la suite une méthode basée sur les formules afin de produire des inférences sans coût computationnel supplémentaire par rapport au cas standard.

#### 3.2.1 Bases pondérées compatibles et point de vue sémantique

Nous nous plaçons donc dans le cas d'intervalles prenant leurs valeurs dans les entiers positifs, comme ceux représentés par la figure 3.1. Nous noterons l'ensemble de ces intervalles  $\mathcal{I}$ . L'objet de base considéré ici est une base pondérée à intervalles de type  $IB = \{\langle \varphi, I \rangle, \varphi \in \mathcal{L} \text{ et } I \in \mathcal{I}\}$ .

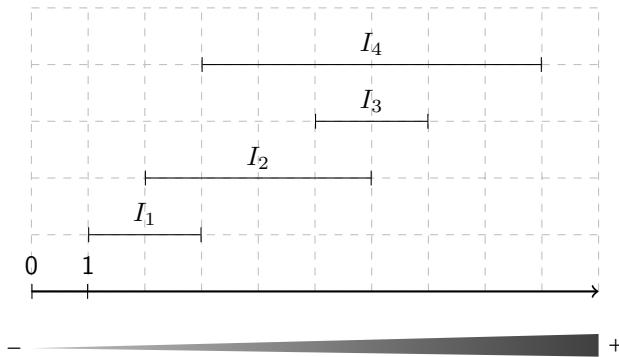


Figure 3.1 – Exemple d'intervalles de  $\mathcal{I}$

Nous définissons différentes opérations sur les intervalles, soit  $I = [\alpha, \beta]$  and  $I' = [\alpha', \beta']$  deux éléments de  $\mathcal{I}$ . alors :

1. La différence majeure avec l'extension possibiliste de [IJCAI'11] est que celle-ci est définie sur des intervalles contenus dans  $[0, 1]$ . Tous les résultats présentés ici pour les entiers tiennent néanmoins dans ce cas.

1.  $I \oplus I' = [\alpha + \alpha', \beta + \beta']$
2.  $I \ominus I' = [\max(0, \alpha - \beta'), \max(0, \beta - \alpha')]$
3.  $I \triangleleft_{\mathcal{I}} I' \text{ ssi } \beta < \alpha'$

La somme de deux intervalles est classique, tout comme la comparaison stricte deux intervalles : l'intervalle  $I$  est strictement inférieur à un intervalle  $I'$  si et seulement si la plus petite valeur de  $I'$  est plus grande que la plus grande valeur de  $I'$ . La différence de deux intervalles quant à elle prend en compte le fait que nous ne considérons que des entiers positifs. La méthode, usuelle dans nos travaux, est donc de considérer tout d'abord la famille des bases compatibles avec  $IB$ , notée  $Comp(IB)$ . Une base pondérée  $B$  est compatible avec  $IB$  si et seulement si il existe une bijection  $f$  de  $IB$  dans  $B$  telle que  $\forall \langle \varphi, I \rangle \in IB : f(\langle \varphi, [a, b] \rangle) = \langle \varphi, r \rangle \in B$  (avec  $a \leq r \leq b$ )

$$f(\langle \varphi, [a, b] \rangle) = \langle \varphi, r \rangle \in B \text{ (avec } a \leq r \leq b\text{)}$$

À partir de cette définition, il est aisément d'étendre les OCF aux intervalles :

$$IB \vDash_{\kappa_{\max}}^{Comp} \varphi \text{ ssi } \forall B \in Comp(IB), B \vDash_{\kappa_{\max}} \varphi$$

Notons que la taille de  $Comp(IB)$  est exponentielle par rapport à la taille des différents intervalles ( $|Comp(IB)| = \prod_{\langle \varphi, I \rangle \in IB} |I|$ ). Notons également que deux bases compatibles peuvent être mises en exergue : la base compatible la plus pessimiste, notée  $IB_\alpha$ , prenant en compte uniquement le plus petit poids possible pour chaque formule et  $IB_\beta$ , sa duale optimiste :

- (1)  $IB_\alpha = \{\langle \varphi, \alpha \rangle : \langle \varphi, [a, b] \rangle \in IB\}$
- (2)  $IB_\beta = \{\langle \varphi, \beta \rangle : \langle \varphi, [a, b] \rangle \in IB\}$

Nous avons également proposé une caractérisation, sémantique cette fois-ci, basée sur un ordre partiel sur les interprétations. En effet il est possible d'ordonner les interprétations en fonctions des formules qu'elles falsifient, en étendant la définition de  $\kappa$ -fonction, toujours en utilisant les compatibles :

$$\kappa_{IB}(\omega) = \{\kappa_B(\omega) : B \in Comp(IB)\}$$

Il se trouve qu'avec cette définition, on obtient également un intervalle qui est celui compris entre la  $\kappa$ -fonction associée à  $IB_\alpha$  et celle associée à  $IB_\beta$  :

$$\kappa_{IB}(\omega) = [\kappa_{IB_\alpha}(\omega), \kappa_{IB_\beta}(\omega)]$$

Ce point intéressant rapproche nos travaux de ceux de Booth et Meyer qui proposent dans [BMW06, BM07] d'associer deux valeurs à chaque interprétation, l'une optimiste et l'autre pessimiste, dans le but de réviser des préordres totaux. De ce point de vue nos travaux sont également une extension des leurs.

Il est donc possible d'ordonner (partiellement) chacune des interprétations en utilisant  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$

$$\omega \triangleleft_{\kappa_{IB}} \omega' \text{ ssi } \kappa_{IB}(\omega) \triangleleft_{\mathcal{I}} \kappa_{IB}(\omega')$$

### 3.2 Bases pondérées à intervalles

et ainsi de définir une inférence sémantique, notée  $\models_{\mathcal{I}}$ , utilisant cet ordre :

$$IB \models_{\mathcal{I}} \varphi \text{ssi } \text{Min}(\Omega, \triangleleft_{\kappa_{IB}}) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$$

La propriété escomptée est bien valide : les deux inférences  $\models_{\mathcal{I}}$  et  $\models_{\kappa_{\max}}^{\text{Comp}}$  ainsi définies sont équivalentes [IJCAI'11].

#### 3.2.2 Point de vue syntaxique, construction pratique et complexité

D'un point de vue syntaxique, il est possible de définir une extension pour le degré d'incohérence d'une base à intervalles  $IB$  et de construire un ensemble cohérent  $\text{Core}_{IB}$  permettant de définir une nouvelle inférence. Ce degré d'incohérence se base également sur les compatibles :

$$\text{Inc}_{IB} = \{ \text{Inc}_B : B \in \text{Comp}(IB) \}$$

Et comme pour le cas sémantique,  $\text{Inc}_{IB}$  se révèle à son tour être un intervalle borné entre les degrés d'incohérence des bases compatibles optimistes et pessimistes.

$$\text{Inc}_{IB} = [\text{Inc}_{IB_\alpha}, \text{Inc}_{IB_\beta}]$$

Il est ainsi possible de construire  $\text{Core}_{IB}$ , que nous avons montré cohérent, de la manière suivante, en utilisant à nouveau notre ordre sur les intervalles

$$\text{Core}_{IB} = \{ \varphi : (\varphi, I) \in IB \text{ and } \text{Inc}_{IB} \triangleleft_{\mathcal{I}} I \}$$

et de définir l'inférence syntaxique suivante, qui se révèle équivalente à toutes les inférences définies précédemment dans cette section :

$$IB \vdash_{\mathcal{I}} \varphi \text{ssi } \text{Core}_{IB} \vdash \varphi$$

La figure 3.2 résume l'équivalence entre les différentes inférences proposées dans cette section.

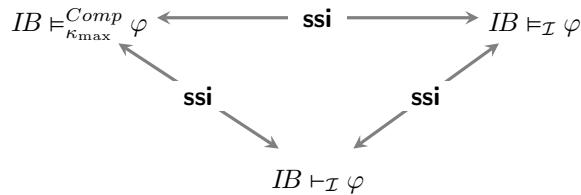


Figure 3.2 – Correspondance entre les différentes méthodes d'inférences proposées

De plus, malgré l'enrichissement de l'expressivité et la flexibilité donnés par les intervalles, il est possible de raisonner avec ceux-ci sans changer la complexité du problème de décision associé. En effet, le problème de décision « la formule  $\varphi$  est-elle une inférence plausible de  $IB$  » est  $\Theta_p^2$ -complet.

Pour montrer ce résultat, il suffit de calculer les deux degrés d'incohérences de  $IB_\alpha$  et  $IB_\beta$  (qui nécessitent chacun un nombre logarithmique d'appel à un oracle SAT [Lan00]), de construire  $Core_{IB}$  en comparant chacune des formules à ce degré d'incohérence et enfin de faire un dernier appel à un oracle SAT pour vérifier que la formule est bien conséquence logique de  $Core_{IB}$ .

### 3.2.3 D'autres ordres d'intervalle et restrictions sur les compatibles

Nous avons également montré qu'il est possible d'utiliser d'autres ordres d'intervalle que  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  pour construire  $Core_{IB}$  ou, d'un point de vue équivalent, ordonner les interprétations. Ces autres ordres d'intervalle ne considèrent qu'un sous-ensemble des bases compatibles et donc rendent les inférences plus productives. Soient  $I = [\alpha, \beta]$  et  $I' = [\alpha', \beta']$  deux intervalles de  $\mathcal{I}$  alors :

- $I \triangleleft_{\mathcal{I}}^1 I'$ ssi  $\alpha < \alpha'$  et  $\beta < \beta'$
- $I \triangleleft_{\mathcal{I}}^2 I'$ ssi  $\alpha < \alpha'$
- $I \triangleleft_{\mathcal{I}}^3 I'$ ssi  $\beta < \beta'$

Intuitivement,  $I \triangleleft_{\mathcal{I}}^1 I'$  peut être compris comme « il existe un élément de  $I'$  qui est préféré à  $I$  ».  $I \triangleleft_{\mathcal{I}}^2 I'$  peut être compris comme « le plus petit élément de  $I$  est plus petit que le plus petit élément de  $I'$  ». C'est-à-dire que d'un point de vue pessimiste, il vaut mieux préférer  $I'$ .  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^3$  est le dual optimiste de  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^2$ .

Ces nouveaux ordres sur les intervalles permettent de définir de la même façon que précédemment trois nouvelles inférences soit sur un ordonnancement des interprétations, soit par la construction d'un nouvel ensemble  $Core_{IB}$  dépendant des ordres. Pour ces trois ordres d'intervalles, ces deux définitions sont équivalentes. La figure 3.3 résume les liens entre les différents ordres et par conséquent la productivité des différentes inférences. Par exemple,  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  implique  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^1$ . D'autre part,  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^2$  et  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^3$  sont incomparables.

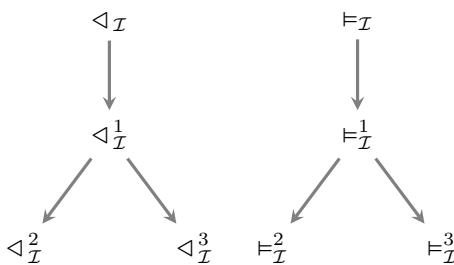


Figure 3.3 – Capacité de discrimination des différents ordres d'intervalle et productivité des inférences

Considérons la base pondérée à intervalle décrite par la figure 3.4. Le degré d'incohérence de  $IB$  est  $Inc(IB) = [2, 5]$ . De  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  on ne déduira rien, de  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^1$  on déduira  $a$ , tandis que de  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^2$  on déduira  $a \wedge b$  et enfin de  $\triangleleft_{\mathcal{I}}^3$  on déduira  $a \wedge \neg b$ .

### 3.3 Logique des pénalités et prévention des collisions

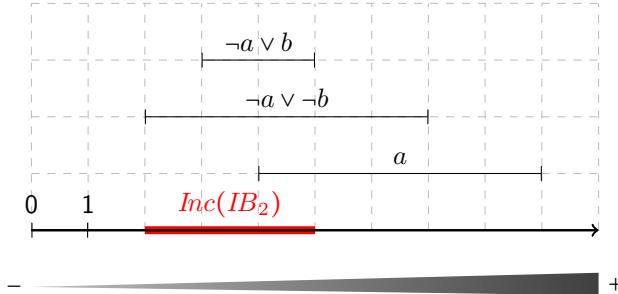


Figure 3.4 – Intervalles associés aux formules de  $IB$

## 3.3 Logique des pénalités et prévention des collisions

La logique des pénalités [Pin95, DdSCLS94] est un formalisme de représentation des connaissances permettant de manipuler des informations potentiellement incompatibles. Son principal atout est, par additivité des poids, de permettre une certaine forme de compensation entre les différentes sources d'incompatibilité. Ainsi, même si l'information la plus prioritaire est falsifiée par une interprétation, cette dernière ne sera pas automatiquement rejetée. Mais elle est aussi connue pour être dépendante de la syntaxe des formules et, autre caractéristique néanmoins peu étudiée, elle est très sensible au choix des poids : il est possible d'obtenir des résultats extrêmement différents à partir d'un même ensemble d'informations en changeant simplement quelques poids, y compris en maintenant l'ordre entre les différentes formules. Or, un expert ne peut pas prendre en compte les processus de compensation et de déduction de la logique des pénalités quand il modélise ses croyances.

Nous avons rappelé différentes méthodes purement qualitatives dans le Chapitre 2 permettant de traiter les informations avec priorités (sans poids). Cependant, aucun de ces formalismes ne permet de compensation comme la logique des pénalités. De même, aucune de ces méthodes ne s'intéresse au problème central que nous traitons maintenant dans cette section : l'absence de collision. Celle-ci permet d'obtenir des inférences plus robustes mais également plus productives. Nous nous sommes placés dans [KR'08a] dans un cadre restreint, mais néanmoins suffisamment expressif, de la logique des pénalités où chaque poids ne peut intervenir qu'une seule fois. Nous avons proposé différentes méthodes permettant d'éviter totalement les collisions tout en permettant une certaine forme de compensation basée sur la majorité et ce indépendamment de la formulation logique des informations. Nous avons également proposé différentes caractérisations de ces méthodes.

### 3.3.1 De l'impact des pondérations et des collisions

Afin d'illustrer l'impact du choix des poids, considérons comme illustration une base donnée  $B$ , telle que  $B = \{(a \wedge b, 3), (\neg a, 2), (\neg b, 1)\}$ . Trois pondérations possibles, préservant l'ordre entre les poids et induites par  $B$ , sont décrites dans le tableau 3.1.

Ces trois bases de croyances induisent trois fonctions  $\kappa$  différentes présentées dans le

	$W_{B_1}$	$W_{B_2}$	$W_{B_3}$
$a \wedge b$	3	4	4
$\neg a$	2	2	3
$\neg b$	1	1	2

Table 3.1 – Exemples de pondérations

tableau 3.2. Celles-ci ne sont clairement pas équivalentes sémantiquement. Qui plus est, elles produisent trois ensembles d'interprétations minimales :  $\{\omega_0, \omega_3\}$ ,  $\{\omega_3\}$  et  $\{\omega_0\}$ . La formule  $a$  se déduit du deuxième ensemble,  $\neg a$  du troisième ensemble et ni  $a$  ni  $\neg a$  ne peuvent être déduites du premier ensemble ! Ainsi, à partir d'un même ensemble de formules et du même ordre entre ces formules, il est possible de dériver une conclusion, son contraire ou aucune des deux.

	<b>a</b>	<b>b</b>	$\kappa_{W_{B_1}}$	$\kappa_{W_{B_2}}$	$\kappa_{W_{B_3}}$
$\omega_0$	0	0	<b>3</b>	4	<b>4</b>
$\omega_1$	0	1	4	5	6
$\omega_2$	1	0	5	6	7
$\omega_3$	1	1	<b>3</b>	<b>3</b>	5

 Table 3.2 – Fonctions  $\kappa_{W_i}$  induites

Un autre travers de la logique des pénalités est sa capacité à créer des *collisions*, c'est-à-dire à donner le même poids à deux interprétations qui ne falsifient pas le même ensemble de formules. Or, plus l'ensemble des interprétations  $\kappa$ -minimales est grand, plus les inférences produites sont pauvres et peu instructives, les informations inférées devant satisfaire toutes les interprétations  $\kappa$ -minimales. Intuitivement l'ensemble des interprétations préférées doit être le plus petit possible pour être le plus précis possible et être pleinement utilisable dans une optique de prise de décision.

Soit  $B$  une base pondérée et  $\omega, \omega'$  deux interprétations, alors  $\omega$  et  $\omega'$  entrent en collision si et seulement si elles falsifient un ensemble de formules différentes et  $\kappa(\omega) = \kappa(\omega')$ . Le terme *collision* est repris du vocabulaire utilisé dans le domaine de la cryptographie où il est employé lorsque deux entrées différentes d'une fonction de hachage aboutissent à une empreinte identique. Nous avons ainsi défini dans [KR'08a] le critère *d'absence de collisions* permettant d'éviter totalement l'écueil pointé :

$$(\mathbf{C}_{\mathbf{CF}}) \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega, \kappa(\omega) = \kappa(\omega') \text{ ssi } \text{False}_B(\omega) = \text{False}_B(\omega').^2$$

Il est à noter que, par définition, la  $\kappa$ -valeur 0 ne peut jamais être impliquée dans une collision. En effet deux interprétations ne falsifiant aucune formule ont une même  $\kappa$ -valeur de 0, or, dans ce cas précis, elles falsifient le même ensemble de formules –l'ensemble *vide*–, elles ne peuvent donc pas entrer en collision.

Illustrons ce concept avec une base pondérée  $B$  telle que  $B = \{\langle a \vee b, 6 \rangle, \langle a \leftrightarrow b, 4 \rangle, \langle \neg a, 3 \rangle, \langle \neg b, 2 \rangle, \langle \neg a \vee \neg b, 1 \rangle, \langle a \wedge \neg b, 1 \rangle\}$ . Le tableau 3.3 présente la fonction  $\kappa_B$  induite.

2.  $\text{False}_B(\omega)$  est défini dans la définition 3.1.1.

### 3.3 Logique des pénalités et prévention des collisions

	a	b	$\kappa_B(\omega_i)$
$\omega_0$	0	0	<b>7</b> = 6 + 1
$\omega_1$	0	1	<b>7</b> = 4 + 2 + 1
$\omega_2$	1	0	<b>7</b> = 4 + 3
$\omega_3$	1	1	<b>7</b> = 3 + 2 + 1 + 1

Table 3.3 – Un exemple extrême de collision

Dans ce cas extrême toutes les interprétations entrent en collision et il n'est donc possible d'inférer de  $B$  que  $T$ , inférence la plus pauvre qui soit. Néanmoins deux d'entre elles,  $\omega_0$  et  $\omega_2$ , falsifient moins de formules que les autres. Si l'on ne considère que ces deux interprétations, on peut déduire  $\neg b$ . Le but de nos travaux a donc été de prendre en compte cette majorité et d'introduire le critère suivant de préservation de la majorité :

$$(\text{C}_{\text{MP}}) \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega, |False_B(\omega)| < |False_B(\omega')| \text{ implique } \omega <_{\kappa} \omega'$$

$|E|$  représente la cardinalité de l'ensemble  $E$ . Ce critère spécifie qu'une interprétation qui falsifie moins de formules qu'une autre interprétation doit lui être préférée : ceci permet une certaine forme de compensation, tout comme la logique des pénalités. Nous avons montré, toujours dans [KR'08a], que les pondérations les plus couramment utilisées, comme la pondération de type Borda (1, 2, 3, 4, 5, ...) n'avaient que peu d'intérêt d'un point de vue des collisions.

#### 3.3.2 La famille des $\sigma$ -pondérations

Nous avons proposé dans [KR'08a] une des pondérations permettant non seulement de vérifier le critère d'absence de collision, mais également celui de préservation de la majorité. Celle-ci s'appuie sur une famille de pondérations particulières, les  $\sigma$ -pondérations. Dans ces familles, chaque poids ne peut apparaître qu'une seule fois, autrement dit, deux formules ne peuvent avoir le même poids. L'expert peut ainsi se voir proposer un ensemble de  $n$  poids dans lequel il choisit les poids pour ses  $n$  formules.

Chaque membre de la famille des  $\sigma$ -pondérations est construit à partir d'une  $\sigma$ -suite dont les éléments sont les sommes des éléments précédents. Une  $\sigma$ -suite est elle-même basée sur une suite  $\Phi$  qui indique le nombre d'éléments précédents à additionner. La définition générique d'une  $\sigma$ -suite est la suivante :

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & = 1 \\ \sigma_i & = \sum_{j=i-\Phi_{i-1}}^{i-1} \sigma_j \end{cases}$$

Prenons par exemple la suite lexicographique  $\Phi^{lex} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ . La  $\sigma$ -suite générée à partir de  $\Phi^{lex}$  peut être utilisée telle quelle comme une pondération :

$$\sigma^{lex} = (1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\dots)$$

À partir du rang 2, nous obtenons les puissances successives de 2 et, dans ce cas, il est connu [DdSC96] que la logique des pénalités a alors exactement le même comportement que l'inférence *leximin* rappelée par la Définition 2.2.1, Section 2.2.

Cette pondération vérifie la propriété d'absence de collision ( $C_{CF}$ ), mais elle échoue très largement dans la capacité de compensation : une interprétation falsifiant uniquement la formule la plus importante sera toujours battue par une interprétation vérifiant cette dernière mais falsifiant toutes les autres. Nous avons ainsi proposé d'autre pondération permettant : la *pondération bête* (initialement proposée dans [Ste38] et utilisée dans le cadre du vote pondéré dans [WN81]), la *pondération parabolique* (également proposée dans le cadre du vote dans [WN81]) et la *pondération paralex* [KR'08a]. Nous rappelons ici uniquement la construction de la première d'entre elles.

La construction de la pondération bête est basée sur la suite génératrice suivante :

$$\Phi^{beg} = (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6\dots)$$

Cette suite contient tous les entiers naturels énumérés successivement et répétés deux fois (d'où son nom), sauf 1. Tout terme de cette suite peut être calculé directement par la formule suivante :  $\Phi_i^{beg} = 1 + \lfloor i/2 \rfloor$ ,  $\lfloor x \rfloor$  représentant la partie entière de  $x$ . Les premiers termes de la  $\sigma$ -suite correspondante sont :

$$\sigma^{beg} = (1, 1, 2, 3, 6, 11, 22, 42, 84, 165, 330, 654, 1308, \dots)$$

Cette suite croît beaucoup plus rapidement que la suite de Fibonacci, mais moins vite que les puissances de 2. Nous ne pouvons pas utiliser directement cette suite comme pondération à cause de la présence de collisions (par exemple,  $3 + 6 + 11 + 22 = 42$ ) ; nous utilisons plutôt des sommes de ses éléments pour en construire une :

$$W_i^{beg,n} = \sum_{j=n-i+1}^n \sigma_j^{beg}$$

Cette définition peut être réécrite récursivement de la façon suivante :

$$W_i^{beg,n} = \begin{cases} \sigma_n^{beg} & \text{si } i = 1 \\ W_{i-1}^{beg,n} + \sigma_{n-i+1}^{beg} & \text{pour } 1 < i \leq n \end{cases}$$

En d'autres termes, si l'on a besoin de  $n$  poids différents,  $\sigma_n^{beg}$  est le plus petit poids,  $\sigma_n^{beg} + \sigma_{n-1}^{beg}$  le deuxième plus petit et ainsi de suite jusqu'au plus grand poids qui est la somme de tous les  $\sigma_i^{beg}$  tels que  $i \leq n$ .

Le tableau 3.4 présente les dix premières pondérations. Compte tenu des critères recherchés, cette pondération est extrêmement performante : non seulement elle satisfait  $C_{CF}$ , mais elle autorise également la forme de compensation définie par le critère  $C_{MP}$ . De plus, elle est de par sa définition excessivement rapide à calculer. Cependant, cette pondération vérifie une propriété inattendue lorsque deux interprétations falsifient le même nombre de formules.

### 3.3 Logique des pénalités et prévention des collisions

<b>n</b>	<b>W<sup>beg,n</sup></b>									
<b>1</b>	1									
<b>2</b>	1 2									
<b>3</b>	2 3 4									
<b>4</b>	3 5 6 7									
<b>5</b>	6 9 11 12 13									
<b>6</b>	11 17 20 22 23 24									
<b>7</b>	22 33 39 42 44 45 46									
<b>8</b>	42 64 75 81 84 86 87 88									
<b>9</b>	84 126 148 159 165 168 170 171 172									
<b>10</b>	165 249 291 313 324 330 333 335 336 337									

Table 3.4 –  $W^{beg,n}$  pour  $n \leq 10$

Celles-ci sont ordonnées en fonction de la formule *la moins prioritaire* qu'elles falsifient, suivant un critère lexicographique inversé :

(C<sub>RLC</sub>) si  $|False_B(\omega)| = |False_B(\omega')|$  alors  $\omega <_{\kappa} \omega'$  **ssi**  $\min\{r : (\varphi, r) \in False_B(\omega) \setminus False_B(\omega')\} < \min\{r' : (\varphi', r') \in False_B(\omega') \setminus False_B(\omega)\}$ .

Ce critère n'est néanmoins pas totalement satisfaisant. Il est en effet plus intuitif de départager ces interprétations en fonction de la formule *la plus prioritaire* falsifiée par l'une et satisfaite par l'autre. C'est pourquoi nous avons proposé dans [KR'08a] une pondération originale, la pondération paralex, qui satisfait le critère de *cardinalité lexicographique* suivant :

(C<sub>LC</sub>) si  $|False_B(\omega)| = |False_B(\omega')|$  alors  $\omega <_{\kappa} \omega'$  **ssi**  $\max\{r : (\varphi, r) \in False_B(\omega) \setminus False_B(\omega')\} < \max\{r' : (\varphi', r') \in False_B(\omega') \setminus False_B(\omega)\}$ .

#### 3.3.3 Résumé des propriétés

Nous ainsi étudié la logique des pénalités sous un angle original : l'absence de collision. La Table 3.5 récapitule les critères vérifiés par chacune des pondérations étudiées dans [KR'08a]. Les pondérations de type Borda s'avèrent trop naïves et n'ont pas réellement de bonnes propriétés en matière de collisions, si ce n'est de les favoriser. D'autres pondérations, telle la pondération lexicographique, empêchent les collisions mais désactivent dans le même temps les mécanismes de compensation de la logique des pénalités.

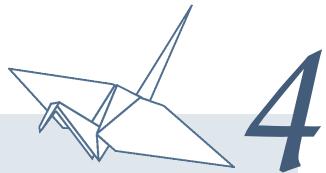
	C <sub>CF</sub>	C <sub>MP</sub>	C <sub>RLC</sub>	C <sub>LC</sub>		C <sub>CF</sub>	C <sub>MP</sub>	C <sub>RLC</sub>	C <sub>LC</sub>
$W^{Borda,n}$	-	-	-	-	$W^{parab,n}$	✓	✓	✓	-
$W^{lex,n}$	✓	-	-	-	$W^{paralex,n}$	✓	✓	-	✓
$W^{beg,n}$	✓	✓	✓	-					

Table 3.5 – Synthèse des critères vérifiés par les différentes pondérations

### Chapitre 3 : Raisonner en présence d'incohérences : le cas pondéré

Finalement trois pondérations possèdent de bonnes propriétés et sont de surcroît facilement calculables, les pondérations bête, parabolique et paralex. La principale différence entre la pondération bête et la pondération parabolique est qu'il a été démontré que cette dernière était minimale dans le sens où le premier poids calculé de chaque suite était le plus petit possible pour une pondération vérifiant les critères de préservation de la majorité et d'absence de collision.

### 3.3 Logique des pénalités et prévention des collisions



## Révision et croyances partiellement ordonnées

En dynamique des croyances, la révision est l'*art* d'intégrer une nouvelle information potentiellement conflictuelle avec les croyances d'un agent à celles-ci. Si elle n'est pas nécessairement certaine, cette nouvelle information est néanmoins considérée par l'agent comme plus fiable que les croyances dont il dispose. Trois grands principes généraux ont été dégagés et régissent la révision de croyances [Gär88].

- (1.) Le principe de succès : la nouvelle croyance étant plus certaine, après l'opération de révision, l'agent doit déduire de ses nouvelles croyances la nouvelle information.
- (2.) Le principe de cohérence : si la nouvelle information est cohérente, elle ne doit pas conduire l'agent dans un état de croyance incohérent.
- (3.) Le principe de changement minimal : les croyances originelles de l'agent doivent être modifiées *a minima* lors de l'opération de révision, la nouvelle information ne devant pas tout remettre en cause.

Afin de capturer ces principes généraux, différentes caractérisations logiques ont été proposées dans le cadre « tout ou rien » [AGM85, KM91] et dans le cadre où l'information est totalement ordonnée [DP97]. Si les deux premiers principes de succès et de cohérence sont somme toute conceptuellement assez simples à représenter, le concept de changement minimal peut être plus difficile à caractériser. Il est néanmoins prégnant dans les différents théorèmes de représentation où les évolutions des représentations canoniques de l'*état épistémique* de l'agent (typiquement des ordres) peuvent être représentées.

Nous avons également proposé une généralisation de ces travaux lorsque les croyances initiales de l'agent ne sont que partiellement ordonnées [IJCAI'05], comme par exemple l'état épistémique « drosophile » représenté par la figure 4.1, ainsi que différents opérateurs utilisables en pratique [NMR'02, KR'08b]. Enfin, l'opération d'amélioration proposé dans [KPP08], et qui peut être vue comme un opérateur de révision affaibli, est très fortement lié avec le formalisme que nous avons proposé dans [KR'08a].

## 4.1 Révision et information totalement ordonnée

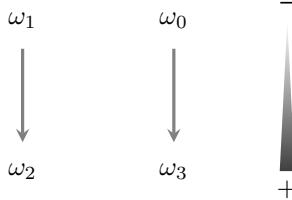


Figure 4.1 – Exemple d'état épistémique représenté par un ordre partiel sur les interprétations

### 4.1 Révision et information totalement ordonnée

#### Révision dans un cadre « tout ou rien »

Dans un cadre tout ou rien, les croyances d'un agent peuvent être représentées d'une façon par une théorie ou par une formule de la logique propositionnelle. On doit à Alchourrón, Gärdenfors et Makinson [AGM85] (on pourra également se référer à [Gär88]) une formalisation du concept de révision de croyances sous forme de postulats. L'état épistémique d'un agent est représenté par une théorie, c'est à dire un ensemble de formules  $K$  tel que  $K = Cn(K)$ .

Pour cela, ils définissent tout d'abord une première opération, *l'expansion* [Gär88] d'un ensemble de formules  $K$  par une formule  $\varphi$ , qui est l'ensemble des conclusions qui peuvent être inférées à partir de l'union de  $K$  et de  $\varphi$ . Plus formellement, l'expansion de  $K$  par  $\varphi$ , notée  $K + \mu$ , est telle que

$$K + \mu = Cn(K \cup \{\varphi\})$$

L'expansion seule ne permet évidemment pas de traiter le problème de la révision de croyances. En effet, l'arrivée d'une nouvelle information incohérente avec  $K$  aboutirait à des croyances incohérentes. C'est pourquoi les auteurs proposent une série de postulats (les postulats AGM) dans le but de caractériser l'opération de révision [AGM85].

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| $(K_1)$ $K * \mu$ est une théorie  | <i>(clôture)</i>               |
| $(K_2)$ $\mu \in K * \mu$  | <i>(succès)</i>                |
| $(K_3)$ $K * \mu \subseteq K + \mu$  | <i>(inclusion)</i>             |
| $(K_4)$ Si $\neg\mu \notin K$ , alors $K + \mu \subseteq K * \mu$                                  | <i>(vacuité)</i>               |
| $(K_5)$ $K * \mu = \mathcal{L}$ ssi $\vdash \neg\mu$   | <i>(consistance)</i>           |
| $(K_6)$ Si $\mu \leftrightarrow \mu'$ , alors $K * \mu = K * \mu'$                                 | <i>(extensionnalité)</i>       |
| $(K_7)$ $K * (\mu \wedge \mu') \subseteq (K * \mu) + \mu'$   | <i>(inclusion conjonctive)</i> |
| $(K_8)$ Si $\neg\mu' \notin K * \mu$ , alors<br>$(K * \mu) + \mu' \subseteq K * (\mu \wedge \mu')$ | <i>(vacuité conjonctive)</i>   |

Le postulat  $(K_1)$  oblige le résultat de la révision à être lui-même une théorie. Le postulat  $(K_2)$  de succès signifie que la nouvelle information  $\mu$  doit appartenir au résultat. Le postulat

( $K_3$ ) signifie quant à lui que l'ensemble des conclusions de la révision de  $K$  par  $\mu$  est contenu dans l'expansion de  $K$  par  $\mu$  : on ne peut pas déduire des conclusions de  $K * \mu$  qui ne soient pas dans  $K + \mu$ . Ce postulat, associé à ( $K_4$ ), exprime également le fait que si la nouvelle information  $\mu$  est cohérente avec les croyances de l'agent, alors la révision de  $K$  par  $\mu$  est équivalente à l'expansion de  $K$  par  $\mu$ .

En outre, le postulat ( $K_5$ ) stipule que  $K * \mu = \mathcal{L}$  si et seulement si  $\mu$  est elle-même équivalente à la contradiction<sup>1</sup> : toute révision de  $K$  par une formule  $\mu$  non-contradictoire ne peut aboutir qu'à un résultat non-contradictoire. Le postulat ( $K_6$ ) oblige l'opération de révision à être indépendante de la syntaxe. Ainsi, quelle que soit la forme syntaxique de la formule qui représente la nouvelle information, le résultat d'une révision par une formule doit être identique à la révision par une autre formule logiquement équivalente.

Les postulats ( $K_7$ ) et ( $K_8$ ) représentent ce que Alchourrón, Gärdenfors et Makinson considèrent comme étant le changement minimal. Schématiquement, ils considèrent que la révision par une information conjonctive doit être équivalente à la révision de l'une des informations puis de l'expansion du résultat de cette révision avec l'autre information : une seule phase de révision doit donc être nécessaire.

Katsuno et Mendelzon ont pour leur part proposé dans [KM91] un ensemble de postulats qu'un opérateur de révision raisonnable doit satisfaire lorsque les croyances de l'agent sont représentées par une formule de la logique propositionnelle.

- ( $R_1$ )  $\psi \circ \mu \vDash \mu$
- ( $R_2$ ) si  $\psi \wedge \mu$  est cohérente, alors  $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$
- ( $R_3$ ) si  $\mu$  est cohérente, alors  $\psi \circ \mu$  est cohérent
- ( $R_4$ ) si  $\psi_1 \equiv \psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$
- ( $R_5$ )  $(\psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2 \vDash \psi \circ (\mu_1 \wedge \mu_2)$
- ( $R_6$ ) si  $(\psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2$  est cohérente, alors  $\psi \circ (\mu_1 \wedge \mu_2) \vDash (\psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2$

Les postulats ( $R_1$ ) à ( $R_4$ ) correspondent aux postulats ( $K_1$ ) à ( $K_6$ ). ( $R_1$ ) signifie que le résultat de la révision des croyances initiales  $\psi$  par la nouvelle information  $\mu$  doit inférer  $\mu$ . ( $R_2$ ) stipule que si la conjonction entre les modèles des croyances initiales  $\psi$  et les modèles de la nouvelle information  $\mu$  est cohérente, alors le résultat de la révision est équivalent à cette conjonction.

Le postulat ( $R_3$ ) indique que le résultat de la révision est une contradiction seulement si les croyances initiales  $\psi$  sont contradictoires, en d'autres termes si aucune interprétation ne satisfait  $\psi$ . Ce postulat correspond à ( $K_5$ ). ( $R_6$ ) impose le principe d'indépendance de la syntaxe et correspond au postulat ( $K_6$ ). Les postulats ( $R_5$ ) et ( $R_6$ ) sont les pendants de ( $K_7$ ) et ( $K_8$ ) et représentent donc le changement minimal que doit vérifier tout opérateur de révision.

Le résultat principal de [KM91] tient au fait qu'un opérateur vérifiant l'ensemble de ces postulats induit un préordre total sur les interprétations (l'assignement fidèle) tel que :

---

1.  $K * \mu = \mathcal{L}$  signifie que l'on peut déduire de  $K * \mu$  toute les formules du langage, en d'autres termes  $K * \mu$  est équivalent aux conclusions obtenues à partir de  $\perp$ .

## 4.1 Révision et information totalement ordonnée

---

*Définition* 4.1.1 (assignement fidèle). Soit  $\Omega$  l'ensemble des interprétations de  $\mathcal{L}$  et  $\psi$  une formule propositionnelle. Une fonction associant un préordre total noté  $\leq_\psi$  sur  $\Omega$  à  $\psi$  est un assignement fidèle s'il satisfait les trois conditions suivantes :

- (1) si  $\omega \in Mod(\psi)$  et  $\omega' \in Mod(\psi)$ , alors  $\omega \approx_\psi \omega'$ ;
- (2) si  $\omega \in Mod(\psi)$  et  $\omega' \notin Mod(\psi)$ , alors  $\omega <_\psi \omega'$ ;
- (3) si  $\psi \equiv \varphi$ , alors  $\leq_\psi = \leq_\varphi$ .

La condition (1) stipule qu'un modèle de  $\psi$  ne peut être strictement préféré à un autre modèle de  $\psi$  et qu'ils sont même équivalents, tandis que la condition (2) signifie que les modèles de  $\psi$  doivent être strictement préférés aux contre-modèles de  $\psi$ . Enfin la condition (3) demande l'indépendance de l'ordre par rapport à la syntaxe.

De cet assignement fidèle découle le théorème de représentation central fourni par Katsuno et Mendelzon. Ce théorème énonce qu'un opérateur de révision vérifie les postulats  $(R_1)$ – $(R_6)$  si et seulement si il induit un assignement fidèle  $\leq_\psi$  dont les éléments minimaux correspondent au résultat de la révision. Plus formellement le théorème s'énonce ainsi :

*Théorème* 4.1.1 (de représentation). Un opérateur de révision  $\circ$  vérifie les postulats  $(R_1)$  à  $(R_6)$  si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à  $\psi$  un préordre total  $\leq_\psi$  tel que :

$$Mod(\psi \circ \mu) = \text{Min}(Mod(\mu), \leq_\psi)$$

## Révision itérée et information totalement ordonnée

Le concept de révision itérée a été formalisé dans [DP97] et dans [Leh95]. Le problème est le suivant : comment intégrer une séquence d'informations  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  telle que ces informations soient toutes plus plausibles que les croyances initiales de l'agent et que ces informations soient de plus en plus « sûres ». En d'autres termes,  $\mu_i$  est plus plausible que  $\mu_j$  si  $i > j$ . De plus, le problème stipule que ces différentes informations doivent être traitées séquentiellement, c'est-à-dire qu'on ne peut pas attendre l'arrivée de l'information suivante pour traiter l'information qui vient d'être obtenue. Le principal intérêt de cette démarche est que la séquence d'informations n'est pas forcément cohérente mais que cette incohérence peut être prise en compte et traitée directement par l'opérateur de révision.

Tout d'abord, Darwiche et Pearl ne se cantonnent pas à un état épistémique représenté uniquement par une formule, mais à une structure plus générale, qui sera caractérisée par un théorème de représentation. Un état épistémique  $\Psi$  est une représentation abstraite pouvant être codée par une distribution de possibilité, par une distribution de probabilité, par une fonction conditionnelle ordinaire, par un préordre sur les interprétations, etc. La seule contrainte sera de pouvoir associer à  $\Psi$  une formule de la logique propositionnelle  $Bel(\Psi)$  correspondant aux croyances courantes de l'agent, croyances à partir desquelles il pourra prendre des décisions. Le résultat de la révision  $\Psi \circ \mu$  sera lui aussi un état épistémique et les croyances courantes de l'agent après la révision seront représentées par la formule  $Bel(\Psi \circ \mu)$ .

Ainsi les postulats AGM qui traitent de la révision d'une formule  $\psi$  par une formule  $\mu$  sont généralisés à la révision d'un état épistémique  $\Psi$  par une formule  $\mu$ , le résultat de cette révision étant un état épistémique  $\Psi \circ \mu$ . Ces postulats s'énoncent ainsi. Soient  $\mu$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  trois formules propositionnelles :

- ( $R_1^*$ )  $Bel(\Psi \circ \mu) \models \mu$
- ( $R_2^*$ ) si  $Bel(\Psi) \wedge \mu$  est cohérent, alors  $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv Bel(\Psi) \wedge \mu$
- ( $R_3^*$ ) si  $\mu$  est cohérent, alors  $Bel(\Psi \circ \mu)$  est aussi cohérent ;
- ( $R_4^*$ ) si  $\Psi_1 = \Psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $Bel(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi_2 \circ \mu_2)$
- ( $R_5^*$ )  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2 \models Bel(\Psi \circ (\mu_1 \wedge \mu_2))$
- ( $R_6^*$ ) si  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2$  est cohérente, alors  $Bel(\Psi \circ (\mu_1 \wedge \mu_2)) \models Bel(\Psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2$

À ces postulats, Darwiche et Pearl proposent d'ajouter les postulats suivants afin de traiter le problème de l'itération dans la révision et le comportement que doit avoir un « bon » opérateur de révision itérée.

- ( $C_1$ ) si  $\alpha \models \mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$
- ( $C_2$ ) si  $\alpha \models \neg\mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$
- ( $C_3$ ) si  $Bel(\Psi \circ \alpha) \models \mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \models \mu$
- ( $C_4$ ) si  $Bel(\Psi \circ \alpha) \not\models \neg\mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \not\models \neg\mu$

( $C_1$ ) stipule que si  $\mu$  est une conséquence de  $\alpha$ , alors les croyances issues de la révision de l'état épistémique  $\Psi$  par la formule  $\mu$  puis par la formule  $\alpha$  sont les mêmes que celles issues de la révision de  $\Psi$  par  $\alpha$ . Le postulat ( $C_2$ ) signifie quant à lui que si  $\neg\mu$  est une conséquence de  $\alpha$ , alors les croyances issues de la révision de  $\Psi$  par  $\mu$  puis par  $\alpha$  sont équivalentes aux croyances issues de la révision par  $\alpha$  : dans ce cas, la dernière information qui entre en jeu dans la séquence d'informations par laquelle on révise est toujours prioritaire.

( $C_3$ ) signifie que si  $\mu$  peut être inférée de  $Bel(\Psi \circ \alpha)$ , alors elle peut être inférée par  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha)$  : une croyance  $\mu$  doit être retenue si aucune nouvelle information n'est incohérente avec elle. Enfin ( $C_4$ ) montre que si  $Bel(\Psi \circ \alpha)$  n'infère pas  $\neg\mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha)$  ne doit pas inférer  $\neg\mu$ . En d'autres termes, si  $\mu$  n'est pas contradictoire avec la révision de  $\Psi$  par  $\alpha$ , alors il n'y a aucune raison pour que la révision de  $\Psi$  par  $\mu$  puis par  $\alpha$  ne conduise à une contradiction avec  $\mu$ .

D'autres postulats ont également été proposés dans le cadre de la révision itérée. Par exemple, Boutilier a proposé dans [Bou93] un postulat exprimant le fait que si le résultat de la révision de  $\Psi$  par  $\mu$  n'infère pas  $\neg\alpha$ , alors réviser par  $\mu$  puis par  $\alpha$  est équivalent à réviser directement par  $\alpha$ .

- ( $C_B$ ) si  $Bel(\Psi \circ \mu) \models \neg\alpha$  alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$

Le principal problème de ce dernier postulat est qu'il lie fortement les nouvelles informations  $\mu_i$  et qu'une étape précédente peut totalement être occultée, alors qu'une partie de cette précédente information pourrait être utilisée. C'est pourquoi Jin et Thielscher dans [JT07] et Booth et Meyer dans [BM06] ont proposé parallèlement un autre postulat pour caractériser des opérateurs de révision *admissibles*, c'est à dire ne souffrant pas du principal défaut de ( $C_B$ ).

- ( $C_{Adm}$ ) si  $Bel(\Psi \circ \mu) \not\models \neg\alpha$  alors  $Bel((\Psi \circ \alpha) \circ \mu) \models \alpha$

## 4.1 Révision et information totalement ordonnée

---

Enfin, nous avons proposé deux différents postulats pour l'itération [IJCAI'05] :

$$(C_{cond}) \quad Bel((\Psi \circ \mu) \circ \neg\mu) \equiv \neg\mu$$

$$(C_{lex}) \quad \text{si } \alpha \text{ est cohérente, } \alpha \models \mu \text{ et } \beta \models \neg\mu \text{ alors } Bel((\Psi \circ \mu) \circ (\alpha \vee \beta)) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$$

Le premier, quelque peu violent en terme de révision itérée, permet néanmoins de capturer la révision possibiliste [DP92], tandis que le suivant permet de capturer la révision à mémoire [Nay94, KPP00, Pap01] (voir également [Spo88] où celle-ci est traitée comme un cas extrême de conditionnement pour les OCF).

Ces postulats conduisent à un théorème de représentation tel que l'état épistémique peut être représenté de façon canonique par un préordre total  $\leq_\Psi$  et le résultat de la révision pourra être lui-même représenté par un préordre total  $\leq_{\Psi \circ \mu}$  dont les éléments minimaux sont les éléments préférés de la nouvelle information  $\mu$  par rapport à  $\leq_\Psi$ . Différentes propriétés sur  $\leq_{\Psi \circ \mu}$  peuvent également être induites en fonction des postulats d'itérations vérifiés par l'opérateur de révision étudié. Ces contraintes sont les suivantes :

- (IT<sub>1</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \models \mu$  alors ( $\omega <_\Psi \omega'$  ssi  $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$ )
- (IT<sub>2</sub>) si  $\omega \not\models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors ( $\omega <_\Psi \omega'$  ssi  $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$ )
- (IT<sub>3</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors ( $\omega <_\Psi \omega'$  implique  $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$ )
- (IT<sub>4</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors ( $\omega \leq_\Psi \omega'$  implique  $\omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$ )
- (IT<sub>CB</sub>) si  $\omega, \omega' \not\models Bel(\Psi \circ \mu)$  alors ( $\omega \leq_\Psi \omega'$  implique  $\omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$ )
- (IT<sub>A</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors ( $\omega \leq_\Psi \omega'$  implique  $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$ )
- (IT<sub>lex</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors  $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$
- (IT<sub>cond</sub>) si  $\omega \not\models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors  $\omega \approx_{\Psi \circ \mu} \omega'$

La propriété (IT<sub>1</sub>) (resp. (IT<sub>2</sub>)) signifie que l'ordre strict entre les modèles (resp. les contre-modèles) de la nouvelle information est préservé. (IT<sub>3</sub>) (resp. (IT<sub>4</sub>)) signifie que l'ordre strict (resp. le préordre) entre les modèles et les contre-modèles est également préservé. (IT<sub>CB</sub>) quant à lui exprime le fait que le préordre est totalement préservé, exception faite des éléments préférés de la révision. (IT<sub>lex</sub>) précise que chacun des modèles de la nouvelle information devient plus prioritaire que tous ses contre-modèles. Le (IT<sub>cond</sub>) énonce le fait que les contre-modèles de la nouvelle information sont tous mis au même niveau. Enfin, (IT<sub>A</sub>) stipule que l'ordre strict entre les modèles et les contre-modèles de la nouvelle information est préservé et que si un contre-modèle et un modèle étaient également préférés, le modèle devenait préféré après révision. Ces contraintes étant présentées, nous pouvons introduire le théorème de représentation suivant.

**Théorème 4.1.2** (de représentation). Un opérateur de révision  $\circ$  vérifie (R<sub>1</sub>') à (R<sub>6</sub>') si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à  $\Psi$  un préordre total  $\leq_\Psi$  et un assignement fidèle qui associe à  $\Psi \circ \mu$  un préordre total  $\leq_{\Psi \circ \mu}$  tels que :

$$Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = Min(\Omega, \leq_{\Psi \circ \mu}) = Min(Mod(\mu), \leq_\Psi)$$

De plus, si un opérateur  $\circ$  vérifie (R<sub>1</sub>\*) à (R<sub>6</sub>\*) et qu'en plus  $\circ$  vérifie l'un des postulats d'itération, les équivalences entre les différents (C<sub>i</sub>) avec les différentes contraintes (IT<sub>j</sub>) sont résumées par la table 4.1.

ssi	$(IT_1)$	$(IT_2)$	$(IT_3)$	$(IT_4)$	$(IT_{CB})$	$(IT_{lex})$	$(IT_{cond})$	$(IT_A)$
$(C_1)$	✓	-	-	-	-	-	-	-
$(C_2)$	-	✓	-	-	-	-	-	-
$(C_3)$	-	-	✓	-	-	-	-	-
$(C_4)$	-	-	-	✓	-	-	-	-
$(C_{CB})$	-	-	-	-	✓	-	-	-
$(C_{lex})$	✓	-	-	-	-	✓	-	-
$(C_{cond})$	-	-	-	-	-	-	✓	-
$(C_A)$	-	-	-	-	-	-	-	✓

Table 4.1 – Postulats de révisions itérée et états épistémiques

La question qui nous occupe maintenant et qui représente notre contribution principale à la dynamique des croyances est ainsi comment représenter la révision lorsque les informations ne sont que partiellement ordonnées et que deviennent les propriétés d'itération dans ce cadre ?

## 4.2 Généralisation aux ordres partiels

S'ils caractérisent de façon très satisfaisante le comportement rationnel d'un opérateur de révision dans le cas où l'information est totalement ordonnée, les postulats  $DP$  ne permettent pas de gérer les ordres partiels en ce sens qu'un opérateur vérifiant l'ensemble de ces postulats ne pourra traiter que des états épistémiques dont la représentation canonique est un préordre total. Il est ainsi étonnant de constater que l'un des postulats les moins critiqué dans la littérature (voir par exemple l'inventaire de [FH99]), le postulat ( $R_2$ ), est totalement incompatible avec la révision d'ordres partiels telle qu'elle semble la plus naturelle à définir.

Considérons l'exemple de la figure 4.2 étendant celui de la figure 4.1 qui représente un état épistémique par un préordre partiel  $\leq_\Omega$  sur l'ensemble des interprétations  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ . Les croyances courantes de l'agent, représentées par les minimaux de  $\Omega$ , en bleu sur la figure, sont donc telles que  $Mod(Bel(\Psi)) = \{\omega_2, \omega_3\}$ . Considérons une nouvelle information  $\mu$  telle que  $Mod(\mu) = \{\omega_1, \omega_3\}$  (en rouge sur la figure). Comme la nouvelle information  $\mu$  rejette  $\omega_2$ , il n'y a plus aucune raison de ne pas considérer  $\omega_1$  dans les nouvelles croyances de l'agent. Or, comme  $\mu$  est cohérente avec les croyances courantes, ( $R_2$ ), impose de ne considérer que  $\omega_3$  et impose de rejeter  $\omega_1$ .

Ainsi, le jeu de postulats méconnu et contenant ( $R_2$ ) proposé par Katsuno et Mendelzon de la section 5 de [KM91] pour traiter les préordres partiels échoue, puisqu'elle ne permet de capturer qu'une classe de préordres partiels : les ordres partiels dont les minimaux sont préférés à *tous* les autres éléments non-minimaux. Sur l'exemple précédent, un opérateur vérifiant leur ensemble de postulats imposerait le préordre partiel représenté par la figure 4.3 où l'ensemble des éléments minimaux de l'état épistémique de départ est préféré à tous les autres éléments.

De même, ( $R_6$ ) échoue à capturer l'information partiellement ordonnée, comme le montre l'exemple représenté par la figure 4.4 où  $\mu_1$  est telle que  $Mod(\mu_1) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  (en rouge sur la figure) et  $\mu_2$  est telle que  $Mod(\mu_2) = \{\omega_2, \omega_3\}$  (en bleu). Dans ce cas, il est naturel

## 4.2 Généralisation aux ordres partiel

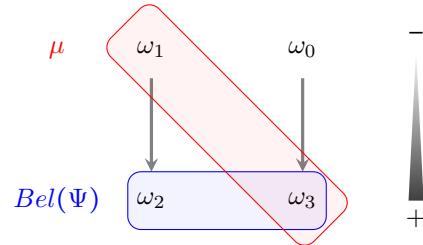


Figure 4.2 – Contre-exemple  $R_2$

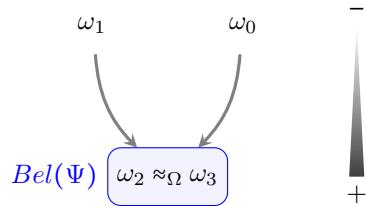


Figure 4.3 – Exemple de sous-classe capturée dans [KM91]

de considérer que  $Bel(\Psi \circ (\mu_1 \wedge \mu_2)) \equiv \{\omega_1, \omega_3\}$ , que  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \equiv \{\omega_2, \omega_3\}$  et donc que  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \wedge \mu_2 \equiv \{\omega_3\}$ , ce qui contredit ( $R_6$ ).

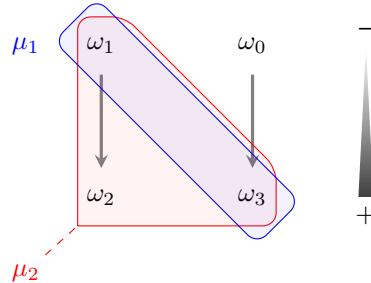


Figure 4.4 – Contre-exemple  $R_6$

### 4.2.1 Postulats pour l'information partiellement ordonnée

Nous avons donc proposé dans [IJCAI'05] l'ensemble de postulats suivant dans le but de traiter des informations partiellement ordonnées mais ne tombant pas dans les écueils précédemment décrits.

- (P<sub>1</sub>)  $Bel(\Psi \circ \mu) \vDash \mu$
- (P<sub>2</sub>)  $Bel(\Psi \circ \top) \equiv Bel(\Psi)$
- (P<sub>3</sub>) si  $\mu$  est cohérente, alors  $Bel(\Psi \circ \mu)$  est cohérent
- (P<sub>4</sub>) si  $\Psi_1 = \Psi_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $Bel(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi_2 \circ \mu_2)$
- (P<sub>5</sub>)  $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \varphi \vDash Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \varphi))$
- (P<sub>6</sub>) si  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \vDash \mu_2$  and  $Bel(\Psi \circ \mu_2) \vDash \mu_1$  alors  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi \circ \mu_2)$
- (P<sub>7</sub>)  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \wedge Bel(\Psi \circ \mu_2) \vDash Bel(\Psi \circ (\mu_1 \vee \mu_2))$

Les postulats (P<sub>1</sub>), (P<sub>3</sub>), (P<sub>4</sub>) et (P<sub>5</sub>) reprennent les postulats (R<sub>1</sub><sup>\*</sup>), (R<sub>3</sub><sup>\*</sup>), (R<sub>4</sub><sup>\*</sup>) et (R<sub>5</sub><sup>\*</sup>). Le postulat (P<sub>2</sub>) est un affaiblissement de (R<sub>2</sub>). Il impose simplement que la révision par la tautologie ne change pas les croyances courantes de l'agent. Il peut être noté que deux autres affaiblissements de (R<sub>2</sub>) découlent de (P<sub>2</sub>) (il s'agit de (R<sub>2</sub>') et de (R<sub>2w</sub>) [KM91]).

- (P<sub>2</sub>')  $Bel(\Psi) \wedge \mu \vDash Bel(\Psi \circ \mu)$
- (P<sub>2w</sub>) si  $Bel(\Psi) \vDash \mu$  alors  $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv Bel(\Psi) \wedge \mu$

Le postulat (P<sub>6</sub>) stipule que si les croyances issues de la révision de  $\Psi$  par  $\mu_1$  infèrent  $\mu_2$  et les croyances issues de la révision de  $\Psi$  par  $\mu_2$  infèrent  $\mu_1$ , alors la révision par  $\mu_1$  et la révision par  $\mu_2$  aboutissent aux mêmes croyances. Le postulat (P<sub>7</sub>) quant à lui capture le fait que la conjonction des croyances issues de la révision de  $\Psi$  par  $\mu_1$  avec les croyances issues de la révision de  $\Psi$  par  $\mu_2$  ont comme conséquence les croyances issues de la révision de  $\Psi$  par la disjonction de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . On trouve trace également des postulats (P<sub>6</sub>) et (P<sub>7</sub>) dans [KM91] (ils y sont dénommés respectivement (R<sub>7</sub>) et (R<sub>8</sub>)).

Dans l'optique d'obtenir un théorème de représentation équivalent aux théorèmes précédents, nous devons redéfinir le concept d'assignement fidèle pour le cas des ordres partiels. A cette fin, il est nécessaire d'étendre les concepts de modularité aux ordres partiels.

#### 4.2.2 Modularité, assignements fidèles et théorème de représentation

À partir d'un préordre partiel, il est possible de définir une famille de préordres totaux. Cette famille est basée sur une extension de la propriété de modularité que l'on peut trouver dans [LM92] par exemple et que nous avons rappelée section 2.1.3, page 12. La principale différence est que la généralisation que nous proposons peut évidemment s'appliquer aux ordres partiels.

*Définition* 4.2.1 (Complétion modulaire). Soit  $\leq_\Psi$  un préordre partiel sur  $\Omega$ . Le préordre partiel  $\leq'_\Psi$  est appelée complétion modulaire de  $\leq_\Psi$  si les propriétés suivantes sont vérifiées. Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux éléments de  $\Omega$  :

1.  $\omega_1 <_\Psi \omega_2$  **ssi**  $\omega_1 <'_\Psi \omega_2$
2.  $\omega_1 \approx_\Psi \omega_2$  implique  $\omega_1 \approx'_\Psi \omega_2$
3. if  $\omega_1 \approx'_\Psi \omega_2$  alors :
  - (a)  $\forall \omega_3 \in \Omega$  tel que  $\omega_3 <_\Psi \omega_1$ , alors on a  $\omega_3 <'_\Psi \omega_2$  et

## 4.2 Généralisation aux ordres partiels

(b)  $\forall \omega_3 \in \Omega$  tel que  $\omega_1 <_{\Psi} \omega_3$ , alors on a  $\omega_2 <'_{\Psi} \omega_3$

La complémentation modulaire remplace donc certaines incomparabilités par la relation d'équivalence  $\approx_{\Psi}$  si et seulement si les éléments ainsi comparés ont le même comportement vis à vis de toutes les autres interprétations du point de vue de la contrepartie stricte  $<_{\Psi}$ , tout en préservant cette dernière. Ainsi, une propriété intéressante des complétiions modulaires est qu'elles possèdent les mêmes minimaux que leur préordre initial, quel que soit le sous-ensemble de  $\Omega$  considéré.

*Proposition 4.2.1.* Soit  $\leq'_{\Psi}$  une complétiion modulaire de  $\leq_{\Psi}$  alors :

$$\forall E \subseteq \Omega, \text{Min}(E, \leq'_{\Psi}) = \text{Min}(E, \leq_{\Psi})$$

À partir d'un préordre quelconque et de son ordre associé, on peut construire une famille de préordre en complétant *modulairement* chacune des incomparabilités. Un cas particulier et extrême sera la fermeture modulaire de l'ordre associé au préordre de départ.

*Définition 4.2.2 (Fermeture modulaire).*  $\leq_{\Psi}^{MC}$  est la fermeture modulaire de  $\leq_{\Psi}$  **ssi** :

- $\leq_{\Psi}^{MC}$  est une complétiion modulaire de  $\leq_{\Psi}$  et
- quelque soit la complétiion modulaire  $\leq_{\Psi}^{MC'}$  de  $\leq_{\Psi}^{MC}$ , on a  $\leq_{\Psi}^{MC'} = \leq_{\Psi}^{MC}$

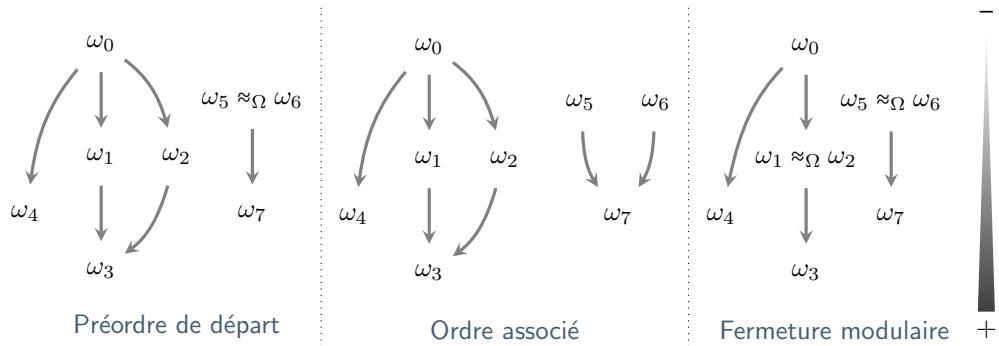


Figure 4.5 – Exemple de modularité

Afin d'illustrer ces concepts gravitant autour de la modularité, considérons les différents préordres représentés par la figure 4.5. Du préordre de départ, deux cas extrêmes peuvent être construits : l'ordre associé au préordre de départ que l'on peut obtenir en supprimant l'ensemble des relations d'équivalences  $\approx_{\Psi}$  et la fermeture modulaire qui à l'inverse supprime les incomparabilités dès que cela est possible. Ici, comme  $\omega_1$  et  $\omega_2$  se comportent de la même façon avec  $\omega_0$  et  $\omega_3$ , ils peuvent être comparés. À l'opposé,  $\omega_4$  ne peut être regroupé avec eux puisqu'il n'est pas strictement supérieur à  $\omega_3$ .

Nous pouvons maintenant introduire la notion de P-assignement fidèle, généralisation de la notion d'assignement fidèle, dont l'écriture proposée dans [KM91] ne permet pas de capturer les préordres partiels. Ce P-assignement fidèle fournira une représentation canonique pour notre théorème de représentation sous forme de préordre partiel.

*Définition 4.2.3* (P-assignement fidèle). Une fonction associant à un état épistémique  $\Psi$  un préordre partiel sur  $\Omega$  noté  $\leq_\Psi$  est un P-assignement fidèle si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) si  $\omega, \omega' \models Bel(\Psi)$  alors on n'a pas  $\omega <_\Psi \omega'$
- (2) si  $\omega' \not\models Bel(\Psi)$ , alors il existe  $\omega$  tel que  $\omega \models Bel(\Psi)$  et  $\omega <_\Psi \omega'$ ,
- (3) si  $\Psi = \Phi$ , alors  $\leq_\Psi = \leq_\Phi$ .

Ceci nous permet maintenant d'énoncer le théorème de représentation associé à l'ensemble de postulats proposés en début de section. Nous reprenons également les propriétés concernant les postulats d'itération et leurs contraintes associées, étendues aux préordres.

*Théorème 4.2.1* (de représentation). Un opérateur de révision  $\circ$  vérifie  $(P_1)$  à  $(P_7)$  si et seulement si il existe un P-assignement fidèle qui associe à  $\Psi$  un préordre  $\leq_\Psi$  et un P-assignement fidèle qui associe à  $\Psi \circ \mu$  un préordre  $\leq_{\Psi \circ \mu}$  tels que :

$$Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = Min(\Omega, \leq_{\Psi \circ \mu}) = Min(Mod(\mu), \leq_\Psi)$$

De plus, si un opérateur  $\circ$  vérifie  $(P'_1)$  à  $(P'_7)$  et qu'en plus  $\circ$  vérifie l'un des postulats d'itération, les équivalences entre les différents  $(C_i)$  avec les différentes contraintes  $(IT_j)$  **induites sur les fermetures modulaires**  $\leq'_\Psi$  et  $\leq'_{\Psi \circ \mu}$  sont résumées par la table 4.2.

ssi	$(IT'_1)$	$(IT'_2)$	$(IT'_3)$	$(IT'_4)$	$(IT'_{CB})$	$(IT'_{lex})$	$(IT'_{cond})$	$(IT'_A)$
$(C_1)$	✓	-	-	-	-	-	-	-
$(C_2)$	-	✓	-	-	-	-	-	-
$(C_3)$	-	-	✓	-	-	-	-	-
$(C_4)$	-	-	-	✓	-	-	-	-
$(C_{CB})$	-	-	-	-	✓	-	-	-
$(C_{lex})$	✓	-	-	-	-	✓	-	-
$(C_{cond})$	-	-	-	-	-	-	✓	-
$(C_A)$	-	-	-	-	-	-	-	✓

Table 4.2 – Postulats de révisions itérée et états épistémiques

Notez bien que le présent théorème de représentation est également valide si on ne considère pas la fermeture modulaire, mais n'importe quel préordre obtenu à partir de complétions modulaires appliquée à l'ordre associé au préordre de départ. Néanmoins, la différence essentielle tient en la réécriture des contraintes d'itération qui ne peuvent plus être transposées directement.

La distinction entre l'incomparabilité  $\sim$  et l'équivalence  $\approx$  des ordres partiels prend tout son sens dans le cas des P-assignements fidèles et de la révision itérée. Deux interprétations sont équivalentes pour  $\approx_\Psi$  si et seulement si elles ne sont séparables que par révision avec une formule ne les contenant pas toutes les deux. À l'inverse, deux interprétations incomparables peuvent être discernées même si elles interviennent toutes les deux dans la nouvelle information.

### 4.3 Exemples d'opérateurs

---

**4.3 Exemples d'opérateurs**

Nous présentons dans cette section différents opérateurs vérifiant notre ensemble de postulats pour la révision d'informations partiellement ordonnées. Ces opérateurs sont étroitement liés aux méthodes de raisonnement présentées Section 2.3.

Nous avons donc proposé dans [NMR'02] différentes méthodes de révision sur les préordres partiels étendant 3 opérateurs de révision bien connus, la révision naturelle  $\circ_{nat}$  [Bou93], la révision avec mémoire  $\circ_{mem}$  [Nay94, KPP00, Pap01] et la révision possibiliste  $\circ_\pi$  [DP92]. Ces extensions ont été définies tant d'un point de vue sémantique que syntaxique. Nous ne rappellerons pas ici leur définition formelle, mais illustrons juste leur fonctionnement par la figure 4.6. Celle-ci présente un exemple pour chacun de ces opérateurs, qui considère le même état épistémique de départ,  $\Psi$  et la même nouvelle information  $\mu \equiv \{\omega_0, \omega_2, \omega_6\}$ .

La révision avec mémoire conserve l'ordre entre tous les modèles de la nouvelle information, l'ordre entre les contre-modèles de l'information et considère tous les modèles préférés à tous les contre-modèles. La révision possibiliste conserve elle aussi l'ordre entre les modèles, et préfère tous les modèles aux contre-modèles mais elle met tous les contre-modèles au même niveau. Enfin, la révision naturelle conserve l'ordre de départ, exceptés les meilleurs modèles de  $\mu$  qui sont tous préférés à tous les autres.

	$(C_1)$	$(C_2)$	$(C_3)$	$(C_4)$	$(C_{CB})$	$(C_{lex})$	$(C_{cond})$	$(C_A)$
$\circ_{mem}$	✓	✓	✓	✓	-	✓	-	✓
$\circ_\pi$	✓	-	✓	✓	-	-	✓	✓
$\circ_{nat}$	✓	✓	✓	✓	✓	-	-	-

Table 4.3 – Postulats de révision itérée vérifiés

Chacun de ces opérateurs vérifie  $(P_1) - (P_7)$  et le tableau 4.3 suivant donne leur comportement en terme de révision itérée. De plus, il est intéressant de constater que pour chacun de ces opérateurs le nombre d'incomparabilités diminue (ou au mieux reste le même) à chaque étape de révision. Les opérateurs naturel et à mémoire tendent même vers un ordre total. Ce comportement est sain puisqu'en révision itérée la séquence d'informations est de plus en plus certaine ; ainsi chaque étape de révision permet de mieux discriminer les interprétations.

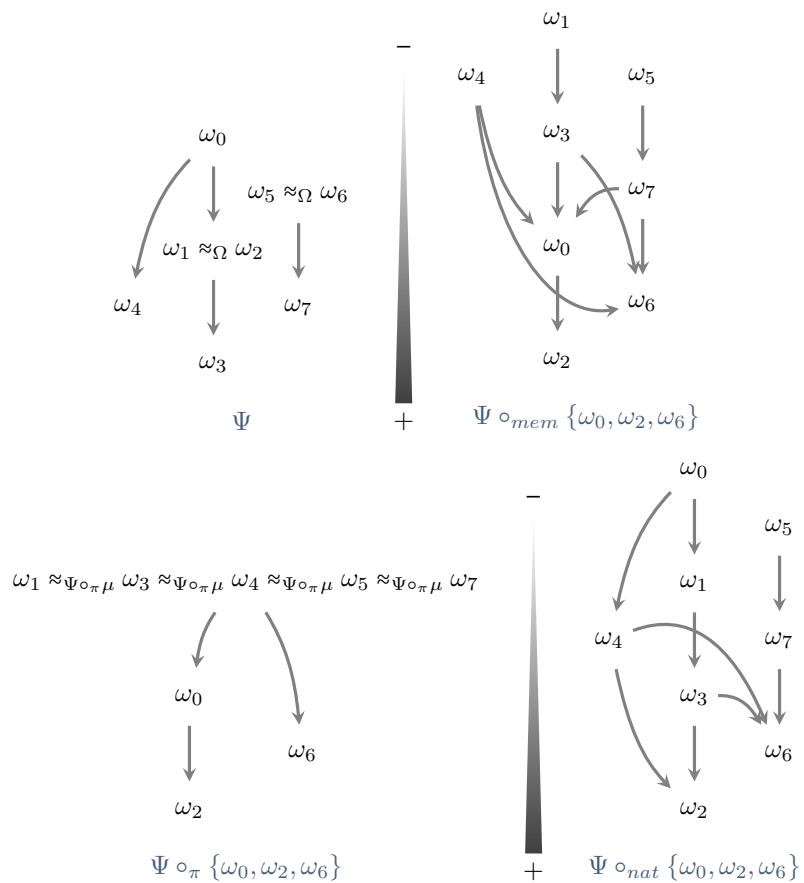
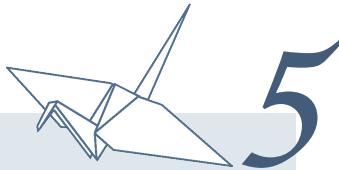


Figure 4.6 – Exemples d'opérateurs de révision

### 4.3 Exemples d'opérateurs

---



## Fusion sans hypothèse de commensurabilité

Confronter différents points de vue, malgré leurs incohérences et leurs incertitudes, afin de produire une image la plus complète possible du monde est l'objet même de la fusion de croyances. Ce problème de fusion d'informations survient dès qu'il faut prendre en compte des bases de données distribuées, des systèmes multi-agents ou tous les cas d'informations distribuées en général (le web restant l'exemple le plus frappant).

Parmi les nombreux opérateurs qui ont été proposés dans la littérature pour la fusion d'informations incertaines (voir par exemple [KLM04, Mey01] ou encore [KPP02, BDKP02, EKM08a, Rev97]), toutes font l'hypothèse que les échelles d'évaluation de l'incertitude ou de la pertinence des informations est commune à l'ensemble des sources. En d'autres termes, ces méthodes supposent que tous les poids, utilisés pour quantifier l'incertitude ou l'importance des formules, sont commensurables. Cette hypothèse est d'autant plus nécessaire que les méthodes pré-citées s'appuient généralement sur des opérateurs d'agrégation. En particulier, l'opérateur de fusion basé sur la somme jouit d'une certaine popularité. En effet, cet opérateur satisfait de nombreuses propriétés intuitives, par exemple celle de la majorité, et il adopte un attitude discriminante au moment de dériver ses conclusions.

Cette hypothèse de commensurabilité fait réellement sens lorsque, par exemple, les pondérations représentent une ressource monétaire, lorsqu'elles sont issues de protocole de notation ou encore lorsque les valeurs que prennent les poids ne sont pas trop éloignées les unes des autres. En revanche, elle est beaucoup trop forte lorsque les informations proviennent de sources réellement hétérogènes et qu'elles ne partagent pas d'échelle commune.

Les travaux présentés maintenant ont été réalisés dans le cadre de la thèse de Julien Rossit, co-encadrée avec Salem Benferhat [Ros09], thèse dans laquelle les résultats sont présentés de façon beaucoup plus complète.

## 5.1 Le cadre commensurable

Nous présentons tout d'abord différents cadres de fusion pour lesquels l'hypothèse de commensurabilité est nécessaire, tout d'abord dans un cadre « tout ou rien » puis dans un cadre pondéré.

### 5.1.1 Cadre tout ou rien

Dans le cadre de la logique des propositions, les bases de croyances à fusionner sont représentées sous forme d'un ensemble fini de formules propositionnelles  $B_i$ . Chacune des bases de croyances propositionnelles  $B_i$  peut être vue comme une formule  $\varphi_i$  qui est en fait la conjonction des formules propositionnelles issues de  $B_i$ . Nous désignons par  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  le multi-ensemble de bases de croyances propositionnelles à fusionner. Nous prenons comme hypothèse de travail que chaque base est cohérente : il paraît en effet naturel de considérer qu'une base incohérente n'apporte pas d'information et doit être rejetée du processus de fusion.

Nous notons  $\Delta^\mu$  un opérateur de fusion d'un multi-ensemble de bases  $E$  en présence d'une contrainte d'intégrité  $\mu$  et  $\Delta^\mu(E)$  le résultat de cette fusion fourni sous forme d'une formule propositionnelle classique. Konieczny et Pino Pérez proposent dans [KPP02] une axiomatisation du problème de fusion, sous forme d'un ensemble de postulats de rationalité caractérisant le comportement d'un opérateur de fusion.

- (IC<sub>0</sub>)  $\Delta^\mu(E) \vDash \mu$
- (IC<sub>1</sub>) Si  $\mu$  est cohérente, alors  $\Delta^\mu(E)$  est cohérente
- (IC<sub>2</sub>) Si  $\bigwedge_{B \in E} B$  est cohérent avec  $\mu$ , alors  $\Delta^\mu(E) \equiv \bigwedge_{B \in E} B \wedge \mu$
- (IC<sub>3</sub>) Si  $E_1 \equiv E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\Delta_{\mu_1}(E_1) \equiv \Delta_{\mu_2}(E_2)$
- (IC<sub>4</sub>) Si  $B_1 \vDash \mu$  et  $B_2 \vDash \mu$ , alors  $\Delta^\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_1$  est cohérentssi  
 $\Delta^\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_2$  est cohérent
- (IC<sub>5</sub>)  $\Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2) \vDash \Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)$
- (IC<sub>6</sub>) Si  $\Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2)$  est cohérent, alors  $\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2) \vDash \Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2)$
- (IC<sub>7</sub>)  $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \vDash \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$
- (IC<sub>8</sub>) si  $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$  est cohérent, alors  $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \vDash \Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$

Le symbole  $\sqcup$  représente l'union des multi-ensembles. Le postulat (IC<sub>0</sub>) assure que le résultat de la fusion  $\Delta^\mu(E)$  satisfait la contrainte d'intégrité  $\mu$ . (IC<sub>1</sub>) stipule que si la contrainte à satisfaire est cohérente, alors le résultat de la fusion l'est également. (IC<sub>2</sub>) signifie que lorsque c'est possible, le résultat de la fusion est simplement la conjonction des bases de croyances avec la contrainte d'intégrité. (IC<sub>3</sub>) représente le principe d'*indépendance de la syntaxe*, c'est-à-dire si deux multi-ensembles de bases de croyances sont équivalents, et si deux contraintes d'intégrité sont logiquement équivalentes, alors les résultats des deux fusions sont également logiquement équivalents. Le postulat (IC<sub>4</sub>) signifie quant à lui que lorsque les bases de croyances sont fusionnées deux à deux, aucune priorité n'est alors donnée à l'une de

ces bases. Les postulats ( $IC_5$ ) et ( $IC_6$ ), considérés conjointement, stipulent que s'il est possible de trouver deux sous-groupes de sources en accord sur au moins une interprétation, alors le résultat de la fusion est exactement les interprétations sur lesquelles ces deux groupes sont en accord. Finalement, ( $IC_7$ ) et ( $IC_8$ ) signifient conjointement que la notion de *proximité* de [KM91] est respectée.

En complément de ces postulats, les postulats additionnels suivants ont également été proposés dans [KPP02] :

- ( $IC6'$ ) Si  $\Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2)$  est cohérent, alors  $\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2) \vDash \Delta^\mu(E_1) \vee \Delta^\mu(E_2)$
- ( $Maj$ )  $\exists m \in \mathbb{N} : \Delta^\mu(E \sqcup B_i^m) \vDash B_i^*$  avec  $B_i^m = \underbrace{\{B_i\} \sqcup \dots \sqcup \{B_i\}}_{m \text{ fois}}$
- ( $Mi$ )  $\forall m, \Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2^m) \equiv \Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)$

Le postulat de *majorité* ( $Maj$ ) caractérise le fait que si un ensemble de croyances particulier est répété un nombre suffisant de fois par l'ensemble des bases de croyances à fusionner, alors cet ensemble d'informations doit être accepté par le résultat de la fusion. À l'inverse, la notion d'*indépendance de la majorité* signifie que le résultat du processus de fusion doit être totalement indépendant de la redondance des croyances. Enfin, ( $IC'_6$ ) est une version affaiblie du postulat de rationalité ( $IC_6$ ).

Ici encore, un théorème de représentation a été proposé. Pour cela, Konieczny et Pino Pérez proposent également dans [KPP02] la notion d'*assignement syncrétique*. Un tel assignement est une fonction qui associe chaque multi-ensemble de bases de croyances  $E$  à un pré-ordre total sur les interprétations de  $\Omega$ , noté  $\leq_E$  tel que pour tous multi-ensembles  $E$ ,  $E_1$  et  $E_2$ , pour toutes bases de croyances  $B_i$  et  $B_j$ , les conditions suivantes sont respectées, la notation  $\omega \vDash E$  signifiant que quelque soit la base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ ,  $\omega \vDash B_i$  :

- (1) si  $\omega \vDash E$  et  $\omega' \vDash E$ , alors  $\omega \simeq_E \omega'$
- (2) si  $\omega \vDash E$  et  $\omega' \not\vDash E$ , alors  $\omega <_E \omega'$
- (3) si  $E_1 \equiv E_2$ , alors  $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$
- (4)  $\forall \omega : \omega \vDash B_i, \exists \omega' : \omega' \vDash B_j$  tel que  $\omega' \leq_{\{B_i, B_j\}} \omega$
- (5) si  $\omega \leq_{E_1} \omega'$  et  $\omega \leq_{E_2} \omega'$  alors  $\omega' \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega$
- (6) si  $\omega \leq_{E_1} \omega'$  et  $\omega <_{E_2} \omega'$  alors  $\omega' <_{E_1 \sqcup E_2} \omega$

Une discussion complète de ces conditions est également proposée dans [KPP02]. Les conditions (1) et (2) assurent que les modèles d'un multi-ensemble de croyances, s'ils existent, sont les interprétations les plus plausibles pour le préordre associé à cet ensemble. La condition (3) stipule que deux multi-ensembles équivalents sont associés à des préordres équivalents. La condition (4) signifie que lorsque deux bases de croyances sont fusionnées, aucune priorité n'est donnée à l'une de ces deux bases. La condition (5) affirme que si une interprétation  $\omega$  est préférée à une autre interprétation  $\omega'$  respectivement selon deux ensembles de croyances, alors  $\omega$  reste préférée à  $\omega'$  si ces deux ensembles sont réunis. De plus, la condition (6) renforce cette condition et dit que si  $\omega$  est strictement préférée à  $\omega'$  selon un des deux ensembles considérés, alors  $\omega$  devient strictement préférée à  $\omega'$  si ces deux ensembles sont réunis. Ces

## 5.1 Le cadre commensurable

---

deux conditions sont étroitement liées au critère de Pareto dans le cadre de la théorie du choix social [Arr63, Mou88].

Les ensembles de postulats et de conditions présentés précédemment permettent alors d'obtenir le théorème de représentation suivant :

*Théorème 5.1.1* (de représentation). Un opérateur  $\Delta$  est un opérateur de fusion vérifiant (*IC*<sub>0</sub>) – (*IC*<sub>8</sub>) si et seulement si il existe un assignement syncréétique associant à tout multi-ensemble de bases de croyances  $E$  un pré-ordre total sur les interprétations  $\leq_E$  tel que :

$$Mod(\Delta^\mu(E)) = \text{Min}(Mod(\mu), \leq_E)$$

Le préordre sur les interprétations  $\leq_E$  représente alors le résultat de la fusion d'un multi-ensemble  $E$  par l'opérateur de fusion  $\Delta$ . De part ce théorème de représentation, et d'une façon similaire au cadre de la révision des croyances, le problème de la fusion d'un ensemble de sources  $E$  peut alors se réduire à identifier les interprétations minimales pour l'ordre associé au multi-ensemble de sources à fusionner  $E$ .

### 5.1.2 Le cadre pondéré

La fusion d'informations incertaines et pondérées a été également étudiée, d'un point de vue possibiliste [BDKP02, Kac02, DLP92b] ou plus récemment dans [GLB06], et du point de vue des OCF [Mey01]. Le cadre pondéré ne considère plus simplement un multi-ensemble de formules, mais un multi-ensemble de  $n$  bases pondérées  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ , ici encore cohérentes (c'est à dire dont les formules privées de leur poids sont cohérentes). Au niveau de chaque base, nous nous plaçons pour la représentation individuelle des croyances des agents dans le cadre de fonctions  $\kappa$  définies à partir de l'opérateur max rappelé dans la section 3.1. Pour alléger les écritures,  $\kappa_B(\omega)$  sera dans ce chapitre équivalente à  $\kappa_{\max_B}(\omega)$ . Nous nous intéressons ici à deux opérateurs de fusion particuliers, basés sur les opérateurs d'agrégation  $\Sigma$  et max, emblématiques respectivement des opérateurs majoritaires et des opérateurs indépendants de la majorité.

Afin de déterminer le résultat de la fusion d'un multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E$ , chaque interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  est dans un premier temps associée à un *profil*, noté  $\nu_E(\omega)$ , et défini formellement de la façon suivante :

$$\nu_E(\omega) = \langle \kappa_{B_1}(\omega), \dots, \kappa_{B_n}(\omega) \rangle$$

Ce profil représente la cohérence de  $\omega$  vis-à-vis de chaque base. Les degrés de cohérence  $\kappa_{B_i}(\omega)$  exprimés par ces profils sont ensuite manipulés au moyen d'un opérateur d'agrégation, dans le but d'associer chaque interprétation de  $\Omega$  à un poids unique, issu de l'agrégation des différents profils. Les interprétations associées aux poids les plus petits sont les plus plausibles.

$$\omega \triangleleft_{\odot}^E \omega' \text{ssi } \odot(\nu_E(\omega)) < \odot(\nu_E(\omega'))$$

Le résultat de la fusion contiendra les éléments minimaux pour cet ordre :

$$Mod(Bel(\Delta_{\odot}^\mu(E))) = \text{Min}(Mod(\mu), \triangleleft_{\odot}^E)$$

Les postulats présentés dans la section précédente ne peuvent pas être directement utilisés puisqu'ils s'appuient sur des formules logiques et non sur des bases pondérées. Différents jeux de postulats pour le cas pondéré ont été proposés dans la littérature. Par exemple on peut trouver un jeu de postulats dans [BK03] ainsi qu'un théorème de représentation, malheureusement valide dans un cadre assez restreint. Par ailleurs, les auteurs de [DDL06] présentent une révision originale et intéressante : la fusion d'informations avec priorité y est vue comme une cas particulier de vision itérée. Ils proposent un nouveau jeu de postulats, cependant ces postulats ne semblent pas capturer les postulats  $IC$  dans le cas de bases *plates*. Nous utilisons par la suite les postulats que nous avons proposée dans [AAAI'07]. Ces postulats sont la réécriture des postulats de Konieczny et Pino Pérez à la de Darwiche et Pearl pour la révision itérée, c'est à dire en considérant qu'il existe une formule  $Bel(B)$  représentant les croyances courantes de l'agent (rappelons également que  $B^*$  représente l'ensemble des formules propositionnelles apparaissant dans  $B$ ).

- ( $IC_0^*$ )  $Bel(\Delta^\mu(E)) \vDash \mu$
- ( $IC_1^*$ ) si  $\mu$  est cohérent, alors  $Bel(\Delta^\mu(E))$  est cohérent
- ( $IC_2^*$ ) si  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  est cohérent avec  $\mu$ , alors  $Bel(\Delta^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B \in E} B^* \wedge \mu$
- ( $IC_3^*$ ) si  $E_1 \equiv_r E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $Bel(\Delta^{\mu_1}(\{E_1\})) \equiv Bel(\Delta^{\mu_2}(\{E_2\}))$
- ( $IC_4^*$ ) si  $B_1^* \vDash \mu$  et  $B_2^* \vDash \mu$ , alors  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^* \text{ est cohérentssi } Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^* \text{ est cohérent}$
- ( $IC_5^*$ )  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2)) \vDash Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2))$
- ( $IC_6^*$ ) si  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$  est cohérent, alors  $Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \vDash Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$
- ( $IC_7^*$ )  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2 \vDash Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$
- ( $IC_8^*$ ) si  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$  est cohérent, alors  $Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)) \vDash Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$

De même, le postulat ( $IC_6'^*$ ) ainsi que ceux de majorité et d'indépendance à la majorité peuvent être réécrits ainsi :

- ( $IC_6'^*$ ) si  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$  est cohérente, alors  $Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \vDash Bel(\Delta^\mu(E_1)) \vee Bel(\Delta^\mu(E_2))$
- ( $Maj^*$ )  $\exists m \in \mathbb{N} : Bel(\Delta^\mu(E \sqcup \{B_i^m\})) \vDash B_i^*$
- ( $Mi^*$ )  $\forall m \in \mathbb{N}, Bel(\Delta^\mu(E \sqcup \{B_i^m\})) \equiv Bel(\Delta^\mu(E \sqcup B_i))$

Nous avons proposé dans [JLC'09] et [SUM'09] une étude complète de ces opérateurs vis à vis des postulats proposés. Ainsi, les opérateurs de fusion  $\Delta_{Max}^\mu$  et  $\Delta_\Sigma^\mu$  vérifient les postulats ( $IC_0^*$ ) – ( $IC_3^*$ ). En revanche, aucun d'entre eux ne vérifie le postulat d'équité ( $IC_4^*$ ). La principale différence tient au fait que  $\Delta_{Max}^\mu$  vérifie le postulat d'indépendance à la majorité ( $Mi^*$ ) et ( $IC_6'^*$ ), tandis que  $\Delta_\Sigma^\mu$  satisfait le postulat de majorité ( $Maj^*$ ) et ( $IC_6^*$ ).

## 5.2 Traitement de l'incommensurabilité

Les opérateurs de fusion que l'on peut trouver dans la littérature reposent généralement sur une hypothèse forte : l'agrégation de différents poids (ou de distances) par la somme ou par le maximum impose que les poids soient commensurables. En d'autres termes, les agents doivent posséder les mêmes échelles d'évaluation de la pertinence de leurs informations. Lorsque ces poids représentent des utilités ou des gains, cette hypothèse se justifie totalement. Mais lorsque ces poids proviennent de sources hétérogènes, dont les qualités intrinsèques diffèrent ou sont inconnues (on pourrait prendre l'exemple d'informations tirées du web, des témoignages de personnes dont on ne sait pas si elles ont assisté à la scène ou encore des domaines demandant une forte expertise), cette hypothèse n'a pas de sens.

Par conséquent, une grande prudence doit être observée dans ce cadre et aucun « avis » ne doit être a priori rejeté, même s'il est minoritaire. Ainsi les connaissances d'une sommité mondiale de physique quantique seront toujours plus plausibles sur ce sujet que celles de 60 millions de ses concitoyens. Nous avons proposé un nouveau postulat, dit de *consensus*, lorsque l'on traite des données incommensurables. Ce postulat est un renforcement de ( $IC_4^*$ ) et est défini ainsi :

$$(CSS) \quad \forall B_i \in E, \text{ si } B_i^* \models \mu, \text{ alors } B_i^* \wedge Bel(\Delta^\mu(E)) \text{ est cohérent}$$

Les opérateurs de fusion adoptant un comportement de *consensus* tentent de satisfaire un minimum toute source considérée. En effet, ceux-ci sélectionnent au moins un modèle de chaque base de croyances pondérées à fusionner, pour peu que cette dernière soit cohérente et ne rentre pas en contradiction avec la contrainte. Ainsi, ces opérateurs font preuve d'un comportement très prudent face aux conflits entre sources, et sont particulièrement adaptés lorsque les divergences entre ces mêmes sources sont minimes. Bien évidemment, ces opérateurs peuvent conduire à des situations d'ignorance totale dans des cas de forte contradiction entre les sources à fusionner, mais dans ce cas, compte tenu de l'hypothèse d'incommensurabilité, l'information de départ est réellement très « pauvre ». Signalons que cette notion est très proche de la notion de *tempérance* proposée dans [EKM08b], et adaptée ici au cadre des bases de croyances pondérées :

$$(TMP) \quad \forall B_i \in E, \quad B_i^* \wedge Bel(\Delta^\top(E)) \text{ est cohérent}$$

### Échelles compatibles

Nous avons proposé une approche naturelle et prudente reposant sur l'utilisation de l'ensemble des échelles compatibles [AAAI'07]. Cette méthode affecte de nouveaux poids aux différentes informations contenues dans les différentes bases de croyance, tout en maintenant l'ordre à l'intérieur de chaque base. Ceci revient à affecter une fonction strictement croissante à l'ensemble des poids de chacune des bases. Plus formellement une échelle compatible  $\mathcal{S}$  est un vecteur de fonctions strictement croissantes  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_n\}$  qui associe à  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un nouveau multi-ensemble  $E^{\mathcal{S}} = \{B_1^{\mathcal{S}}, \dots, B_n^{\mathcal{S}}\}$  tel que :

$$B_i^{\mathcal{S}} = \{(\varphi, f_i(r)) : (\varphi, r) \in B_i\}$$

Nous notons  $\mathbb{S}_E$  l'ensemble des échelles compatibles de  $E$ .

À partir de cette définition, la définition de la fusion peut être aisément étendue au cas incommensurable en définissant tout d'abord un ordre strict sur les interprétations et en considérant les éléments minimaux pour cet ordre :

- $\omega \blacktriangleleft_{\odot}^E \omega'$ ssi  $\forall S \in \mathbb{S}_E, \omega \triangleleft_{\odot}^{E^S} \omega'$  avec  $\odot \in \{\max, \Sigma\}$
- $Mod(Bel(\Delta_{\odot}^{\mu}(E))) = Min(Mod(\mu), \blacktriangleleft_{\odot}^E)$  avec  $\odot \in \{\max, \Sigma\}$

Nous avons tout d'abord proposé des caractérisations en terme d'ordre sur les profils pour ces deux opérateurs de fusion. Ainsi, l'ordre  $\blacktriangleleft_{\Sigma}^E$  s'avère équivalent à un ordre de Pareto [Mou88]. L'originalité dans nos résultats provient plutôt de la caractérisation de  $\blacktriangleleft_{\max}^E$  qui s'avère être un ordre de type Pareto (noté  $\Delta_{Par}$ ), l'ordre SMP (pour Strict Models for Pareto). Celui-ci se comporte comme un Pareto strict, exception faite qu'il ne prend pas en compte les composantes de deux profils pour la comparaison si celles-ci sont toutes deux égales à 0. Plus formellement,  $\omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$ ssi :

1.  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , tel que  $\kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$
2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,
  - soit  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') = 0$
  - soit  $\kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$

### Sélectionner des échelles

Considérer l'ensemble des échelles compatibles produit un résultat prudent reposant sur l'hypothèse forte d'incommensurabilité, justifié par l'absence d'informations permettant de sélectionner un sous-ensemble d'échelles compatibles. Nous avons donc étudié des affaiblissements de l'hypothèse d'incommensurabilité afin d'obtenir des ensembles d'échelles compatibles plus restreints. On trouve également ce type de restrictions en théorie du choix social avec les problèmes d'intercomparabilité des utilités [Sen82]. Nous avons pour cela dégagé différentes classes d'incommensurabilité :

- la classe des échelles bornées  $S^{(p)}$  : le plus grand poids associé à une échelle ne peut dépasser un seuil fixé, représenté par un entier positif  $p$ . Cette classe empêche de considérer des poids arbitrairement grands.
  - la classe des échelles linéaires  $S^l$  : cette classe maintient la proportion entre les poids à une constante translatable près ;
  - la classe des échelles proportionnelles  $S^w$  : cette classe maintient la proportion entre les poids d'une source donnée ;
  - la classe des échelles translatives  $S^s$  : cette classe maintient la distance entre les différents poids pour une source donnée, seule la distance des poids à 0 peut être augmentée.
- La table 5.1 donne une définition formelle de chacune de ces restrictions.

Les échelles bornées font réellement sens, puisque dans les cas pratiques la taille des poids est finie. Étant donné un ensemble de base de croyance, la plus petite borne  $p$  possible est  $p_{min} = max\{|B_i| : B_i \in E\}$ , avec  $|B_i|$  représentant le nombre des différents rangs de  $B_i$ . Si  $p < p_{min}$ , alors l'ensemble des échelles compatibles est vide.

La classe des échelles translatives quant à elle maintient les distances entre les différents poids. Les échelles proportionnelles sont obtenues en multipliant chaque poids d'une source

### 5.3 Comportement logique et postulats de rationalité

Classe	Notation	$\{S \text{ t.q. } \forall B_i^S \in E^S, \forall (\varphi, f_i(r)) \in B_i^S : \dots\}$
Bornée	$S^{(p)}$	$f_i(r) \leq p$
Linéaire	$S^l$	$f_i(r) = a_i \cdot r + b_i$ avec $a_i > 0, b_i \geq 0$
Proport.	$S^w$	$f_i(r) = a_i \cdot r$ avec $a_i > 0$
Translatable	$S^s$	$f_i(r) = r + b_i$ avec $b_i \geq 0$

Table 5.1 – Différentes classes d'échelles compatibles

donnée par un entier strictement positif  $a_i$ . Dans ce cas,  $a_i$  peut être vu comme un degré de fiabilité de la source  $B_i$  et l'opérateur de fusion devient ainsi une somme pondérée. Enfin, la classe des échelles linéaires généralise les classes translatives et proportionnelles.

Un opérateur de fusion peut ainsi être obtenu à partir de chacune de ces classes. En effet, nous pouvons définir  $\blacktriangleleft_{\odot, S^{(p)}}^E$  (resp.  $\blacktriangleleft_{\odot, S^l}^E$ ,  $\blacktriangleleft_{\odot, S^w}^E$ , et  $\blacktriangleleft_{\odot, S^s}^E$ ) de la même façon que  $\blacktriangleleft_{\odot}^E$  et ainsi définir le résultat de la fusion  $\blacktriangleleft_{\odot, S^{(p)}}^\mu(E)$  (resp.  $\blacktriangleleft_{\odot, S^l}^\mu(E)$ ,  $\blacktriangleleft_{\odot, S^w}^\mu(E)$ , et  $\blacktriangleleft_{\odot, S^s}^\mu(E)$ ).

Dans le cadre de l'opérateur max, quel que soit la restriction considérée, celle-ci est équivalente à  $\blacktriangleleft_{\odot, S^{(p)}}^\mu$ <sup>1</sup> : ceci signifie, comme pressenti avec la caractérisation en terme d'ordre de Pareto, que seul l'ordre est réellement important  $\blacktriangleleft_{\max, S^{(p)}}^E$  lorsque l'opérateur max est utilisé [FUSION'07, Ros09]. Un autre résultat intéressant est que, dans ce cas, la fusion peut être vue comme un préordre partiel ; le résultat de cette dernière s'avère même équivalent à l'inférence à partir d'informations partiellement ordonnées basée sur *best out* que nous avons présentée chapitre 2.

Pour l'opérateur  $\sum$ , les classes *linéaire* et *proportionnelle* ne changent rien au résultat de la fusion, qui reste également qualitative. En revanche, le cas de l'opérateur de fusion basé sur une restriction translative est plus original. En effet, nous avons donné dans [SUM'09] la caractérisation suivante pour  $\blacktriangleleft_{\odot, S^s}^E$  :

1.  $\Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega'))$
2.  $\forall B_i \in \{B_j \in E, \omega' \models B_j\}, \omega \models B_i$

L'intérêt de cette caractérisation est qu'elle montre que l'opérateur de fusion ainsi construit, même s'il traite en partie l'incomparabilité, n'est pas complètement qualitatif et prend en compte les poids de départ.

### 5.3 Comportement logique et postulats de rationalité

**Productivité des opérateurs** Nous avons étudié le comportement logique en terme de postulats de rationalité et en terme de productivité de chacun des opérateurs présentés précédemment. La figure 5.1 présente les relations de production des différentes inférences. L'opérateur  $\Delta_{SP}^\mu$  est un opérateur commensurable basé sur un ordre de Pareto strict et utilisé comme référence. Il est intéressant de remarquer que l'opérateur commensurable basé sur max, celui

1. pour le cas des échelles bornées, il suffit de prendre la somme du nombre de niveau de chaque base ; en-dessous, le comportement de l'opérateur est particulièrement erratique

sur  $\Sigma$  et l'opérateur incommensurable basé sur  $\Sigma$  restreint aux échelles bornées sont les plus productifs, mais incomparables.

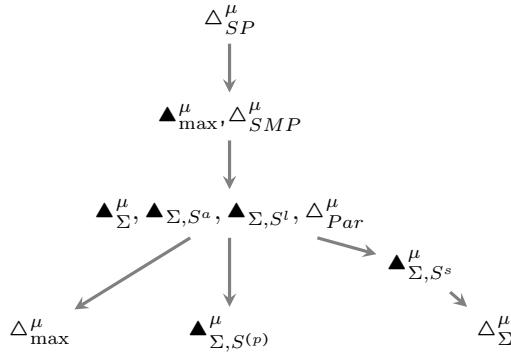


Figure 5.1 – Liens entre les différentes méthodes de fusion

**Comportements rationnels** Tous les opérateurs proposés respectent les postulats ( $IC_0^*$ ) – ( $IC_3^*$ ). Le Tableau 5.2 récapitule les divergences de comportement logique notables des différents opérateurs présentés. La plupart des opérateurs incommensurables que nous avons proposés sont consensuels et indépendant de la majorité. Une première exception est donnée par l'opérateur incommensurable basé sur la somme restreint aux échelles bornées : le seul postulat vérifié étant justement celui de la majorité. Une autre exception notable est l'opérateur translatif  $\Delta_{\Sigma,S^s}$  qui est un opérateur consensuel, mais qui n'est ni majoritaire, ni indépendant de la majorité.

	( $IC_4^*$ )	( $IC_6^*$ )	( $IC_6'^*$ )	( $IC_8^*$ )	( $Maj^*$ )	( $Mi^*$ )	( $CSS$ )
$\Delta_{max}^{\mu}$	-	-	✓	✓	-	✓	-
$\Delta_{\Sigma}^{\mu}$	-	✓	✓	✓	✓	-	-
$\Delta_{max}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	✓	✓
$\Delta_{\Sigma}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	✓	✓
$\Delta_{\Sigma,S^s}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	-	✓
$\Delta_{\Sigma,S^{(p)}}^{\mu}$	-	-	-	-	✓	-	-

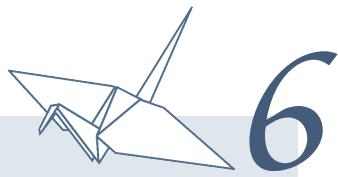
Table 5.2 – Synthèse des propriétés logiques des opérateurs présentés

**Selection d'échelle unique et consensualité** Finalement, nous présentons un dernier résultat intéressant. Celui-ci stipule qu'il n'est pas possible de trouver une échelle unique, canonique, permettant à un opérateur incommensurable basé sur la somme d'être consensuel.

**Théorème 5.3.1** (D'impossibilité). Il n'existe pas d'échelle compatible unique  $\mathcal{S}$  tel qu'un opérateur  $\Delta_{\Sigma,\mathcal{S}}^{\mu}$  vérifie ( $IC_4^*$ ) ou ( $CSS$ ).

### 5.3 Comportement logique et postulats de rationalité

---



## Prise de décision en environnement stochastique : Pickomino

Nous présentons ici notre contribution au domaine des jeux. Ceux-ci représentent un champ d'investigation passionnant dans le domaine de l'Intelligence Artificielle. Ils sont souvent un excellent sujet d'étude pour tester, comparer ou valider des techniques d'IA et pour développer de nouvelles approches. Cependant les jeux ayant un caractère aléatoire sont relativement peu étudiés.

Une première famille de ce type de jeux est celle des jeux de cartes, par exemple le Skat [BLFS09, KH07], Schnapsen [Wis10] ou encore le bridge [Gin01]. Le hasard apparaît principalement lors de la distribution des cartes, le reste du jeu devenant un jeu à information incomplète. Schématiquement, pour faire jouer un ordinateur à ce genre de jeu, on génère un nombre important de jeux à information complète que l'on résout.

Les jeux de dés sont d'autres bons exemples de jeux non-déterministes. Malgré leur nature aléatoire, les bons joueurs humains y gagnent plus souvent en prenant mieux en compte le hasard. Peu de jeux de ce type ont été étudiés. On peut néanmoins citer le Backgammon pour lequel les programmes ont obtenus d'excellents résultats contre des joueurs humains experts [Ber80, Tes02]. Nous pouvons également citer deux autres jeux de dés : Yahtzee/Yam's [Paw11, Gle07] et *Can't Stop* [GFK08]. Le principal intérêt de l'étude des jeux de dés est qu'elle permet de tester des processus de décision en environnement contrôlé, c'est à dire dans des domaines stochastiques sans biais dans les probabilités.

Pickomino est un jeu de dés dont le thème enfantin de la basse-cour et des brochettes de vers grillés et ses règles qui s'expliquent en moins de cinq minutes lui confère un aspect immédiatement séduisant et abordable. Cependant, malgré cet abord « simpliste », ce jeu recèle en son sein des problèmes réels de combinatoire, de théorie des nombres et de prise de décision dans l'incertain. Il se révèle être un excellent problème de prise de décision en univers stochastique à information complète en environnement contrôlé.

Nous avons proposé, implémenté et comparé différentes méthodes pour jouer à ce jeu dans le cadre du jeu **à deux joueurs**. Celles-ci sont basées sur différentes méthodes allant

## 6.1 Règles du jeu

---

de règles en dur à des processus de Markov [CG'10], en passant par des algorithmes à base de Monte-Carlo [CIG'08]. Aux yeux du grand public, le caractère aléatoire des jeux de dés met a priori les joueurs sur un pied d'égalité. Pourtant, la meilleure prise en compte de l'incertitude liée aux lancers par les meilleures méthodes développées leur permet de gagner en duel significativement plus de parties que leurs adversaires humains.

### 6.1 Règles du jeu

**Matériel** Au début du jeu<sup>1</sup>, 16 dominos (les pickominos) sont placés au centre de la table. Sur chaque domino est représenté un ver et une valeur. Le but du jeu est d'obtenir le plus de vers possible (en cas d'égalité, le joueur possédant la plus grande valeur est déclaré vainqueur). Pour cela, le joueur utilisera 8 dés de 6 faces, numérotées de 1 à 5 plus une face représentant un ver (cette face vaut 5). Le matériel du jeu est présenté sur la figure 6.1.



Figure 6.1 – Matériel du jeu

**Tour de jeu** Chacun leur tour, les joueurs lancent les dés. Le joueur sélectionne une valeur parmi celles obtenues et met tous les dés de cette valeur de côté. Chaque valeur ne peut être choisie qu'une seule fois. Puis le joueur recommence. Si la somme des dés mis de côté est égale à la valeur d'un domino sur la table et qu'il a gardé au moins un ver, le joueur peut le prendre et construire une pile. Si la valeur n'est pas sur la table, le joueur peut prendre le domino présent sur la table immédiatement inférieur. Il peut également prendre le pickomino en haut de la pile d'un adversaire si la somme des dés est exactement celle de l'adversaire et si au moins un dé ver a été précédemment gardé.

**Échec d'un tour** En cas d'échec, le joueur ne peut ni prendre un domino, ni relancer les dés, celui-ci remet sur la table le domino au sommet de sa pile et retourne le domino de plus grande valeur.

### 6.2 Programmes jouant à Pickomino

Un programme jouant à Pickomono doit être capable de prendre 3 décisions :

- 
1. Les règles complètes sont disponibles sur <http://www.gigamic.com/>

- Quel est le meilleur objectif (c'est-à-dire quel est le « meilleur » pickomino à « viser ») ?
- Doit-il arrêter ou continuer ?
- En cas de choix possible, quel pickomino doit-il prendre ?

Nous avons testé trois grandes classes de méthodes. Dans la première, nous nous sommes concentrés sur des méthodes naïves, qui servent de référence et de balise : si une méthode plus évoluée ne peut pas battre substantiellement cette méthode, c'est que celle-ci n'est pas intéressante.

La deuxième classe regroupe différentes approches utilisant des méthodes de Monte Carlo. Enfin la troisième classe concerne des modélisations à base de processus décisionnels de Markov.

### 6.2.1 Méthodes naïves

Les premiers programmes testés utilisent un ensemble de règles « en dur ». Le premier, appelé *Simple1AI* (S1), joue comme un jeune enfant à ce jeu, c'est à dire :

1. pour le choix de dé, il prend tout d'abord les vers, puis les 5 et enfin n'importe quelle valeur au hasard.
2. S'arrêter ou continuer : S1 s'arrête dès qu'un pickomino est disponible.
3. Choix du pickomino : s'il a le choix, S1 choisit de prendre le pickomino au sommet de la pile de l'adversaire.

Le deuxième programme, *Simple2AI* (S2), raffine la méthode de choix de valeur de dé de S1. Il prend les vers en premier, sauf s'il s'avère qu'il y a plus de 5 que de vers. Puis il prend les valeurs les plus élevées. Par exemple, attardons-nous sur le lancer suivant :



S1 prendra le ver, alors que S2 prendra les 5. Si les vers et les 5 ont déjà été choisis, S1 prendra une valeur au hasard (exemple : 1), tandis que S2 prendra les 4.

Afin d'obtenir des résultats plus convaincants, *Simple3AI* (S3) va calculer l'espérance à chaque choix. Afin de favoriser les vers (qui sont a priori plus avantageux que les 5), S3 leur associera la valeur 6. Considérons le lancer suivant :



Intuitivement, prendre les 1 ne semble pas être la décision à prendre dans le but d'obtenir le meilleur résultat possible. Pour prendre en compte cette intuition, le programme va calculer l'espérance mathématique de chaque choix possible.

Par exemple, dans le cas qui nous concerne, et si l'on considère le tableau 6.1, S3 choisira la valeur 4, valeur lui permettant d'avoir l'espérance maximale, puisqu'il peut espérer obtenir 29.

Même s'il constitue une amélioration certaine par rapport aux programmes précédemment présentés, S3 possède néanmoins de graves lacunes. Par exemple, il ne teste pas la validité

## 6.2 Programmes jouant à Pickomino

choix possible	gain	moyenne des valeurs restantes	espérance
1	$3 = 3 \times 1$	$\frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$	$23 = 3 + 4 \times 5$
4	$12 = 3 \times 4$	$\frac{1+2+3+5+6}{5} = 3.4$	$29 = 12 + 3.4 \times 5$
5	5	$\frac{1+2+3+4+6}{5} = 3.2$	$27.4 = 5 + 3.2 \times 7$
6	6	$\frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$	$27 = 6 + 3 \times 7$

Table 6.1 – Simple3AI en action

des séquences de dés, comme dans le cas suivant, se déroulant en début de partie et où le jet obtenu est :



Dans ce cas, S3 prendra les 5, alors qu'il n'aura qu'une probabilité de 1/6 d'avoir un ver et donc une séquence valide (soit 83.3% de chance de passer son tour).

### 6.2.2 Méthodes de type Monte Carlo

Les programmes décrits précédemment sont incapables (à moins d'un premier jet exceptionnel) d'atteindre les pickominos de grandes valeurs et elles n'adaptent pas leur prise de risque aux pickominos réellement accessibles. Ainsi, S1 et S2 font des choix arbitraires tandis que S3 est trop pessimiste. Or un bon programme doit pouvoir adapter sa stratégie à chaque lancer de dés, quelle que soit la situation et à tout niveau du jeu.

Il doit également avoir la capacité d'évaluer les risques des actions qu'il entreprend, non seulement pour choisir entre s'arrêter ou relancer, mais aussi pour choisir ses buts initiaux et les ajuster aux lancers réellement effectués. Par exemple, en fin de partie, vaut-il mieux viser le pickomino 21 au sommet d'une pile d'un adversaire (et donc essayer d'obtenir exactement 21), plutôt que les pickominos 31 et 32 sur la table ? Ces objectifs dépendent clairement du premier lancer, ainsi que des pickominos disponibles (sur la table ou en sommet de pile d'un adversaire).

Le problème principal, dans ce jeu, est que les probabilités *a priori* sont compliquées à obtenir. Elles dépendent à la fois de la décomposition en nombres entiers des valeurs des pickominos, des séquences de lancers ou encore de l'ordre des choix faits. Par exemple, la probabilité d'obtenir la séquence , puis est différente de celle d'obtenir tout d'abord puis . En effet, lors du second lancer du premier cas, il reste 4 dés, tandis que dans le second cas, il en reste 6. De plus, les probabilités d'obtenir les différentes valeurs sont intimement liées. Par exemple, la valeur 23 peut être obtenue par la séquence suivante : puis et enfin . Mais, dès le second lancer, la valeur 22 est atteinte. Ces différents événements ne sont donc pas indépendants, mais « mélangés ».

**Tables de risques** Nous avons proposé dans [CIG'08] ici un algorithme de type Monte-Carlo permettant de prendre en compte ce « mélange » des évènements. Pour cela, notre algorithme

va produire des *arbres d'événements* et non seulement des jets de dés consécutifs. L'algorithme va ensuite remplir un tableau, représentant les différentes valeurs obtenues, qui sera utilisé pour la décision. Ainsi, l'algorithme considère tous les choix possibles de dés et développe récursivement la simulation. Lorsqu'un nombre *suffisant* de simulations a été effectué, une table des risques est remplie. Le tableau 6.2 montre une partie de la table pouvant être obtenue pour le lancer de début de partie suivant : ☱ ☱ ☲ ☱ ☲ ☱ ☰ ☲ ☱ ☱.

Dé	Lancer #	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	...
☐	1	5	0	0	0	0	3	0	0	0	0	...
	2	89	12	10	10	6	28	2	3	1	0	...
	3	123	142	166	162	137	25	33	37	42	23	...
	4	613	458	384	167	89	241	139	114	29	12	...
	5	0	141	159	148	314	35	72	63	37	51	...
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
☒	1	0	0	0	0	193	0	0	0	0	59	...
	2	0	0	0	0	0	146	158	135	161	0	...
	3	0	0	0	0	0	0	0	123	122	253	...
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
☒	1	92	0	75	16	97	0	16	0	0	15	...
	2	370	462	268	274	134	175	93	131	92	9	...
	3	176	178	379	460	406	329	326	192	97	213	...
	4	0	0	0	0	175	209	203	248	287	0	...
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150	...
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Table 6.2 – Exemple de tableau de risque

Cette table est obtenue après 500 simulations. Pour plus de lisibilité, ne sont représentées que les valeurs inférieures ou égales à 30. La première partie du tableau représente la table de risque si l'on choisit le dé 1, celle du milieu, les 5 et celle de fin les vers. Choisir les 5 ne semble pas être une bonne option, comme le montre le faible nombre de valeurs atteintes. Au contraire les valeurs 1 et ver semblent être de meilleures choix. Nous présentons ci-après deux méthodes de choix permettant de les discriminer. Ces choix dépendent des objectifs : s'il faut absolument viser le 21, le meilleur choix est clairement le 1, tandis que pour viser un pickomino au moins égal à 26, les vers sont une meilleure option. Enfin on peut remarquer que chaque table n'a que 6 lignes : en effet, d'après les règles du jeu on ne peut choisir qu'une fois chaque valeur de dé.

**Utilisation des tables de risque** Le premier programme, appelé MC (pour Monte-Carlo), utilise la meilleure somme pour une colonne donnée. Plus formellement :

$$\max_{val \in A} \sum_{i=0}^6 Risk[i][val]$$

où  $A$  représente l'ensemble des pickominos accessibles.

À chaque fois qu'une valeur valide (c'est à dire une séquence de dés ( $\geq 21$ ) et contenant au minimum un ver) est atteinte, le programme incrémente la valeur dans la table des risques

## 6.2 Programmes jouant à Pickomino

---

(initialement mise à zéro). De 100 à 1 000 arbres sont développés afin d'estimer le risque pour toutes les décisions possibles.

Ainsi, si l'on considère le précédent exemple représenté par le tableau 6.2, le programme choisira la valeur 1. En effet, la colonne 21 a le score le plus élevé du tableau (830). Dès qu'un pickomino est accessible, le programme le choisira, en privilégiant ceux se trouvant au sommet de la pile des adversaires. Expérimentalement, cet algorithme s'avère bien meilleur que ceux présentés dans la section précédente.

Le principal problème du programme MC est qu'il ne cumule pas les chances : il se concentre uniquement sur une possibilité, la meilleure colonne de chaque table. Ainsi, la Formule (1) peut être modifiée en changeant uniquement l'opérateur *max* par l'opérateur *somme* :

$$\sum_{val \in A} \sum_{i=0}^6 Risk[i][val]$$

$A$  représentant toujours l'ensemble des pickominos accessibles. L'algorithme MCC est basé sur cette formule de cumul. Dans ce cas, si l'on considère à nouveau l'exemple du tableau 6.2 pour le début de partie, MCC choisira les vers (et non les 1).

**Quelques améliorations** Nous avons également étudié différentes méthodes permettant d'améliorer les performances des programmes présentés précédemment. En particulier nous nous sommes intéressés à :

- l'amélioration dans le choix de pickomino
- la prise de risque lors des lancers de dé
- une meilleure prise en compte de la fin du jeu

Ces méthodes sont toutes évaluées expérimentalement, le programme MC4C, incluant toutes ces améliorations, s'avère être le meilleur programme et un adversaire redoutable contre des joueurs humains.

### 6.2.3 Programmes utilisant des PDM

Les processus décisionnels de Markov (PDM) sont basé sur des graphes de transition stochastiques [Bel57, Ber87, Put94]. Ces graphes vérifient la propriété de Markov : la probabilité de chaque transition est indépendante des précédentes transitions : seul l'état courant est nécessaire à la prise de décision. L'évaluation de la meilleure stratégie est quant à elle basée sur une fonction de récompense. Plus formellement, un PDM est un 4-uplet  $\langle S, A, p, r(G) \rangle$  tel que :

- $S$  est l'ensemble des états du système ;
- $A$  est l'ensemble des actions possibles ;
- $p$  est la probabilité de passage d'un état à un autre ;
- $r$  est la fonction de récompense

Nous avons proposé une modélisation de chacun des tours de jeu au moyen de PDM. Celle-ci ne dépend pas des pickominos accessibles, ces derniers sont néanmoins pris en compte dans l'algorithme de décision.

**Les états** Naïvement, la seule information utile pour prendre une décision est l'ensemble des dés gardés. Nous avons ainsi présenté dans [CG'10] une représentation compacte des états du jeu. Celle-ci s'appuie sur la remarque suivante. Considérons les 2 séquences suivantes :  $\boxed{3} \boxed{3}$   $\boxed{\square} \boxed{\square} \boxed{\square}$  et  $\boxed{3} \boxed{3} \boxed{\square} \boxed{\square} \boxed{\square}$ . Les sommes de chaque séquence sont identiques (15) et les mêmes valeurs sont autorisées pour le jet suivant pour un même nombre de dés. Ainsi, seules ces trois informations sont importantes. Un état sera donc un triplet  $(\sigma, N, V_C)$  tel que :

- $\sigma \in \{0, \dots, 40\}$  est la somme de valeurs conservées
- $N \in \{0, \dots, 8\}$  est le nombre de dés conservés
- $V_C \in 2^{\mathcal{D}}$  est l'ensemble des valeurs de dés conservés.

Ainsi un état permet de représenter tous les jets de  $N$  dés aboutissant à la somme  $\sigma$  avec toutes les valeurs de dés de  $V_C$ .

**Les actions** Après chaque lancer de dé, et si celui-ci n'oblige pas à passer son tour, le joueur peut être amené à prendre deux décisions : s'arrêter et prendre un pickomino ou bien relancer les dés afin d'obtenir un meilleur résultat. Ainsi les actions du PDM seront de type  $a_v$  (signifiant prendre les dés  $v \in \mathcal{D}$  et relancer les dés),  $a_{\perp}$  (représentant un échec, aboutissant à l'état  $\perp$ ) et enfin  $a_{p,x}$  (représentant le fait de prendre du pickomino de valeur  $x$ ). Ces deux dernières actions aboutissent à un état final.

Compte tenu du codage compact retenu pour représenter les états, les probabilités associées aux différentes transitions sont intimement emmêlées. Nous avons proposé un calcul reposant sur une double loi binomiale, calcul qui est détaillé dans [CG'10].

**Propriétés du graphe et prise de décision** Les choix de modélisation des états et des transitions que nous avons effectuées conduisent au graphe représenté par la figure 6.2 (pour plus de clarté,  $S_{\perp}$  n'est pas représenté). Ce graphe contient 1 636 états et 7 332 transitions.

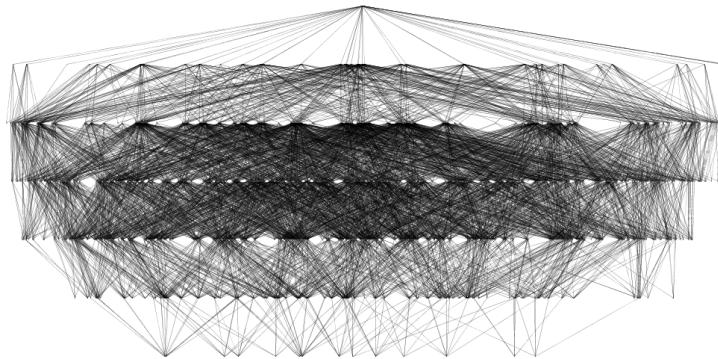


Figure 6.2 – Le PDM construit

Il possède de surcroît certaines propriétés intéressantes immédiatement exploitables d'un point de vue algorithmique. Tout d'abord, c'est un graphe dirigé acyclique (DAG). En effet à chaque fois qu'un joueur garde une valeur de dé, l'ensemble  $V_C$  décroît et on ne peut jamais

## 6.2 Programmes jouant à Pickomino

l'augmenter à nouveau. Plus généralement, il est possible de créer une partition sur l'ensemble des états  $S$  fonction du nombre de valeurs restantes que l'on peut choisir,  $|V_C|$ ) telle que :

$$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_6 \cup \{s_\perp\},$$

avec  $s = (\sigma, N, V_C) \in S_i$ ssi  $|V_C| = i$ . Ainsi, un état d'une strate non finale  $S_i$  ne peut aboutir qu'à un état de la strate  $S_{i+1}$  ou vers l'état puits.

Comme la conception que nous considérons ne traite qu'un seul tour de jeu, le PDM est à horizon fini et la meilleure séquence d'actions peut être calculée à l'aide d'un algorithme classique de type *value iteration* [Bel57]. Pour cela nous avons testé les combinaisons d'agrégations et de fonctions de récompenses suivantes :

- Dans **MarkovBinaryMaxAI (MBM)** la fonction d'agrégation est max et la récompense définie ainsi : prendre un pickomino rapporte 1, sinon 0. Dans **MarkovBinary-SumAI (MBS)**, la fonction d'agrégation est  $\Sigma$ .
- Dans **MarkovNbWormsSumAI (MWS)**, prendre un pickomino rapporte le nombre de vers inscrits sur le pickomino (valeur doublée si celui-ci est au sommet de la pile de l'adversaire) et perdre un pickomino coûte son nombre de vers.

### 6.2.4 Quelques résultats expérimentaux

Pickomania (cf. la copie d'écran de la figure 6.3) est un logiciel écrit en Java et regroupant les différentes méthodes proposées pour jouer à Pickomino. Trois modes de jeu sont possibles. Le mode *utilisateur normal* permet à un humain de jouer contre une ou plusieurs IA. Le mode *opérateur* permet de saisir des lancers de dés faits à la main. Ce mode permet d'insérer le programme dans de vraies parties sans être suspecté de choisir ses dés. Enfin le mode *arène* permet de confronter les IA entre elles dans de nombreux matchs afin de tester leurs niveaux respectifs. Le programme et les différents algorithmes afférents peuvent être téléchargés ici : <http://www.cril.univ-artois.fr/~lagrue/pickomino/>. Le code source, mis sous licence GPL est disponible sur la forge <http://code.google.com/p/pickomania/>.



Figure 6.3 – Copie d'écran du logiciel

Cette plate-forme nous a permis d'effectuer différentes expérimentations afin de valider empiriquement nos méthodes et de les comparer. Pour tester deux méthodes, 20 000 parties sont jouées, chaque méthode commençant à tour de rôle. En effet, de précédentes expérimentations ont montré que le joueur qui commence était statistiquement légèrement avantage. De plus, ce nombre représente une marge de sécurité suffisante pour être quasi-certain de la stabilisation des résultats. La figure 6.4 présente un exemple d'une telle stabilisation, notez que l'échelle des abscisses est logarithmique.

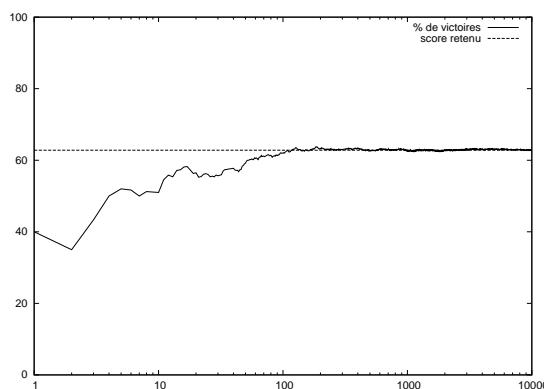


Figure 6.4 – Stabilisation des résultats

Le tableau 6.3, issu de [CG'10], synthétise les différentes confrontations des approches markoviennes avec les autres approches. Par exemple, l'intersection de la deuxième ligne avec la troisième colonne indique que sur les 20 000 matchs, **MBS** gagne 11,219 fois contre **MC**. D'autres résultats confrontant les différentes approches de type Monte Carlo peuvent être trouvées dans [CIG'08].

vs.	S		S3		MC		MCC		
<b>MBM</b>	16,705	<b>83.5%</b>	10,109	<b>50.5%</b>	9,640	<b>48.2%</b>	9,139	<b>45.7%</b>	
<b>MBS</b>	17,769	<b>88.8%</b>	12,046	<b>60.2%</b>	11,219	<b>56.1%</b>	11,001	<b>55.0%</b>	
<b>MWS</b>	18,370	<b>91.8%</b>	13,601	<b>68.0%</b>	12,964	<b>64.8%</b>	12,710	<b>63.5%</b>	
MC4C		MBM		MBS		MWS			
<b>MBM</b>	9,105	<b>45.5%</b>	10,091	<b>50.6%</b>	8,412	<b>42.1%</b>	6,546	<b>32.7%</b>	
<b>MBS</b>	10,828	<b>54.1%</b>	11,588	<b>57.9%</b>	10,004	<b>50.02%</b>	8,363	<b>41.8%</b>	
<b>MWS</b>	12,574	<b>62.9%</b>	13,454	<b>67.3%</b>	11,677	<b>58.4%</b>	10,087	<b>50.4%</b>	

Table 6.3 – Résultats de 480,000 matchs

La figure 6.5 présente ces mêmes résultats sur un graphe. Il peut être constaté que les approches markoviennes se montrent plus efficaces que celles basées sur des méthodes de

### 6.3 Les challenges Pickomino

type Monte Carlo. Une autre remarque est la « transitivité des niveaux des victoires » qui se retrouve sur toutes les expérimentations : si une méthode  $A$  gagne plus souvent contre  $B$  et  $B$  est plus souvent vainqueur contre  $C$ , alors  $A$  gagne le plus souvent contre  $C$  également.

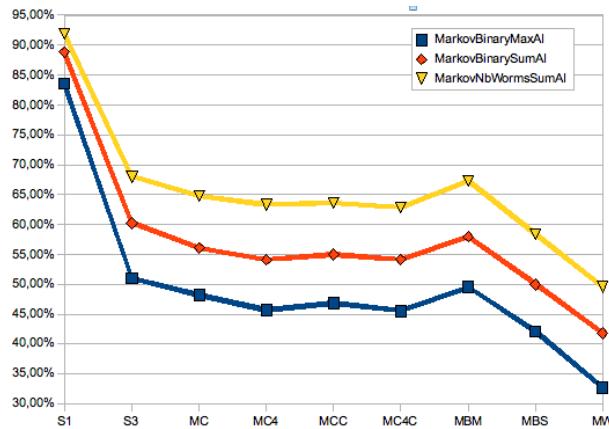


Figure 6.5 – Comparaison entre les différentes méthodes markoviennes

### 6.3 Les challenges Pickomino

Nous avons organisé les challenges Pickomino en 2009 et 2010 à chaque fois à l'occasion de la fête de la science. Le but de ces challenges était de confronter nos programmes à des joueurs humains afin de tester leur niveau de jeu. Afin de ne souffrir d'aucune contestation, les dés étaient jetés par un opérateur qui appliquait scrupuleusement les décisions de ces programmes. Lors de chacun des deux tournois, quarante joueurs ont pris part au défi.



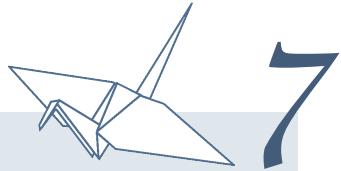
Figure 6.6 – Le challenge Pickomino 2009

Les résultats de l'évaluation pour la première édition n'ont pas été bonnes pour les programmes. La première raison en est le nombre d'adversaires par table. En effet, quand ils sont opposés à plus de trois joueurs, les performances des programmes se dégradent. Mais une autre origine de la mauvaise performance des programmes est qu'ils souffraient de fortes coalitions, irrationnelles, contre eux. Il arrivait ainsi que des joueurs humains préfèrent attaquer la machine au lieu d'améliorer leur propre classement ! Les résultats de la deuxième édition furent plus probants (le meilleur programme finissant septième), notamment grâce à certaines extensions des méthodes présentées ici, non publiées à ce jour.

Néanmoins, il peut être remarqué que dans le jeu à deux joueurs, les programmes prennent largement leur revanche sur les joueurs humains. Après plusieurs tests (chacun étant basé sur 50 matchs) les meilleurs programmes gagnent plus de 60 % de leurs matchs. Ces résultats doivent cependant être affinés. Nous espérons mettre en place un serveur de jeu web, afin de recueillir des statistiques sur les matchs impliquant des joueurs humains.

### 6.3 Les challenges Pickomino

---



## Conclusion et perspectives

Nous regroupons dans ce dernier chapitre une brève synthèse de nos contributions et nous pointons quelques perspectives.

### 7.1 Résumé des contributions

**Raisonnement en présence d'incohérences : le cas ordonné** Nous avons proposé différentes méthodes basées sur les compatibles afin d'étendre trois méthodes de raisonnement tolérant les incohérences bien connues : *best-out*, *discrimin* et *leximin*. Nous avons également proposé des extensions sémantiques et syntaxiques pour l'inférence basée sur *best-out* (et donc pour la logique possibiliste) équivalentes lorsque les formules n'étaient que partiellement ordonnées [FSS'04]. Ces méthodes ont par ailleurs été appliquées à un problème de planification urbaine [DEXA'04]. Concernant l'inférence *leximin*, nous avons proposé une généralisation de celle-ci aux ordres partiels [KR'08b, I3'09b]. Nous avons également fourni une contrepartie sémantique. Nous avons également montré les liens forts unissant ces méthodes d'inférences avec le traitement possibiliste du raisonnement plausible [JELIA'10].

**Généralisation des bases pondérées aux intervalles pour l'opérateur max** Nous avons proposé les fondations pour le raisonnement à l'aide de bases pondérées à intervalles [IJCAI'11]. La flexibilité dans la représentation des informations incertaines est obtenue en utilisant le concept de bases compatibles. Le problème de décision dans le cadre de la logique possibiliste à intervalles est  $\Delta_p^2$ -complet. Nous avons également présenté des restrictions à d'autres ordres d'intervalles permettant d'améliorer la productivité des inférences. Enfin, nous avons fourni une étude comparative des différentes méthodes proposées.

**Prévention des collisions en logique des pénalités** Nous avons apporté des solutions pratiques à un problème fondamental mais néanmoins ignoré jusqu'à présent dans la littérature,

## 7.2 Quelques perspectives et travaux en cours

---

le problème des collisions entre interprétations dans la logique des pénalités [KR'08a]. Deux principaux facteurs prévalent pour ces collisions, l'expression logique des buts et les pondérations elles-mêmes. Nous avons proposé différentes pondérations permettant de respecter le critère d'absence de collision tout en gardant un mécanisme de compensation : la préservation de la majorité. Nous avons également fourni une étude des propriétés de ces différentes pondérations.

**Révision et croyances partiellement ordonnées** Nous avons proposé un jeu de postulats permettant de capturer des processus de révision lorsque les croyances d'un agent ne sont que partiellement ordonnées [IJCAI'05]. Nous avons redéfini le concept d'assignement fidèle dans ce cadre et proposé un théorème de représentation. Ce théorème explicite la différence entre équivalence et incomparabilité dans le cadre de la révision itérée. Nous avons également proposé deux nouveaux postulats pour la révision itérée qui peuvent être appliquées à des informations totalement ou partiellement ordonnées. Enfin, nous avons présenté différents opérateurs tirés de [NMR'02] vérifiant le jeu de postulats proposé.

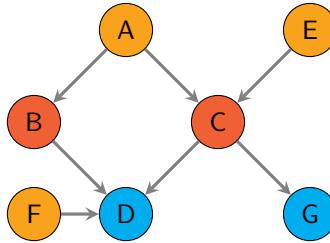
**Fusion sans hypothèse de commensurabilité** Nous avons introduit une approche générique basée sur les échelles compatibles permettant de fusionner des bases de croyances lorsque l'hypothèse de commensurabilité n'était pas respectée. Nous avons étudié plus particulièrement cette méthode lorsqu'elle était appliquée aux opérateurs d'agrégation  $\Sigma$  et  $\max$ . Nous avons dans ce cas apporté des caractérisations en terme d'ordres sur les mondes ainsi qu'une étude en terme de postulats de rationalité [JLC'09, AAAI'07]. En particulier, ces méthodes vérifient le postulat de consensus que nous avons également proposé et qui représente un comportement sain pour ce type de fusion [SUM'09]. En outre, nous avons étudié les propriétés qu'apportaient différentes restriction des échelles compatibles [FUSION'07, SUM'09]. Enfin, nous avons proposé un théorème d'impossibilité stipulant qu'on ne pouvait construire une échelle unique permettant à l'opérateur générique d'être consensuel.

**Prise de décision en environnement stochastique : Pickomino** Nous nous sommes intéressés à un jeu non-déterministe, basé sur des lancers de dé : Pickomino. Nous avons proposé des méthodes de type Monte Carlo [CIG'08] et d'autres utilisant des PDM [CG'10]. De nombreuses expérimentations ont permis de mettre en lumière les versions PDM. Ces programmes représentent de très forts opposants face à des joueurs humains en face à face.

## 7.2 Quelques perspectives et travaux en cours

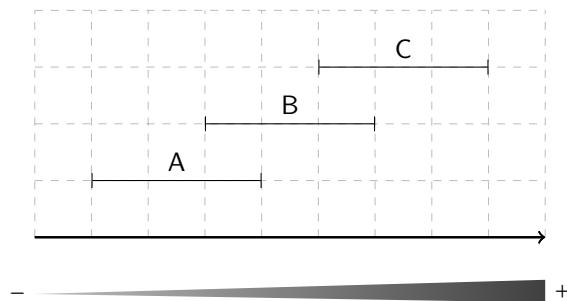
**Modèles graphiques qualitatifs à intervalle** Les modèles graphiques sont un formalisme de représentation des connaissances permettant de coder de façon compacte une distribution de probabilité en utilisant les propriétés d'indépendance décrites par le graphe et des probabilités conditionnelles. Une méthode d'inférence peut être définie. Celle-ci permet d'estimer la probabilité d'un événement étant données certaines observations. Les modèles graphiques probabilistes conviennent surtout dans un cadre fréquentiste où l'on dispose de quantités de

données empiriques importantes pour estimer les paramètres du modèle. Afin d'apporter plus de flexibilité, des extensions utilisant des intervalles de probabilité ont également été proposées [Jen96].



Cependant, le cadre fréquentiste n'est pas forcément adapté en l'absence de données conséquentes ou en cas d'élicitation des connaissances. Aussi, d'autres cadres que le cadre probabiliste peuvent être utilisés. Parmi ceux-ci, on trouve les autres théories de l'incertitude comme la théorie des possibilités [DP88] et le cadre des fonctions ordinaires conditionnelles (OCF) [Spo88]. On trouve ainsi des méthodes graphiques basées sur les réseaux possibilistes quantitatifs ou qualitatifs [BBM03] et les réseaux OCF [BT10]. L'extension de ces différentes méthodes aux intervalles et aux ordres partiels semble donc être une perspective naturelle.

**Transitivité limitée et ordres d'intervalle** L'un des objectifs de nos travaux était de traiter des données peu structurées. Afin de gérer l'incomparabilité, nous nous sommes focalisés plus particulièrement sur les relations de préordres partiels, c'est-à-dire sur des relations dont la principale propriété était d'être transitive. Cependant, la transitivité n'est pas toujours souhaitable de façon systématique et elle peut elle-même être affaiblie.



D'autres relations, plus pauvres, existent, citons par exemple les semi-ordres [MV97] et parmi ceux-ci les ordres d'intervalles [Fis85] dont on trouve une utilisation intensive dans le domaine des préférences. La principale caractéristique de ces relations est de ne pas induire

## 7.2 Quelques perspectives et travaux en cours

---

systématiquement la transitivité entre la relation d'équivalence  $\leq$  et la relation stricte  $<$ . Par exemple, si l'on considère la figure 7.2, on a  $B \approx A$ , et  $A < C$ , mais on n'a pas  $B < C$ .

Que devient la révision de croyance lorsque les croyances d'un agent sont représentées par un tel ordre d'intervalle ? Plus particulièrement, est-il possible de caractériser un tel opérateur de révision et quel serait son comportement rationnel ? Ces problèmes sont à notre connaissance aujourd'hui encore ouverts.

**Détection automatique de triche dans le jeu en ligne** La détection automatique de triche est un domaine de recherche émergent. La détection de collusion pour le Bridge a par exemple été récemment identifié comme un challenge actuel de l'IA [Yan10].

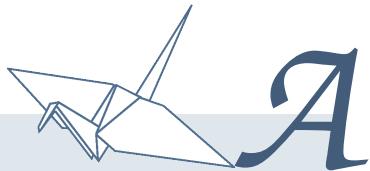
Les données issues du jeu en ligne sont riches, extrêmement disparates et de nature tout à fait différentes. Elles peuvent être de type « réseau » comme l'adresse IP d'un joueur, sa durée de connexion ou encore les adresses IP des autres connexions jouant en même temps. Elles peuvent également être de plus haut niveau comme, par exemple dans le cas du bridge, le choix de la carte d'entame ou de la ligne de jeu en passant par le par de la donne.

Lorsque ces choix de jeu sont « anormaux » et aboutissent trop souvent à de bons résultats, ils induisent une certaine suspicion comme la possession d'informations illégales par le joueur. D'autre part, un comportement normal pour un joueur de faible niveau peut sembler aberrant lorsque le même comportement est effectué par un joueur de haut niveau. Notons enfin que la détection de comportements anormaux peut également permettre de détecter le cas de joueurs compulsifs. Par exemple, l'augmentation systématique et immédiate des mises après une perte peut être vu comme un « symptôme » d'addiction.

event	TDJ121210	date	2010-12-11	board	1	submit					
par	5♠X by North (-2) NS -300	nb of ranks	11/126	nb of contract	9	entropy	1.844				
rank	user	series	contract	declarer	lead	result	score	%	time	duration	
1	Wbridge5	null	7♥X	E	Q♦	-2	500	99.6	n/a	n/a	x
1	Tint	A	7♥X	E	Q♦	-2	500	99.6	03:11:18	00:07:20	details x
3	JPA	C	7♥X	E	A♣	-1	200	80	18:31:14	00:02:52	details x
3	jipepe	A	7♥X	E	A♣	-1	200	80	12:26:41	00:01:28	details x
3	polly	D	7♥X	E	A♣	-1	200	80	14:11:28	00:04:10	details x
3	bernardmpl	C	7♥X	E	A♣	-1	200	80	21:01:54	00:03:38	details x
3	CD	A	7♥X	E	A♣	-1	200	80	18:56:04	00:01:50	details x
3	Cesar	B	7♥X	E	A♣	-1	200	80	13:30:08	00:01:31	details x

Figure 7.3 – Exemple d'alertes pour le bridge en ligne

Aussi, une application de nos travaux pourrait être la création d'une approche automatique permettant de détecter des actes de tricherie dans le jeu en ligne. L'hétérogénéité des données devrait en effet permettre à la détection automatique de triche d'être un vaste champ d'application de nos méthodes.



## Bibliographies

### A.1 Références

- [AGM85] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the logic of theory change : Partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.
- [Arr63] Kenneth J. Arrow. *Social choice and individual values*. Wiley, New York, second edition, 1963.
- [BBM03] Nahla BenAmor, Salem Benferhat, and Khaled Mellouli. Anytime propagation algorithm for min-based possibilistic graphs. *Soft Computing, A fusion of foundations, methodologies and applications*, 8(2) :150–161, 2003.
- [BBP04] Salvador Barberà, Walter Bossert, and Prasanta K Pattanaik. Ranking sets of objects. In *Handbook of Utility Theory*, volume Volume II Extensions, pages 893–977. Kluwer Academic, 2004.
- [BCD<sup>+</sup>93] Salem Benferhat, Claudette Cayrol, Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–647. Morgan Kaufmann, 1993.
- [BDKP02] Salem Benferhat, Didier Dubois, Souhila Kaci, and Henri Prade. Possibilistic merging and distance-based fusion of propositional information. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence (AMAI)*, 34(1-3) :217–252, 2002.
- [BDP93] Salem Benferhat, Didier Dubois, and Henri Prade. Argumentative inference in uncertain and inconsistent knowledge base. In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'03)*, pages 411–419. Morgan Kaufmann, 1993.
- [Bel57] R. E. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.

- [Ber80] Hans J. Berliner. Backgammon Computer Program Beats World Champion. *Artificial Intelligence*, 14(2), 1980.
- [Ber87] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming : Deterministic and Stochastic Models*. Prentice Hall, 1987.
- [BK03] Salem Benferhat and Souhila Kaci. Fusion of possibilistic knowledge bases from a postulate point of view. *International Journal of Approximate Reasoning*, 33 : 255–285, 2003.
- [BLFS09] Michael Buro, Jeffrey Richard Long, Timothy Furtak, and Nathan R. Sturtevant. Improving state evaluation, inference, and search in trick-based card games. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'09)*, pages 1407–1413. AAAI Press, 2009.
- [BM06] Richard Booth and Thomas Andreas Meyer. Admissible and restrained revision. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 26 :127–151, 2006.
- [BM07] Richard Booth and Thomas Meyer. On the dynamics of total preorders : Revising abstract interval orders. In *Proceedings of the 9<sup>th</sup> European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'07)*, pages 42–53. Springer, 2007.
- [BMW06] Richard Booth, Thomas Meyer, and Ka-Shu Wong. A bad day surfing is better than a good day working : How to revise a total preorder. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06)*, pages 230–238. Springer, 2006.
- [Bou93] Craig Boutilier. Revision sequences and nested conditionals. In *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 519–531. Morgan Kaufmann, 1993.
- [Bre89] Gerhard Brewka. Preferred subtheories : An extended logical framework for default reasoning. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, pages 1043–1048. Morgan Kaufmann, 1989.
- [BT10] Salem Benferhat and Karim Tabia. Belief change in ocf-based networks in presence of sequences of observations and interventions : Application to alert correlation. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence (PRICAI'10)*, pages 14–26. Springer-Verlag, 2010.
- [BY09] Salem Benferhat and Safa Yahi. Complexity and cautiousness results for reasoning from partially preordered belief bases. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'09)*, pages 817–828. Springer, 2009.
- [CEL06] Yann Chevaleyre, Ulle Endriss, and Jérôme Lang. Expressive power of weighted propositional formulas for cardinal preference modelling. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06)*, pages 145–152. AAAI Press, 2006.
- [Cha98] Ruth Chang, editor. *Incommensurability, Incomparability, and Practical Reason*. Harvard University Press, 1998.

- [CLS95] Claudette Cayrol and Marie-Christine Lagasquie-Schiex. Non-monotonic syntax-based entailment : A classification of consequence relations. In *Proceedings of the Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty, European Conference (ECSQARU'95)*, pages 107–114. Springer, 1995.
- [CLSS98] Claudette Cayrol, Marie-Christine Lagasquie-Schiex, and Thomas Schiex. Non-monotonic reasoning : From complexity to algorithms. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence (AMAI)*, 22(3-4) :207–236, 1998.
- [CMLLM04] Sylvie Coste-Marquis, Jérôme Lang, Paolo Liberatore, and Pierre Marquis. Expressive power and succinctness of propositional languages for preference representation. In *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'04)*, pages 203–212. AAAI Press, 2004.
- [CRS92] Claudette Cayrol, Véronique Royer, and Claire Saurel. Management of preferences in assumption-based reasoning. In *Proceedings of Information Processing and the Management of Uncertainty in Knowledge based Systems (IPMU'92)*, pages 13–22. Springer, 1992.
- [DDL06] James P. Delgrande, Didier Dubois, and Jérôme Lang. Iterated revision as prioritized merging. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06)*, pages 210–220. AAAI Press, 2006.
- [DdSC96] Florence Dupin de Saint Cyr. *Gestion de l'évolutif et de l'incertain en logiques pondérées*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (Toulouse III), décembre 1996.
- [DdSCLS94] Florence Dupin de Saint-Cyr, Jérôme Lang, and Thomas Schiex. Penalty logic and its link with Dempster-Shafer theory. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'94)*, pages 204–211. Morgan Kaufmann, 1994.
- [DLP92a] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Timed possibilistic logic. *Fundamenta Informaticae*, XV :211–234, 1992.
- [DLP92b] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Dealing with multi-source information in possibilistic logic. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'92)*, pages 38–42. John Wiley and Sons, 1992.
- [DLP94] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Possibilistic Logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.
- [DP88] Didier Dubois and Henri Prade. *Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.
- [DP91] Didier Dubois and Henri Prade. Epistemic entrenchment and possibilistic logic. *Artificial Intelligence*, 50(2) :223–239, 1991.
- [DP92] Didier Dubois and Henri Prade. Belief change and possibility theory. In Peter Gärdenfors, editor, *Belief Revision*, pages 142–182. Cambridge University Press, 1992.

- [DP97] Adnan Darwiche and Judea Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial intelligence*, 89 :1–29, 1997.
- [EKM08a] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Conflict-based merging operators. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 348–357. AAAI Press, 2008.
- [EKM08b] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Propositional merging operators based on set-theoretic closeness (short paper). In *Proceedings of the 18<sup>th</sup> European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'08)*, pages 737–738. IOS Press, 2008.
- [FH99] Nir Friedman and Joseph Y. Halpern. Belief revision : a critique. *Journal of Logic, Language, and Information*, 8 :401–420, 1999.
- [Fis85] Peter C. Fishburn. *Interval Orders and Interval Graphs*. Wiley, 1985.
- [Gär88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in flux : modeling the dynamics of epistemic states*. Bradford Books. MIT Press, 1988.
- [Gef92] Hector Geffner. *Default Reasoning : Causal and Conditional Theories*. MIT Press, 1992.
- [GFK08] James Glenn, Haw-ren Fang, and Clyde P. Kruskalb. A retrograde approximation algorithm for multi-player can't stop. In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Computers and Games (CG 2008)*, volume 5131 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 252–263. Springer, 2008.
- [Gin01] Matthew L. Ginsberg. Gib : Imperfect Information in a Computationally Challenging Game. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 14 :303–358, 2001.
- [GLB06] Qi Guilin, Weiru Liu, and David A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proceedings of the 21<sup>th</sup> National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, pages 348–356. AAAI Press, 2006.
- [Gle07] James Glenn. Computer strategies for solitaire yahtzee. In *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> IEEE Symposium on Computational Intelligence and Games (CIG2007)*, pages 132–139. IEEE Press, 2007.
- [GMP07] Éric Grégoire, Bertrand Mazure, and Cédric Piette. Local-search extraction of muses. *Constraints*, 12(3) :325–344, 2007.
- [Hal97] Joseph Y. Halpern. Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structures. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 7 :1–24, 1997.
- [Jen96] Finn Verner Jensen. *An Introduction to Bayesian Networks*. UCL press, 1996.
- [JT07] Yi Jin and Michael Thielscher. Iterated belief revision, revised. *Artificial Intelligence*, 171(1) :1–18, 2007.
- [Kac02] Souhila Kaci. *Connaissances et préférences : représentation et fusion en logique possibiliste*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (Toulouse III), 2002.

- [KH07] Sebastian Kupferschmid and Malte Helmert. A skat player based on monte-carlo simulation. In *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Computers and Games (CG 2006)*, volume 4630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 135–147. Springer, 2007.
- [KLM90] Sarit Kraus, Daniel Lehmann, and Menachem Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44 : 167–207, 1990.
- [KLM04] Sébastien Konieczny, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. DA<sup>2</sup> merging operators. *Journal of Logic and Computation*, 15(1-2) :49–79, 2004.
- [KM91] Hirofumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52(3) :263–294, 1991.
- [KPP00] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. A framework for iterated revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 10(3-4) :339–367, 2000.
- [KPP02] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) : 773–808, 2002.
- [KPP08] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Improvement operators. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 177–187. AAAI Press, 2008.
- [Lan00] Jérôme Lang. Possibilistic logic : complexity and algorithms. In D. M. Gabbay and P. Smets, editors, *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 5 : Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning, pages 179–220. Kluwer Academic, 2000.
- [Lan03] Jérôme Lang. Contribution à l'étude de modèles, de langages et d'algorithmes pour le raisonnement et la prise de décision en intelligence artificielle. Habilitation à diriger des recherches, 2003. Université Paul Sabatier (Toulouse III).
- [Leh95] Daniel Lehmann. Belief revision revisited. In *Proceedings of 14<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1534–1539. Morgan Kaufmann, 1995.
- [LLS99] Céline Lafage, Jérôme Lang, and Régis Sabbadin. A logic of supporters. In B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, and A.L. Zadeh, editors, *Information, uncertainty and fusion*, pages 381–392. Kluwer Academic, 1999.
- [LM92] Daniel Lehmann and Menachem Magidor. What does a conditional knowledge base entail ? *Artificial Intelligence*, 55(1) :1–60, 1992.
- [Mey01] Thomas Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2) :59–84, 2001.
- [Mou88] Hervé Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, 1988.
- [MV97] Pirlot Marc and Philippe Vincke. *Semiorders : properties, representations, applications*. Kluwer Academic, 1997.
- [Nay94] Abhaya C. Nayak. Iterated belief change based on epistemic entrenchment. *Erkenntnis*, 41(1994) :353–390, 1994.

- [Neb98] Bernhard Nebel. How hard is it to revise a belief base ? In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 3, pages 77–145. Kluwer Academic, 1998.
- [Pap94] Christos H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison Wesley, 1994.
- [Pap01] Odile Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations. In Hans Rott and Mary-Anne Williams, editors, *Frontiers of Belief Revision*, pages 279–301. Kluwer Academic, 2001.
- [Paw11] Jakub Pawlewicz. Towards optimal play in multi-player yahtzee. *ICGA Journal*, 34(1), 2011.
- [Pea90] Judea Pearl. System Z : a natural ordering of defaults with tractable applications to default reasoning. In R. Parikh, editor, *Proceedings of the 3rd Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK'90)*, pages 121–135. Morgan Kaufmann, 1990.
- [Pin91] Gadi Pinkas. Propositional non-monotonic reasoning and inconsistency in symmetric neural networks. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'91)*, pages 525–530. Springer, 1991.
- [Pin95] Gadi Pinkas. Reasoning, nonmonotonicity and learning in connectionist networks that capture propositional knowledge. *Artificial Intelligence*, 77(2) :203–247, 1995.
- [PL92] Gadi Pinkas and Ronald Prescott Loui. Reasoning from inconsistency : A taxonomy of principles for resolving conflict. In *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, pages 709–719. Morgan Kaufmann, 1992.
- [Put94] M. L. Puterman. *Markov Decision Processes : Discrete Stochastic Dynamic Programming*. Willey, 1994.
- [Rev97] Peter Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.
- [Ros09] Julien Rossit. *Fusion d'informations incertaines sans commensurabilité des échelles de référence*. PhD thesis, Université d'Artois, 2009.
- [Rya92] Mark D. Ryan. *Ordered Presentations of Theories : Default Reasoning and Belief Revision*. PhD thesis, Department of Computing, Imperial College, 1992.
- [SDP11] Mariette Séravyet, Pierre Drap, and Odile Papini. Extending removed sets revision to partially preordered belief bases. *International Journal of Approximate Reasoning*, 52(1) :110–126, 2011.
- [Sen82] Amartya K. Sen. *Handbook of Mathematical Economics*, volume 3. North-Holland, 1982. 112-113 pp.
- [Spo88] Wolfgang Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1988.
- [Ste38] Moritz A. Stern. Aufgaben. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 18 :100, 1838.

- [Sé10] Mariette Sérayet. *Raisonnement à partir d'informations structurées et hiérarchisées : application à l'information archéologique*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2010.
- [Tes02] Gerald Tesauro. Programming backgammon using self-teaching neural nets. *Artificial Intelligence*, 134(1-2), 2002.
- [UE08] Joel Uckelman and Ulle Endriss. Preference modeling by weighted goals with max aggregation. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 579–587. AAAI Press, 2008.
- [UW08] Joel Uckelman and Andreas Witzel. Logic-based preference languages with intermediate complexity. In *Proceedings of the 4<sup>th</sup> Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling (MPREF'08)*, pages 123–127. AAAI Press, 2008.
- [Wil95] Mary-Anne Williams. Iterated theory base change : A computational model. In *Proceedings of 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1541–1547. Morgan Kaufmann, 1995.
- [Wis10] Florian Wisser. Creating possible worlds using sims tables for the imperfect information card game schnapsen. In *Proceedings of the 22<sup>th</sup> International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI 2010)*, pages 7–11. IEEE Press, 2010.
- [WN81] Bayard E. Wynne and Tadepalli Venkata Narayana. Tournament configuration and weighted voting. *Cahiers du bureau universitaire de recherche opérationnelle*, 36 :75–78, 1981.
- [Yah09] Safa Yahi. *Raisonnement en présence d'incohérence : de la compilation de bases de croyances stratifiées à l'inférence à partir de bases de croyances partiellement préordonnées*. PhD thesis, Université d'Artois, 2009.
- [Yan10] Jeff Yan. Collusion detection in online bridge. In *Proceedings of the 24<sup>th</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI'10)*, pages 1510–1515. AAAI Press, 2010.

## A.2 Publications de Sylvain Lagrue

### Articles de revues internationales

- [JLC'09] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. Max-based prioritized information fusion without commensurability. *Journal of Logic and Computation (JLC)*, 19(6) :1577–1610, 2009.
- [IJGIS'04] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Belief change and pre-orders : a brief overview. *International Journal of Geographical Information Science (IJGIS)*, 18(4) :353–388, 2004.
- [FSS'04] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Reasoning with partially ordered information in a possibilistic framework. *Fuzzy Sets and Systems (FSS)*, 144 :25–41, 2004.
- [IJUFKS'03] Salem Benferhat, Didier Dubois, **Sylvain Lagrue**, and Henri Prade. A big-stepped probability approach for discovering default rules. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems (IJUFKS)*, 11 :1–14, 2003.
- [FI'02] Salem Benferhat, Didier Dubois, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Making revision reversible : an approach based on polynomials. *Fundamenta Informaticae*, 53(3,4) :251–280, 2002.

### Articles de revues nationales

- [I3'09a] Nathalie Chetcuti-Sperandio and **Sylvain Lagrue**. Pondérations, collisions et préservation de la majorité en logique des pénalités. *Information-Interaction-Intelligence (Revue I3)*, 9(2), 2009.
- [I3'09b] Safa Yahi, Mariette Séravy, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement préordonnées. *Information-Interaction-Intelligence (Revue I3)*, 9(1), 2009.

### Articles de conférences internationales avec publication des actes et comité de sélection

- [IJCAI'11] Salem Benferhat, Julien Hué, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. Interval-based possibilistic logic. In *Proceedings of the 22<sup>nd</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'11)*, pages 750–755. AAAI Press, 2011.
- [CG'10] Stéphane Cardon, Nathalie Chetcuti-Sperandio, Fabien Delorme, and **Sylvain Lagrue**. A markovian process modelling for pickomino. In *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Computers and Games (CG'10)*, pages 199–210. Springer, 2011. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6515.

- [JELIA'10] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Safa Yahi. Bridging possibilistic conditional knowledge bases and partially ordered bases. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA'10)*, pages 38–50. Springer, 2010. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6341.
- [SUM'09] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. An analysis of sum-based incommensurable belief base merging. In *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Scalable Uncertainty Management (SUM'09)*, pages 55–67. Springer, 2009. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 5785.
- [CIG'08] Nathalie Chetcuti-Sperandio, Fabien Delorme, **Sylvain Lagrue**, and Denis Stackowiak. Determination and evaluation of efficient strategies for a stop or roll dice game : Heckmeck am bratwurmeck (pickomino). In *Proceedings of the 4<sup>th</sup> IEEE Symposium on Computational Intelligence and Games (CIG'08)*, pages 175–182. IEEE Press, Perth, Australie, 2008.
- [KR'08a] Nathalie Chetcuti-Sperandio and **Sylvain Lagrue**. How to choose weightings to avoid collisions in a restricted penalty logic. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 340–347. AAAI Press, 2008.
- [KR'08b] Safa Yahi, Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, Mariette Sérayet, and Odile Papini. Lexicographic inference for partially ordered belief bases. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 507–516. AAAI Press, 2008.
- [FUSION'07] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. A max-based merging of incommensurable ranked belief bases based on finite scales. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> Conference of the International Society of Information Fusion (FUSION'07)*. IEEE Press, jul 2007.
- [AAAI'07] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. An egalitarian fusion of incommensurable ranked belief bases under constraints. In *Proceedings of the 22<sup>nd</sup> Conference on Artificial Intelligence (AAAI'07)*, pages 367–372. AAAI Press, jul 2007.
- [IJCAI'05] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Revision of partially ordered information : Axiomatization, semantics and iteration. In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05)*, pages 376–381. Professional Book Center, 2005.
- [ECSQARU'05] Salem Benferhat, Jonathan Ben-Naim, Robert Jeansoulin, Mahat Khelfallah, **Sylvain Lagrue**, Odile Papini, Nic Wilson, and Éric Würbel. Belief revision of GIS systems : the results of revigis. In *Proceedings of the 8<sup>th</sup> European Conferences on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'05)*, pages 452–464. Springer, 2005. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3571.
- [DEXA'04] **Sylvain Lagrue**, Rodolphe Devillers, and Jean-Yves Besqueut. Partially ordered preferences applied to the site location problem in urban planning. In *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference on Database and Expert Systems Applications (DEXA'04)*, pages 151–160. Springer, 2004. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3180.

- [UAI'03] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. A possibilistic handling of partially ordered information. In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'03)*, pages 29–36. Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
- [IPMU'02b] Salem Benferhat, Didier Dubois, **Sylvain Lagrue**, and Henri Prade. A big-stepped probability approach for discovering default rules. In *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based systems (IPMU'2002)*, pages 283–289. Annecy France, 2002.
- [IPMU02b] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Reasoning with partially ordered information in a possibilistic logic framework. In *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based systems (IPMU'2002)*, pages 1047–1052. Annecy France, 2002.
- [IFSA'01] Salem Benferhat, Didier Dubois, **Sylvain Lagrue**, and Henri Prade. Towards learning default rules by identifying big-stepped probabilities. In *Proceedings of the Joint 9<sup>th</sup> IFSA Congress and 20<sup>th</sup> NAFIPS International Conference (IFSA'2001)*, pages 1850–1855. IEEE Press, Vancouver Canada, 2001.

## Articles dans des ateliers de travail internationaux avec comité de sélection

- [LCD'07] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. Maximum-based merging of incommensurable ranked belief bases. In *Proceedings of the 1<sup>st</sup> Workshop on Logics and Collective Decision making (LCD'07)*. Lille, 2007.
- [NMR'02] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Revising partially ordered beliefs. In *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Worshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR'02)*, pages 142–149. Toulouse, 2002.

## Articles de conférences nationales avec comité de sélection

- [RFIA'10] Stéphane Cardon, Nathalie Chetcuti-Sperandio, Fabien Delorme, and **Sylvain Lagrue**. Pickomania : un logiciel pour jouer à pickomino. In *Actes des 17<sup>me</sup> congrès francophone AFRIF-AFIA Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'10)*, pages 895–896, 2010. Session démonstrations de logiciels.
- [LFA'09] Stéphane Cardon, Nathalie Chetcuti-Sperandio, Fabien Delorme, and **Sylvain Lagrue**. Décision markovienne appliquée à un jeu de stop ou encore : Pickomino (heckmeck am bratwurmeck). In *Actes des rencontres francophones sur la logique floue et ses applications (LFA'09)*, pages 159–166. Cépaduès, 2009.
- [IAF'09] Nathalie Chetcuti-Sperandio, Fabien Delorme, **Sylvain Lagrue**, and Denis Stackowiak. Évaluation d’algorithmes de type monte-carlo pour pickomino. In *actes des Journées Nationales de l’Intelligence Artificielle Fondamentale (IAF'09)*. Marseille, 2009.

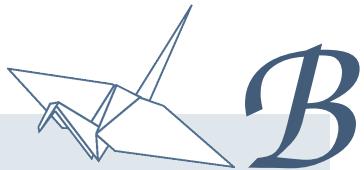
- [MFI'09] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. Analyse du comportement d'opérateurs de fusion basés sur la somme : du cadre commensurable au cadre incommensurable. In *actes des 5<sup>me</sup> journées francophones sur les Modèles Formels de l'Interaction (MFI'09)*, pages 47–56. Lannion, 2009.
- [IAF'08a] Nathalie Chetcuti-Sperandio and **Sylvain Lagrue**. Pondérations et collisions en logique des pénalités. In *Actes des Journées Nationales de l'Intelligence Artificielle Fondamentale (IAF'08)*, 2008.
- [IAF'08b] Safa Yahi, Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, Mariette Sérayet, and Odile Papini. Une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement préordonnées. In *Journées Nationales de l'Intelligence Artificielle Fondamentale (IAF'08)*, 2008.
- [RFIA'08] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. Fusion majoritaire de bases de croyances ordonnées sans commensurabilité des échelles de référence. In *Actes du 16<sup>me</sup> congrès francophone Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'08)*, pages 54–63. Amiens, 2008.
- [LFA'07] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Julien Rossit. Fusion égalitariste de bases de croyances ordonnées incommensurables. In *Actes des Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'07)*, pages 251–258. Cépaduès Éditions, Nîmes, nov 2007.
- [EGC'06] **Sylvain Lagrue**, Jérémie Lussiez, and Julien Rossit. Un logiciel permettant d'apprendre des règles et leurs exceptions : Area. In *Actes du congrès Extraction et Gestion des Connaissances (EGC'06)*, pages 745–746. RNTI E6, Cépaduès éditions, 2006.
- [RFIA'04] Salem Benferhat, **Sylvain Lagrue**, and Odile Papini. Raisonner qualitativement avec des croyances partiellement ordonnées. In *Actes des 14<sup>me</sup> Congrès Francophone AFRIF-AFIA sur la Reconnaissance des Formes et l'Intelligence Artificielle (RFIA'04)*, volume 1, pages 227–236. Toulouse France, 2004.
- [LFA'00] Salem Benferhat, Didier Dubois, **Sylvain Lagrue**, and Henri Prade. Vers l'apprentissage de règles tolérant les exceptions avec des probabilités à grandes marches. In *Actes des rencontres francophones sur la logique floue et ses applications (LFA'2000)*, pages 317–324. Cépaduès Éditions, La Rochelle, 2000.

## Thèse de doctorat

- [DOC'03] **Sylvain Lagrue**. *Gestion d'informations partiellement ordonnées : raisonnement, révision et information géographique*. Thèse de doctorat, Université du Sud - Toulon - Var, 2003.

## A.2 Publications de Sylvain Lagrue

---



## Sélection de publications

### Sommaire

---

B.1	FSS'04 : Reasoning with Partially Ordered Information in a Possibilistic Logic Framework . . . . .	88
B.2	KR'08 : A Lexicographic Inference for Partially Preordered Belief Bases . . . . .	109
B.3	KR'08 : How to Choose Weightings to Avoid Collisions in a Restricted Penalty Logic . . . . .	120
B.4	IJCAI'11 : Interval-Based Possibilistic Logic . . . . .	128
B.5	IJCAI'05 : Revision of Partially Ordered Information : Axiomatization, Semantics and Iteration . . . . .	134
B.6	JLC'09 : Max-Based Prioritized Information Fusion Without Commensurability . . . . .	140
B.7	CG'10 : A Markovian Process Modelling for Pickomino . . . . .	176

---

D'un point de vue thématique et de la synthèse, les publications sont regroupées ainsi :

#### Raisonnement en présence d'incohérences : le cas ordonné

FSS'04 Reasoning with Partially Ordered Information in a Possibilistic Logic Framework  
KR'08 A Lexicographic Inference for Partially Preordered Belief Bases

#### Raisonnement en présence d'incohérences : le cas pondéré

KR'08 How to Choose Weightings to Avoid Collisions in a Restricted Penalty Logic  
IJCAI'11 Interval-Based Possibilistic Logic

#### Dynamique des croyances

IJCAI'05 Revision of Partially Ordered Information : Axiomatization, Semantic sand Iteration  
JLC'09 Max-Based Prioritized Information Fusion Without Commensurability

#### Prise de décision en environnement stochastique

CG'10 A Markovian Process Modelling for Pickomino

## B.1 FSS'04 : Reasoning with Partially Ordered Information in a Possibilistic Logic Framework

### Reasoning with Partially Ordered Information in a Possibilistic Logic Framework

Salem Benferhat<sup>a</sup>, Sylvain Lagrue<sup>b,c</sup>, Odile Papini<sup>c</sup>

<sup>a</sup> CRIL - CNRS, Université d'Artois,  
Rue Jean Souvraz, SP 18 62307 Lens Cedex, France  
benferhat@cril.univ-artois.fr

<sup>b</sup> PRAXITEC  
115, rue St Jacques, 13006 Marseille, France  
lagrue@univ-tln.fr

<sup>c</sup> SIS, Université de Toulon et du Var,  
Avenue de l'université BP 132, 83957 La Garde cedex, France  
papini@univ-tln.fr

---

#### Abstract

In many applications, the reliability relation associated with available information is only partially defined, while most of existing uncertainty frameworks deal with totally ordered pieces of knowledge. Partial pre-orders offer more flexibility than total pre-orders to represent incomplete knowledge.

Possibilistic logic, which is an extension of classical logic, deals with totally ordered information. It offers a natural qualitative framework for handling uncertain information. Priorities are encoded by means of weighted formulas, where weights are lower bounds of necessity measures.

This paper proposes an extension of Possibilistic logic for dealing with partially ordered pieces of knowledge. We show that there are two different ways to define a possibilistic logic machinery which both extend the standard one.

*Key words:* possibilistic logic, partial pre-orders.

---

#### 1 Introduction

Possibilistic Logic, which is an extension of classical logic, is a suitable framework to deal with totally ordered information. Priorities are encoded by means of weighted formulas, where weights are lower bounds of necessity measures. Possibilistic logic has a syntactic inference which is sound and complete with respect

to a semantics based on possibility distributions. Moreover, its computational complexity is slightly higher than the one of classical logic [1].

In many applications, the reliability relation associated with available information is only partially defined, while most of existing uncertainty frameworks deal with totally ordered pieces of knowledge. Partial pre-orders offer more flexibility than total pre-orders to represent incomplete knowledge. Moreover, they avoid comparing unrelated pieces of information.

The need for extension of uncertainty frameworks to partial pre-orders is even crucial if we consider the dynamics of knowledge. Namely, even if the available information is totally ordered, then it may happen, when using some updating operators [2], that incorporating a new piece of information leads to partially ordered knowledge.

Another situation is when we merge multiple sources information. Indeed the application of some merging techniques, like the one based on preferred sub-theories [3], [4], can also result in a set of partially ordered pieces of information.

This paper proposes an extension of basic notions of possibilistic logic [5], when pieces of information are only partially ordered. Namely, instead of associating with formulas or interpretations numbers in  $[0, 1]$ , we use elements from a partially ordered set. Two definitions of possibilistic inference, which both extend the one used in possibilistic logic, are presented. This paper is an extended and revised version of the conference paper [6].

The paper is organized as follows. Section 2 briefly introduces possibilistic logic. Section 3 gives some definitions on partial pre-orders. Section 4 proposes an extension of semantics of possibilistic logic, whereas Section 5 extends its syntactic inference. We then provide two different methods to compactly encode a partial pre-order on interpretations by means of a partial pre-order on formulas. The proofs of main results are provided in appendix.

## 2 A refresher on possibilistic logic

Let  $\mathcal{L}$  be a *finite* propositional language. We denote by  $\Omega$  the set of interpretations of  $\mathcal{L}$ , and by  $\omega$  an element of  $\Omega$ . Let  $\varphi$  be a formula,  $Mod(\varphi)$  denotes the set of the models of  $\varphi$ .

The basic element of the semantics of possibilistic logic is the notion of a possibility distribution [7], denoted by  $\pi$ , which is a function from  $\Omega$  to  $[0, 1]$ .  $\pi(\omega)$  evaluates to what extent  $\omega$  is compatible, or consistent, with our available knowledge.  $\pi(\omega) = 0$  means that  $\omega$  is impossible, while  $\pi(\omega) = 1$  means that  $\omega$  is totally possible.

## B.1 FSS'04 : Reasoning with Partially Ordered Information in a Possibilistic Logic Framework

---

$\pi(\omega) \geq \pi(\omega')$  means that  $\omega$  is more plausible than  $\omega'$ . A distribution  $\pi$  is said to be normalized, or consistent, if there exists an interpretation  $\omega$  such that  $\pi(\omega) = 1$ . A total pre-order on interpretations, denoted by  $\leq_\pi$ , can be associated with a possibility distribution in the following way:

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \leq_\pi \omega' \text{ iff } \pi(\omega') \leq \pi(\omega).$$

We denote by  $Core(\pi)$ , the set of preferred interpretations, i.e., those with the maximal degree of possibility. More formally:

$$Core(\pi) = \{\omega \in \Omega : \nexists \omega', \pi(\omega') > \pi(\omega)\}.$$

A formula  $\psi$  is said to be a plausible consequence of our beliefs (encoded by  $\pi$ ), denoted by  $\pi \models \psi$ , iff  $Core(\pi) \subseteq Mod(\psi)$ .

**Example 1** Let  $a$  and  $b$  be two propositional variables. Let  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  be the set of interpretations such that  $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$ ,  $\omega_1 = \{\neg a, b\}$ ,  $\omega_2 = \{a, \neg b\}$  and  $\omega_3 = \{a, b\}$ . Let  $\pi$  be a possibility distribution  $\pi$  such that  $\pi(\omega_0) = 0$ ,  $\pi(\omega_1) = 0.5$  and  $\pi(\omega_2) = \pi(\omega_3) = 1$ . It can be checked that the formula  $a \vee b$  is a plausible consequence of  $\pi$ . Indeed, we have  $Mod(a \vee b) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  which contains  $Core(\pi) = \{\omega_2, \omega_3\}$ .

At the syntactic level, uncertain pieces of information are represented by means of a possibilistic knowledge base, which is a set of weighted formulas of the form  $\Sigma = \{(\varphi_i, a_i) : i = 1, \dots, n\}$  where  $\varphi_i$  is a propositional formula, and  $a_i \in [0, 1]$ . The real number  $a_i$  represents a lower bound of certainty degree of the formula  $\varphi_i$ . A possibilistic knowledge base only contains pieces of information which are somewhat certain. Indeed, all formulas having a weight 0 can be removed from  $\Sigma$  without any change in inference (see [5] for more details).

A possibilistic knowledge base can also be represented qualitatively and syntactically by a total pre-order on a set of formulas, denoted by  $\leq_\Sigma$ , where the minimal formulas represent the preferred formulas (the formulas with the higher weight), in the following way,:

$$\varphi \leq_\Sigma \varphi' \text{ iff } (\varphi, a), (\varphi', b) \in \Sigma \text{ and } b \leq a.$$

Note that, in possibilistic logic, a same formula can appear with different weights. For instance, it is possible to consider a knowledge base composed of the following weighted formulas:  $\Sigma = \{(a, 0.6), (b, 0.4), (a, 0.2)\}$ . In this case, some care should be taken before constructing  $\leq_\Sigma$ . One possibility consists of removing redundant formulas with lowest weight (this still leads to an equivalent possibilistic

knowledge base [5]). Another possibility is to rewrite syntactically identical formulas into syntactically different formulas, but semantically equivalent. For instance,  $(a, 0.2)$  can be replaced by  $(a \vee a, 0.2)$ .

We denote by  $\Sigma_{\geq a}$  the set of propositional formulas of  $\Sigma$  having a weight at least equal to  $a$ , namely  $\Sigma_{\geq a} = \{\varphi : (\varphi, b) \in \Sigma, b \geq a\}$ . The degree of inconsistency of a possibilistic knowledge base  $\Sigma$  is denoted by  $Inc(\Sigma)$ . It is defined in the following way:

$$Inc(\Sigma) = \min\{a : \Sigma_{\geq a} \text{ is consistent}\}.$$

A formula  $\psi$  is syntactically inferred from  $\Sigma$ , denoted by  $\Sigma \vdash_{\pi} \psi$ , iff  $Inc(\Sigma) < Inc(\Sigma \cup \{(\neg\psi, 1)\})$ . It can be checked that possibilistic inference is based on one consistent and classical subbase of  $\Sigma$ , composed of propositional formulas whose certainty weight is strictly greater than the inconsistency degree of  $\Sigma$ .

**Example 2** Let  $\Sigma = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5)\}$ . Let us check that the formula  $a \vee b$  is a consequence of  $\Sigma$ . Indeed we have  $Inc(\Sigma) = 0$  and  $Inc(\Sigma \cup \{(\neg a \wedge \neg b, 1)\}) = 1$ , hence  $Inc(\Sigma) < Inc(\Sigma \cup \{(\neg a \wedge \neg b, 1)\})$ . More generally, since  $\Sigma$  is consistent (i.e.,  $Inc(\Sigma) = 0$ ), then  $\psi$  is a plausible consequence of  $\Sigma$  iff  $\psi$  is a classical consequence of its classical base, namely  $\{a \vee b, a\}$ .

Each possibilistic knowledge base induces a unique possibility distribution, denoted by  $\pi_{\Sigma}$ . The idea is to consider that interpretations satisfying all formulas of  $\Sigma$  are completely possible and get the highest possibility degree, namely 1. The other interpretations are ranked with respect to the highest formula that they falsify [5]. More formally,  $\forall \omega \in \Omega$ :

$$\pi_{\Sigma}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \forall (\varphi, a) \in \Sigma : \omega \models \varphi, \\ 1 - \max\{a : (\varphi, a) \in \Sigma \text{ and } \omega \not\models \varphi\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**Example 3** Let us compute the possibility distribution  $\pi_{\Sigma}$  associated with the base  $\Sigma = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5)\}$ . Let  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  be such that  $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$ ,  $\omega_1 = \{\neg a, b\}$ ,  $\omega_2 = \{a, \neg b\}$  and  $\omega_3 = \{a, b\}$ . We have  $\pi_{\Sigma}(\omega_0) = 0$ ,  $\pi_{\Sigma}(\omega_1) = 0.5$ , and  $\pi_{\Sigma}(\omega_2) = \pi_{\Sigma}(\omega_3) = 1$ , which is the same distribution as the one presented in Example 1.

The semantic inference coincides with the syntactic one. Namely, let  $\pi_{\Sigma}$  be the possibility distribution associated with possibilistic knowledge  $\Sigma$  then [5]:

$$\forall \psi \in \mathcal{L}, \pi_{\Sigma} \models \psi \text{ iff } \Sigma \vdash_{\pi} \psi.$$

### 3 Partial pre-orders: definitions and notations

#### 3.1 Basic definitions

A partial pre-order  $\preceq$  on a set  $A$  is a reflexive ( $a \preceq a$ ) and transitive (if  $a \preceq b$  and  $b \preceq c$  then  $a \preceq c$ ) binary relation. In this paper,  $a \preceq b$  intuitively means that  $a$  is at least as preferred as  $b$ .

A strict partial order  $\prec$  on a set  $A$  is an irreflexive ( $a \prec a$  does not hold) and transitive binary relation (we use strict partial order instead of strict partial pre-order because a strict partial order is anti-symmetric).  $a \prec b$  means that  $a$  is strictly preferred to  $b$ . A strict partial order is generally defined from a partial pre-order as  $a \prec b$  if  $a \preceq b$  holds but  $b \preceq a$  does not hold.

The equality is defined by  $a = b$  iff  $a \preceq b$  and  $b \preceq a$ .  $a = b$  means that  $a$  and  $b$  are equally preferred. We lastly define incomparability, denoted by  $\sim$ , as  $a \sim b$  if and only if neither  $a \preceq b$  nor  $b \preceq a$  holds.  $a \sim b$  means that neither  $a$  is preferred to  $b$ , nor the converse.

In the following,  $x \not\preceq y$  (resp.  $x \not\prec y, x \neq y$ ) means that  $x \preceq y$  (resp.  $x \prec y, x = y$ ) does not hold.

A total pre-order  $\leq$  is a partial pre-order such that  $\forall a, b \in A : a \leq b$  or  $b \leq a$ .

**Remark 4** Note that for the purpose of this paper, the preference relation on a set  $A$  is often explicitly specified by both  $\preceq$  and  $\prec$ , and generally we only have  $x \prec y$  implies that  $x \preceq y$  and  $y \not\preceq x$ . When there is no ambiguity, the strict preference  $\prec$  is defined as usual, i.e.,  $x \prec y$  iff  $x \preceq y$  and  $y \not\preceq x$ . The equality is always defined as usual:  $x = y$  iff  $x \preceq y$  and  $y \preceq x$ .

Let  $\prec$  a strict partial order on a set  $A$ . The set of minimal elements of  $A$ , denoted by  $Min(A, \prec)$ , is defined as follows:

$$Min(A, \prec) = \{a : a \in A, \nexists b \in A, b \prec a\}.$$

Note that only strict preference is used to determine minimal elements of  $A$ .

---

<sup>1</sup> Since we consider that  $A$  is finite,  $Min(A, \prec)$  is never empty. The extension to the infinite case needs to require the property of well foundedness of considered partial pre-orders.

### 3.2 From a partial pre-order on elements to a partial pre-order on subsets of elements

Given a partial pre-order  $\preceq$  and a strict partial order  $\prec$  on a *finite* set  $A$ , we need to compare, for the purpose of this paper, subsets of  $A$ . Roughly speaking, a subset  $X$  is preferred to another subset  $Y$ , if the best elements in  $X$  are preferred to the best elements of  $Y$ . Following Halpern [8] (see also Cayrol et al. [9], Dubois et al. [10] and Lafage et al. [11]), there are two meaningful ways to compare subsets of  $A$ . These two partial pre-orders on  $2^A$  are respectively called “strong” and “weak” preference relations. In both cases, a preference relation is obtained by explicitly specifying the partial pre-order and partial strict order.

#### 3.2.1 Strong preferences

Let  $\preceq$  be a partial pre-order on a set  $A$  and  $\prec$  its associated strict partial order, defined by  $x \prec y$  iff  $x \preceq y$  and  $y \not\preceq x$ .

The first way to define a preference relation on subsets  $X$  and  $Y$  of  $A$  is to consider that  $X$  is preferred to  $Y$  if there exists at least one element in  $X$  which is preferred to all elements in  $Y$ , more formally:

**Definition 5** Let  $\preceq$  be a partial pre-order on  $A$  and  $X, Y \subseteq A$  (we assume that either  $X$  or  $Y$  is not empty):

- $X$  is strongly preferred to  $Y$ , denoted by  $X \preceq_s Y$ , iff  $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$  such that  $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec), x \preceq y$ ,
- $X$  is strongly and strictly preferred to  $Y$ , denoted by  $X \prec_s Y$ , iff  $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$  such that  $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec), x \prec y$ ,
- The strong equality, denoted by  $=_s$ , is simply defined as:  $X =_s Y$  iff  $X \preceq_s Y$  and  $Y \preceq_s X$ .

If  $X = Y = \emptyset$ , then we have  $X \preceq_s Y$  and  $Y \preceq_s X$ .

The relation  $\preceq_s$  is transitive but not reflexive. For instance, if we consider  $A = \{a, b\}$  and  $\preceq$  be such that  $a \sim b$ . Then  $\{a, b\} \preceq_s \{a, b\}$  does not hold. On the other hand,  $\prec_s$  is a strict partial order, namely it is irreflexive and transitive.

The following clarifies relationships between  $\prec_s$  and  $\preceq_s$ . Let  $X, Y$  and  $Z \subseteq A$ , then:

- (1) if  $X \prec_s Y$  then  $X \preceq_s Y$ ,
- (2) if  $X \prec_s Y$  and  $Y \preceq_s Z$  then  $X \prec_s Z$ ,
- (3) if  $X \preceq_s Y$  and  $Y \prec_s Z$  then  $X \prec_s Z$ ,
- (4) if  $X \prec_s Y$  then  $X \preceq_s Y$  holds and  $Y \preceq_s X$  does not hold.

The converse of (4) does not hold as it is shown in the following example:

**Example 6** Let  $A = \{a, b\}$ ,  $X = \{a, b\}$  and  $Y = \{a\}$ . Suppose that  $\preceq$  is a partial pre-order such that  $a \sim b$ . Then  $X \preceq_s Y$  holds (indeed there exists an element in  $X$ , namely  $a$ , preferred to all elements in  $Y$ ), and  $Y \preceq_s X$  does not hold, but  $X \prec_s Y$  do not hold.

The main limitation of strong preference is that it often leads to incomparability as it is illustrated by the following example:

**Example 7** Let  $\preceq$  be a partial pre-order on a set  $A$  such that  $A = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ ,  $x_1 = y_1$  and  $x_2 = y_2$ . Let  $X, Y \subseteq A$  be such that  $X = \{x_1, x_2\}$  and  $Y = \{y_1, y_2\}$ . Intuitively, we expect to conclude that  $X$  and  $Y$  are equally preferred. However, applying Definition 5, we have neither  $X \preceq_s Y$ , nor  $Y \preceq_s X$ .

There is another reason why  $\preceq_s$  is not always desirable: it does not satisfy the so-called the monotony property ( $Y \subseteq X$  implies  $X \preceq_s Y$ ), which is an expected property for a plausibility measure. For instance, let  $A = \{a, b, c\}$  and  $X = \{a, b, c\}$   $Y = \{a, b\}$ . Assume that the partial pre-order  $\preceq$  on  $A$  is such that  $a \sim b$ ,  $a \sim c$  and  $b \sim c$ . We have  $Y \subseteq X$  but  $X \preceq_s Y$  does not hold.

### 3.2.2 Weak preferences

A second way to define a partial pre-order on subsets  $X$  and  $Y$  of  $A$  is to consider that  $X$  is preferred to  $Y$  if for each element  $y$  of  $Y$  there exists at least one element  $x$  in  $X$ , such that  $x$  is as preferred as  $y$ , more formally:

**Definition 8** Let  $\preceq$  be a partial pre-order on  $A$  and  $X, Y \subseteq A$  (we assume that neither  $X$  nor  $Y$  is empty):

- $X$  is weakly preferred to  $Y$ , denoted by  $X \preceq_w Y$  iff  $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec)$ ,  $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$  such that  $x \preceq y$ ,
- $X$  is weakly and strictly preferred to  $Y$ , denoted by  $X \prec_w Y$  iff  $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec)$   $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$ , such that  $x \prec y$ ,
- The weak equality, denoted by  $=_w$ , is defined as  $X =_w Y$  iff  $X \preceq_w Y$  and  $Y \preceq_w X$ .

If  $X = Y = \emptyset$ , then we have  $X \preceq_w Y$  and  $Y \preceq_w X$ .

It is easy to check that  $\preceq_w$  is a partial pre-order (reflexive and transitive) and that  $\prec_w$  is a strict partial order (irreflexive and transitive).

The following proposition provides an equivalent definition of  $=_w$ .

**Proposition 9** Let  $X$  and  $Y$  be two non-empty subsets of  $A$ ,  $\preceq$  be a partial pre-order on  $A$  and  $\prec$  its usual strict counterpart. Then:

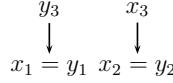


Fig. 1.  $X \neq_s Y$  and  $X =_w Y$

$X =_w Y$  iff  $X \preceq_w Y$  and  $Y \preceq_w X$  iff  
 $\forall x \in \text{Min}(X, \prec), \exists y \in \text{Min}(Y, \prec)$  such that  $x = y$  and  
 $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec), \exists x \in \text{Min}(X, \prec)$  such that  $x = y$ .

**Example 10** Figure 1 shows a case where  $X \neq_s Y$  and  $X =_w Y$ , with  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  and  $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ . An arrow  $x \leftarrow y$  means that  $x \preceq y$ , the transitivity and the reflexivity are not represented for the sake of simplicity. Hence, we have  $\text{Min}(X, \prec) = \{x_1, x_2\}$  and  $\text{Min}(Y, \prec) = \{y_1, y_2\}$ . We have  $X =_w Y$ , because  $x_1 = y_1$  and  $x_2 = y_2$  but  $X \preceq_s Y$  does not hold: there exists no element in  $X$  which is at least as preferred as all element in  $Y$ .

More generally, it can be checked that the definition of  $\prec_s$  (resp.  $\preceq_s$ ) implies the one of  $\prec_w$  (resp.  $\preceq_w$ ), namely:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \subseteq A, \text{ if } X \prec_s Y \text{ then } X \prec_w Y, \\ \forall X, Y \subseteq A, \text{ if } X \preceq_s Y \text{ then } X \preceq_w Y. \end{aligned}$$

However the converse does not hold as it is illustrated by the following counter-example.

**Example 11** Let  $A = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$  and a partial pre-order  $\preceq$  on  $A$  (and  $\prec$  its usual strict counterpart) defined by  $x_1 \prec y_1$  and  $x_2 \prec y_2$  and represented in Figure 2.



Fig. 2.  $X \not\prec_s Y$  and  $X \prec_w Y$

Let  $X$  and  $Y$  be two subsets of  $A$  such that  $X = \{x_1, x_2\}$  and  $Y = \{y_1, y_2\}$ . We have  $X \prec_w Y$ , indeed  $x_1$  is preferred to  $y_1$  and  $x_2$  is preferred to  $y_2$ . But  $X \prec_s Y$  does not hold: there is no element in  $X$  which is preferred to all best elements of  $Y$ .

The following summarizes some properties of  $\preceq_w$  and  $\prec_w$ , let  $X, Y, Z \subseteq A$ , then:

- (1) if  $X \prec_w Y$  then  $X \preceq_w Y$ ,
- (2) if  $X \prec_w Y$  and  $Y \preceq_w Z$  then  $X \prec_w Z$ ,
- (3) if  $X \preceq_w Y$  and  $Y \prec_w Z$  then  $X \prec_w Z$ ,
- (4) if  $X \prec_w Y$  then  $X \preceq_w Y$  holds and  $Y \preceq_w X$  does not hold.

As for the strong preference, the converse of (3) does not hold, as it can be checked from the same (counter-)example 6.

However, the strict monotony property (defined by  $X \subset Y$  implies  $X \prec Y$ ), which is not desirable in a possibility theory framework, holds neither for the weak preference, nor for the strong preference.

Note that the following monotony property is satisfied by  $\preceq_w$ , namely:

$$X \subseteq Y \text{ implies } X \preceq_w Y.$$

The following proposition shows that, in case where  $\preceq$  is a total pre-order, the two relations,  $\prec_w$  and  $\prec_s$ , are equivalent.

**Proposition 12** *Let  $\preceq$  be a total pre-order on  $A$ :  $\forall X, Y \subseteq A$  and  $X, Y \neq \emptyset$ ,  $X \prec_w Y$  iff  $X \prec_s Y$ .*

The proof is given in the appendix.

#### 4 A semantic extension for possibilistic logic

The idea of extending possibilistic logic to the case where weights associated with formulas belong to a valuation scale, different from the unit interval  $[0, 1]$ , has already been investigated in [10], [11], [12], [13].

In [12], the authors suggest to associate to each piece of information, not only their certainty, but also the source which provides the information. Each piece of information is of the form  $(\varphi, a_1/S_1, \dots, a_n/S_n)$ , where  $a_i \in [0, 1]$  and  $S_i$  represents the source. This provides an extension of possibilistic logic to deal with multi-source information and offers an intuitive way for managing incomparability relations. However their approach does not allow to deal with conflicts. For instance if a source  $S_1$  only provides  $(a, 1)$  and a source  $S_2$  only provides  $(\neg a, 1)$ , then the extension of possibilistic logic described in [12] infers  $a$  and  $\neg a$  (labelled with different sets of sources).

In their attempt to cast both uncertainty and time in a logical framework, Dubois and al. [10] use a boolean lattice  $S^T$ , where  $T$  represents a set of possible times.

$\pi(\omega) = \mathcal{T} \subseteq T$  means that at any instantiation in  $\mathcal{T}$ ,  $\omega$  is possible (not excluded). Necessity and possibility are naturally extended where roughly speaking the maximum, minimum and reversing scale ( $1 - (.)$ ) are replaced by the union, intersection and complementary. A weighted formula has the form  $(\varphi, \mathcal{T})$ , with  $\mathcal{T} \subseteq T$ , which means that  $\varphi$  is true at least during the time interval  $\mathcal{T}$ . All other basic concepts of possibilistic logic have natural counterparts when using boolean lattice instead of the unit interval  $[0, 1]$ .

Similar work has been done in [11]. The obtained extension of possibilistic logic is called “logic of supporters”. The valuations are labelled in the sense of ATMS [14]. Namely, there exists an underlying set of assumption symbols, an environment  $E$  is a set of assumptions and a label  $L$  is a set of environments (minimal w.r.t inclusion set). The lattice of labels (or supporters) is equipped with the relation  $\sqsubseteq$ . Intuitively,  $L \sqsubseteq L'$  means that the label  $L'$  is preferred to the label  $L$ . More formally:

$$L \sqsubseteq L' \text{ iff } \forall E \in L, \exists E' \in L' : E' \subseteq E.$$

The extension of possibilistic logic to a lattice of supporters follows the same steps as the ones proposed in [4].

This paper is also in the same spirit of these works, however we do not focus on specific lattices. More precisely, we propose an extension of possibilistic logic to deal with partial pre-orders.

#### 4.1 Semantic extension to partial pre-orders

The counterpart of possibility distributions are plausibility relations between elements of  $\Omega$ . A plausibility relation is described by means of a partial pre-order  $\preceq_\Omega$  and a strict partial order  $\prec_\Omega$ .  $\omega \preceq_\Omega \omega'$  (resp.  $\omega \prec_\Omega \omega'$ ) means that  $\omega$  is at least as plausible (resp. strictly more plausible) as  $\omega'$ .  $\omega \prec_\Omega \omega'$  means that  $\omega$  is strictly preferred to  $\omega'$ .

Note that contrary to a possibility distribution, we do not represent totally possible interpretations (represented by  $\pi(\omega) = 1$ ), we can only represent the notion of most preferred interpretations. Similarly, we cannot represent totally impossible interpretations (represented by  $\pi(\omega) = 0$ ), but only the least preferred interpretations. Hence, like in Spohn Ordinal Conditional function (OCF) [15], all interpretations are considered as somewhat possible.

A formula  $\psi$  is a plausible conclusion, given the available knowledge encoded by  $\preceq_\Omega$ , if it is satisfied by *all* preferred interpretations for  $\preceq_\Omega$ . More formally:

**Definition 13** Let  $\preceq_\Omega$  be a partial pre-order on  $\Omega$  (and  $\prec_\Omega$  its usual strict counter-

part). A formula  $\psi$  is inferred from  $\preceq_\Omega$ , denoted  $(\Omega, \prec_\Omega) \models \psi$ , iff  $\text{Min}(\Omega, \prec_\Omega) \subseteq \text{Mod}(\psi)$ .

Note again that only the strict partial order  $\prec_\Omega$  is useful for defining the inference relation. Let us illustrate this definition by the following example.

**Example 14** Let  $a$  and  $b$  be two propositional variables. Let  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  such that  $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$ ,  $\omega_1 = \{\neg a, b\}$ ,  $\omega_2 = \{a, \neg b\}$  and  $\omega_3 = \{a, b\}$ . Let  $\preceq_\Omega$  be a partial pre-order on  $\Omega$ , with only one constraint  $\omega_3 \prec_\Omega \omega_0$ . See Figure 3 where the edge “ $\omega \leftarrow \omega'$ ” means that  $\omega$  is strictly preferred to  $\omega'$ .

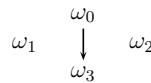


Fig. 3. Example of  $\prec_\Omega$

Note that  $\text{Min}(\Omega, \prec_\Omega) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ . We are interested to know if the formula  $a \vee b$  can be inferred from  $(\Omega, \prec_\Omega)$ . We have  $\text{Mod}(a \vee b) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  which contains  $\text{Min}(\Omega, \prec_\Omega)$ . Therefore we have  $(\Omega, \prec_\Omega) \models a \vee b$ .

This inference is an extension of the one used in possibilistic logic. Namely:

**Proposition 15** Let  $\pi$  be a possibility distribution and  $\leq_\pi$  be the total pre-order associated with a possibility distribution  $\pi$ , i.e.,  $\omega \leq_\pi \omega'$  iff  $\pi(\omega') \leq \pi(\omega)$ . Then:

$$\pi \models \psi \text{ iff } (\Omega, \preceq_\Omega) \models \psi.$$

The proof is immediate, since this proposition is a direct consequence of Definitions 13 and the definition of the possibilistic entailment.

## 5 A syntactic extension to possibilistic logic

This section provides two syntactic counterparts to the possibilistic inference relation introduced in the above section. We first show how to compactly encode a partial pre-order on interpretations  $\preceq_\Omega$  with a partial pre-order, denoted by  $\preceq_K$ , on a set of propositional formulas  $K$ . Given this partial pre-order  $\preceq_K$  on  $K$ , we construct a set of preferred consistent subsets of  $K$ , which will be used to define syntactic inferences.

### 5.1 Compact encoding and syntactic inference

Possibly ordered information are syntactically represented and encoded by a couple  $(K, \preceq_K)$ , where  $K$  represents a set of propositional formulas and  $\preceq_K$  is a partial

pre-order between elements of  $K$ .  $(K, \preceq_K)$  is called a partially ordered knowledge base. Given two formulas  $\varphi$  and  $\varphi'$  in  $K$ ,  $\varphi \preceq_K \varphi'$  means that  $\varphi$  is preferred to (more important than)  $\varphi'$ .  $\varphi \prec_K \varphi'$  is defined as  $\varphi \preceq_K \varphi'$  and  $\varphi' \not\preceq_K \varphi$ . Note that, in general,  $K$  is neither deductively closed, nor required to be consistent.

We now provide syntactic inferences from  $(K, \preceq_K)$ . We first need to define from  $(K, \preceq_K)$  a preference relation, between consistent subsets of  $K$ . We denote by  $\mathcal{C}$  the set of all consistent subsets of  $K$ . As it is said in section 2, there are two possible ways to define a preference relation on  $\mathcal{C}$ , depending if we use Definition 5 or Definition 8.

**Definition 16** Let  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ .

- $C_1 \preceq_{\mathcal{C},w} C_2$  (resp.  $C_1 \preceq_{\mathcal{C},s} C_2$ ) iff  $\{\varphi_2 \notin C_2\} \preceq_w \{\varphi_1 \notin C_1\}$  (resp.  $\{\varphi_2 \notin C_2\} \preceq_s \{\varphi_1 \notin C_1\}$ ),
- $C_1 \prec_{\mathcal{C},w} C_2$  (resp.  $C_1 \prec_{\mathcal{C},s} C_2$ ) iff  $\{\varphi_2 \notin C_2\} \prec_w \{\varphi_1 \notin C_1\}$  (resp.  $\{\varphi_2 \notin C_2\} \prec_s \{\varphi_1 \notin C_1\}$ ).

Intuitively,  $C_1$  is preferred to  $C_2$  if the preferred elements outside  $C_1$  are less important than the preferred elements outside  $C_2$ . This is a natural extension of *BO* (“Best Out”) ordering used in [4] for totally ordered information. We denote by  $CONS_w$  (resp.  $CONS_s$ ) the set of preferred consistent subsets of  $K$ , with respect to  $\prec_{\mathcal{C},w}$  (resp.  $\prec_{\mathcal{C},s}$ ). More formally:

$$CONS_w = \text{Min}(\mathcal{C}, \prec_{\mathcal{C},w}) \text{ and} \\ CONS_s = \text{Min}(\mathcal{C}, \prec_{\mathcal{C},s}).$$

**Example 17** Let  $K = \{\neg a, a, \neg b, b\}$  be a set of formulas and  $\preceq_K$  be the partial pre-order on  $K$  represented by Figure 4.



Fig. 4. Example of  $\preceq_K$

Namely,  $\preceq_K$  is such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \prec_K \neg b \\ b \prec_K \neg a \end{array} \right.$$

Note that  $K$  is inconsistent.  $\mathcal{C}$  is composed of 9 consistent subsets, which are listed in Table 1.

For instance we have  $C_0 =_{\mathcal{C},w} C_2$ , since minimal elements which are outside  $C_0$

Table 1  
Set of consistent subsets of  $K$ .

$C_i$	$\{\varphi \in C_i\}$	$\{\varphi \notin C_i\}$	$\text{Min}(\{\varphi \notin C_i\}, \prec_K)$
$C_0$	$\emptyset$	$\{a, \neg a, b, \neg b\}$	$\{a, b\}$
$C_1$	$\{a\}$	$\{\neg a, b, \neg b\}$	$\{\neg b, b\}$
$C_2$	$\{\neg a\}$	$\{a, b, \neg b\}$	$\{a, b\}$
$C_3$	$\{b\}$	$\{a, \neg a, \neg b\}$	$\{a, \neg a\}$
$C_4$	$\{\neg b\}$	$\{a, \neg a, b\}$	$\{a, b\}$
$C_5$	$\{a, b\}$	$\{\neg a, \neg b\}$	$\{\neg a, \neg b\}$
$C_6$	$\{a, \neg b\}$	$\{\neg a, b\}$	$\{b\}$
$C_7$	$\{\neg a, \neg b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$C_8$	$\{\neg a, b\}$	$\{a, \neg b\}$	$\{a\}$

( $a$  and  $b$ ) coincide with the minimal elements which are outside  $C_2$ . Similarly we have:  $C_0 =_{C,w} C_2 =_{C,w} C_4 =_{C,w} C_7$ .

We also have  $C_5 \preceq_{C,w} C_1$ . Indeed each preferred element outside  $C_5$  ( $\neg a$  or  $\neg b$ ) is less preferred than at least one element outside  $C_1$  (resp.  $\neg b$  and  $b$ ). Note however that  $C_5 \prec_{C,w} C_1$  does not hold.

We have  $C_5 \prec_{C,w} C_0$ . Indeed for each element outside  $C_5$  ( $\neg a$  or  $\neg b$ ), there exists a strictly preferred element outside  $C_0$  (resp.  $b$  and  $a$ ).

Figure 5 provides a graphical representation of  $\preceq_{C,w}$  and  $\prec_{C,w}$ . The bold lines represent  $\prec_{C,w}$ , while the dotted lines represent  $\preceq_{C,w}$ . For the sake of simplicity, neither transitivity nor reflexivity are represented.

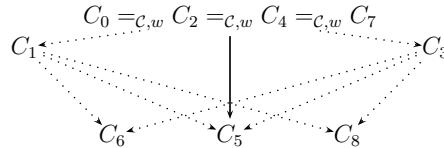
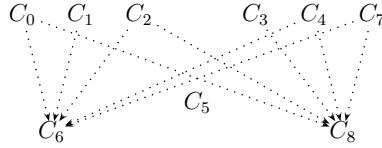


Fig. 5.  $\preceq_{C,w}$  and  $\prec_{C,w}$

Figure 6 shows the same result for  $\preceq_s$  and  $\prec_s$ . Clearly  $\preceq_{C,s}$  and  $\prec_{C,s}$  are more cautious than respectively  $\preceq_{C,w}$  and  $\prec_{C,w}$ , because of more produced incomparability.

The following gives the definition of syntactic inference, which again only considers strict preferences.

**Definition 18** A formula  $\psi$  is inferred from  $(K, \preceq_K)$ , denoted by  $(K, \preceq_K) \vdash_w \psi$ ,


 Fig. 6.  $\preceq_{C,s}$  and  $\prec_{C,s}$ 

(resp.  $(K, \preceq_K) \vdash_s \psi$  iff  $\forall C \in \text{CONS}_w$  (resp.  $\text{CONS}_s$ ),  $C \cup \neg\psi$  is inconsistent.

**Example 19 (continued)** Let us again consider Example 17. We have:

$$\text{CONS}_w = \{C_1, C_3, C_5, C_6, C_8\} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, \neg b\}, \{\neg a, b\}\}.$$

Let us show that  $a \vee b$  can be inferred from  $(K, \preceq_K)$ , namely  $\forall C_i \in \text{CONS}_w$ , we have  $\neg(a \vee b) \cup C_i$  is inconsistent. Indeed,  $\{a\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$ ,  $\{b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$ ,  $\{a, b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$ ,  $\{a, \neg b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$  and  $\{\neg a, b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$  are all inconsistent. We then have  $(K, \preceq_K) \vdash_w a \vee b$ .

As a corollary of Proposition 12, when  $\preceq_K$  is a total pre-order then  $\text{CONS}_w = \text{CONS}_s$ . Moreover, it can be checked, in this case, that there exists an element  $C_s$  in  $\text{CONS}_s$ , such that for each  $C \in \text{CONS}_s$ , we have  $C_s \subseteq C$ .

Again the syntactic inference extends the syntactic inference of possibilistic logic, when we only deal with totally ordered knowledge. Namely, let  $\Sigma$  be a possibilistic knowledge base. Then if we define  $(K, \preceq_K)$  from  $\Sigma$  as in Section 5.1, we can check that:

$$(K, \preceq_K) \vdash_w \psi \text{ iff } (K, \preceq_K) \vdash_s \psi \text{ iff } \Sigma \vdash_\pi \psi.$$

## 5.2 From partial pre-orders on formulas to partial pre-orders on interpretations

From  $(K, \preceq_K)$ , we can generate two possible preference relations on interpretations, depending again if we use Definition 5 or Definition 8. Let us denote by  $[\omega, K]$  the set of preferred formulas in  $K$  falsified by  $\omega$ , namely:

$$[\omega, K] = \text{Min}(\{\varphi : \varphi \in K, \omega \not\models \varphi\}, \prec_K).$$

Roughly speaking,  $\omega$  is preferred to  $\omega'$  if the preferred formulas falsified by  $\omega'$  are better than the preferred formulas falsified by  $\omega$ . More formally:

**Definition 20** Let  $(K, \preceq_K)$  be a partially ordered knowledge base:

- $\omega \preceq_{\Omega,w} \omega'$  (resp.  $\omega \preceq_{\Omega,s} \omega'$ ) iff  $[\omega', K] \preceq_w [\omega, K]$  (resp.  $[\omega', K] \preceq_s [\omega, K]$ ),

- $\omega \prec_{\Omega,w} \omega'$  (resp.  $\omega \prec_{\Omega,s} \omega'$ ) iff  $\lceil \omega', K \rceil \prec_w \lceil \omega, K \rceil$  (resp.  $\lceil \omega', K \rceil \prec_s \lceil \omega, K \rceil$ ).
- $\omega =_{\Omega,w} \omega'$  (resp.  $\omega =_{\Omega,s} \omega'$ ) iff  $\omega \preceq_{\Omega,w} \omega'$  (resp.  $\omega \preceq_{\Omega,s} \omega'$ ) and  $\omega' \preceq_{\Omega,w} \omega$  (resp.  $\omega' \preceq_{\Omega,s} \omega$ ).

**Example 21** Let us again consider the base given in example 17. Table 2 shows the set of formulas falsified by each interpretations.

Table 2

$\Omega$	$a$	$b$	$\{\varphi \in K : \omega_i \not\models \varphi\}$	$\lceil \omega_i, K \rceil$
$\omega_0$	$\neg a$	$\neg b$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\omega_1$	$\neg a$	$b$	$\{a, \neg b\}$	$\{a\}$
$\omega_2$	$a$	$\neg b$	$\{\neg a, b\}$	$\{b\}$
$\omega_3$	$a$	$b$	$\{\neg a, \neg b\}$	$\{\neg a, \neg b\}$

For instance we have  $\omega_1 \preceq_{\Omega,w} \omega_0$ . Indeed  $\lceil \omega_1, K \rceil = \{a\}$  and  $\lceil \omega_0, K \rceil = \{a, b\}$ . For each element in  $\lceil \omega_1, K \rceil$  (namely  $a$ ), we have a preferred element in  $\lceil \omega_0, K \rceil$  (here,  $a$ , by transitivity).

Using the definition of  $\prec_w$ , we can show that  $\omega_3 \prec_{\Omega,w} \omega_0$ . Indeed  $\lceil \omega_3, K \rceil = \{\neg a, \neg b\}$  and  $\lceil \omega_0, K \rceil = \{a, b\}$ . Moreover we have:  $b \prec_K \neg a$  and  $a \prec_K \neg b$ , hence  $\{a, b\} \prec_w \{\neg a, \neg b\}$ , which implies, following Definition 8,  $\omega_3 \prec_{\Omega,w} \omega_0$ .

The Figure 7 provides a graphical representation of  $\preceq_{\Omega,w}$  and  $\prec_{\Omega,w}$ .

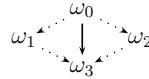


Fig. 7.  $\preceq_{\Omega,w}$  and  $\prec_{\Omega,w}$

It can be checked that the preference relations  $\preceq_{\Omega,w}$  and  $\preceq_{\Omega,s}$  induced on interpretations from a partially ordered knowledge base are extensions of the one used in possibilistic logic. More precisely, let  $\Sigma = \{(\varphi_i, a_i) : i = 1 \dots n\}$  be a possibilistic knowledge base. Let  $(K, \preceq_K)$  be the ordered knowledge base associated with  $\Sigma$ . Namely  $K = \{\varphi_i : (\varphi_i, a_i) \in \Sigma\}$  and for all  $(\varphi_i, a_i), (\varphi_j, a_j) \in \Sigma$   $\varphi_i \leq_K \varphi_j$  iff  $a_j \leq a_i$ .

We can check that:

$$\omega \preceq_{\Omega,w} \omega' \text{ iff } \pi_\Sigma(\omega') \leq \pi_\Sigma(\omega) \text{ and } \omega \prec_{\Omega,s} \omega' \text{ iff } \pi_\Sigma(\omega') < \pi_\Sigma(\omega).$$

The following proposition shows that the syntactic inferences defined in Definition 18 are equivalent to the semantic inference defined in Definition 13. Namely,

if we transform the partial pre-order on formulas  $\preceq_K$  to a partial pre-order on interpretations  $\preceq_\Omega$ , then applying the semantic inference using Definition 20 leads to the same result if we apply syntactic inference using Definition 18.

**Proposition 22** *Let  $(K, \preceq_K)$  be a partially ordered knowledge base. Let  $\preceq_{\Omega,w}$  and  $\preceq_{\Omega,s}$  be two partial pre-orders on interpretations obtained using Definition 20. Then:*

$$(K, \preceq_K) \vdash_w \psi \text{ iff } (\Omega, \preceq_{\Omega,w}) \models \psi \text{ and} \\ (K, \preceq_K) \vdash_s \psi \text{ iff } (\Omega, \preceq_{\Omega,s}) \models \psi.$$

**Example 23** *Let us again consider the base given in example 17, where we have  $(K, \preceq_K) \vdash_w a \vee b$ . Let be  $\preceq_{\Omega,w}$  (resp.  $\prec_{\Omega,w}$ ) the partial pre-order (resp. partial strict order) associated with  $(K, \preceq_K)$  and computed in Example 21. We have  $Mod(a \vee b) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  which contains  $Min(\Omega, \prec_{\Omega,w})$ . Therefore we have  $(\Omega, \prec_{\Omega,w}) \models a \vee b$ .*

## 6 Conclusion and perspectives

This paper has proposed an extension of possibilistic logic when dealing with partially ordered knowledge.

Two definitions of semantic and syntactic inferences have been investigated. Both of them extend the one used in possibilistic logic. Moreover, the syntactic inference is sound and complete with respect to the proposed semantics.

The strong syntactic inference relation, even if it extends possibilistic logic, has less interesting properties than the weak one. Indeed, the preference relation induced on consistent subbases or on interpretations is not a partial pre-order. Moreover, it does not satisfy the monotony property. Lastly, its associated inference is more cautious than the weak syntactic inference.

A future work will be to develop algorithms for the two syntactic inferences, following similar steps used in [16]. These algorithms will be applied to geographical information systems, where available pieces of knowledge are often partially ordered.

## Acknowledgements

This work has been supported by the European project REV!GIS #IST-1999-14189. Web site: <http://www.cmi.univ-mrs.fr/REVIGIS>.

The authors would like to thank H. Prade for his useful comments. The authors would also like to thank anonymous referees for their helpful comments.

## References

- [1] J. Lang, Possibilistic logic: complexity and algorithms, in: D. M. Gabbay, P. Smets (Eds.), *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, Vol. 5: Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning, Kluwer Academic, Dordrecht, 2001, pp. 179–220.
- [2] H. Katsuno, A. O. Mendelzon, On the difference between updating a knowledge base and revising it, in: *Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 1991, pp. 183–203.
- [3] G. Brewka, Preferred subtheories: an extended logical framework for default reasoning, in: Proc. of the 11th Inter. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'89), 1989, pp. 1043–1048.
- [4] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang, H. Prade, Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment, in: Proc. of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93), 1993, pp. 640–645.
- [5] D. Dubois, J. Lang, H. Prade, Possibilistic logic, in: *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 3, Oxford University Press, 1994, pp. 439–513.
- [6] S. Benferhat, S. Lagrue, O. Papini, Reasoning with partially ordered information in a possibilistic logic framework, in: Proc. of the Ninth International Conference, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU'2002), Vol. 2, 2002, pp. 1047–1052.
- [7] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum Press, New York, 1988.
- [8] J. Y. Halpern, Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structures, *Journal of AI Research* (7) (1997) 1–24.
- [9] C. Cayrol, V. Royer, C. Saurel, Management of preferences in assumption-based reasoning, in: Proc of Information Processing and the Management of Uncertainty in Knowledge based Systems (IPMU'92), Springer, 1992, pp. 13–22.
- [10] D. Dubois, J. Lang, H. Prade, Timed possibilistic logic, *Fundamenta Informaticae* XV (1992) 211–234.
- [11] C. Lafage, J. Lang, R. Sabbadin, A logic of supporters, in: B. Bouchon-Meunier, R. Yager, A. Zadeh (Eds.), *Information, uncertainty and fusion*, Kluwer Academic, 1999, pp. 381–392.

## Chapitre B : Sélection de publications

---

- [12] D. Dubois, J. Lang, H. Prade, Dealing with multi-source information in possibilistic logic, in: Proc. of the 10th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'92), 1992, pp. 38–42.
- [13] G. de Cooman, Confidence relations and comparative possibility, in: Proc. of the Fourth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT'96), Vol. 1, 1996, pp. 539–544.
- [14] J. de Kleer, An assumption-based TMS and extending the ATMS, *Artificial Intelligence* 28 (2) (1986) 127–162 and 163–196.
- [15] W. Spohn, Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state, *Causation in Decision, Belief Change and Statistics* (1998) 105–134.
- [16] S. Benferhat, D. Dubois, J. Lang, H. Prade, A. Saffiotti, P. Smets, Reasoning under inconsistency based on implicitly-specified partial qualitative probability relations: a unified framework, in: Proc. of 15th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-98), 1998, pp. 121–126.

## A Proofs of Section 3

**Proposition 9** Let  $X$  and  $Y$  be two non-empty subsets of  $A$  and  $\preceq$  be a partial pre-order on  $A$ . Then:

$$\begin{aligned} X =_w Y \text{ iff } & X \preceq_w Y \text{ and } Y \preceq_w X \text{ iff} \\ \forall x \in \text{Min}(X, \prec), \exists y \in \text{Min}(Y, \prec) \text{ such that } & x = y \text{ and} \\ \forall y \in \text{Min}(Y, \prec), \exists x \in \text{Min}(X, \prec) \text{ such that } & x = y. \end{aligned}$$

*Proof:*

- Suppose that  $X \preceq_w Y$  and  $Y \preceq_w X$ .

We only show that  $\forall x \in \text{Min}(X, \prec), \exists y \in \text{Min}(Y, \prec)$  such that  $x = y$  (the other case follows by symmetry).

By definition, we have  $X \preceq_w Y$  iff  $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec), \exists x \in \text{Min}(X, \prec)$  such that  $x \preceq y$ .

Let  $y_1 \in \text{Min}(Y, \prec)$  and  $x_1 \in \text{Min}(X, \prec)$  be such that  $x_1 \preceq y_1$ .

As we have  $Y \preceq_w X$ , by definition we also have  $\forall x \in \text{Min}(X, \prec), \exists y \in \text{Min}(Y, \prec)$  such that  $x \preceq y$ . Let  $y_2$  be such  $y$ . This property is true for all  $x$  in  $\text{Min}(X, \prec)$  and in particular for  $x_1$ , then we have:  $y_2 \preceq x_1 \preceq y_1$ .

Since  $y_1$  and  $y_2$  belongs to  $\text{Min}(Y, \prec)$  and are comparable, we have  $y_2 = x_1 = y_1$  for any  $y_1$ . We have so:

$$\forall y \in \text{Min}(Y, \prec), \exists x \in \text{Min}(X, \prec) \text{ such that } x = y.$$

- The converse follows immediately, indeed  $x = y$  implies, by definition, that  $x \preceq y$  and  $y \preceq x$ , hence:

$$\begin{aligned} \forall x \in \text{Min}(X, \prec), \exists y \in \text{Min}(Y, \prec) \text{ such that } x = y \text{ implies:} \\ \circ \forall x \in \text{Min}(X, \prec), \exists y \in \text{Min}(Y, \prec) \text{ such that } y \preceq x \text{ and} \\ \circ \forall y \in \text{Min}(Y, \prec), \exists x \in \text{Min}(X, \prec) \text{ such that } x \preceq y. \end{aligned}$$

■

**Proposition 12** Let  $\preceq$  be a total pre-order on  $A$ :  $\forall X, Y \subseteq A$  and  $X, Y \neq \emptyset$ ,  $X \prec_w Y$  iff  $X \prec_s Y$ .

*Proof:*

We only show that  $X \prec_w Y$  implies  $X \prec_s Y$  since the other sense immediately holds.

Let  $y$  be an element of  $\text{Min}(Y, \prec)$ . Suppose that  $X \prec_w Y$  holds, then there exists  $x \in \text{min}(X, \prec)$  such that  $x \prec y$ . Besides, since  $\preceq$  is a total pre-order on  $A$ , then  $\forall y' \in \text{min}(Y, \prec)$ , we have  $y = y'$ .

Hence,  $\exists x \in \text{min}(X, \prec)$  such that  $\forall y' \in \text{min}(Y, \prec)$ ,  $x \prec y'$ . Which means that  $X \prec_s Y$ . ■

## B Proofs of section 5

The proof of the Proposition 22 needs the following lemma.

**Lemma 24** *Let  $C \in \text{Cons}_w$  and  $\omega \in \text{Mod}(C)$ . Let  $C_\omega$  be such that  $C \cup \{\varphi : \omega \models \varphi\}$ . Then we have  $C_\omega \in \text{Cons}_w$ .*

*Proof:* Suppose  $C_\omega \notin \text{Cons}_w$ . Then  $\exists C' \in \text{Cons}_w$  such that  $C' \prec_{C,w} C_\omega$ . According to the Definition 16, we have:  $\forall \varphi \notin C', \exists \varphi_\omega \notin C_\omega, \varphi_\omega \prec_\Sigma \varphi'$ .

On the other hand, we have  $C \subseteq C_\omega$ . We can so deduce from  $\varphi_\omega \notin C_\omega$  that  $\varphi_\omega \notin C$ . We have so:  $\forall \varphi' \notin C', \exists \varphi_\omega \notin C : \varphi_\omega \prec_\Sigma \varphi'$ . This implies, by definition of  $\prec_{C,w}$ , that  $C' \prec_{C,w} C$ , which is impossible. ■

**Proposition 22** *Let  $(K, \preceq_K)$  be a partially ordered knowledge base. Let  $\preceq_{\Omega,w}$  and  $\preceq_{\Omega,s}$  be two partial pre-orders on interpretations obtained using Definition 20. Then:*

$$\begin{aligned} (K, \preceq_K) \vdash_w \psi &\text{ iff } (\Omega, \preceq_{\Omega,w}) \models \psi \text{ and} \\ (K, \preceq_K) \vdash_s \psi &\text{ iff } (\Omega, \preceq_{\Omega,s}) \models \psi. \end{aligned}$$

*Proof:*

We only provide the proof for  $\prec_w$ . The case of  $\prec_s$  follows similarly.

We need to show that  $\bigcup_{C \in \text{Cons}_w} \text{Mod}(C) = \text{Min}(\Omega, \prec_\Omega)$ .

- We first show that  $\text{Min}(\Omega, \prec_\Omega) \subseteq \bigcup_{C \in \text{Cons}_w} \text{Mod}(C)$ .

## B.1 FSS'04 : Reasoning with Partially Ordered Information in a Possibilistic Logic Framework

Let  $\omega \in \text{Min}(\Omega, \prec_\Omega)$ . Let us show that  $\omega \in \bigcup_{C \in \text{Cons}_w} \text{Mod}(C)$ . It is enough to show that  $C_\omega = \{\varphi \in K : \omega \models \varphi\}$  belongs to  $\text{Cons}_w$ . Suppose that  $C_\omega \notin \text{Cons}_w$ , this means that there exists  $C' \in \text{Cons}_w$  such that  $C' \prec_{\mathcal{C}, w} C_\omega$ .

Let  $\omega'$  be such that  $\omega' \in \text{Mod}(C')$ . From lemma 24, we have  $C_{\omega'} \in \text{Cons}_w$  and by transitivity  $C_{\omega'} \prec_{\mathcal{C}, w} C_\omega$ . We have so:

$$\begin{aligned} & \forall \varphi' \notin C_{\omega'}, \exists \varphi \notin C_\omega : \varphi \prec_\Sigma \varphi', \\ & \forall \varphi' \in \{\varphi' : \omega' \not\models \varphi'\}, \exists \varphi \in \{\varphi : \omega \not\models \varphi\} : \varphi \prec_\Sigma \varphi'. \end{aligned}$$

This last expression is equivalent to  $\omega' \prec_\Omega \omega$ , which is impossible, since  $\omega \in \text{Min}(\Omega, \prec_\Omega)$ . We have then  $C_\omega \in \text{Cons}_w$ .

- We now show that  $\bigcup_{C \in \text{Cons}_w} \text{Mod}(C) \subseteq \text{Min}(\Omega, \prec_\Omega)$ .

Let  $C$  be a consistent set such that  $C \in \text{Cons}_w$ . Suppose that  $\omega \models C$ , then (using lemma 24)  $C_\omega \in \text{Cons}_w$ .

Suppose that  $\omega \notin \text{Min}(\Omega, \prec_\Omega)$ , then it exists an interpretation  $\omega'$  such that  $\omega' \prec_\Omega \omega$ . By definition, that implies:

$$\begin{aligned} & \forall \varphi', \omega' \not\models \varphi', \exists \varphi, \omega \not\models \varphi : \varphi \prec_\Sigma \varphi', \\ & \forall \varphi' \notin \{\varphi' : \omega' \models \varphi'\}, \exists \varphi \notin \{\varphi : \omega \models \varphi\} : \varphi \prec_\Sigma \varphi'. \end{aligned}$$

If we denote by  $C_{\omega'} = \{\varphi' : \omega' \models \varphi'\}$ , we have:  $\forall \varphi' \notin C_{\omega'}, \exists \varphi \notin C_\omega : \varphi \prec_\Sigma \varphi'$ ,

which implies, by Definition 16, that  $C_{\omega'} \prec_{\mathcal{C}, w} C_\omega$ , which is impossible.

■

## B.2 KR'08 : A Lexicographic Inference for Partially Preordered Belief Bases

### A Lexicographic Inference for Partially Preordered Belief Bases

**S. Yahi and S. Benferhat and S. Lagrue      M. Sérayet and O. Papini**  
 Université Lille-Nord de France, LSIS-CNRS UMR 6168,  
 Artois, F-62307 Lens, CRIL, F-62307 Lens Université de la Méditerranée, ESIL,  
 CNRS UMR 8188, F-62307 Lens 163 av. de Luminy - 13288 Marseille Cedex 09. France  
 {yahi, benferhat, lagrue}@cril.univ-artois.fr {serayet, papini}@esil.univmed.fr

#### Abstract

Coherence-based approaches are quite popular to reason under inconsistency. Most of them are defined with respect to totally preordered belief bases such as the lexicographic inference which is known to have desirable properties from theoretical, practical and psychological points of view. However, partially preordered belief bases offer much more flexibility to represent efficiently incomplete knowledge and to avoid comparing unrelated pieces of information. In this paper, we propose a lexicographic inference for partially preordered belief bases that extends the classical one. On one hand, we define a natural inference relation which consists in applying classical lexicographic inference from all compatible totally preordered belief bases. On the other hand, we propose a novel cardinality-based preorder between consistent subbases. This cardinality-based preorder can be indifferently applied on partially or totally preordered belief bases. Then, applying classical inference on the preferred consistent subbases, according to this preorder, provides another lexicographic inference relation for partially preordered belief bases. Interestingly enough, we show that these two inference relations are equivalent. Lastly, a semantic characterization of these two equivalent definitions is provided.

**Keywords** partially preordered belief bases, lexicographic inference, reasoning under inconsistency.

#### Introduction

In Artificial Intelligence, reasoning under inconsistency represents a fundamental problem that arises in many situations such as exceptions tolerant reasoning, belief revision, integrating pieces of information coming from different possibly conflicting sources, reasoning with uncertainty or from incomplete information, etc. In this case, classical inference cannot be directly used since from an inconsistent base every formula can be inferred (*ex falso quodlibet sequitur* principle).

Many approaches have been proposed in order to reason under inconsistency without trivialization. While some of them consist in weakening the inference relation

Copyright © 2008, Association for the Advancement of Artificial Intelligence ([www.aaai.org](http://www.aaai.org)). All rights reserved.

such as paraconsistent logics (da Costa 1974), others weaken the available beliefs like the so-called coherence-based approaches which are quite popular.

Most of the coherence-based approaches (Resher and Manor 1970) are defined with respect to totally preordered belief bases like the possibilistic inference (Dubois, Lang, and Prade 1994) or adjustment revision (Williams 1995), the linear-based revision (Nebel 1994), the inclusion-preference inference (Brewka 1989), the preference-based default reasoning (Manuela Ritterskamp 2008) and the lexicographic inference (Benferhat et al. 1993a; Lehmann 1995).

Partially preordered belief bases offer much more flexibility in order to efficiently represent incomplete knowledge and to avoid comparing unrelated pieces of information. Indeed, in many applications, the priority relation associated with available beliefs is only partially defined and forcing the user to introduce additional unwanted priorities may lead to infer undesirable conclusions.

Naturally, the flexibility and the efficiency offered by partially preordered belief bases have motivated the definition of new coherence-based approaches dedicated to partially preordered belief bases by extending the ones defined initially in the case of totally preordered belief bases. For instance, one can list the extension of the possibilistic inference proposed in (Benferhat, Lagrue, and Papini 2004) and the extensions of the inclusion-preference inference given in (Junker and Brewka 1989).

Surprising enough, no extension has been proposed for the lexicographic inference despite the fact that it is known to be satisfactory from theoretical and practical points of view. Indeed, it has been shown to be more productive than both the possibilistic and the inclusion-preference inferences. For example, it does not suffer from the drowning effect like the possibilistic inference. Moreover, according to a psychological study achieved in (Benferhat, Bonnefon, and Neves 2004) in the context of default reasoning, it has been proved to be the most interesting among the other inference relations considered in the same study.

Our main interest in this paper is the definition of a lexicographic inference for partially preordered belief bases. We first define a natural and intuitive infer-

ence relation which consists in applying classical lexicographic inference from all the totally preordered belief bases which are compatible with the partially belief base at hand. Then, we propose a novel cardinality-based or lexicographic preorder over consistent subbases derived from the partially preordered belief base in question. Applying classical inference only on the preferred consistent subbases according to this preorder provides another lexicographic inference relation for partially preordered belief bases. The good news is that these two inference relations are equivalent and they extend the classical lexicographic inference (from totally preordered belief bases). Lastly, a semantic characterization of these two equivalent definitions is provided. All proofs are provided in the Appendix.

## Background

### Notations

We consider a finite set of propositional variables  $V$  where its elements are denoted by lower case Roman letters  $a, b, \dots$ . The symbols  $\top$  and  $\perp$  denote tautology and contradiction respectively. Let  $PL_V$  be the propositional language built from  $V$ ,  $\{\top, \perp\}$  and the connectives  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$  in the usual way. Formulae, i.e., elements of  $PL_V$  are denoted by Greek letters  $\phi, \varphi, \psi, \dots$ . The set of formulae are denoted by the upper case Roman letters  $A, B, \dots$ . The symbol  $\vdash$  denotes classical inference relation. Let  $\Sigma$  be a finite set of formulae,  $CONS(\Sigma)$  denotes the set of all consistent subbases of  $\Sigma$  while  $MCONS(\Sigma)$  denotes the set of all maximally consistent subbases of  $\Sigma$ . Namely,  $A \in MCONS(\Sigma)$  if and only if  $A \subseteq \Sigma$ ,  $A$  is consistent and there is no  $B \supsetneq A$  such that  $B$  is consistent. If  $\Sigma$  is consistent, then  $MCONS(\Sigma)$  contains one element which is  $\Sigma$ . The set of interpretations is denoted by  $\mathcal{W}$  and  $\omega$  denotes an element of  $\mathcal{W}$ . Let  $\phi$  be a propositional formula,  $Mod(\phi)$  denotes the set of models of  $\phi$ , namely  $Mod(\phi) = \{\omega \in \mathcal{W} : \omega \models \phi\}$ .

A partial preorder  $\preceq$  on a finite set  $A$  is a reflexive and transitive binary relation. In this paper,  $a \preceq b$  expresses that  $a$  is at least as preferred as  $b$ . A strict order  $\prec$  on  $A$  is an irreflexive and transitive binary relation.  $a \prec b$  means that  $a$  is strictly preferred to  $b$ . A strict order is defined from a preorder as  $a \prec b$  if and only if  $a \preceq b$  holds but  $b \preceq a$  does not hold.

The equivalence, denoted by  $\approx$ , is defined as  $a \approx b$  if and only if  $a \preceq b$  and  $b \preceq a$ . Moreover, we define the incomparability, denoted by  $\sim$ , as  $a \sim b$  if and only if neither  $a \preceq b$  nor  $b \preceq a$  holds. The set of minimal elements of  $A$  with respect to  $\prec$ , denoted by  $Min(A, \prec)$ , is defined as:

$$Min(A, \prec) = \{a \in A, \#b \in A : b \prec a\}$$

A total preorder  $\leq$  on a finite set  $A$  is a reflexive and transitive binary relation such that  $\forall a, b \in A$ , either  $a \leq b$  or  $b \leq a$  holds.

### A Refresher on Standard Lexicographic Inference

A totally preordered belief base  $(\Sigma, \leq)$  is a set  $\Sigma$  of classical formulae equipped with a total preorder  $\leq$  reflecting the priority relation that exists between its formulae.  $(\Sigma, \leq)$  can be viewed as a stratified belief base  $\Sigma = S_1 \cup \dots \cup S_m$  such that the formulae in  $S_i$  have the same level of priority and have a higher priority than the ones in  $S_j$  with  $j > i$ .

Many coherence-based approaches have been developed to reason from totally preordered belief bases. Following Pinkas and Loui's analysis (Pinkas and Loui 1992), coherence-based inference can be considered as a two step process consisting first in generating some preferred consistent subbases and then using classical inference from some of them. Examples of coherence-based approaches are the possibilistic inference (Dubois, Lang, and Prade 1994), the inclusion-preference inference (Brewka 1989) and the lexicographic inference (Benferhat et al. 1993a; Lehmann 1995) which is the focus of this paper.

The lexicographic preference between consistent subbases of a totally preordered belief base is defined as follows:

**Definition 1** Given a totally preordered belief base  $(\Sigma, \leq) = S_1 \cup \dots \cup S_m$ , let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Then,

- $A <_{lex} B$  iff  $\exists i, 1 \leq i \leq m$  such that  $|S_i \cap A| > |S_i \cap B|^1$  and  $\forall j, j < i, |S_j \cap B| = |S_j \cap A|$
- $A =_{lex} B$  iff  $\forall i, 1 \leq i \leq m$  such that  $|S_i \cap A| = |S_i \cap B|$ .

Let  $Lex(\Sigma, \leq)$  denote the set of all the lexicographically preferred consistent subbases of  $\Sigma$ , namely

$$Lex(\Sigma, \leq) = Min(CONS(\Sigma), <_{lex}).$$

It is easy to check that every element of  $Lex(\Sigma, \leq)$  is a maximal (with respect to set inclusion) consistent subbase of  $\Sigma$ .

Then, the lexicographic inference from  $(\Sigma, \leq)$  is defined by:

**Definition 2** Let  $(\Sigma, \leq)$  be a totally preordered belief base and let  $\psi$  be a propositional formula.  $\psi$  is a lexicographic consequence of  $\Sigma$ , denoted by  $\Sigma \vdash_{lex} \psi$ , iff  $\psi$  is a classical consequence of any lexicographically preferred consistent subbase of  $\Sigma$ , namely

$$(\Sigma, \leq) \vdash_{lex} \psi \text{ iff } \forall B \in Lex(\Sigma, \leq) : B \vdash \psi.$$

Now, the inclusion-preference inference, denoted by  $\vdash_{incl}$ , is defined in the same manner as the lexicographic inference by substituting the cardinality comparison by the set inclusion operator, namely

$$A <_{incl} B \text{ iff } \exists i, 1 \leq i \leq m \text{ such that } (S_i \cap B) \subset (S_i \cap A) \text{ and } \forall j, j < i, (S_j \cap B) = (S_j \cap A).$$

---

<sup>1</sup> $|A|$  denotes the number of formulae of  $A$ .

As to the possibilistic inference which is denoted by  $\vdash_\pi$ , it comes down to classical inference from the classical base  $\{\bigcup_{i=1}^{s-1} S_i\}$ , where  $s$  is the smallest index such that  $\bigcup_{i=1}^s S_i$  is inconsistent.

### A Lexicographic Inference Based on Compatible Totally Preordered Bases

We first recall the notion of totally preordered belief bases compatible with a given partially preordered belief base. Intuitively, a totally preordered belief base  $(\Sigma, \leq)$  is said to be compatible with a partially preordered belief base  $(\Sigma, \preceq)$  if and only if the total preorder  $\leq$  extends the partial preorder  $\preceq$ . Namely, it preserves strict and non-strict preference relations between every two formulae. More formally:

**Definition 3** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $\prec$  be the strict order associated with  $\preceq$ . A totally preordered belief base  $(\Sigma, \leq)$  is said to be compatible with  $(\Sigma, \preceq)$  if and only if:

- $\forall \varphi, \phi \in \Sigma : \text{if } \varphi \preceq \phi \text{ then } \varphi \leq \phi$ ,
- $\forall \varphi, \phi \in \Sigma : \text{if } \varphi \prec \phi \text{ then } \varphi < \phi$ .

We denote by  $\mathcal{C}(\Sigma, \preceq)$  the set of all totally preordered belief bases compatible with  $(\Sigma, \preceq)$ .

Now, we define a lexicographic inference for partially preordered belief bases that relies on this notion of compatible totally preordered belief bases as follows:

**Definition 4** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $\psi$  be a propositional formula. Then  $\psi$  is a  $\mathcal{C}$ -lexicographic conclusion of  $(\Sigma, \preceq)$ , denoted by  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^\mathcal{C} \psi$ , if and only if  $\psi$  is a classical lexicographic inference of every totally preordered belief base compatible with  $(\Sigma, \preceq)$ , namely

$$(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^\mathcal{C} \psi \text{ iff } \forall (\Sigma, \leq) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq) : (\Sigma, \leq) \vdash_{lex} \psi.$$

We note that this inference relation is very natural. Indeed, the notion of compatible totally preordered bases is very intuitive and has been considered in other previous works (but not with respect to lexicographic inference) like for example the possibilistic inference extension given in (Benferhat, Lagrué, and Papini 2003) and the inclusion-preference inference extension provided in (Junker and Brewka 1989).

Note that in Definition 4 if one replaces  $\vdash_{lex}^\mathcal{C}$  and  $\vdash_{lex}$  by respectively  $\vdash_\pi^\mathcal{C}$ ,  $\vdash_\pi$  and  $\vdash_{incl}^\mathcal{C}$ ,  $\vdash_{incl}$  then we get  $(\Sigma, \preceq) \vdash_\pi^\mathcal{C} \psi$  implies  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{incl}^\mathcal{C} \psi$  which itself implies  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^\mathcal{C} \psi$ , and the converses are false. The proof is immediate, since with totally preordered knowledge bases, it has been shown in (Benferhat et al. 1993b) that each possibilistic conclusion is also an inclusion-preference conclusion and also a lexicographic conclusion.

Moreover, in Definition 4 we consider the whole set of compatible totally ordered preferred belief bases. One

may just consider one compatible totally ordered belief base. This can be done by using some information measures or by selecting the most compact one. This way makes sense in some applications. However in this paper, we prefer to avoid such a choice, since this may lead to some risky or adventurous consequence relations.

Let us now illustrate the  $\mathcal{C}$ -lexicographic inference relation with the following example which will be used in the whole paper:

**Example 1** This example is inspired from an application within the framework of the European VENUS project regarding managing archaeological information. One of the tasks is the measurement using archaeological knowledge and requires the fusion of information coming from different sources.

For example, several agents equipped with different measuring tools observe an amphora on an underwater site. According to the first agent, this amphora is a Dressel 7 ( $d$ ) and the height of the amphora is 70 cm ( $h$ ). According to the second one, the amphora has a rim diameter of 15 cm ( $r$ ) and a height of 75 cm ( $\neg h$ ). According to the third one, the amphora has a rim diameter of 18 cm ( $\neg r$ ). The first agent is less reliable than the others. We do not know if the second agent is more reliable than the third. Another source is archaeological information on Dressel 7 amphora which has been copied in an XML file by a fourth agent who is less reliable than the three others. According to the XML file, a Dressel 7 has a rim diameter between 9.00 and 15.00 cm and a height between 50.00 and 70.00 cm ( $d \rightarrow r \wedge h$ ).

The set of formulae is  $\Sigma = \{d \rightarrow r \wedge h, d, r, \neg h, \neg r, h\}$  and the partial preorder  $\preceq$  on  $\Sigma$  is given in Figure 1, where the arc “ $a \rightarrow b$ ” means that  $b \prec a$ .

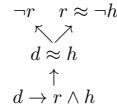
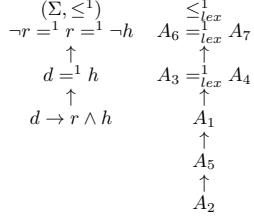
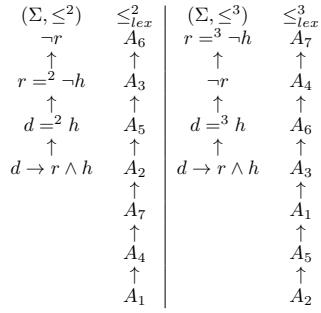


Figure 1: The partial preorder  $\preceq$  on  $\Sigma$

There are three total preorders  $\{\leq^1, \leq^2, \leq^3\}$  which are compatible with the partial preorder  $\preceq$ , i.e.,  $\mathcal{C}(\Sigma, \preceq) = \{(\Sigma, \leq^1), (\Sigma, \leq^2), (\Sigma, \leq^3)\}$  given in Figure 2 and Figure 3. For lack of space, we only provide the relation between maximally consistent subbases and not between all consistent subbases. This has no incidence on the definition of  $\mathcal{C}$ -lexicographic consequence relation. The set of maximal consistent subbases of  $\Sigma$  is  $MCONS(\Sigma) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$  with  $A_1 = \{d \rightarrow r \wedge h, d, r, h\}$ ,  $A_2 = \{d \rightarrow r \wedge h, \neg r, h\}$ ,  $A_3 = \{d \rightarrow r \wedge h, \neg h, \neg r\}$ ,  $A_4 = \{d \rightarrow r \wedge h, r, \neg h\}$ ,  $A_5 = \{d, \neg r, h\}$ ,  $A_6 = \{d, \neg h, \neg r\}$  and  $A_7 = \{d, r, \neg h\}$ .

The lexicographic preferences  $\leq_{lex}^1, \leq_{lex}^2$  and  $\leq_{lex}^3$  on the maximal  $MCONS(\Sigma)$  with respect to the compatible belief bases  $(\Sigma, \leq^1), (\Sigma, \leq^2)$  and  $(\Sigma, \leq^3)$  respectively are given in Figure 2 and Figure 3.


 Figure 2: The total preorder  $\leq^1_{lex}$  on  $MCONS(\Sigma)$ 

 Figure 3: The total preorders  $\leq^2_{lex}$  and  $\leq^3_{lex}$  on  $MCONS(\Sigma)$ 

Finally, we deduce that

$$\bigcup_{(\Sigma, \leq^i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} \text{Lex}(\Sigma, \leq^i) = \{A_6, A_7\} \cup \{A_6\} \cup \{A_7\} = \{A_6, A_7\}, \text{ from which for instance } d \text{ is a C-lexicographic consequence of } \Sigma, \text{ since } A_6 \vdash d \text{ and } A_7 \vdash d.$$

### A New Preference Between Consistent Subbases

The aim of this section is to provide the counterpart of Definition 1 for partially preordered belief bases. Clearly, the main difficulty is how to define the concept of “cardinality” (namely how to use the idea of counting) when pieces of information are only partially preordered. Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base. We first propose a partition of  $\Sigma$ ,  $\Sigma = E_1 \cup \dots \cup E_n$  ( $n \geq 1$ ) as follows:

- $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , we have  $\forall \varphi, \varphi' \in E_i : \varphi \approx \varphi'$ ,
- $\forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j, 1 \leq j \leq n$  with  $i \neq j$ , we have  $\forall \varphi \in E_i, \forall \varphi' \in E_j : \varphi \not\approx \varphi'$ .

In other words, each subset  $E_i$  represents an equivalence class of  $\Sigma$  with respect to  $\approx$  which is an equivalence relation.

Then, we define a preference relation between the equivalence classes  $E_i$ 's, denoted by  $\prec_s$ , as follows:

**Definition 5** Let  $E_i$  and  $E_j$  be two equivalence classes of  $\Sigma$  with respect to  $\approx$ . Then,

$$E_i \prec_s E_j \text{ iff } \exists \varphi \in E_i, \exists \varphi' \in E_j \text{ such that } \varphi \prec \varphi'.$$

The relation  $\prec_s$  can be equivalently given by:

$$E_i \prec_s E_j \text{ iff } \forall \varphi \in E_i, \forall \varphi' \in E_j : \varphi \prec \varphi'.$$

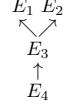
Besides, one can easily see that the preference relation  $\prec_s$  over the equivalence classes  $E_i$ 's is a partial strict order. In addition,  $E_i \sim_s E_j$  if and only if neither  $E_i \prec_s E_j$  nor  $E_j \prec_s E_i$  holds.

This partition can be viewed as a generalization of the idea of stratification defined for totally preordered belief bases.

The following example illustrates this partition.

**Example 2** Let us consider again the partially preordered belief base  $(\Sigma, \preceq)$  given in Example 1.  $\Sigma$  can be partitioned as follows:  $\Sigma = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$  with  $E_1 = \{\neg r\}$ ,  $E_2 = \{r, \neg h\}$ ,  $E_3 = \{d, h\}$  and  $E_4 = \{d \rightarrow r \wedge h\}$ .

According to Definition 5, we have :  $E_1 \sim_s E_2$ ,  $E_1 \prec_s E_3$ ,  $E_1 \prec_s E_4$ ,  $E_2 \prec_s E_3$ ,  $E_2 \prec_s E_4$  and  $E_3 \prec_s E_4$ . The partial strict order  $\prec_s$  is illustrated in Figure 4.


 Figure 4: The partial strict order  $\prec_s$  on  $\Sigma$ 

We now provide a lexicographic preference relation between the consistent subbases of a partially preordered belief base  $(\Sigma, \preceq)$ , denoted by  $\preceq_\Delta$ , as follows:

**Definition 6** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Then,  $A$  is said to be lexicographically preferred to  $B$ , denoted by  $A \preceq_\Delta B$ , if and only if

$$\begin{aligned}
 & \forall i, 1 \leq i \leq n : \\
 & \text{if } |E_i \cap B| > |E_i \cap A| \text{ then } \exists j, 1 \leq j \leq n \text{ such that} \\
 & |E_j \cap A| > |E_j \cap B| \text{ and } E_j \prec_s E_i.
 \end{aligned}$$

The following proposition gives some properties of the preference relation  $\preceq_\Delta$ :

**Proposition 1** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base. Then,

- $\preceq_\Delta$  is a partial preorder on the set of consistent subbases of  $\Sigma$ .
- $\preceq_\Delta$  satisfies the monotony property, namely

$$\forall A, B \subseteq \Sigma, \text{ if } B \subseteq A \text{ then } A \preceq_\Delta B.$$

As usual, the strict partial order associated with  $\preceq_\Delta$ , is defined by:  $A$  is strictly lexicographically preferred to  $B$ , denoted by  $A \prec_\Delta B$ , iff  $A \preceq_\Delta B$  and  $B \not\preceq_\Delta A$ . As for the corresponding equality, it is given by:  $A$  is lexicographically equal to  $B$ , denoted by  $A \approx_\Delta B$ , iff  $A \preceq_\Delta B$  and  $B \preceq_\Delta A$ . The following proposition gives an equivalent definition of  $\approx_\Delta$ :

**Proposition 2** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Then,

$$A \approx_\Delta B \text{ iff } \forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap B| = |E_i \cap A|.$$

Clearly, the proposed lexicographic preference between consistent subbases of a partially preordered belief base (Definition 6) recovers the classical lexicographic preference between consistent subbases of a totally preordered belief base (Definition 1) as it is shown by the following proposition:

**Proposition 3** Given a totally preordered belief base  $(\Sigma, \leq) = S_1 \cup \dots \cup S_m$ , let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Then,

1.  $A <_{lex} B$  if and only if  $A \prec_\Delta B$ ,
2.  $A =_{lex} B$  if and only if  $A \approx_\Delta B$ .

The following example illustrates this lexicographic preference.

**Example 3** Let us continue Example 1 and 2. The partial preorder  $\preceq_\Delta$  on  $MCONS(\Sigma)$ , obtained using Definition 6, is illustrated in Figure 5. For example,

- $A_3 \prec_\Delta A_1$  since we have  $i = 3$  such that  $|E_3 \cap A_1| > |E_3 \cap A_3|$  and  $\exists j, j = 1$  such that  $|E_1 \cap A_3| > |E_1 \cap A_1|$  and  $E_1 <_s E_3$ .
- $A_4 \prec_\Delta A_1$  since we have  $i = 3$  such that  $|E_3 \cap A_1| > |E_3 \cap A_4|$  and  $\exists j, j = 2$  such that  $|E_2 \cap A_4| > |E_2 \cap A_1|$  and  $E_2 <_s E_3$ .
- $A_3 \sim_\Delta A_4$  since
  - $A_3 \not\prec_\Delta A_4$  since we have  $i = 2$  such that  $|E_2 \cap A_4| > |E_2 \cap A_3|$  but  $\nexists j$  such that  $|E_j \cap A_3| > |E_j \cap A_4|$  and  $E_j <_s E_2$ .
  - $A_4 \not\prec_\Delta A_3$  since we have  $i = 1$  such that  $|E_1 \cap A_3| > |E_1 \cap A_4|$  but  $\nexists j$  such that  $|E_j \cap A_4| > |E_j \cap A_3|$  and  $E_j <_s E_1$ .

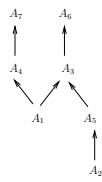


Figure 5: The partial preorder  $\preceq_\Delta$  on  $MCONS(\Sigma)$

Note that in Definition 6 if one uses inclusion set criteria instead of cardinality then Proposition 3 does not hold, namely the classical inclusion-preference inference will not be recovered.

### A New Characterisation of Lexicographic Inference

Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base,  $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq)$  denotes the set of all lexicographically preferred consistent subbases of  $(\Sigma, \preceq)$ , namely  $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) = \text{Min}(MCONS(\Sigma), \prec_\Delta)$ .

It can be checked that each element of  $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq)$  is a maximal (with respect to set inclusion) consistent subbase of  $\Sigma$  since  $\preceq_\Delta$  satisfies the monotony property (Proposition 1).

We are now able to provide a second lexicographic inference relation for partially preordered belief bases which is based on the preordering  $\preceq_\Delta$  between consistent subbases:

**Definition 7** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered base and let  $\psi$  be a formula.  $\psi$  is a  $\mathcal{P}$ -lexicographic conclusion of  $(\Sigma, \preceq)$ , denoted by  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \psi$ , iff  $\psi$  is a classical consequence of every preferred consistent subbase of  $(\Sigma, \preceq)$  with respect to  $\preceq_\Delta$ , namely

$$(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \psi \text{ iff } \forall B \in \mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) : B \vdash \psi.$$

The following lemma, needed for the proof of one of our main result, says that if  $A$  is lexicographically preferred to  $B$  then  $A$  is lexicographically preferred to  $B$  in every compatible totally preordered base.

**Lemma 1** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Let  $(\Sigma, \leq)$  be a totally preordered belief base compatible with  $(\Sigma, \preceq)$ . Then,

- if  $A \prec_\Delta B$  then  $A <_{lex} B$ .
- if  $A \approx_\Delta B$  then  $A =_{lex} B$ .

Interestingly enough, the lexicographic inference relation presented in this section is equivalent to the natural lexicographic inference given by Definition 4 as shown by the following proposition:

**Proposition 4** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $\psi$  be a propositional formula. Then,

$$(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \psi \text{ iff } (\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^C \psi.$$

Let us illustrate this lexicographic inference:

**Example 4** Continue Example 3. Clearly, we have  $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) = \{A_6, A_7\}$ .

Moreover, one can easily see that

$$\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) = \bigcup_{(\Sigma, \leq^i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} \mathfrak{L}ex(\Sigma, \leq^i)$$

where  $\bigcup_{(\Sigma, \leq^i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} \mathfrak{L}ex(\Sigma, \leq^i)$  has already been computed in Example 1.

### Semantic Counterpart and Properties

This section briefly shows that the lexicographical inference relation applied to partially preordered belief bases can be defined at the semantic level. We also show that a notion of preferential entailment for our lexicographic inference, in the style of (Shoham 1988), can be naturally produced.

Roughly speaking, an interpretation model  $\omega$  is preferred to an interpretation  $\omega'$  if the set of formulae satisfied by  $\omega$  is lexicographically preferred to the one satisfied by  $\omega'$ . More formally,

**Definition 8** Let  $\omega$  and  $\omega'$  be two interpretations.  $\omega$  is said to be lexicographically preferred to  $\omega'$ , denoted by  $\omega \preceq_{\mathcal{W}}^{\Delta} \omega'$ , iff  $[\omega] \preceq_{\Delta} [\omega']$  where  $[\omega]$  denotes the set of formulae of  $\Sigma$  satisfied by  $\omega$ .

Let  $\text{Min}(\mathcal{W}, \prec_{\mathcal{W}}^{\Delta})$  denote the set of preferred models of  $\mathcal{W}$  with respect to  $\prec_{\mathcal{W}}^{\Delta}$ .

Then, we give a semantic inference relation defined as follows:

**Definition 9** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $\psi$  be a propositional formula.  $\psi$  is a  $\mathcal{S}$ -lexicographic conclusion of  $(\Sigma, \preceq)$ , denoted by  $(\Sigma, \preceq) \models_{\text{lex}}^{\mathcal{S}} \psi$ , if and only if  $\psi$  is satisfied by every preferred interpretation, namely

$$(\Sigma, \preceq) \models_{\text{lex}}^{\mathcal{S}} \psi \text{ iff } \forall \omega \in \text{Min}(\mathcal{W}, \prec_{\mathcal{W}}^{\Delta}), \omega \models \psi.$$

and we show that:

**Proposition 5**  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{\text{lex}}^{\mathcal{C}} \psi$  iff  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{\text{lex}}^{\mathcal{P}} \psi$  iff  $(\Sigma, \preceq) \models_{\text{lex}}^{\mathcal{S}} \psi$ .

**Example 5** We illustrate our semantic approach with the example 1. Let  $\mathcal{W}$  be the set of interpretations and  $[\omega]$  the set of formulae of  $\Sigma$  satisfied by  $\omega$ :

$\mathcal{W}$	$d$	$h$	$r$	$[\omega]$	$A_i$
$\omega_0$	$\neg d$	$\neg h$	$\neg r$	$\{d \rightarrow r \wedge h, \neg h, \neg r\}$	$A_3$
$\omega_1$	$\neg d$	$\neg h$	$r$	$\{d \rightarrow r \wedge h, r, \neg h\}$	$A_4$
$\omega_2$	$\neg d$	$h$	$\neg r$	$\{d \rightarrow r \wedge h, h, \neg r\}$	$A_2$
$\omega_3$	$\neg d$	$h$	$r$	$\{d \rightarrow r \wedge h, h, r\}$	
$\omega_4$	$d$	$\neg h$	$\neg r$	$\{d, \neg h, \neg r\}$	$A_6$
$\omega_5$	$d$	$\neg h$	$r$	$\{d, \neg h, r\}$	$A_7$
$\omega_6$	$d$	$h$	$\neg r$	$\{d, \neg r, h\}$	$A_5$
$\omega_7$	$d$	$h$	$r$	$\{d \rightarrow r \wedge h, d, r, h\}$	$A_1$

Reusing Example 3 where we already computed preferences between  $A_i$ , the ordering between interpretations is illustrated in figure 6.

We can easily check:

$$\bigcup_{B \in \text{Lex}(\Sigma, \preceq)} \text{Mod}(B) = \text{Min}(\mathcal{W}, \prec_{\mathcal{W}}^{\Delta})$$

Indeed,  $\text{Lex}(\Sigma, \preceq) = \{A_6, A_7\}$  and since  $A_6 = \{d, \neg h, \neg r\}$  and  $A_7 = \{d, r, \neg h\}$ ,  $\text{Mod}(A_6) = \{\omega_4\}$  and  $\text{Mod}(A_7) = \{\omega_5\}$ . Thus,

$$\bigcup_{B \in \text{Lex}(\Sigma, \preceq)} \text{Mod}(B) = \{\omega_4, \omega_5\} = \text{Min}(\mathcal{W}, \prec_{\mathcal{W}}^{\Delta})$$

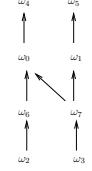


Figure 6: The partial preorder  $\preceq_{\mathcal{W}}^{\Delta}$  on  $\mathcal{W}$

By consequence,  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{\text{lex}}^{\mathcal{P}} \psi$  iff  $(\Sigma, \preceq) \models_{\text{lex}}^{\mathcal{S}} \psi$ .

We now analyse the non-monotonic properties of our inference relation. First, we need to extend our inference relation such that it can be defined between two formulae with respect to a partially preordered belief base:

**Definition 10** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a belief base and  $\phi, \psi$  be two formulae. Let  $(\Sigma', \preceq')$  be a new partially preordered base where  $\Sigma' = \Sigma \cup \{\phi\}$  and  $\preceq'$  is such that:

- $\forall \alpha, \beta \in \Sigma, \alpha \preceq \beta$  iff  $\alpha \preceq' \beta$
- $\forall \alpha \in \Sigma, \phi \preceq' \alpha$ , namely  $\phi$  is the most important formula in  $\Sigma'$ .

Then a formula  $\psi$  is said to be a Lex-consequence of  $\phi$  with respect to the belief base  $\Sigma$ , denoted by  $\phi \mid_{\text{lex}} \psi$ , iff  $(\Sigma', \preceq') \vdash_{\text{lex}}^{\mathcal{P}} \psi$ .

The following result generalizes Proposition 5.

**Proposition 6** Let  $\phi$  and  $\psi$  be two formulae.  $\phi \mid_{\text{lex}} \psi$  iff  $\forall \omega \in \text{Min}(\text{Mod}(\phi), \prec_{\mathcal{W}}^{\Delta}), \omega \models \psi$ .

The proof follows from Proposition 5 where  $\phi$  is preferred to every formula of  $(\Sigma, \preceq)$ .

When the belief base is totally preordered, then it is well-known that the inference  $\mid_{\text{lex}}$  satisfies the rules of System P and rational monotony. For partially preordered belief bases, we have:

**Proposition 7** The inference  $\mid_{\text{lex}}$  satisfies the rational postulates of System P but fails to satisfy rational monotony.

For the System P, the proof can be shown by exploiting a representation theorem between preferential entailments satisfying System P and its semantics characterisation based on a partial preorder over interpretation (Kraus, Lehmann, and Magidor 1990). For rational monotony, the following provides the counter-exemple:

**Counter-example 1** Let us recall that Rational Montony is defined by : If  $\phi \mid_{\text{lex}} \psi$ , and  $\phi \not\sim \neg \delta$  then  $\phi \wedge \delta \mid_{\text{lex}} \psi$ . Let  $\Sigma = \{p, q, \neg r\}$  such that  $p \prec \neg r$ ,  $q \prec \neg r$  and  $p \sim q$ .  $E_1 = q$ ,  $E_2 = p$  and  $E_3 = \neg r$ . The set of formulae of  $\Sigma$  satisfied by  $\omega$  is :

$\mathcal{W}$	$p$	$q$	$r$	$[\omega]$
$\omega_0$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\{\neg r\}$
$\omega_1$	$\neg p$	$\neg q$	$r$	$\emptyset$
$\omega_2$	$\neg p$	$q$	$\neg r$	$\{q, \neg r\}$
$\omega_3$	$\neg p$	$q$	$r$	$\{q\}$
$\omega_4$	$p$	$\neg q$	$\neg r$	$\{p, \neg r\}$
$\omega_5$	$p$	$\neg q$	$r$	$\{p\}$
$\omega_6$	$p$	$q$	$\neg r$	$\{p, q, \neg r\}$
$\omega_7$	$p$	$q$	$r$	$\{p, q\}$

The preorder  $\preceq_{\mathcal{W}}^{\Delta}$  on  $\mathcal{W}$  is illustrated figure 7.

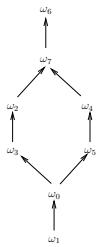


Figure 7: The preorder  $\preceq_{\mathcal{W}}^{\Delta}$  on  $\mathcal{W}$

Let  $\phi$ ,  $\psi$  and  $\delta$  three formulae such that  $\phi = (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$ ,  $\psi = p \vee \neg r$  and  $\delta = r$ . We have  $Mod(\phi) = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$  and  $Min(Mod(\phi), \preceq_{\mathcal{W}}^{\Delta}) = \{\omega_2, \omega_5\}$ . We checked that  $\phi \mid_{lex} \psi$  since  $Mod(\psi) = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ ,  $\omega_2 \models \psi$  and  $\omega_5 \models \psi$ . Likewise we do not have  $\phi \mid_{lex} \neg \delta$  since  $Mod(\neg \delta) = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ ,  $\omega_2 \models \neg \delta$  and  $\omega_5 \not\models \neg \delta$ . On the other hand,  $Mod(\delta) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}$ ,  $Mod(\phi \wedge \delta) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$  and  $Min(Mod(\phi \wedge \delta), \preceq_{\mathcal{W}}^{\Delta}) = \{\omega_3, \omega_5\}$  but we do not have  $(\phi \wedge \delta) \mid_{lex} \psi$  since  $\omega_3 \not\models \psi$  and  $\omega_5 \models \psi$ . Therefore, the inference  $\mid_{lex}$  does not satisfy the rational monotony.

Finally, let us compare lexicographic inference from partially preordered bases with respect to both possibilistic and inclusion preference inference from the same kind of belief bases. In fact, it is known that for totally preordered belief bases, each possibilistic conclusion is an inclusion-based conclusion (the converse is false) and each inclusion-based conclusion is a lexicographic conclusion (the converse is false) (Benferhat et al. 1993b). This result still holds for the case of partially preordered bases. The proof is not difficult and can be shown either using directly the preordering between consistent subbases or by using compatible totally preordered bases.

### Conclusion

This paper combines the advantages of both lexicographic inference and partially preordered belief bases for the sake of reasoning under inconsistency. It proposes a lexicographic inference for partially preordered belief bases that extends the classical lexicographic one.

More precisely, the paper provides two equivalent definitions. The first one consists in applying the classical

lexicographic inference from all the compatible totally preordered belief bases. As to the second one, it stems from the construction of a new cardinality-based partial preorder on consistent subbases. It then applies classical inference on preferred subbases according to this partial preorder. The equivalence between the two definitions is shown.

This work calls for several perspectives. The major is its application to alarm correlation in intrusion detection and to archaeological excavation.

### Acknowledgements

Work partially supported by the European Community under project VENUS (Contract IST-034924) of the "Information Society Technology (IST) program of the 6th FP of RTD". The authors are solely responsible for the contents of this paper. It does not represent the opinion of the European Community, and the European Community is not responsible for any use that might be made of data therein. This work is also (partially) supported by the ANR SETIN 2006 project PLACID.

### References

- Benferhat, S.; Dubois, D.; Cayrol, C.; Lang, J.; and Prade, H. 1993a. Inconsistency management and prioritized syntaxbased entailment. In *Proceedings of IJCAI'93*, 640–645.
- Benferhat, S.; Cayrol, C.; Dubois, D.; Lang, J.; and Prade, H. 1993b. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *IJCAI*, 640–647.
- Benferhat, S.; Bonnefon, J.-F.; and Neves, R. D. S. 2004. An experimental analysis of possibilistic default reasoning. In *KR*, 130–140.
- Benferhat, S.; Lagruie, S.; and Papini, O. 2003. A possibilistic handling of partially ordered information. In *UAI*, 29–36.
- Benferhat, S.; Lagruie, S.; and Papini, O. 2004. Reasoning with partially ordered information in a possibilistic framework. *Fuzzy Sets and Systems* 144:25–41.
- Brewka, G. 1989. Preferred suthories: an extended logical framework for default reasoning. In *Proc. of the 11th Inter. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, Detroit, 28/08/93-03/09/93, 1043–1048.
- da Costa, N. C. A. 1974. Theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 15:497–510.
- Dubois, D.; Lang, J.; and Prade, H. 1994. Possibilistic logic. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming* 3:439–513.
- Junker, U., and Brewka, G. 1989. Handling partially ordered defaults in tms. In *Proceedings of IJCAI'89*, 1043–1048.
- Kraus, S.; Lehmann, D.; and Magidor, M. 1990. Non-monotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artif. Intell.* 44(1-2):167–207.

Lehmann, D. J. 1995. Another perspective on default reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 15(1):61–82.

Manuela Ritterskamp, G. K.-I. 2008. Preference-Based Default Reasoning. In *Proceedings of the 21st International FLAIRS Conference*.

Nebel, B. 1994. Base revision operations and schemes: semantics, representation and complexity. In *Proceedings of ECAI'94*, 341–345.

Pinkas, G., and Loui, R. P. 1992. Reasoning from inconsistency: A taxonomy of principles for resolving conflict. In *KR*, 709–719.

Resher, N., and Manor, R. 1970. On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision*, 1 179–219.

Shoham, Y. 1988. *Reasoning about change: Time and Causation from the standpoint of Artificial Intelligence*. MIT press.

Williams, M. 1995. Iterated theory base change: a computational model. In *Proceedings of IJCAI'95*, 1541–1547.

**Proposition 1** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base. Then,

- $\preceq_\Delta$  is a partial preorder on the set of consistent subbases of  $\Sigma$ .
- $\preceq_\Delta$  satisfies the monotony property, namely

$$\forall A, B \subseteq \Sigma, \text{ if } B \subseteq A \text{ then } A \preceq_\Delta B.$$

**Proof.**

- $\preceq_\Delta$  is a partial preorder over  $CONS(\Sigma)$ :

–  $\preceq_\Delta$  is reflexive:

Let  $A \in CONS(\Sigma)$ .

Then, obviously we have  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap A| = |E_i \cap A|$ .

So,  $A \preceq_\Delta A$  which means that  $\preceq_\Delta$  is a reflexive relation.

–  $\preceq_\Delta$  is not antisymmetric:

Let us consider the following counter example:

$\Sigma = \{\varphi, \phi, \psi, \chi\}$  with  $\varphi \approx \chi$  and  $\phi \approx \psi$ .

Let  $A, B \in CONS(\Sigma)$  such that  $A = \{\varphi, \phi\}$  and  $B = \{\psi, \chi\}$ .

One can easily see that  $A \preceq_\Delta B$  and  $B \preceq_\Delta A$  but  $A$  is not identical to  $B$ .

Hence,  $\preceq_\Delta$  is not an antisymmetric relation.

–  $\preceq_\Delta$  is transitive:

Let  $A, B, C \in CONS(\Sigma)$  and assume that  $A \preceq_\Delta B$  and  $B \preceq_\Delta C$  and let us show that  $A \preceq_\Delta C$ .

Assume that  $A \preceq_\Delta C$  does not hold. Namely, there exists  $i, 1 \leq i \leq n$  such that  $|E_i \cap C| > |E_i \cap A|$  and  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  such that  $E_j \prec_s E_i$  and  $|E_j \cap A| > |E_i \cap C| \dots$  (**Hypothesis 1**)

In fact, we can distinguish two cases:

\* **Case 1:**  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A| :$

Let  $F = \{E_j, 1 \leq j \leq n : |E_j \cap A| > |E_j \cap B| \text{ and } E_j \prec_s E_i\}$ .

Since  $A \preceq_\Delta B$  then  $F \neq \emptyset$ .

In particular, let  $E_j \in Min(F, \prec_s)$ .

Now, according to Hypothesis 1,  $|E_j \cap C| \geq |E_j \cap A|$  thus  $|E_j \cap C| > |E_j \cap B|$ .

Then, given that  $B \preceq_\Delta C$ , let  $E_k, 1 \leq k \leq n$  be such that  $E_k \prec_s E_j$  and  $|E_k \cap B| > |E_k \cap C|$ .

Once again, according to Hypothesis 1,  $|E_k \cap C| \geq |E_k \cap A|$  so  $|E_k \cap B| > |E_k \cap A|$ .

Since  $A \preceq_\Delta B$ , there must exist  $l, 1 \leq l \leq n$  such that  $E_l \prec_s E_k$  and  $|E_l \cap A| > |E_l \cap B|$ .

Clearly, we have  $E_l \prec_s E_j$  and  $E_l \prec_s E_i$  (by transitivity of  $\prec_s$ ).

Hence, we deduce that  $E_l \in F$  and  $E_l \prec_s E_j$  but this is incoherent with the fact that  $E_j \in Min(F, \prec_s)$ .

\* **Case 2:**  $|E_i \cap B| \leq |E_i \cap A| :$

Obviously,  $|E_i \cap B| < |E_i \cap C|$ .

Let  $G = \{E_j, 1 \leq j \leq n : |E_j \cap B| > |E_j \cap C| \text{ and } E_j \prec_s E_i\}$ .

Since  $B \preceq_\Delta C$ ,  $G \neq \emptyset$ .

In particular, let  $E_j \in Min(G, \prec_s)$ .

Now, according to Hypothesis 1,  $|E_j \cap C| \geq |E_j \cap A|$  thus  $|E_j \cap C| > |E_j \cap B|$ .

Then, given that  $A \preceq_\Delta B$ , let  $E_k, 1 \leq k \leq n$  be such that  $E_k \prec_s E_j$  and  $|E_k \cap A| > |E_k \cap B|$ .

Once again, according to Hypothesis 1,  $|E_k \cap C| \geq |E_k \cap A|$  so  $|E_k \cap C| > |E_k \cap B|$ .

Since  $B \preceq_\Delta C$ , there must exist  $l, 1 \leq l \leq n$  such that  $E_l \prec_s E_k$  and  $|E_l \cap B| > |E_l \cap C|$ .

Clearly, we have  $E_l \prec_s E_j$  and  $E_l \prec_s E_i$  (by transitivity of  $\prec_s$ ).

Hence, we deduce that  $E_l \in G$  and  $E_l \prec_s E_j$  but this is incoherent with the fact that  $E_j \in Min(G, \prec_s)$ .

Therefore,  $\forall i, 1 \leq i \leq n : \text{if } |E_i \cap C| > |E_i \cap A| \text{ then } \exists j, 1 \leq j \leq n \text{ such that } E_j \prec_s E_i \text{ and } |E_j \cap A| > |E_i \cap C|$ .

This means that  $A \preceq_\Delta C$ .

•  $\preceq_\Delta$  satisfies the **monotony** property:

Let  $A, B \in CONS(\Sigma)$ .  $B \subseteq A$  implies that  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap A| \geq |E_i \cap B|$ .

Thus, according to Definition 6,  $A \preceq_\Delta B$ . ■

**Proposition 2** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Then,

$$A \approx_\Delta B \text{ iff } \forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap B| = |E_i \cap A|.$$

**Proof.**

- By definition of  $\preceq_\Delta$ , we have  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap A| = |E_i \cap B|$  implies that  $A \preceq_\Delta B$  and  $B \preceq_\Delta A$ , i.e.,  $A \approx_\Delta B$ .

- Now let us show that  $A \approx_\Delta B$  implies that  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap A| = |E_i \cap B|$ .

In fact, let us suppose that  $A \approx_{\Delta} B$  and  $\exists i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap A| \neq |E_i \cap B|$ . We can distinguish two cases:

– **Case 1:**  $A \approx_{\Delta} B$  and  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  such that  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|$ :

Let  $F = \{E_i, 1 \leq i \leq n$  such that  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|\}$ .  $F \neq \emptyset$  so let  $E_i \in \text{Min}(F, \prec_s)$ .

Since  $A \preceq_{\Delta} B$ ,  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  such that  $E_j \prec_s E_i$  and  $|E_j \cap A| > |E_j \cap B|$ .

Besides, since  $B \preceq_{\Delta} A$ ,  $\exists k$  such that  $E_k \prec_s E_j$  and  $|E_k \cap B| > |E_k \cap A|$ .

Clearly enough,  $E_k \in F$  and  $E_k \prec_s E_i$  (by transitivity of  $\prec_s$ ) but this is incoherent with the fact that  $E_i \in \text{Min}(F, \prec_s)$ .

– **Case 2:**  $A \approx_{\Delta} B$  and  $|E_i \cap A| > |E_i \cap B|$ : Similar proof. ■

**Proposition 3** Given a totally preordered belief base  $(\Sigma, \leq) = S_1 \cup \dots \cup S_m$ , let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Then,

1.  $A <_{lex} B$  if and only if  $A \prec_{\Delta} B$ ,
2.  $A =_{lex} B$  if and only if  $A \approx_{\Delta} B$ .

#### Proof.

Note that in the case of a totally ordered belief base  $(\Sigma, \leq) = (S_1, \dots, S_m)$ , the equivalence classes  $E_i$ 's are nothing than the strata  $S_i$ 's and  $S_i \prec_s S_j$  iff  $i < j$ .

1.  $A <_{lex} B$  if and only if  $A \prec_{\Delta} B$ :

- Let us show that  $A <_{lex} B$  implies  $A \prec_{\Delta} B$ :  
Let  $A <_{lex} B$ . By definition,  $\exists i, 1 \leq i \leq m$  such that  $|S_i \cap A| > |S_i \cap B|$  and  $\forall j, j < i, |S_j \cap B| = |S_j \cap A|$ .

Then,  $\forall k, 1 \leq k \leq m$ , if  $|S_k \cap B| > |S_k \cap A|$  then  $k > i$ , i.e.,  $\exists l$  such that  $|S_l \cap A| > |S_i \cap B|$  with  $i < k$ .

This means that  $A \preceq_{\Delta} B$ .

Besides,  $\exists i, 1 \leq i \leq m$  such that  $|S_i \cap A| > |S_i \cap B|$  and  $\nexists j, 1 \leq j \leq m$  such that  $|S_j \cap B| > |S_j \cap A|$  and  $j < i$  which means that  $B \not\preceq_{\Delta} A$ .

Hence,  $A \prec_{\Delta} B$ .

- Let us show that  $A \prec_{\Delta} B$  implies  $A <_{lex} B$ :

Let  $A \prec_{\Delta} B$ .

Then,  $\exists i, 1 \leq i \leq m$  such that  $|S_i \cap A| > |S_i \cap B|$  and  $\forall j, 1 \leq j \leq m$ , we have  $|S_j \cap B| \leq |S_j \cap A|$  since  $B \not\preceq_{\Delta} A$ .

Clearly, this means that  $A <_{lex} B$ .

2.  $A <_{lex} B$  if and only if  $A \approx_{\Delta} B$ :

This directly follows from Definition 1 and Proposition 2. ■

**Lemma 1** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $A$  and  $B$  be two consistent subbases of  $\Sigma$ . Let  $(\Sigma, \leq)$  be a totally preordered belief base compatible with  $(\Sigma, \preceq)$ . Then,

- if  $A \prec_{\Delta} B$  then  $A <_{lex} B$ .
- if  $A \approx_{\Delta} B$  then  $A =_{lex} B$ .

#### Proof.

Let  $(\Sigma, \leq) = S_1 \cup \dots \cup S_m$  be a totally ordered belief base compatible with  $(\Sigma, \preceq)$ .

1.  $A \prec_{\Delta} B$  implies  $A <_{lex} B$ :

We record that  $A \prec_{\Delta} B$  iff  $A \preceq_{\Delta} B$  and  $B \not\preceq_{\Delta} A$ . We can distinguish two cases:

- **Case 1:**  $\nexists i, 1 \leq i \leq n$  such that  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|$ . i.e.,  $\forall i, 1 \leq i \leq n, |E_i \cap B| \leq |E_i \cap A|$ .

First, note that  $\forall j, 1 \leq j \leq m$ , we have  $S_j = \bigcup_{i \in X} E_i$  where  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

So,  $|S_j \cap B| = |(\bigcup_{i \in X} E_i) \cap B| = |\bigcup_{i \in X} (E_i \cap B)| = \sum_{i \in X} |E_i \cap B|$  since  $E_i$ 's are disjoint by definition.

Similarly, we obtain  $|S_j \cap A| = \sum_{i \in X} |E_i \cap A|$ .

Then, according to the hypothesis of this case, we conclude that  $\sum_{i \in X} |E_i \cap B| \leq \sum_{i \in X} |E_i \cap A|$ , i.e.,  $|S_j \cap B| \leq |S_j \cap A|$ .

On the other hand,  $B \not\preceq_{\Delta} A$ , i.e.,  $\exists k, 1 \leq k \leq n$  such that  $|E_k \cap A| > |E_k \cap B|$  and  $\nexists l, 1 \leq l \leq n$  such that  $E_l \prec_s E_k$  and  $|E_l \cap B| > |E_l \cap A|$ .

Now, let  $S_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) be a stratum containing a class  $E_k$  checking the previous property, i.e.,  $S_i = E_k \cup \bigcup_{j \in Y} E_j$  where  $Y \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

So,  $|S_i \cap B| = |(\bigcup_{j \in Y} E_j \cup E_k) \cap B| = |\bigcup_{j \in Y} (E_j \cap B) \cup (E_k \cap B)| = \sum_{j \in Y} |E_j \cap B| + |E_k \cap B|$  since  $E_j$ 's are disjoint by definition.

Similarly, we derive that  $|S_i \cap A| = \sum_{j \in Y} |E_j \cap A| + |E_k \cap A|$ .

Clearly,  $|S_i \cap B| < |S_i \cap A|$ .

So, from one hand we have  $\forall j, 1 \leq j \leq m : |S_j \cap B| \leq |S_j \cap A|$  and from the other hand  $\exists i, 1 \leq i \leq m : |S_i \cap B| < |S_i \cap A|$ .

Consequently,  $A <_{lex} B$ .

- **Case 2:**  $\exists k, 1 \leq k \leq n$  such that  $|E_k \cap B| > |E_k \cap A|$ .

Let  $S_i$  be the first stratum (with the smallest  $i$ ) containing a class  $E_k$  that checks the previous property.

Since  $A \prec_{\Delta} B$ , there must exist a class  $E_p$  such that  $|E_p \cap A| > |E_p \cap B|$  and  $E_p \prec_s E_k$ .

Thus,  $E_p$  must be placed in a stratum  $S_l$  more reliable than the stratum  $S_i$  that contains  $E_k$ , i.e.,  $p < i$ . So,  $i \neq 1$ .

Then,  $\forall j, 1 \leq j < i : S_j$  is built up from  $E_r$ 's such that  $|E_r \cap B| \leq |E_r \cap A|$  by construction of  $S_i$ .

Hence  $\forall j, 1 \leq j < i : |S_j \cap B| \leq |S_j \cap A|$ .

In particular,  $|S_l \cap B| < |S_l \cap A|$ .

Subsequently, we deduce that  $A <_{lex} B$ .

2.  $A \approx_{\Delta} B$  implies  $A =_{lex} B$ :

$\forall i, 1 \leq i \leq m : S_i = \bigcup_{j \in X} E_j$  where  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

Then,  $|S_i \cap A| = |(\bigcup_{j \in X} E_j) \cap A| = |\bigcup_{j \in X} (E_j \cap A)| = \sum_{j \in X} |E_j \cap A|$  since  $E_j$ 's are disjoint.

Similarly, we obtain  $|S_i \cap B| = \sum_{j \in X} |E_j \cap B|$ . According to Proposition 2,  $A \approx_\Delta B$  iff  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap A| = |E_i \cap B|$ . Hence, we conclude that  $\forall j, 1 \leq j \leq m : |S_i \cap A| = |S_i \cap B|$ , i.e.,  $A =_{lex} B$ . ■

**Proposition 4** Let  $(\Sigma, \preceq)$  be a partially preordered belief base and let  $\psi$  be a propositional formula. Then,

$$(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^P \psi \text{ iff } (\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^C \psi.$$

**Proof.**

By definition,

$$(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^P \psi \text{ iff } \forall B \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq) : B \vdash \psi$$

and

$$(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^C \psi \text{ iff } \forall B \in \bigcup_{(\Sigma, \leq) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq) : B \vdash \psi$$

So, this amounts to prove that

$$\mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq) = \bigcup_{(\Sigma, \leq) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq)$$

- First, let us show that:

$$\bigcup_{(\Sigma, \leq) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq) \subseteq \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq):$$

Let  $(\Sigma, \leq) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)$ . Let  $A \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq)$  and let us suppose that  $A \notin \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)$ . This means that there exists a consistent subbase  $B$  of  $\Sigma$  such that  $B \prec_\Delta A$ . Now, according to Lemma 1, we obtain  $B <_{lex} A$ . But this is in conflict with the fact that  $A \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq)$ . Consequently,  $A \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)$ .

- We now show that:

$$\mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq) \subseteq \bigcup_{(\Sigma, \leq) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq):$$

Let  $A \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)$ . The idea of the proof is to find a compatible base  $(\Sigma, \leq)$  where  $A \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq)$ . Firstly, for any consistent subbase  $B$  of  $\Sigma$ , we distinguish 3 cases:

1.  $A \prec_\Delta B$  which implies that  $A <_{lex} B$  according to Lemma 1.
2.  $A \approx_\Delta B$  which implies that  $A =_{lex} B$  according to Lemma 1 too.
3.  $A \sim_\Delta B$  on which we will focus in the following.

Clearly enough, the aim is reached if the compatible base  $(\Sigma, \leq)$  that we search is such that  $A <_{lex} B$  (or  $A =_{lex} B$ ) for any consistent subbase  $B$  of  $\Sigma$  such that  $A \sim_\Delta B$ . We recall that  $A \sim_\Delta B$  iff  $A \not\prec_\Delta B$  and  $B \not\prec_\Delta A$ . Moreover,

$A \not\prec_\Delta B$  iff  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  such that  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|$  and  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  such that  $|E_j \cap A| > |E_j \cap B|$  with  $E_j \prec_s E_i$  ... (**Property 1**)

and

$B \not\prec_\Delta A$  iff  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  such that  $|E_i \cap A| > |E_i \cap B|$  and  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  such that  $|E_j \cap B| > |E_j \cap A|$  with  $E_j \prec_s E_i$  ... (**Property 2**).

Let  $F^B$  be the set of  $E_i$ 's that check Property 1 and let  $F^A$  be the set of  $E_i$ 's checking Property 2.

We show that  $\forall E_i \in F^B, \forall E_j \in F^A : E_i \sim_s E_j$  (with  $E_i \sim_s E_j$  means neither  $E_i \prec_s E_j$  nor  $E_j \prec_s E_i$  holds).

Indeed, let us suppose that  $\exists E_i \in F^B, \exists E_j \in F^A$  such that  $E_i \prec_s E_j$ . By construction of  $F^B$ ,  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|$ . So we obtain  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|$  and  $E_i \prec_s E_j$  which clearly contradicts the fact that  $E_j \in F^A$ . In a similar way, we obtain a contradiction if we suppose that  $E_j \prec_s E_i$ . Therefore,  $\forall E_i \in F^B, \forall E_j \in F^A : E_i \sim_s E_j$ .

Then, it is possible to extend the partial preorder  $\preceq$  by a new one, denoted by  $\preceq^*$  for instance, such that  $\forall E_i \in F^B, \forall E_j \in F^A, E_j \prec_s^* E_i$  for every  $B \in \mathcal{CONS}(\Sigma)$  such that  $A \sim_s B$ .

Thus, we check that  $\forall E_i \in F^A$ , i.e.,  $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|, \exists E_j \in F^B$ , i.e.,  $|E_j \cap A| > |E_j \cap B|$  with  $E_j \prec_s^* E_i$  for every  $B \in \mathcal{CONS}(\Sigma)$  such that  $A \sim_s B$ .

Consequently, we obtain  $A \prec_s^* B$  for every  $B \in \mathcal{CONS}(\Sigma)$  such that  $A \sim_s B$ . Now, according to Lemma 1, for every  $B \in \mathcal{CONS}(\Sigma)$  such that  $A \sim_s B$ , we have  $A <_{lex} B$  for every totally preordered belief base  $(\Sigma, \leq)$  which is compatible with  $(\Sigma, \preceq^*)$  and hence compatible with  $(\Sigma, \preceq)$ . Finally,  $A \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \leq)$ . ■

**Proposition 5**  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^C \psi$  iff  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^P \psi$  iff  $(\Sigma, \preceq) \vdash_{lex}^S \psi$ .

**Proof.**

Clearly enough, this amounts to prove that

$$\bigcup_{B \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)} \mathit{Mod}(B) = \mathit{Min}(\mathcal{W}, \prec_W^\Delta).$$

- Let us show that  $\bigcup_{B \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)} \mathit{Mod}(B) \subseteq \mathit{Min}(\mathcal{W}, \prec_W^\Delta)$ :

Let  $\omega \in \mathit{Mod}(B)$  where  $B \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)$  and let us suppose that  $\omega \notin \mathit{Min}(\mathcal{W}, \prec_W^\Delta)$ .

$\omega \notin \mathit{Min}(\mathcal{W}, \prec_W^\Delta)$  iff  $\exists \omega' \in \mathcal{W}$  such that  $\omega' \prec_W^\Delta \omega$ , i.e.,  $[\omega'] \prec_\Delta [\omega]$

But we know that  $B$  is a maximal (with respect to set inclusion) coherent subbase so  $\omega$  does not satisfy any formula in  $\Sigma$  outside  $B$ .

Stated otherwise,  $[\omega] = B$ .

Then,  $B' \prec_\Delta B$  where  $B' = [\omega']$ .

However, this is incoherent with the fact that  $B \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)$ .

Thus,  $\omega \in \mathit{Min}(\mathcal{W}, \prec_W^\Delta)$ .

- Now let us show that  $\mathit{Min}(\mathcal{W}, \prec_W^\Delta) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{L}ex(\Sigma, \preceq)} \mathit{Mod}(B)$ :

Let  $\omega \in \mathit{Min}(\mathcal{W}, \prec_W^\Delta)$ .

This means that there is no  $\omega' \in \mathcal{W}$  such that  $\omega' \prec_W^\Delta \omega$ .

In particular, for any subbase  $B \in \mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq)$ , for any  $\omega''$  which is a model of  $B$ ,  $\omega'' \not\prec_{\mathcal{W}}^\Delta \omega$ , i.e.,  $[\omega''] \not\prec_\Delta [\omega]$ , but  $[\omega''] = B$  since  $B$  is a maximal consistent subbase.

Then, for any  $B \in \mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq), B \not\prec_\Delta [\omega]$ .

Consequently,  $[\omega] \in \mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq)$ .

So,  $\omega \in \bigcup_{B \in \mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq)} Mod(B)$ . ■

## B.3 KR'08 : How to Choose Weightings to Avoid Collisions in a Restricted Penalty Logic

### How to Choose Weightings to Avoid Collisions in a Restricted Penalty Logic

Nathalie Chetcuti-Sperandio and Sylvain Lagrue

Université Lille-Nord de France, Artois, F-62307 Lens

CRIL, F-62307 Lens

CNRS UMR 8188, F-62307 Lens

#### Abstract

Penalty Logic is a natural and commonsense Knowledge Representation technique to deal with potentially inconsistent beliefs. Penalty Logic allows some kind of compensation between different pieces of information. But one of the main and less studied flaws of Penalty Logic is the influence of the choice of weights on inference: the same pieces of information can provide extremely different results just by changing some weights. This paper concentrates on weightings and on the problem of collisions between interpretations which yield weak conclusions. It focuses more particularly on a family of weightings, the  $\sigma$ -weightings. We show that some of these weightings avoid collisions but that in the meanwhile they disable the mechanism of compensation (and so the interest) of Penalty Logic. We establish then that two of them are suitable for avoiding collisions and maintaining compensation. We obtain their logical characterizations while considering the weightings only and not the associated formulas. Finally, we propose an original weighting, the Paralex Weighting, that improves even more the previous weightings.

#### Introduction

Penalty Logic is a natural and commonsense Knowledge Representation technique to deal with potentially inconsistent beliefs. It has been proposed in (Pinkas 1991; 1995) and developed in (Dupin de Saint-Cyr, Lang, & Schiex 1994). Penalty logic provides an intuitive framework to deal with weighted formulas. A penalty is associated with each interpretation: this penalty is the sum of the weights of the formulas falsified by the interpretation. Thus, the main characteristic of this formalism is its ability to compensate by additivity of the weights: if the most preferred piece of information is falsified by an interpretation, the interpretation is not automatically rejected.

However this formalism is well-known to be syntax-dependent as far as formulas are concerned. Moreover, one of the main and less studied flaws of Penalty Logic is the influence of the choice of weights on inference: the same pieces of information can provide extremely different results just by changing some weights. But an expert cannot take into account the processes of compensation and

Copyright © 2008, Association for the Advancement of Artificial Intelligence ([www.aaai.org](http://www.aaai.org)). All rights reserved.

deduction of Penalty Logic when he encodes his beliefs: when they do not represent an additive measure (such as money), the weights he provides are often artificial. It is easier for an expert to represent a cost than the reliability of testimonies, opinions or judgments. Many qualitative methods have been provided to deal with prioritized information only (without any weight). Different strategies can be applied, like best-out ordering (Benferhat *et al.* 1993), discrimin ordering (Brewka 1989; Geffner 1992; Benferhat *et al.* 1993), leximin ordering (Lehman 1995; Benferhat *et al.* 1993) or linear ordering (Nebel 1994). But none of these formalisms allows compensation like Penalty Logic: falsifying several formulas of less importance can be equal to falsifying a formula of greater importance. Moreover, none of these methods treats the central problem of this paper: collision avoiding.

This paper concentrates on weightings and on the problem of collisions between interpretations. Two interpretations are said to collide if their  $\kappa$ -values (the value of the  $\kappa$ -function associated with the interpretations) are equal. In this case, interpretations cannot be sorted out and the conclusion can be excessively cautious. If two interpretations falsify formulas of different importance, they should ideally have different  $\kappa$ -values in order to avoid weak conclusions. We show in this paper how to improve the results of Penalty Logic just by considering the choice of weightings.

This paper provides a survey of different natural weightings that can automatically be generated from the initial weighted beliefs provided by the expert. We show that some of these weightings increase the risk of collision. Others avoid collisions but in the meanwhile they disable the mechanism of compensation (and so the interest) of Penalty Logic. We study more particularly a family of weightings, the  $\sigma$ -weightings. We establish then that two of them are suitable for avoiding collisions and maintaining compensation. We obtain their logical characterizations while considering these weightings only and not the associated formulas. But they compare interpretations with respect to the minimal (least important) formulas that they falsify. That is the reason why we propose finally an original weighting, called Paralex Weighting, that solves this problem.

The first section provides some usual methods for dealing with ranked information and Penalty Logic. The second section presents the problem of collisions for Penalty

Logic and provides a complete study of a natural weighting: Arithmetic Weighting. The next section proposes a survey of different possible weightings and focuses more particularly on a family of weightings, the  $\sigma$ -weightings. We show that three of them, 2-repetition, Parabolic Weighting and Paralex Weighting lead to interesting properties in terms of collision avoiding and compensation.

### Preliminaries

In this paper, we consider a *finite* propositional language  $\mathcal{L}$  composed of atoms  $a, b, \dots$  and of the usual connectives  $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  (representing respectively conjunction, disjunction, material implication and equivalence). The set of interpretations (or possible worlds) based on  $\mathcal{L}$  is denoted by  $\Omega$  and  $\omega$  represents one element of  $\Omega$ . The logical consequence is denoted by  $\models$  and the set of models of a formula  $\varphi$  is denoted by  $Mod(\varphi)$ , i.e.  $Mod(\varphi) = \{\omega \in \Omega : \omega \models \varphi\}$ . The symbol  $\top$  represents a formula that is always true ( $Mod(\top) = \Omega$ ) and the symbol  $\perp$  represents a formula that is always false ( $Mod(\perp) = \emptyset$ ).

### Ranked Belief Bases and Penalty Logic

The basic considered inputs for Penalty Logic are ranked belief bases. A ranked belief base  $B$  is a set of weighted formulas such that  $B = \{(\varphi_i, r_i)\}$ . Weights take their values into the set of positive integers  $\mathbb{N}$ . The greater is the weight, the more important is the formula. Weight  $+\infty$  is devoted to express integrity constraints, i.e. formulas that cannot be violated.

From a ranked belief base  $B$ , one can define a weighting on interpretations by considering the weights of the formulas that they falsify.

**Definition 1 ( $\kappa$ -functions)** Let  $B$  be a ranked belief base. A  $\kappa$ -function is a function that maps  $\Omega$  to  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  such that:

$$\kappa_{\odot}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \models B^* \\ \bigodot_{(\varphi, r) \in False_B(\omega)} r & \text{elsewhere} \end{cases}$$

where  $B^*$  is the weight-free counterpart of  $B$ .  $\odot$  represents a given numeric operator and  $False_B(\omega) = \{(\varphi, r) \in B : \omega \not\models \varphi\}$ .

From a  $\kappa$ -function, a total preorder on the set of interpretations  $\Omega$  can be defined as follows:

$$\omega \leq_{\kappa_{\odot}} \omega' \text{ iff } \kappa_{\odot}(\omega) \leq \kappa_{\odot}(\omega').$$

Contrary to formulas, the least interpretations are the preferred ones. Hence propositional semantic consequence can be extended: a formula is a consequence of a ranked belief base, if and only if its models contain all the  $\kappa$ -preferred models. More formally:

**Definition 2** Let  $B$  be a ranked belief base and  $\varphi$  a propositional formula, then:

$$B \models_{\kappa_{\odot}} \varphi \text{ iff } Min(\Omega, \leq_{\kappa_{\odot}}) \subseteq Mod(\varphi).$$

The main two operators that can be found in the literature are the max operator ( $\max$ ) and the sum operator ( $\Sigma$ ). The first one provides the semantics of Ordinal Conditional

Functions (Spohn 1988; Williams 1994) and the semantics of Possibilistic Logic (Dubois, Lang, & Prade 1994), the second one provides the semantics of Penalty Logic (Pinkas 1995; Dupin de Saint-Cyr, Lang, & Schiex 1994). The preorder on interpretations induced by  $\kappa_{\max}$  is equivalent to the best-out ordering (Benferhat *et al.* 1993). Actually, when considering operator  $\max$ , the weighting is not really important: only the relative order between interpretations is significant.

**Example 3** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $B = \{(a \wedge b, 3), (\neg a, 2), (\neg b, 1)\}$ . Table 1 summarizes the different  $\kappa$ -functions using respectively  $\max$  and  $\Sigma$  operator.

$\omega_i \in \Omega$	$a$	$b$	$\kappa_{\max}(\omega_i)$	$\kappa_{\Sigma}(\omega_i)$
$\omega_0$	0	0	3	<b>3</b>
$\omega_1$	0	1	3	4
$\omega_2$	1	0	3	5
$\omega_3$	1	1	<b>2</b>	<b>3</b>

Table 1: Example of  $\kappa_{\max}(\omega)$  and  $\kappa_{\Sigma}(\omega)$

For instance,  $\omega_1$  falsifies two formulas  $((a \wedge b, 3)$  and  $(\neg a, 2))$ , then  $\kappa_{\max}(\omega_1) = 3$  and  $\kappa_{\Sigma}(\omega_1) = 3 + 2 = 5$ .  $\kappa_{\max}$  induces the following orders on the set of interpretations:

$$\omega_3 <_{\kappa_{\max}} \omega_0 \approx_{\kappa_{\max}} \omega_1 \approx_{\kappa_{\max}} \omega_2,$$

whereas  $\kappa_{\Sigma}$  induces:

$$\omega_3 \approx_{\kappa_{\Sigma}} \omega_0 <_{\kappa_{\Sigma}} \omega_2 <_{\kappa_{\Sigma}} \omega_1.$$

We have, for instance,  $B \models_{\kappa_{\max}} a$ , because:

$$Min(\Omega, \leq_{\kappa_{\max}}) = \{\omega_3\} \subseteq \{\omega_2, \omega_3\} = Mod(a).$$

Moreover, we have  $B \models_{\kappa_{\Sigma}} a \vee \neg b$ , because:

$$Min(\Omega, \leq_{\kappa_{\Sigma}}) = \{\omega_0, \omega_3\} \subseteq \{\omega_0, \omega_2, \omega_3\} = Mod(a \vee \neg b).$$

Note that in the general case, there is no link between both orders and the obtained conclusions can be completely disjoint. Possibilistic logic provides more stable result (i.e. it is less affected by a modification of the weights), whereas Penalty Logic considers the lowest strata and is less affected by the problem of inheritance blocking and by the drowning problem (Benferhat *et al.* 1993). In Possibilistic Logic, an interpretation falsifying the most important formula is automatically excluded whereas in Penalty Logic, it can be saved.

The sum operator is the key component of the semantics of Penalty Logic (Pinkas 1995; Dupin de Saint-Cyr, Lang, & Schiex 1994) and the preorder between interpretations induced by  $\kappa_{\Sigma}$  strongly depends on the provided weights.

In the remainder of this paper, we only consider the sum operator, therefore we write  $\kappa$  for  $\kappa_{\Sigma}$ .

### Repeating the Information

Penalty Logic is well-known to be syntax-dependent. Contrary to Possibilistic Logic for instance, the repetition of information may have an impact on the provided inferences. We will illustrate the influence of repeating information with

an example, but we need first to define the semantic equivalence between two ranked belief bases. Two ranked belief bases are said to be semantically equivalent if and only if they induce the same  $\kappa$ -function. More formally:

**Definition 4** Let  $B_1$  and  $B_2$  be two ranked belief bases and  $\kappa_{B_1}$  (resp.  $\kappa_{B_2}$ ) the  $\kappa$ -function associated with  $B_1$  (resp.  $B_2$ ). Then  $B_1$  is said to be semantically equivalent to  $B_2$ , denoted by  $B_1 \equiv_\kappa B_2$ , iff:

$$\kappa_{B_1} = \kappa_{B_2}.$$

**Example 5** Let  $B_1$ ,  $B_2$  and  $B_3$  be three ranked belief bases such that:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\langle a, 4 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle \neg a \vee \neg b, 1 \rangle\} \\ B_2 &= \{\langle a, 6 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle \neg a \vee \neg b, 1 \rangle\} \\ B_3 &= \{\langle a \wedge b, 4 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle \neg a \vee \neg b, 1 \rangle\} \end{aligned}$$

Table 2 shows the three  $\kappa$ -functions associated with each ranked belief base. One can remark that  $B_1$  and  $B_2$  are semantically equivalent, but  $B_3$  is neither equivalent to  $B_1$  nor to  $B_2$ .

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega_i)$	$\kappa_{B_2}(\omega_i)$	$\kappa_{B_3}(\omega_i)$
$\omega_0$	0	0	10	10	6
$\omega_1$	0	1	6	6	6
$\omega_2$	1	0	4	4	4
$\omega_3$	1	1	1	1	1

Table 2:  $\kappa_{B_1}$ ,  $\kappa_{B_2}$  and  $\kappa_{B_3}$

The previous example illustrates two characteristics of Penalty Logic. The first one is that when the same formula appears several times with different weights, one can replace these occurrences with the formula coupled to the sum of its weights without changing the induced  $\kappa$ -functions (see  $B_1$  and  $B_2$  in Example 5).

Moreover we only consider in this paper sets of couples  $\langle \varphi, r \rangle$ . Actually, Penalty Logic can be defined more widely on multisets (or bags) of weighted formulas. But each repetition of couples can be replaced with only one equivalent weighted formula without any change on  $\kappa$ -function.

The second feature of Penalty Logic is that, contrary to Possibilistic Logic, two different formulas with the same rank cannot be replaced by the conjunction of these formulas (see  $B_1$  and  $B_3$  in Example 5): Penalty Logic is very dependent on the syntax (see Konieczny, Lang, & Marquis 2005) for a global discussion on the difference between the two connectors: " $\wedge$ " and " $,$ ".

### How to Choose a Weighting ?

As mentioned in the introduction, the conclusions obtained by Penalty Logic from a ranked belief base are strongly dependent on the chosen weights. But an expert cannot take into account the processes of compensation and deduction of Penalty Logic when he encodes his beliefs: the weights he provides are often artificial. For instance, it is easier for an expert to provide only an order between his beliefs, or consecutive positive natural numbers (like 1, 2, 3, 4, ...) to express the reliability on each piece of information.

### On the Incidence of the Weighting

Let us illustrate the incidence of the weights by considering a ranked belief base  $B$  such that  $B = \{\langle a \wedge b, 3 \rangle, \langle \neg a, 2 \rangle, \langle \neg b, 1 \rangle\}$ . Three possible weightings induced by  $B$  and preserving the order between the weights are described in table 3.

	$W_{B_1}$	$W_{B_2}$	$W_{B_3}$
$a \wedge b$	3	4	4
$\neg a$	2	2	3
$\neg b$	1	1	2

Table 3: Compatible Weightings

From them, we define  $W_B$ , which is the ordered set of the weights that appear into a ranked belief base:

$$W_B = \{r : \langle \varphi, r \rangle \in B\}.$$

The first weighting is a "natural" weighting: if there are  $n$  different strata, then the preferred stratum is associated with  $n$ , the next one with  $n-1$  and so on. The second weighting is a "power" weighting: the least preferred stratum has weight 1, while the next one is associated with the double of the previous stratum and so on. The last weighting is just a shift of the first weighting (1 was added to each weight).

These three ranked belief bases induce three different  $\kappa$ -functions given in Table 4. They are obviously not semantically equivalent. Moreover, the three  $\kappa$ -functions produce three different sets of conclusions:  $\{\omega_0, \omega_3\}$ ,  $\{\omega_3\}$  and  $\{\omega_0\}$ . From the second set, one can deduce  $a$ , from the third one, one can deduce  $\neg a$  and from the first one, one can deduce neither  $a$  nor  $\neg a$ .

	a	b	$\kappa_{W_{B_1}}$	$\kappa_{W_{B_2}}$	$\kappa_{W_{B_3}}$
$\omega_0$	0	0	3	4	4
$\omega_1$	0	1	4	5	6
$\omega_2$	1	0	5	6	7
$\omega_3$	1	1	3	3	5

Table 4: induced  $\kappa_{W_i}$

### On the Incidence of Collisions

According to Definition 2, the inference of Penalty Logic is based on the interpretations that have a minimal  $\kappa$ -value. The greater is the set of  $\kappa$ -minimal interpretations, the poorer and less informative are the inferences produced: all the inferred information have to contain *all* the  $\kappa$ -minimal interpretations. Intuitively, the set of preferred interpretations has to be as small as possible in order to be as precise as possible.

Let  $B$  be a ranked belief base, and  $\omega, \omega'$  be two interpretations, then  $\omega$  and  $\omega'$  collide iff:

$$\kappa(\omega) = \kappa(\omega').$$

If two interpretations falsify exactly the same formulas, by definition of  $\kappa$ , they have the same  $\kappa$ -value. On the contrary if they falsify formulas of different importance, they

should ideally be associated with different  $\kappa$ -values, in order to avoid collisions. This notion of Collision Freedom can be characterized as follows:

$$(\text{CCF}) \forall \omega, \omega' \in \Omega, \kappa(\omega) = \kappa(\omega') \text{ iff } \text{False}_B(\omega) = \text{False}_B(\omega').^1$$

Note that, by definition, weight 0 can never be involved in a collision: two interpretations violating no formula have a 0 weight and falsify the same set of formulas -the empty set- so they cannot be in collision. We illustrate this concept of collision with the following example.

**Example 6** Let  $B$  be a new ranked belief base such that  $B = \{(a \vee b, 6), (a \leftrightarrow b, 4), (\neg a, 3), (\neg b, 2), (\neg a \vee \neg b, 1), (a \wedge \neg b, 1)\}$ . Table 5 represents the induced  $\kappa$ -function  $\kappa_B$ .

	a	b	$\kappa_B$
$\omega_0$	0	0	$7 = 6 + 1$
$\omega_1$	0	1	$7 = 4 + 2 + 1$
$\omega_2$	1	0	$7 = 4 + 3$
$\omega_3$	1	1	$7 = 3 + 2 + 1 + 1$

Table 5: An extreme example of collision

In this case, all the interpretations collide and one can only deduce  $\top$  from  $B$ , which is the poorest possible inference.

In the previous example all the interpretations are considered equally preferred. However, two of them ( $\omega_0$  and  $\omega_2$ ) falsify less formulas than the others. Considering these interpretations only, one can deduce  $\neg b$ . This remark leads us to introduce the criterion of Majority Preservation:

$$(\text{CMP}) |\text{False}_B(\omega)| < |\text{False}_B(\omega')| \text{ implies } \omega <_{\kappa} \omega',$$

where  $|E|$  represents the cardinality of the set  $E$ . This criterion states that an interpretation falsifying less formulas than another one must be preferred: it allows some kind of compensation, like Penalty Logic.

### A Study Case: Arithmetic Weighting

In order to leave out the logical structures of information and consider only the weighting, we impose the following restriction in the sequel of this paper: **each weight appears only one time in a given base**. In other words, two formulas cannot have the same weight. The expert can *only* express that two formulas are considered equally preferred by combining them with a conjunction. The expert can be proposed a set of weights, denoted by  $W^n$ , from which he can choose the weights for his  $n$  formulas.

From a weighting  $W^n$ , we can compute all the possible values mapped to a  $\kappa$ -function. This set of values, denoted by  $W_{\Sigma}^n$ , is such that, for each  $n \leq |A|$ :

$$W_{\Sigma}^n = \left\{ \sum_{a \in A} a : A \subseteq W^n \right\}.$$

<sup>1</sup> $\text{False}_B(\omega)$  is defined in Definition 1.

Note that, since weightings are applied to formulas, not to interpretations, the weight 0 has no interest: it does not occur in the calculus of penalties, so it does not belong to the considered weightings.

Studying possible collisions is equivalent to searching for different sums of elements of  $W^n$  (standing for different sets of formulas) leading to the same value.

A natural idea in order to choose a weighting is to consider the sequence of the first  $n$  positive integers, corresponding to  $n$  proposed formulas:

$$W^{\text{arith}, n} = (1, 2, 3, 4, \dots, n).$$

This weighting is called Arithmetic Weighting, because it derives from an arithmetic progression. The most preferred formula is associated with  $n$  while the least preferred formula is associated with 1. As a matter of fact, this naïve weighting is one of the worst weightings in terms of collisions. Figure 1 presents the number of collisions for each possible value with  $n = 17$ . Notice that this curve characterizes a binomial law and that values 76 and 77 can be obtained by exactly 2410 different summations.

It can be shown that the maximal number of collisions occurs for the median of  $W_{\Sigma}^{\text{arith}, n} = (1, 2, 3, \dots, n(n+1)/2)$ , namely  $[n(n+1)/4]$ , where  $[x]$  is the integer part of  $x$ .

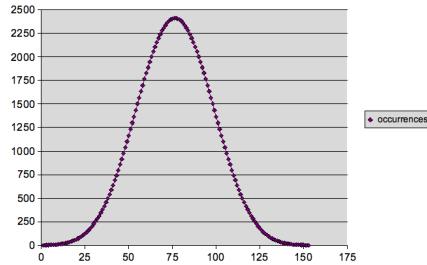


Figure 1: Collisions for Arithmetic Weighting with  $n = 17$

In fact, considering the problem of collision with Arithmetic Weighting is equivalent to a well-known problem in Number Theory: the partition of integer  $n$  into distinct parts from 1 to  $n$  (Hardy & Wright 1979). Hence the number of collisions for each value of  $W_{\Sigma}^{\text{arith}, n}$  is related to the expansion of:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^n).$$

For instance, let  $n = 4$ . The expansion of  $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$  is:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}.$$

The monomial  $2x^3$  means that there are two ways to produce 3.

It can be easily shown that, for any  $n$ , only six values do not lead to collision: 0 (representing the case where no formula is falsified), 1, 2 and, symmetrically,  $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)$ ,  $\sum_{i=1}^{n-2} i$  and  $\sum_{i=1}^{n-1} i$ . All the other values are

obtainable by at least two different summations of weights, thus leading to collision. Although often used, Arithmetic Weighting is not a suitable weighting for the criterion of Collision Freedom.

### The family of $\sigma$ -weightings

The previous section shows that arithmetic weighting is too naive and leads to poor and less informative results in terms of inference.

We gather in this section weightings that have common properties and we call this family the  $\sigma$ -weightings. Each member of this family is built upon a  $\sigma$ -sequence, the elements of which are summations of preceding elements. A  $\sigma$ -sequence is itself based on a sequence  $\Phi$  which gives the number of elements to sum. Following is the generic definition of a  $\sigma$ -sequence:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 &= 1, \\ \sigma_i &= \sum_{j=i-\Phi_{i-1}}^{i-1} \sigma_j. \end{cases}$$

where  $\Phi_i$  is the  $i^{\text{th}}$  term of the sequence  $\Phi$ .

Let us illustrate this family with a well-known sequence: Fibonacci numbers.

**Example 7 (Fibonacci numbers)** Let us consider the following sequence:

$$\Phi^{\text{Fibo}} = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots).$$

We can compute the  $\sigma$ -sequence based on  $\Phi^{\text{Fibo}}$  and denoted by  $\sigma^{\text{Fibo}}$ :

$$\sigma^{\text{Fibo}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

For instance, to compute  $\sigma_3^{\text{Fibo}}$ , we consider  $\Phi_2^{\text{Fibo}} = 2$  and compute  $\sum_{j=3-2=1}^2 \sigma_j = \sigma_1^{\text{Fibo}} + \sigma_2^{\text{Fibo}} = 1 + 1 = 2$ .

This sequence happens to be the Fibonacci numbers. Similarly the sequence  $\Phi^{\text{Tribo}} = (1, 2, 3, 3, 3, \dots)$  generates the sequence often called Tribonacci numbers, in which each element is the sum of its three predecessors.

Note that in the general case neither Fibonacci numbers nor Tribonacci numbers have good properties as regards collisions, since every weight (except the first ones) is the sum of the two (or three) previous weights.

### Lexicographic sequence

We study in this section another sequence based on:

$$\Phi^{\text{lex}} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots).$$

This sequence can be computed directly, without any iteration, with the simple relation:  $\Phi_i^{\text{lex}} = i$ . The  $\sigma$ -sequence generated from  $\Phi^{\text{lex}}$  can directly be used as a weighting:

$$\sigma^{\text{lex}} = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots).$$

In this case, we obtain the successive powers of 2 and Penalty Logic turns out to have exactly the same behavior as Lexicographic Inference (Dupon de Saint Cyr 1996). An interpretation  $\omega$  is preferred to another interpretation  $\omega'$  if and only if  $\omega$  and  $\omega'$  falsify the same weighted formulas down to some weight  $r$ , where  $\omega'$  falsifies a formula satisfied by  $\omega$ . More formally:

**Proposition 8** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $|B| = n$  and such that  $W_B = \{\sigma_i^{\text{lex}} : i \leq n\}$ . Then,  $\kappa_B(\omega) < \kappa_B(\omega')$  iff  $\exists r$  such that:

- (i)  $\langle \varphi, r \rangle \in B$  and  $\omega \models \varphi$  but  $\omega' \not\models \varphi$
- (ii)  $\forall \langle \varphi, r' \rangle \in B$  such that  $r' > r$ ,  $\omega \models \varphi$  iff  $\omega' \models \varphi$ .

As a corollary of this proposition, any ranked belief base  $B$  such that  $W_B = \sigma_n^{\text{lex}}$  is collision-free. Actually if two interpretations falsify different sets of formulas, their  $\kappa$ -values are the sums of different powers of 2.

**Proposition 9** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $|B| = n$  and  $W_B = \{\sigma_i^{\text{lex}} : i \leq n\}$  then  $B$  satisfies  $C_{CF}$ .

This weighting avoids collisions but in the meanwhile it disables the mechanism of compensation (and so the interest) of Penalty Logic, as it is shown by the following example.

**Example 10** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $W_B = \{\sigma_i^{\text{lex}} : i \leq 5\}$  and  $B = \{\langle \neg a, 16 \rangle, \langle a \wedge b, 8 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle a \vee b, 2 \rangle, \langle a \vee \neg b, 1 \rangle\}$ . Table 6 gives the induced  $\kappa$ -function.

	a	b	$\kappa_B$
$\omega_0$	0	0	$14 = 8 + 4 + 2$
$\omega_1$	0	1	$13 = 8 + 4 + 1$
$\omega_2$	1	0	$24 = 16 + 8$
$\omega_3$	1	1	$16 = 16$

Table 6: Lexicographic Weighting

The two preferred interpretations are the interpretations that falsify as many formulas as possible, namely  $\omega_0$  and  $\omega_1$ . One can observe that  $\omega_3$  is rejected whereas it falsifies only one formula ( $\neg a$ ), which, moreover, is not a constraint integrity.

We introduce now three weightings that avoid collisions and allow some kind of compensation.

### 2-repetition sequence

We first present a  $\sigma$ -sequence initially proposed in (Stern 1938) for Weighted Voting Systems. It is based on the following generating sequence:

$$\Phi^{\text{rep}} = (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \dots).$$

This sequence contains consecutively all the integers repeated twice, except for 1. Any term of this sequence can be computed directly with the following formula:  $\Phi_i^{\text{rep}} = 1 + \lfloor i/2 \rfloor$ . The first terms of the corresponding  $\sigma$ -sequence are:

$$\sigma^{\text{rep}} = (1, 1, 2, 3, 6, 11, 22, 42, 84, 165, 330, 654, 1308, \dots).$$

This sequence increases more quickly than Fibonacci Numbers. We do not use this sequence directly as a weighting, but use instead sums of its elements to build one:

$$W_i^{\text{rep},n} = \sum_{j=n-i+1}^n \sigma_j^{\text{rep}}.$$

$n$	$W^{rep,n}$								
1	1								
2	1	2							
3	2	3	4						
4	3	5	6	7					
5	6	9	11	12	13				
6	11	17	20	22	23	24			
7	22	33	39	42	44	45	46		
8	42	64	75	81	84	86	87	88	
9	84	126	148	159	165	168	170	171	172

 Table 7:  $W^{rep,n}$  for  $n < 10$ 

In other words, if one needs  $n$  different weights,  $\sigma_i^{rep}$  is associated with the lowest weight,  $\sigma_n^{rep} + \sigma_{n-1}^{rep}$  with the second lowest one and the greatest weight is the sum of all  $\sigma_i^{rep}$  such that  $i \leq n$ . Table 7 presents the first nine weightings.

The weighting  $W^{rep,n}$  is a powerful weighting: not only does it satisfy  $C_{CF}$ , but it also allows compensation by satisfying the criterion  $C_{MP}$ .

**Proposition 11** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $|B| = n$  and  $W_B = W^{rep,n}$  then  $B$  satisfies  $C_{CF}$  and  $C_{MP}$ .

An unexpected result occurs when two interpretations falsify exactly the same number of formulas. Then these interpretations are ordered with respect to the minimal weight of the different formulas they falsify. This is the criterion of Reverse Lexicographic Cardinality.

(C<sub>RLC</sub>) if  $|False_B(\omega)| = |False_B(\omega')|$  then  $\omega <_\kappa \omega'$  iff  $\min\{r : \langle \varphi, r \rangle \in False_B(\omega) \setminus False_B(\omega')\} < \min\{r' : \langle \varphi', r' \rangle \in False_B(\omega') \setminus False_B(\omega)\}$ .

**Proposition 12** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $|B| = n$  and  $W_B = W^{rep,n}$  then  $B$  satisfies C<sub>RLC</sub>.

Let us illustrate these propositions with the following example.

**Example 13 (continued)** Let us again consider the same ranked belief base  $B$  as in Example 10, with the same order between formulas, but with a different weighting, based on  $W^{rep,n}$ . As  $W^{rep,5} = \{6, 9, 11, 12, 13\}$ , now  $B = \{\langle \neg a, 13 \rangle, \langle a \wedge b, 12 \rangle, \langle a, 11 \rangle, \langle a \vee b, 9 \rangle, \langle a \vee \neg b, 6 \rangle\}$ . Table 8 provides the induced  $\kappa$ -function.

	$a$	$b$	$\kappa_B$
$\omega_0$	0	0	$32 = 12 + 11 + 9$
$\omega_1$	0	1	$29 = 12 + 11 + 6$
$\omega_2$	1	0	$25 = 13 + 12$
$\omega_3$	1	1	$13 = 13$

Table 8: 2-repetition Weighting

The order between interpretations induced by the  $\kappa$ -function is more convincing. They are ordered with respect

to the number of formulas they falsify first. Hence, the preferred interpretation is  $\omega_3$ .

### Parabolic Sequence

The parabolic sequence has been proposed more recently (Alvarez Rodriguez 1983). The aim of the Parabolic Weighting is to refine the 2-repetition sequence to provide a *minimal* collision-free weighting. This weighting is based on a well-known sequence, the Parabolic Sequence.

$$\Phi^{parab} = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots).$$

Each integer  $n$  in this sequence appears  $n$  times. One remarks that this sequence is equivalent to  $\Phi^{rep}$  for their first five terms, but then  $\Phi^{parab}$  increases much more slowly than 2-repetition sequence. Each element of this sequence is directly computable with the following formula:  $\Phi_i^{parab} = \lfloor (1 + \sqrt{8i - 7})/2 \rfloor$  (Knuth 1968). Historically the name of Parabolic Sequence comes from this formula. The first terms of the associated  $\sigma$ -sequence are:

$$\sigma^{parab} = (1, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 40, 77, 148, 285, 570, \dots).$$

The construction of the weighting induced by  $\Phi^{parab}$  is similar to the construction of the weighting  $W^{rep,n}$ :

$$W_i^{parab,n} = \sum_{j=n-i+1}^n \sigma_j^{parab}.$$

Table 9 presents the Parabolic Weighting from 1 to 9 formulas. The first six lines are identical to 2-repetition weighting first six lines, but the weightings diverge for  $n > 5$ . Moreover, one remarks that for  $n > 5$ ,  $W^{parab,n}$  is lesser than  $W^{rep,n}$ . In fact, it has been shown in (Alvarez Rodriguez 1983) that the first weight of  $W^{parab,n}$  is the minimal first weight for a collision-free weighting with  $n$  elements: one cannot find a collision-free weighting with a lesser first element.

$n$	$W^{parab,n}$								
1	1								
2	1	2							
3	2	3	4						
4	3	5	6	7					
5	6	9	11	12	13				
6	11	17	20	22	23	24			
7	20	31	37	40	42	43	44		
8	40	60	71	77	80	82	83	84	
9	77	117	137	148	154	157	159	160	161

 Table 9:  $W^{parab,n}$  for  $n < 10$ 

Like 2-Repetition Weighting, Parabolic Weighting respects the criteria of Collision Free and of Majority Preservation, but also Reverse Lexicographic Cardinality:

**Proposition 14** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $|B| = n$  and  $W_B = W^{parab,n}$  then  $B$  satisfies  $C_{CF}$ ,  $C_{MP}$  and  $C_{RLC}$ .

Next, we present a weighting that satisfies a more natural criterion: the criterion of Lexicographic Cardinality.

### Paralex Weighting

The criterion  $C_{RLC}$  is not satisfactory. It would be more intuitive to consider the most important formula falsified by an interpretation in order to decide between two interpretations falsifying the same number of formulas. We provide in this section an original weighting that compares interpretations falsifying the same number of formulas with respect to the *maximal* falsified formula. This property is represented by the following criterion of *Lexicographic Cardinality*:

**(CLC)** if  $|False_B(\omega)| = |False_B(\omega')|$  then  $\omega <_{\kappa} \omega'$  iff  $\max\{r : \langle\varphi, r\rangle \in False_B(\omega) \setminus False_B(\omega')\} < \max\{r' : \langle\varphi', r'\rangle \in False_B(\omega') \setminus False_B(\omega)\}$ .

Obviously, 2-repetition and Parabolic Weightings do not satisfy this property. For this purpose, we build another weighting,  $W^{paralex,n}$  upon  $\sigma^{parab}$ :

$$\begin{cases} W_1^{paralex,n} = \sum_{j=\lfloor(n+1)/2\rfloor}^n \sigma_j^{parab}, \\ W_i^{paralex,n} = W_{i-1}^{paralex,n} + \sigma_{i-1}^{parab}. \end{cases}$$

Indeed, the Paralex Weighting  $W^{paralex,n}$  is related to Parabolic Sequence. It starts with the sum of the  $\lfloor(n+1)/2\rfloor$  first elements of  $\sigma^{parab}$ , then for each weight its successor is the sum of the current weight with the current element of  $\sigma^{parab}$ . Table 10 presents Paralex Weightings for  $n < 10$ . One can remark that weights diverge from  $W^{parab,n}$  when  $n \geq 3$ .

$n$	$W^{paralex,n}$									
1	1									
2	1	2								
3	3	4	5							
4	5	6	7	9						
5	11	12	13	15	18					
6	20	21	22	24	27	33				
7	40	41	42	44	47	53	64			
8	77	78	79	81	84	90	101	121		
9	154	155	156	158	161	167	178	198	238	

Table 10:  $W^{paralex,n}$  for  $n < 10$

As expected, this weighting satisfies the properties of *Collision Freedom*, *Majority Preserving* and *Lexicographic Cardinality*.

**Proposition 15** Let  $B$  be a ranked belief base such that  $|B| = n$  and  $W_B = W^{paralex,n}$  then  $B$  satisfies  $C_{CF}$ ,  $C_{MP}$  and  $C_{LC}$ .

Note that, contrary to Parabolic Weighting, the lowest weight is not minimal. For instance, for  $n = 5$ , experimental results show that the minimal weighting is  $\{7, 8, 9, 11, 14\}$ . This weighting is obtained by considering all possible weightings. This systematic computing is not

tractable and can only be used with small values of  $n$ : actually, we must enumerate the sums of *all* the subsets of the considered weightings. Paralex Weighting is not minimal, but it offers an efficient method to ensure  $C_{CF}$ ,  $C_{MP}$  and  $C_{LC}$ .

Let us illustrate the difference between Paralex Weighting and 2-repetition/Parabolic Weightings with the following example.

**Example 16** Let us consider the ranked belief base  $B$  described in table 11 with two different weightings. One can note that for  $n = 6$ ,  $W^{rep,n} = W^{parab,n}$ .

$\varphi$	$W^{paralex,6}$	$W^{rep,6}/W^{parab,6}$
$a \rightarrow \neg b$	33	24
$b$	27	23
$a$	24	22
$a \vee \neg b$	22	20
$\neg a \vee b$	21	17
$a \leftrightarrow \neg b$	20	11

Table 11: Two different weightings

Both weightings induce the two different  $\kappa$ -functions described in Table 12. In both cases,  $\omega_0$  is the least preferred interpretation: it falsifies one more formula than the other interpretations. However,  $\kappa_B^{paralex}$  prefers  $\omega_1$  to  $\omega_3$ , because  $\omega_3$  falsifies a more important formula than  $\omega_1$ . On the contrary,  $\kappa_B^{rep/parab}$  prefers  $\omega_3$  to  $\omega_1$ , because  $\omega_3$  falsifies a lesser formula than  $\omega_1$ .

	$a$	$b$	$\kappa_B^{paralex}$	$\kappa_B^{rep/parab}$
$\omega_0$	0	0	$71 = 27 + 24 + 20$	$56 = 23 + 22 + 11$
$\omega_1$	0	1	<b>46 = 24 + 22</b>	$42 = 22 + 20$
$\omega_2$	1	0	$48 = 27 + 21$	$40 = 23 + 17$
$\omega_3$	1	1	$52 = 33 + 20$	<b>35 = 24 + 11</b>

Table 12: Induced  $\kappa$ -functions

The relative order between interpretations induced by Parabolic and 2-repetition weightings is the following one:

$$\omega_3 <_{\kappa_B^{rep/parab}} \omega_2 <_{\kappa_B^{rep/parab}} \omega_1 <_{\kappa_B^{rep/parab}} \omega_0,$$

while the order induced by Paralex Weighting is:

$$\omega_1 <_{\kappa_B^{paralex}} \omega_2 <_{\kappa_B^{paralex}} \omega_3 <_{\kappa_B^{paralex}} \omega_0.$$

The order between interpretations induced by  $\kappa_B^{Paralex}$  is the most convincing one. Indeed  $\kappa_B^{rep/parab}$  considers that  $\omega_3$  is the preferred interpretation, from which one can deduce  $a$  and  $b$ . This interpretation falsifies as many formulas (namely two) as  $\omega_1$  and  $\omega_2$ , but it falsifies the most important formula,  $a \rightarrow \neg b$ .

On the contrary,  $\kappa_B^{Paralex}$  associates the minimal penalty, namely 46, with the interpretation  $\omega_1$ . From this interpretation, one can deduce  $\neg a$  and  $b$ , which is consistent with  $a \rightarrow \neg b$ .

### Conclusion and perspectives

This paper offers several solutions to a fundamental problem that has never been addressed in the literature: the problem of collisions between interpretations in Penalty Logic. Collisions are a weakening agent for conclusions. Two main factors prevail in collision process: the logical expression of beliefs and the weighting itself. This paper focuses on the choice of weightings for Penalty Logic in order to respect the criterion of Collision Freedom, while keeping the capacity of compensation of Penalty Logic.

This paper provides a survey of mostly used weightings. Most naïve weightings have no interesting logical properties and do not prevent the occurrence of collisions. Others, like Lexicographic Weighting, avoid collisions but in the meanwhile they disable the mechanism of compensation (and so the interest) of Penalty Logic. We present finally three powerful and easily tractable weightings: 2-repetition, Parabolic and Paralex Weightings, that are Collision-Free and that deal with the number of formulas falsified by interpretations.

But some questions remain open, such as the question of the existence of a minimal and tractable weighting satisfying  $C_{CF}$ ,  $C_{MP}$  and  $C_{LC}$  or such as finding a way to deal with several formulas equally weighted. The criterion  $C_{MP}$  has been chosen in order to have the most precise conclusions as possible. But other criteria, like set inclusion, could be studied.

Moreover, the different weightings presented in this paper can be used in other logical frameworks than Penalty Logic. For instance, they could be exploited in belief merging, where they could be used for distance modeling and for solving some problems of manipulation.

### Acknowledgments

We would like to thank the anonymous reviewers for their constructive and helpful comments.

This work is partially supported by the ANR project *jeunes chercheurs #JC05-41940 Planevo*.

### References

- Alvarez Rodriguez, M. A. 1983. *Étude des propriétés d'une suite numérique liée à un problème de vote pondéré*. Thèse de docteur-ingénieur, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.
- Benferhat, S.; Cayrol, C.; Dubois, D.; Lang, J.; and Prade, H. 1993. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, 640–645.
- Brewka, G. 1989. Preferred subtheories: an extended logical framework for default reasoning. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, 1043–1048.
- Dubois, D.; Lang, J.; and Prade, H. 1994. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, 439–513. Oxford University Press.
- Dupin de Saint-Cyr, F.; Lang, J.; and Schiex, T. 1994. Penalty logic and its link with Dempster-Shafer theory. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'94)*, 204–211.
- Dupin de Saint Cyr, F. 1996. *Gestion de l'évolutif et de l'incertain en logiques pondérées*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- Geffner, H. 1992. *Default Reasoning: Causal and Conditional Theories*. MIT Press.
- Hardy, G. H., and Wright, E. M. 1979. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford Science Publications, 5<sup>th</sup> edition. chapter Partitions, 273–296.
- Knuth, D. E. 1968. *The Art of Computer Programming*, volume 1. Addison-Wesley, second edition. p. 44 and 479.
- Konieczny, S.; Lang, J.; and Marquis, P. 2005. Reasoning under inconsistency: The forgotten connective. In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05)*, 484–489.
- Lehman, D. 1995. Another perspective on default reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 15(1):61–82.
- Nebel, B. 1994. Base revision operations and schemes: semantics, representation and complexity. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'94)*, 341–345.
- Pinkas, G. 1991. Propositional non-monotonic reasoning and inconsistency in symmetrical neural networks. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'91)*, 525–530.
- Pinkas, G. 1995. Reasoning, nonmonotonicity and learning in connectionist networks that capture propositional knowledge. *Artificial Intelligence* 77(2):203–247.
- Spohn, W. 1988. Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics* 105–134.
- Stern, M. 1938. Aufgaben. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 18:100.
- Williams, M.-A. 1994. Transmutations of knowledge systems. In Doyle, J.; Sandewall, E.; and Torasso, P., eds., *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, 619–629. Morgan Kaufmann.

## B.4 IJCAI'11 : Interval-Based Possibilistic Logic

### Interval-Based Possibilistic Logic

Salem Benferhat<sup>1</sup>, Julien Hué<sup>1</sup>, Sylvain Lagrue<sup>1</sup>, Julien Rossit<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université Lille – Nord de France  
CRIL – CNRS UMR 8188  
Artois, F-62307 Lens  
[{benferhat,hue,lagrue}@cril.fr](mailto:{benferhat,hue,lagrue}@cril.fr)

<sup>2</sup> Université Paris Descartes  
LIPADE – France  
[julien.rossit@parisdescartes.fr](mailto:julien.rossit@parisdescartes.fr)

#### Abstract

Possibilistic logic is a well-known framework for dealing with uncertainty and reasoning under inconsistent knowledge bases. Standard possibilistic logic expressions are propositional logic formulas associated with positive real degrees belonging to [0,1]. However, in practice it may be difficult for an expert to provide exact degrees associated with formulas of a knowledge base.

This paper proposes a flexible representation of uncertain information where the weights associated with formulas are in the form of intervals. We first study a framework for reasoning with interval-based possibilistic knowledge bases by extending main concepts of possibilistic logic such as the ones of necessity and possibility measures. We then provide a characterization of an interval-based possibilistic logic base by means of a concept of compatible standard possibilistic logic bases. We show that interval-based possibilistic logic extends possibilistic logic in the case where all intervals are singletons. Lastly, we provide computational complexity results of deriving plausible conclusions from interval-based possibilistic bases and we show that the flexibility in representing uncertain information is handled without extra computational costs.

#### 1 Introduction

Possibilistic logic (e.g. [Dubois *et al.*, 1994; Dubois and Prade, 2004]) is an important framework for representing and reasoning with uncertain and inconsistent pieces of information. Uncertainty is syntactically represented by a set of weighted formulas of the form  $K = \{\langle \varphi_i, \alpha_i \rangle : i = 1, \dots, n\}$  where  $\varphi_i$ 's are propositional formulas and  $\alpha_i$ 's are real numbers belonging to [0,1]. The pair  $\langle \varphi_i, \alpha_i \rangle$  means that  $\varphi_i$  is certain (or important) to at least a degree  $\alpha_i$ . An inference machinery has been proposed in [Lang, 2000] to derive plausible conclusions from a possibilistic knowledge base, which needs  $\log_2(m)$  calls to the satisfiability test of a set of propositional clauses (SAT), where  $m$  is the number of different degrees used in  $K$ . Uncertainty is also represented at the semantic level by associating a possibility degree with each possible world (or interpretation).

Several extensions of possibilistic logic have been proposed to replace the unit interval [0,1] by some complete lattice or even by a partial pre-order. In [Lafage *et al.*, 1999], a set of assumptions which supports a formula is used instead of a real positive number. In [Dubois *et al.*, 1992], the degrees are replaced by a set of positive values (not necessarily in [0,1]) representing a time frame where the formulas are known to be true. In [Benferhat *et al.*, 2004; Benferhat and Prade, 2006], a partially ordered extension of possibilistic logic has been proposed. However, these extensions either increases the computational complexity (e.g. when dealing with partially pre-ordered information) or fail to generalize possibilistic logic. For instance, the so-called timed possibilistic logic proposed in [Dubois *et al.*, 1992] does not recover standard possibilistic logic when sets of times assigned to formulas are singletons belonging to [0,1].

This paper is in the spirit of these extensions of possibilistic logic. It studies theoretical foundations, with an analysis of computational issues, of interval-based possibilistic logic. The question addressed in this paper is whether one can extends and increases the expressive power of standard possibilistic logic, by representing imprecision regarding uncertainty associated with formulas, without increasing the computational complexity of the reasoning process.

The framework considered in this paper is the one of interval-based possibilistic logic. At the syntactic level, pieces of information are represented by an interval-based possibilistic knowledge base, of the form  $IK = \{\langle \varphi_i, I_i \rangle : i = 1, \dots, n\}$  where  $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$  is a closed sub-interval of [0,1]. The pair  $\langle \varphi_i, I_i \rangle$ , called an interval-based weighted formula, means that the weight associated with  $\varphi_i$  is one of the elements in  $I_i$ . This disjunctive interpretation of  $\langle \varphi_i, I_i \rangle$  should not be confused with the conjunctive interpretation (used in [Dubois *et al.*, 1992]), which corresponds to the fact that  $\forall \alpha_i \in I_i, \langle \varphi_i, \alpha_i \rangle$  is true. The conjunctive interpretation of intervals makes sense when considering temporal information, where  $\langle \varphi_i, I_i \rangle$  means that  $\varphi_i$  is true in all the interval time  $I_i$ .

Similarly, the semantic of interval-based possibilistic logic is an interval-based possibility distribution, where a sub-interval of [0,1] is assigned to each interpretation. Unlike standard possibilistic logic, an interval-based possibility distribution only induces a partial pre-order over the set of interpretations.

On the basis of a disjunctive interpretation of intervals, we

propose to view an interval-based knowledge base as a family of compatible standard possibilistic knowledge bases. A compatible possibilistic base is obtained by considering a possible weight from the interval associated with each formula. The surprising and interesting result is that reasoning with the set of all compatible possibilistic bases is equivalent to define an inconsistency level of an interval-based possibilistic base that extends the one used in standard possibilistic logic. As a consequence, we show that reasoning from interval-based possibilistic knowledge bases is not more expensive than reasoning from standard possibilistic bases. Hence, we extend standard possibilistic logic framework without extra computational cost. We also provide a semantic characterization where an interval-based possibilistic knowledge base induces a unique partial pre-ordering on a set of interpretations.

Section 2 presents a brief refresher on possibilistic logic. Section 3 and Section 4 study the semantic and syntactic representations of interval-based possibilistic logic. Section 5 studies the inference process and its computational issues. Section 6 proposes alternative consequence relations from interval-based possibilistic bases by only considering a selection of compatible possibilistic bases. Section 7 discusses related works.

## 2 A brief refresher on possibilistic logic

### 2.1 Possibility distributions

We consider a finite propositional language  $\mathcal{L}$ . We denote by  $\Omega$  the finite set of interpretations of  $\mathcal{L}$  and by  $\omega$  an element of  $\Omega$ . A possibility distribution, denoted by  $\pi$ , is a function from  $\Omega$  to  $[0, 1]$ .  $\pi(\omega)$  represents the degree of compatibility (or consistency) of the interpretation  $\omega$  with the available knowledge.  $\pi(\omega) = 1$  means that  $\omega$  is fully consistent with available knowledge, while  $\pi(\omega) = 0$  means that  $\omega$  is impossible.  $\pi(\omega) > \pi(\omega')$  simply means that  $\omega$  is more compatible than  $\omega'$ . A possibility distribution  $\pi$  is said to be normalized if there exists an interpretation  $\omega$  such that  $\pi(\omega) = 1$ . It is said to be subnormalized otherwise. Subnormalized possibility distributions encode inconsistent sets of beliefs.

A possibility distribution allows to define two functions from  $\mathcal{L}$  to  $[0, 1]$  called possibility and necessity measures, denoted by  $\Pi$  and  $N$ , and defined by:

$$\Pi(\varphi) = \max\{\pi(\omega) : \omega \in \Omega, \omega \models \varphi\}, \text{ and}$$

$$N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi).$$

$\Pi(\varphi)$  measures to what extent the formula  $\varphi$  is compatible with the available knowledge while  $N(\varphi)$  measures to what extent it is entailed.

Given a possibility distribution  $\pi$  encoding some available knowledge, a formula  $\varphi$  is said to be a consequence of  $\pi$ , defined by  $\pi \models_{\pi} \varphi$ , iff  $\Pi(\varphi) > \Pi(\neg\varphi)$ . Intuitively,  $\varphi$  is a consequence of  $\pi$  if the best models of  $\varphi$  (namely the models of  $\varphi$  having a highest degree) are more plausible (or more preferred) than the best models of  $\neg\varphi$ .

### 2.2 Possibilistic knowledge bases

A possibilistic formula is a tuple  $\langle \varphi, \alpha \rangle$  where  $\varphi$  is an element of  $\mathcal{L}$  and  $\alpha \in (0, 1]$  is a valuation of  $\varphi$  representing  $N(\varphi)$ .

Note that no formula can be of type  $\langle \varphi, 0 \rangle$  as it brings no information. A possibilistic base  $K = \{\langle \varphi_i, \alpha_i \rangle, 1 \leq i \leq n\}$  is simply a set of possibilistic formulas.

An important notion that plays a central role in the inference process in the one of strict  $\alpha$ -cut. A strict  $\alpha$ -cut, denoted by  $K_{\alpha}$ , is a set of propositional formulas defined by  $K_{\alpha} = \{\varphi : \langle \varphi, \beta \rangle \in K \text{ and } \beta > \alpha\}$ . The strict  $\alpha$ -cut is useful to measure the consistency degree of  $K$  defined by  $Inc(K) = \max\{\alpha : K_{\alpha} \text{ is inconsistent or } \alpha = 0\}$ .

If  $Inc(K) = 0$  then  $K$  is said to be completely consistent. If a possibilistic base is partially inconsistent, then  $Inc(K)$  can be seen as a threshold below which every formulas is considered as not enough entrenched to be taken into account in the inference process. More precisely, we define the notion of core of knowledge base as composed of formulas with a certainty degree greater than  $Inc(K)$ , namely

$$Core(K) = K_{Inc(K)} = \{\varphi : \langle \varphi, \alpha \rangle \in K \text{ and } \alpha > Inc(K)\}$$

A formula  $\varphi$  is a consequence of a possibilistic base  $K$ , denoted by  $K \vdash_{\pi} \varphi$ , iff  $Core(K) \models_{\pi} \varphi$ .

A possibilistic knowledge base is one of well-known compact representations of a possibility distribution. Given a possibilistic base  $K$ , we can generate a unique possibility distribution where interpretations  $\omega$  satisfying all propositional formulas in  $K$  have the highest possible degree  $\pi(\omega) = 1$  (since they are fully consistent), whereas the others are pre-ordered w.r.t. highest formulas that falsify. More formally:

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_K(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \forall \langle \varphi, \alpha \rangle \in K, \omega \models \varphi \\ 1 - \max\{\alpha_i : \langle \varphi_i, \alpha_i \rangle \in K, \omega \not\models \varphi_i\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The following completeness and soundness result holds:

$$K \vdash_{\pi} \varphi \text{ iff } \pi_K \models_{\pi} \varphi.$$

### 3 Interval-based possibility distribution

The aim of this section is to study a more general framework, where uncertainty is not encoded with a single necessity value but by means of an interval of possible degrees. This framework allows to introduce an imprecision on priorities associated with beliefs. We use real number based intervals  $I = [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$  to encode uncertainty associated with formulas. We denote by  $\mathcal{I}$  the set of all intervals over  $[0, 1]$ .

**Operations on intervals** Given  $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$  and  $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$  two intervals, we define the following operations which will be used in the whole paper, and which will guarantee soundness of results presented in this paper. In particular, they allow the extension of standard possibilistic logic when intervals are singletons of the form  $[\alpha, \alpha]$ .

- Max of intervals: Given a set of intervals  $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$   $\mathcal{M}\{I_1, \dots, I_n\} = [\max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \max\{\beta_1, \dots, \beta_n\}]$
- Reverse of an interval:  $1 \ominus I_1 = [1 - \beta_1, 1 - \alpha_1]$
- Comparing intervals:  $I_1 \triangleleft I_2$  if  $\beta_1 < \alpha_2$

Intuitively, when  $I_1$  and  $I_2$  are associated with two formulas  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ , then  $I_1 \triangleleft I_2$  means that the formula  $\varphi_2$  is strictly preferred to  $\varphi_1$ . It is clearly a safe (but cautious) interpretation of preference. Indeed using the comparative relation  $\triangleleft$ ,  $\langle \varphi_2, I_2 \rangle$  is preferred to  $\langle \varphi_1, I_1 \rangle$  if whatever the degree assigned to  $\varphi_2$

from  $I_2$ , it will be greater than each degree assigned to  $\varphi_1$  from  $I_1$ . Other possible definitions of  $\triangleleft$  will be studied in section 6.

**Interval-based and compatible possibility distribution** An interval-based possibility distribution, denoted by  $\pi_{\mathcal{I}}$ , is a function from  $\Omega$  to  $\mathcal{I}$ .  $\pi_{\mathcal{I}}(\omega) = I$  means that the possibility degree of  $\omega$  is one of the elements of  $I$ .  $\pi_{\mathcal{I}}$  only induces a partial pre-ordering between interpretations defined by  $\omega < \omega'$  ( $\omega'$  is more preferred than  $\omega$ ) if and only if  $\pi_{\mathcal{I}}(\omega) \triangleleft \pi_{\mathcal{I}}(\omega')$ . Since  $\triangleleft$  is a partial pre-order, an interval-based possibility distribution only induces a partial pre-order on interpretation. We interpret an interval-based possibility distribution as a family of compatible standard possibility distributions defined by:

**Definition 1** Let  $\pi_{\mathcal{I}}$  be an interval-based possibility distribution. A possibility distribution  $\pi$  is said to be compatible with  $\pi_{\mathcal{I}}$  iff  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\pi(\omega) \in \pi_{\mathcal{I}}(\omega)$ .

Of course, compatible distributions are not unique. We denote by  $Cmp(\pi_{\mathcal{I}})$  the set of all compatible possibility distributions with  $\pi_{\mathcal{I}}$ . An interval-based possibility distribution is said to be normalized if there exists  $\omega$ , s.t.  $\pi_{\mathcal{I}}(\omega) = [1, 1]$ . One can easily check that  $\pi_{\mathcal{I}}$  is normalized if and only if each of its compatible possibility distribution is also normalized.

**Necessity and possibility measures** A natural way to define the counterparts of possibility and necessity measures associated with a formula  $\varphi$  from an interval-based possibility distribution is to use the set of all compatible distributions, namely:

**Definition 2** Let  $\pi_{\mathcal{I}}$  be an interval-based possibility distribution and let  $\varphi$  be a formula. Then :

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathcal{I}}(\varphi) &= [\min_{\pi \in Cmp(\pi_{\mathcal{I}})} \Pi(\varphi), \max_{\pi \in Cmp(\pi_{\mathcal{I}})} \Pi(\varphi)], \text{ and} \\ N_{\mathcal{I}}(\varphi) &= [\min_{\pi \in Cmp(\pi_{\mathcal{I}})} N(\varphi), \max_{\pi \in Cmp(\pi_{\mathcal{I}})} N(\varphi)]\end{aligned}$$

The interval of possibility degrees associated with a formula represents all possible values that can be obtained from the set of all compatible distributions. The following proposition shows that possibility and necessity measures can be equivalently and directly computed using interval-based possibility distributions.

**Proposition 1** Let  $\pi_{\mathcal{I}}$  be an interval-based possibility distribution and let  $\varphi$  be a formula. Then :

$$\Pi_{\mathcal{I}}(\varphi) = \mathcal{M}\{\pi_{\mathcal{I}}(\omega) : \omega \in \Omega, \omega \models \varphi\} \text{ and}$$

$$N_{\mathcal{I}}(\varphi) = 1 \ominus \Pi_{\mathcal{I}}(\neg\varphi)$$

with  $\ominus$  and  $\mathcal{M}$  respectively the reverse and the max operations on intervals defined above.

One can show that in the particular case where intervals in a possibility distribution are only consisting of singletons, then our approach recovers the standard definitions of possibilistic logic measures. Namely:

**Proposition 2** In the case where intervals within  $\pi_{\mathcal{I}}$  only consist in singletons (namely for all  $\omega$ ,  $\pi_{\mathcal{I}}(\omega) = [\alpha, \alpha]$ ) then  
i)  $\pi_{\mathcal{I}}$  has a unique compatible possibility distribution  $\pi$  and  
ii)  $\Pi_{\mathcal{I}}(\varphi) = [\Pi(\varphi), \Pi(\varphi)]$  and  $N_{\mathcal{I}}(\varphi) = [N(\varphi), N(\varphi)]$  where  $N$  and  $\Pi$  are standard possibilistic measures.

**Definition 3** Given an interval-based possibility distribution  $\pi_{\mathcal{I}}$ , a formula  $\varphi$  is said to be accepted or a consequence of  $\pi_{\mathcal{I}}$ , denoted by  $\pi_{\mathcal{I}} \models_{\mathcal{I}} \varphi$ , iff  $\Pi_{\mathcal{I}}(\neg\varphi) \triangleleft \Pi_{\mathcal{I}}(\varphi)$ .

It can be shown that Definition 3 can be restated in terms of compatible possibility distributions, namely:

$$\pi_{\mathcal{I}} \models_{\mathcal{I}} \varphi \text{ iff } \forall \pi \in Cmp(\pi_{\mathcal{I}}), \Pi(\varphi) > \Pi(\neg\varphi).$$

Clearly, at the semantic level, the use of compatible possibility distributions represents a solid justification of the main concepts of interval-based possibilistic logic: interval-based possibility measure, necessity measure and normalized condition. Next section shows that this is also the case for syntactic representations of interval-based possibilistic logic.

#### 4 Interval-based possibilistic bases

We now study the syntactic representation of interval-based possibilistic logic. We generalize the notion of a possibilistic base to an interval-based possibilistic knowledge base.

**Definition 4 (Interval-based possibilistic base)** An interval-based possibilistic base, denoted by  $IK$ , is a multi-set of formulas associated with intervals:

$$IK = \{\langle \varphi, I \rangle, \varphi \in \mathcal{L} \text{ and } I \in \mathcal{I}\}$$

The intuitive interpretation of  $\langle \varphi, I \rangle$  is that the certainty degree of  $\varphi$  is one of the elements of  $I = [\alpha, \beta]$ . As in the case of standard possibilistic bases, we do not allow  $\alpha$  to be equal to 0, since only somewhat accepted pieces of information are explicitly represented. The use of open intervals and intervals that include 0 is left for further research.

An interval-based possibilistic base  $IK$  can be viewed as a family of standard possibilistic bases called compatible bases. A possibilistic base  $K$  is said to be compatible with  $IK$  iff there exists a bijective function from  $IK$  to  $K$  such that for each formula associated with an interval  $I$  in  $IK$ , the degree of this formula in  $K$  is an element of  $I$ . More formally:

**Definition 5 (Compatible possibilistic base)** A possibilistic base  $K$  is said to be compatible with an interval-based possibilistic base  $IK$  iff there exists a bijection  $f$  from  $IK$  to  $K$  s.t.  $f(\langle \varphi, [\alpha, \beta] \rangle) = \langle \varphi, \delta \rangle \in K$  s.t.  $\alpha \leq \delta \leq \beta$

Namely, compatible possibilistic bases are obtained from interval-based possibilistic bases by replacing each interval-based possibilistic formula  $\langle \varphi, I \rangle$  by a standard possibilistic formula  $\langle \varphi, \delta \rangle$  where  $\delta \in I$ . Each compatible possibilistic base is such that  $K = \{\langle \varphi, \delta \rangle : \langle \varphi, I \rangle \in IK \text{ and } \delta \in I\}$ .

We also denote by  $Cmp(IK)$  the infinite set of all compatible possibilistic bases associated with an interval-based possibilistic base  $IK$ .

Given an interval-based possibilistic base  $IK$ , we define two particular compatible possibilistic bases  $IK_{lb}$  and  $IK_{ub}$  by selecting either lower bounds of intervals (pessimistic point of view) or upper bounds of intervals (optimistic point of view):

1.  $IK_{lb} = \{\langle \varphi, \alpha \rangle : \langle \varphi, [\alpha, \beta] \rangle \in IK\}$
2.  $IK_{ub} = \{\langle \varphi, \beta \rangle : \langle \varphi, [\alpha, \beta] \rangle \in IK\}$

**Example 1** We will use the following interval-based possibilistic base to illustrate main concepts of this paper:

$$IK = \{\langle a, [.7, .9] \rangle, \langle a \wedge b, [.55, .8] \rangle, \langle \neg a, [.5, .6] \rangle, \langle \neg b, [.1, .3] \rangle\}$$

Table 1 presents five examples of compatible possibilistic bases. The necessity values associated with formulas in each of these standard bases belong to the intervals associated with their respective formulas in  $IK$ . The compatible bases  $K_1$  and  $K_5$  given in Table 1 respectively correspond to  $IK_{lb}$  and  $IK_{ub}$ .

$IK$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
$a$	[.7,.9]	.7	.7	.8	.9
$a \wedge b$	[.55,.8]	.55	.6	.6	.8
$\neg a$	[.5,.6]	.5	.55	.56	.6
$\neg b$	[.1,.3]	.1	.2	.2	.3

Table 1: Examples of compatible bases

#### 4.1 Inference from compatible bases

The inference relation from an interval-based possibilistic formula can be defined from the set of compatible bases. Namely, a formula  $\varphi$  is a plausible conclusion from an interval-based possibilistic base  $IK$  iff it can be deduced from each possibilistic base in  $Cmp(IK)$ . Namely:

$$IK \vdash_c \varphi \text{ iff } \forall K \in Cmp(IK), K \vdash_\pi \varphi$$

where  $\vdash_\pi$  is defined in section 2.2.

#### 4.2 From interval-based possibilistic bases to interval-based possibility distributions

As in standard possibilistic logic, an interval-based knowledge base  $IK$  is also a compact representation of an interval-based possibility distribution  $\pi_{IK}$ . The possibility distribution can be equivalently obtained using: i) an extension of the definition of  $\pi_K$  given in Section 2.2 to deal with intervals, ii) possibility distributions associated with compatible bases, and iii) the two particular compatible bases  $IK_{lb}$  and  $IK_{ub}$ . This is summarized by Definition 6 and Proposition 3

**Definition 6 (Interval-based possibility distribution)** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base, then:

$$\pi_{IK}(\omega) = [\min_{K \in Cmp(IK)} \pi_K(\omega), \max_{K \in Cmp(IK)} \pi_K(\omega)]$$

where  $\pi_K$  is a standard possibilistic distribution associated with the compatible base  $K$ .

**Proposition 3**  $\pi_{IK}$  given in Definition 6 is equivalent to:

i)  $\pi_{IK}(\omega) = [\pi_{IK_{ub}}(\omega), \pi_{IK_{lb}}(\omega)]$ , namely  $\pi_{IK}(\omega)$  is bounded by weights associated with  $\omega$  with respect to the particular bases  $IK_{lb}$  and  $IK_{ub}$

$$\text{ii) } \pi_{IK}(\omega) = \begin{cases} [1, 1] & \text{if } \forall (\varphi, I) \in IK, \omega \models \varphi \\ 1 - \mathcal{M}\{I : (\varphi, I) \in IK, \omega \not\models \varphi\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

An important result is that inference relation from  $\pi_{IK}$  is equivalent to consider the inference relation based on all compatible bases. Namely, the following completeness and soundness result also holds for interval-based possibilistic logic:

**Proposition 4** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base then  $IK \models_c \varphi$  iff  $\Pi_{IK}(\neg\varphi) \triangleleft \Pi_{IK}(\varphi)$ .

$\omega_i \in \Omega$	$a$	$b$	$\pi_{IK_{lb}}(\omega_i)$	$\pi_{IK_{ub}}(\omega_i)$	$\pi_{IK}(\omega_i)$
$\omega_0$	0	0	.3	.1	[.1,.3]
$\omega_1$	0	1	.3	.1	[.1,.3]
$\omega_2$	1	0	.45	.2	[.2,.45]
$\omega_3$	1	1	.5	.4	[.4,.5]

Table 2: Interval-based  $\pi$  function

**Example 2** From Example 1, we have  $IK_{lb} = \{\langle a, .7 \rangle, \langle a \wedge b, .55 \rangle, \langle \neg a, .5 \rangle, \langle \neg b, .1 \rangle\}$  and  $IK_{ub} = \{\langle a, .9 \rangle, \langle a \wedge b, .8 \rangle, \langle \neg a, .6 \rangle, \langle \neg b, .3 \rangle\}$ . Table 2 gives the possibility distribution induced by  $IK_{lb}$  and  $IK_{ub}$ .

From Table 2, we have, for instance,  $\pi_{IK} \models a$  since  $\Pi_{IK}(a) = [.5, .6] \triangleleft \Pi_{IK}(a) = [.7, .9]$ .

## 5 Computational issues analysis

### 5.1 Inconsistency degree

The previous section provides the definition of an inference relation from an interval-based possibilistic belief base using the concept of compatible bases or its associated interval-based possibility distribution. This section focuses on computational issues by proposing a syntactic characterization of inference relation. It is based on a natural extension of the notion of inconsistency degree and the notion of core of possibilistic base used in standard possibilistic logic (see Section 2).

Again, one way to define the inconsistency associated with an interval-based possibilistic base is to consider the set of all inconsistency values associated with each possibilistic base which is compatible with  $IK$ . Namely:

**Definition 7 (Interval-based inconsistency degree)** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base then:

$$Inc(IK) = \{Inc(K) : K \in Cmp_{IK}\}$$

The following proposition shows that  $Inc(IK)$ , the set of inconsistency degrees associated with all compatible bases, is an interval. Namely:

**Proposition 5** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base then  $Inc(IK) = [Inc(IK_{lb}), Inc(IK_{ub})]$ .

### 5.2 Core of an interval-based possibilistic base

The core of  $IK$  is simply the set of propositional formulas whose associated intervals are higher than  $Inc(IK)$  with respect to  $\triangleleft$  given in the section 4.1. Namely:

**Definition 8** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base then  $Core(IK) = \{\varphi : (\varphi, I) \in IK \text{ and } Inc(IK) \triangleleft I\}$ .

Proposition 6 shows that  $Core(IK)$  is consistent and is included in the core of each compatible base, namely:

**Proposition 6** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base then:

- i)  $Core(IK)$  is consistent;
- ii)  $\forall K \in Cmp_{IK}, Core(IK) \subseteq Core(K)$ .

Lastly, the following proposition shows that plausible conclusions derived from  $Core(IK)$  are the same as the ones obtained from the whole set of compatible bases. As a corollary they are also the same as the ones provided at the semantical level.

**Proposition 7** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base then  $\forall \psi \in \mathcal{L}$ :

$$IK \models_c \psi \text{ iff } \text{Core}(IK) \vdash \psi \text{ iff } \forall K \in \mathcal{Cmp}_{IK}, \text{Core}(K) \vdash \psi$$

**Example 3** From Example 1, we have  $IK_{lb} = \{\langle a, .7 \rangle, \langle a \wedge b, .55 \rangle, \langle \neg a, .5 \rangle, \langle \neg b, .1 \rangle\}$  and  $IK_{ub} = \{\langle a, .9 \rangle, \langle a \wedge b, .8 \rangle, \langle \neg a, .6 \rangle, \langle \neg b, .3 \rangle\}$ . Hence, we obtain  $\text{Inc}(IK_{lb}) = .5$  and  $\text{Inc}(IK_{ub}) = .6$  and then  $\text{Inc}(IK) = [.5, .6]$ .

Thus,  $\text{Core}(IK) = \{a\}$ . One can check that conclusions obtained in Example 3 are equivalent to the ones using  $\text{Core}(IK)$ .

### 5.3 Computational complexity

This subsection analyses computational complexity of our inference process. Recall that the decision problem "Is a formula  $\psi$  a consequence of a standard possibilistic base?" is  $\Delta_p^2$ -complete [Nebel, 1994]. Since when intervals are singletons the inference from interval-based possibilistic bases corresponds to the one of standard possibilistic logic, our inference relation is at least in  $\Delta_p^2$ . In fact, it is  $\Delta_p^2$ -complete:

**Proposition 8** The decision problem "Is a formula  $\psi$  a consequence of an interval-based possibilistic base?" is a  $\Delta_p^2$ -complete problem.

Proposition 8 shows that interval-based possibilistic bases offer more flexibility for representing uncertain information without extra computational cost. The computational complexity of reasoning from such bases indeed is the same order of magnitude as the one obtained from standard possibilistic bases.

Now we explicit an algorithm (Algorithm 1) which is in  $O(\log_2(n) * SAT)$  where  $SAT$  is the propositional satisfiability test and  $n = \max(m_{lb}, m_{ub})$ , where  $m_{lb}$  (resp.  $m_{ub}$ ) is the number of different degrees in  $IK_{lb}$  (resp.  $IK_{ub}$ ). The algorithm first computes  $\text{Core}(IK)$ . This is done by determining  $IK_{lb}$  and  $IK_{ub}$  and their associated inconsistency degrees (Steps 1-5). These steps need  $2.\log_2(n)$  calls to a SAT oracle. Steps 6-10 compute  $\text{Core}(IK)$  from  $IK$  by considering propositional formulas  $\varphi$  such that their associated interval is greater than  $\text{Inc}(IK)$ . This step is in  $O(|IK|)$  where  $|IK|$  is the number of formulas in  $IK$ . The last step needs one call to SAT to check whether  $\psi$  is a consequence of  $\text{Core}(IK)$ . Hence, deriving plausible conclusions can be achieved in  $O(\log_2(N))$  calls to the SAT problem.

## 6 Other interpretations of intervals

In the previous section, we considered a safe interpretation of interval-based possibilistic knowledge bases (resp. possibility distributions) by considering all possible compatible knowledge bases (resp. possibilistic distributions). This leads to a cautious but safe inference relation based on  $\text{Core}(IK)$  which uses the comparative relation  $\triangleleft$ . The comparative relation  $\triangleleft$  was used in order to recover the inference from all standard compatible bases. The question considered in this section is whether one may go beyond this inference relation by considering other comparative relations rather than the one used in the previous section, namely  $\triangleleft$ . We recall that  $I \triangleleft I'$  holds iff every element of  $I'$  is preferred to every element of  $I$ . Of

**Algorithm 1** Computing inferences for interval-based possibilistic knowledge bases

---

**Input:**  $IK, \psi$   
**Output:** True if  $\psi$  is a consequence of  $IK$ . False otherwise.

- 1: Compute  $IK_{lb}$
- 2: Compute  $\text{Inc}(IK_{lb})$
- 3: Compute  $IK_{ub}$
- 4: Compute  $\text{Inc}(IK_{ub})$
- 5:  $\text{Inc}(IK) \leftarrow [\text{Inc}(IK_{lb}), \text{Inc}(IK_{ub})]$
- 6:  $\text{Core}(IK) \leftarrow \emptyset$
- 7: **for all**  $\langle \varphi, I \rangle \in IK$  **do**
- 8:   **if**  $\text{Inc}(IK) \triangleleft I$  **then**
- 9:      $\text{Core}(IK) \leftarrow \text{Core}(IK) \cup \{\varphi\}$
- 10:   **end if**
- 11: **end for**
- 12: **return**  $\text{Core}_{IK} \vdash \psi$

---

course, the obtained inference relations should also extend possibilistic logic inference when intervals are singletons. In this section, we propose to consider alternative definitions of preference and their consequences in terms of inferences in our framework.

**Definition 9** Let  $I = [\alpha, \beta]$  and  $I' = [\alpha', \beta']$  be two intervals in  $\mathcal{I}$ . Then the following pre-orders are defined by:

- $I \triangleleft_1 I'$  iff  $\alpha < \alpha'$  and  $\beta < \beta'$ ;
- $I \triangleleft_2 I'$  iff  $\alpha < \alpha'$ ;
- $I \triangleleft_3 I'$  iff  $\beta < \beta'$ .

Intuitively,  $I \triangleleft_1 I'$  can be understood as "there exists an element in  $I'$  which is preferred to any element of  $I$ ".  $I \triangleleft_2 I'$  can be understood as "the least element in  $I$  is less preferred than the least element in  $I'$ ".  $I \triangleleft_3 I'$  is dual to  $\triangleleft_2$  and can be understood as "the best element in  $I$  is less preferred than the best element in  $I'$ ".

Clearly, the following statements hold: (i) if  $I \triangleleft I'$  then  $I \triangleleft_1 I'$ ; (ii) if  $I \triangleleft_1 I'$  then  $I \triangleleft_2 I'$  and  $I \triangleleft_3 I'$ ; (iii) if  $I \triangleleft_2 I'$  and  $I \triangleleft_3 I'$  then  $I \triangleleft_1 I'$ .

These comparative relations give birth to new inferences in the interval-based possibilistic framework by replacing in Definition 8  $\triangleleft$  by  $\triangleleft_1$ ,  $\triangleleft_2$  or  $\triangleleft_3$ . The obtained definitions are denoted by  $\text{Core}_{\triangleleft_i}(IK)$  and their associated inference relations, denoted by  $\vdash_i$ , are defined by:  $\forall \varphi \in \mathcal{L}, IK \vdash_i \varphi$  iff  $\text{Core}_{\triangleleft_i}(IK) \vdash \varphi$

**Example 4** Let  $IK_2 = \{\langle a, [.4, .9] \rangle, \langle \neg a \vee \neg b, [.2, .7] \rangle, \langle \neg a \vee b, [.3, .5] \rangle\}$  be the interval-based possibilistic base represented by Figure 1.

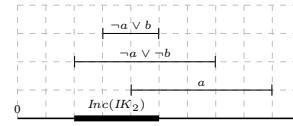


Figure 1: Intervals associated with the formulas of  $IK_2$

The inconsistency degree of  $IK_2$  is  $\text{Inc}(IK_2) = [.2, .5]$ . In this example, we have: using  $\triangleleft$ , we have  $\text{Core}(IK_2) = \emptyset$ ; using  $\triangleleft_1$ ,  $IK_2 \vdash_1 \psi$  iff  $\text{Core}_{\triangleleft_1}(IK_2) = \{a\} \vdash \psi$ ; using  $\triangleleft_2$ ,

$IK_2 \vdash_2 \psi$  iff  $\text{Core}_{\triangleleft_2}(IK_2) = \{a, \neg a \vee b\} \vdash \psi$ ; using  $\triangleleft_3$ ,  
 $IK_2 \vdash_3 \psi$  iff  $\text{Core}_{\triangleleft_3}(IK_2) = \{a, \neg a \vee \neg b\} \vdash \psi$ .

The following propositions summarizes main results of our inference relations:

**Proposition 9** Let  $IK$  be an interval-based possibilistic base

- For all  $\triangleleft_i$ ,  $\text{Core}_{\triangleleft_i}(IK)$  is consistent.
- For all  $i = 1, \dots, 3$ , the decision problem "Is a formula  $\varphi$  a consequence of a standard possibilistic base  $IK$  using  $\vdash_i$ ?" is  $\Delta_p^2$ -complete.
- If intervals are singletons, then for all  $\triangleleft_i, \vdash_i$  is equivalent to  $\vdash_c$ . Namely,  $\vdash_i$  extends standard possibilistic inference.
- For all  $\triangleleft_i, \vdash_c$  is more cautious than  $\vdash_i$ .
- $\vdash_1$  is more cautious than  $\vdash_2$  and  $\vdash_3$ .

However,  $\vdash_2$  is incomparable with  $\vdash_3$ , as shown by Example 4 where  $IK_2 \vdash_2 a \wedge b$  and  $IK_2 \vdash_3 a \wedge \neg b$ .

## 7 Related works

In [Dubois *et al.*, 1992], it has been proposed an extension of possibilistic logic in order to deal with temporal information. Formulas are valued with finite sets of values whose boundaries are any real number (they can be interval and they are not necessarily in  $[0, 1]$ ) representing the time frame where the formula is certainly true, i.e. the necessity value is true for every element of the intervals. The underpinning semantics is different from the present work. It is thus dual to our interpretation, where we used disjunctive interpretation by considering only one element in the interval. Therefore, the tools and all operators used in [Dubois *et al.*, 1992] (such as the intersection and the union operators) differ from the ones used in this paper. The difference between the two approaches is explained by different interpretations associated with intervals. Their framework makes sense for reasoning with temporal information where our framework is more oriented to situations where the uncertainty rank is imprecise. However, an important difference is that our approach extends the standard possibilistic logic while the proposal made in [Dubois *et al.*, 1992] does not. Indeed, for instance if  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are the only models of  $\varphi$ , and if  $\pi(\omega_1) = [.3, .3]$ ,  $\pi(\omega_2) = [.4, .4]$  (namely singletons), then with our approach we get  $\Pi(\varphi) = [.4, .4]$ , while in [Dubois *et al.*, 1992] we get  $\Pi(\varphi) = [.3, .4]$  and we are no longer in standard possibilistic logic.

The logic of supporters proposed by Lafage and al. [Lafage *et al.*, 1999] is very close to the one given in [Dubois *et al.*, 1992]. The main difference consists again in the meaning of intervals: they are considered as justification (in the sense of ATMs) of a formula. This approach also has a conjunctive interpretation.

In a recent paper, Marquis and Öztürk [Marquis and Öztürk, 2009] propose to encode preferences by means of formulas weighted by intervals. The intervals do not represent a certainty degree associated with the formula but a knowledge about some numerical value. For example, a formula  $\langle \text{height}, \geq, 6, \leq, 7 \rangle$  represents the belief that the value *height* is included between 6 and 7. The aim of their paper is to compactly encode interval orders on interpretations using these

weighted formulas. They study some families of aggregation operators, provide several complexity results on dominance and consistency useful in decision theory and deal with preferences. Their work is dedicated to decision problems and they do not investigate the inference problems.

## Conclusion

This paper proposed foundations of reasoning with interval-based possibilistic bases that extends the standard possibilistic framework in the case where all intervals are singletons. The flexibility in representing uncertain information is done using the concept of compatible bases. We showed that possibility measures, necessity measures and possibility distributions can be conveniently computed in the interval-based possibilistic framework without extra computational cost. The deduction problem in the interval-based context is  $\Delta_p^2$ -complete.

This paper also provided three additional consequence relations that are only based on selection of compatible possibility distributions. Finally, when intervals are singletons, all consequence relations presented in this paper collapse with the one used in standard possibilistic logic. A future work is to study the fusion and revision process in the interval-based possibilistic logic framework.

## References

- [Benferhat and Prade, 2006] S. Benferhat and H. Prade. Compiling possibilistic knowledge bases. In *Proc. of ECAI'06*, pages 337–341, 2006.
- [Benferhat *et al.*, 2004] S. Benferhat, S. Lagruie, and O. Papini. Reasoning with partially ordered information in a possibilistic framework. *Fuzzy Sets and Systems*, 144:25–41, 2004.
- [Dubois and Prade, 2004] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic: a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets and Systems*, 144:3–23, 2004.
- [Dubois *et al.*, 1992] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Timed possibilistic logic. *Fundamenta Informaticae*, XV:211–234, 1992.
- [Dubois *et al.*, 1994] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513, 1994.
- [Lafage *et al.*, 1999] C. Lafage, J. Lang, and R. Sabbadin. A logic of supporters. In *Information, Uncertainty and Fusion*, pages 381–392. Springer, 1999.
- [Lang, 2000] J. Lang. Possibilistic logic: complexity and algorithms. In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 5, pages 179–220. Kluwer Academic, 2000.
- [Marquis and Öztürk, 2009] P. Marquis and M. Öztürk. Representing interval orders by weighted bases: Some complexity results. *Mathematical Social Sciences*, 57:367–388, 2009.
- [Nebel, 1994] B. Nebel. Base revision operations and schemes: semantics, representation and complexity. In *Proc. of ECAI'94*, pages 341–345, 1994.

## B.5 IJCAI'05 : Revision of Partially Ordered Information : Axiomatization, Semantics and Iteration

### Revision of Partially Ordered Information: Axiomatization, Semantics and Iteration

**Salem Benferhat** and **Sylvain Lagrue**  
 CRIL-CNRS, Université d'Artois  
 rue Jean Souvraz  
 62307 Lens Cedex. France.  
 {benferhat,lagrue}@cril.univ-artois.fr

**Odile Papini**  
 LSIS-CNRS, Université du Sud Toulon-Var.  
 BP 132.  
 83957 La Garde Cedex France.  
 papini@univ-tln.fr

#### Abstract

This paper deals with iterated revision of partially ordered information. The first part of this paper concerns the Katsuno-Mendelzon's postulates: we first point out that these postulates are not fully satisfactory since only a class of partially ordered information can be revised. We then propose a suitable definition of faithful assignment, followed by a new set of postulates and a representation theorem. The second part of this paper investigates additional postulates dedicated to iterated revision operators of partially ordered information. Three extensions of well-known iterated belief revision operations for dealing with partially ordered information are briefly presented.

#### 1 Introduction

Belief revision is a central topic in databases, philosophy and artificial intelligence. The revision of a database consists of the insertion of some new information while preserving consistency.

This process has been discussed in different frameworks (probability theory, Spohn's ordinal conditional functions, Grove's systems of spheres, possibility theory, etc.) and from different points of view (axiomatization [Alchourrón *et al.*, 1985; Katsuno and Mendelzon, 1991], computational issue, etc.). The proposal of Alchourrón, Gärdenfors and Makinson (AGM) [Alchourrón *et al.*, 1985] represents one of the most influential work. It concerns revision operations that revise a theory (representing agent's current beliefs) with a formula (representing new pieces of information). The AGM framework consists in a set of natural postulates that any revision operation should satisfy.

An important issue is that any revision operator satisfying AGM's postulates is implicitly based on a priority ordering. This result suggests that an agent's epistemic state, denoted by  $\Psi$ , is something more complex than a simple representation of agent's current beliefs (called belief set and denoted by  $Bel(\Psi)$ ). It also contains strategies to revise his beliefs. The AGM's postulates have been largely studied and/or adapted in the literature. For instance, additional postulates have been proposed to manage the concept of iterated belief change in [Darwiche and Pearl, 1997] (see also [Rott, 2001; Lehmann, 1995; Nayak, 1994; Konieczny and Pino Pérez,

2000]). More generally, iterated revision is applied to an epistemic state, instead of a belief set, and the result is also an epistemic state.

Epistemic states are often represented by total pre-orders on possible worlds (or interpretations), denoted by  $\leq_\Psi$ . The set of models of  $Bel(\Psi)$  are identified to be minimal (i.e., preferred) elements with respect to  $\leq_\Psi$ .

There is another issue in belief revision and which has been less investigated in the literature: the iterated revision of epistemic states represented by partial pre-orders (instead of total pre-orders) [Katsuno and Mendelzon, 1991]. Partial pre-orders offer more flexibility than total pre-orders to represent incomplete knowledge.

Katsuno and Mendelzon proposed in section 5 of [Katsuno and Mendelzon, 1991], a set of postulates and a representation theorem that characterize revision operations based on partial pre-orders. Unfortunately, the proposed approach is not satisfactory since only one class of partial pre-orders can be revised. For instance, assume that we have a partial pre-order  $\preceq_\Psi$  on four possible interpretations  $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , such that  $\omega_0$  is "strictly preferred" to  $\omega_1$  and  $\omega_1$  is "strictly preferred" to  $\omega_2$  but  $\omega_3$  is incomparable with  $\omega_0, \omega_1$  and  $\omega_2$  (cf. figure 1, for sake of clarity, reflexivity and transitivity are not represented). Clearly,  $\omega_0$  and  $\omega_3$  characterize (are models of) agent's currents beliefs  $Bel(\Psi)$  (no interpretation is strictly preferred to  $\omega_0$  or to  $\omega_3$ ), but  $\preceq_\Psi$  is not a faithful assignment in the sense of [Katsuno and Mendelzon, 1991].

More generally, there is no consistent propositional formula that admits  $\preceq_\Psi$  of Figure 1 as a faithful assignment. In

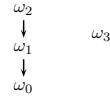


Figure 1: Example of  $\preceq_\Psi$  which is not a faithful assignment.

fact, faithful assignment requires that each model of agent's current beliefs (namely  $Bel(\Psi)$ ) should be strictly preferred to each counter-model of agent's current beliefs. This requirement is appropriate for total pre-orders, but is too strong for partial pre-orders.

This paper investigates iterated belief revision of partially ordered information. Its main contributions can be summa-

rized as follows:

- We propose an alternative definition of faithful assignment and an alternative set of natural postulates for revising partially ordered information.
- We provide a representation theorem for iterated revision operators satisfying this new set of postulates.
- We investigate additional postulates dedicated to iterated belief revision. In particular, we discuss the extension of Darwiche and Pearl's postulates, Boutilier's postulate and we propose two alternative postulates for capturing other forms of iterated belief revision.
- Lastly, we illustrate our results with three well-known operators (revision with memory, possibilistic revision and natural belief revision) for revising partially ordered information.

The rest of this paper is organized as follows. Section 2 presents the Katsuno and Mendelzon's postulates for belief revision. Section 3 contains a modification of these postulates. Section 4 characterizes Darwiche and Pearl's postulates and Boutilier's postulate for iterated belief revision with partially ordered information. Lastly, Section 5 proposes two alternative additional postulates and provides three examples of operators that satisfy the proposed postulates.

## 2 Notations and KM postulates

### 2.1 Notations

In this paper we use propositional calculus, denoted by  $\mathcal{L}$ , as knowledge representation language with usual connectives  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\equiv$  (logical equivalence). The lower case letters  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\dots$ , are used to denote propositional variables and lower case Greeks letters  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\dots$ , are used to denote formulas. We denote by  $\Omega$  the set of interpretations of  $\mathcal{L}$  and by  $Mod(\psi)$  the set of models of a formula  $\psi$ , that is  $Mod(\psi) = \{\omega \in \Omega, \omega \models \psi\}$ . Upper case Greeks letters  $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $\dots$ , are used to denote epistemic states.

A partial pre-order, denoted by  $\preceq$ , on a set  $A$  is a reflexive and transitive binary relation. Let  $x, y \in A$ , we define the equality  $x = y$  iff  $x \preceq y$  and  $y \preceq x$ . The corresponding strict partial pre-order associated with  $\preceq$ , denoted by  $\prec$ , is defined as usual:  $x \prec y$  iff  $x \preceq y$  holds but  $x \not\preceq y$  does not hold. We denote by  $\sim$  the incomparability relation, namely  $x \sim y$  iff neither  $x \preceq y$  nor  $y \preceq x$  holds.

Given  $\preceq$  on a set  $A$ , the set of the minimal elements of  $A$ , denoted by  $Min(A, \preceq)$ , is defined by  $Min(A, \preceq) = \{x \in A, \nexists y \in A, y \prec x\}$ .

### 2.2 The KM postulates for belief revision

Katsuno and Mendelzon proposed in [Katsuno and Mendelzon, 1991] a reformulation of the well-known AGM postulates [Alchourrón et al., 1985]. In this framework, the epistemic state of an agent is represented by a formula  $\psi$ . A revision operator  $\circ$  is a function from a formula  $\psi$  and produces a new formula denoted by  $\psi \circ \mu$ . The operator  $\circ$  should satisfy the following postulates.

- (R<sub>1</sub>)  $\psi \circ \mu \models \mu$ ,
- (R<sub>2</sub>) if  $\psi \wedge \mu$  is satisfiable, then  $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$ ,

(R<sub>3</sub>) if  $\mu$  is satisfiable, then  $\psi \circ \mu$  is satisfiable,

(R<sub>4</sub>) if  $\psi_1 \equiv \psi_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$  then  $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$ ,

(R<sub>5</sub>)  $(\psi \circ \mu) \wedge \varphi \models \psi \circ (\mu \wedge \varphi)$ ,

(R<sub>6</sub>) if  $(\psi \circ \mu) \wedge \varphi$  is satisfiable, then  $\psi \circ (\mu \wedge \varphi) \models (\psi \circ \mu) \wedge \varphi$ .

An important result is that any revision operator that satisfies (R<sub>1</sub>) – (R<sub>6</sub>) is implicitly based a total pre-order  $\leq_\psi$  on  $\Omega$ .

In order to deal with partial pre-orders, Katsuno and Mendelzon proposed in section 5 of [Katsuno and Mendelzon, 1991] to replace (R<sub>6</sub>) by the two following postulates:

(R<sub>7</sub>) if  $\psi \circ \mu_1 \models \mu_2$  and  $\psi \circ \mu_2 \models \mu_1$  then  $\psi \circ \mu_1 \equiv \psi \circ \mu_2$ ,

(R<sub>8</sub>)  $(\psi \circ \mu_1) \wedge (\psi \circ \mu_2) \models \psi \circ (\mu_1 \vee \mu_2)$ .

The following representation theorem has been proposed with these postulates for partial pre-orders.

**Theorem 1 ([Katsuno and Mendelzon, 1991])** A revision operator  $\circ$  satisfies the postulates (R<sub>1</sub>) to (R<sub>5</sub>), (R<sub>7</sub>) and (R<sub>8</sub>) iff there exists a faithful assignment that maps  $\psi$  to a partial pre-order  $\preceq_\psi$  such that:  $Mod(\psi \circ \mu) = Min(Mod(\mu), \preceq_\psi)$ .

Where the faithful assignment is defined as follows.

**Definition 1 (faithful assignment)** Let  $\psi$  be a propositional formula. A partial pre-order on  $\Omega$ , associated with  $\psi$ , denoted by  $\preceq_\psi$ , is said to be a faithful assignment if the three following conditions hold :

- (1) if  $\omega, \omega' \in Mod(\psi)$  then  $\omega <_\psi \omega'$  does not hold,
- (2) if  $\omega \in Mod(\psi)$  and  $\omega' \notin Mod(\psi)$ , then  $\omega <_\psi \omega'$  holds,
- (3) if  $\psi \equiv \varphi$ , then  $\leq_\psi = \leq_\varphi$ .

In the following, by KM postulates, we refer to (R<sub>1</sub>) – (R<sub>5</sub>), (R<sub>7</sub>) and (R<sub>8</sub>).

## 3 KM postulates revisited

In the introduction, we pointed out that KM postulates are not fully satisfactory for iterated belief revision of partially ordered information. This section justifies this statement and proposes a revisited set of KM postulates.

### 3.1 Faithful assignment revisited

This subsection proposes a modified definition of faithful assignment. The one given by definition 1 is not appropriate. Indeed, if  $\preceq_\psi$  is a partial pre-order on the set of interpretations  $\Omega$  representing agent's epistemic state, and if we define  $Mod(Bel(\Psi)) = Min(\Omega, \preceq_\psi)$  to be the current agent's beliefs, then there is no guarantee that  $\preceq_\psi$  will be a faithful assignment.

For instance, the partial pre-order given by figure 1 is not a faithful assignment, since condition (2) of Definition 1 is not satisfied. Indeed  $Mod(Bel(\Psi)) = \{\omega_0, \omega_3\}$  and  $\omega_3 \prec_\Psi \omega_2$  does not hold. Of course, one may simply suggest to enforce minimal elements of  $\preceq_\psi$  to be equal. In our example, we enforce  $\omega_0$  to be equal to  $\omega_3$  (as it is illustrated by Figure 2).

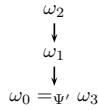


Figure 2: Example of  $\preceq_{\Psi'}$ .

But this is not satisfactory. Indeed, if  $\preceq_{\Psi'}$  denotes the partial pre-order obtained from  $\preceq_{\Psi}$  by enforcing minimal elements of  $\preceq_{\Psi}$  to be equal then, in general,  $Bel(\Psi' \circ \mu) \neq Bel(\Psi \circ \mu)$ . In our example, if we consider a new piece of information  $\mu$  such that  $Mod(\mu) = \{\omega_1, \omega_3\}$ , then, it can easily be checked that  $Bel(\Psi \circ \mu) \neq Bel(\Psi' \circ \mu)$ . Indeed  $Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = Min(\{\omega_1, \omega_3\}, \preceq_{\Psi}) = \{\omega_1, \omega_3\}$  and  $Mod(Bel(\Psi' \circ \mu)) = Min(\{\omega_1, \omega_3\}, \preceq_{\Psi'}) = \{\omega_3\}$ , where  $\preceq_{\Psi}$  and  $\preceq_{\Psi'}$  are respectively represented by Figure 1 and Figure 2.

The problem with Definition 1 is the condition (2), which requires that each model of agent's current beliefs is preferred to all counter-models of agent's current beliefs. We propose to weaken this condition by only requiring that each counter-model of agent's current beliefs is strictly less preferred than at least one model of agent's current beliefs.

In order to deal with iterated belief revision, which applies to epistemic states instead of formulas, we also modify condition (3) exactly as it is proposed in [Darwiche and Pearl, 1997]. These two changes lead to the following modified definition of faithful assignment.

**Definition 2 (P-faithful assignment)** Let  $\Psi$  be an epistemic state. A partial pre-order on  $\Omega$ , associated to  $\Psi$  and denoted by  $\preceq_{\Psi}$  is said to be a P-faithful assignment if the three following conditions hold :

- (1) if  $\omega, \omega' \models Bel(\Psi)$  then  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$  does not hold,
- (2) if  $\omega' \not\models Bel(\Psi)$ , then there exists  $\omega$  such that  $\omega \models Bel(\Psi)$  and  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$ ,
- (3) if  $\Psi = \Phi$ , then  $\preceq_{\Psi} = \preceq_{\Phi}$ .

Clearly, if  $\preceq_{\Psi}$  is a faithful assignment, then it is also a P-faithful assignment. Note that if  $\preceq_{\Psi}$  is a total pre-order, then this definition is equivalent to the definition of a faithful assignment of Darwiche and Pearl [Darwiche and Pearl, 1997].

### 3.2 Revisited postulates for partially ordered information

Let us now present the "revision" of KM postulates. In the whole paper, we assume that the new information  $\mu$  is consistent and the initial beliefs  $Mod(Bel(\Psi))$  is not empty. Basically, there is a need of two changes. The first change is the same as the one proposed by Darwiche and Pearl in [Darwiche and Pearl, 1997] (see also [Friedman and Halpern, 1999]). It consists in a simple adaptation of KM postulates in order to make belief revision operation a function on epistemic states instead on set of beliefs. More precisely, we propose to replace postulate  $(R_4)$  by the one proposed in [Darwiche and Pearl, 1997].

- ( $P_4$ ) if  $\Psi_1 = \Psi_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$  then  $Bel(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi_2 \circ \mu_2)$ .

Postulate  $(P_4)$  requires the equality between epistemic states while  $R_4$  requires the equivalence between beliefs sets.

The second change concerns postulate  $(R_2)$ . We argue that  $(R_2)$  is too strong when dealing with partial pre-orders.

Let us consider again the example represented by Figure 1. Let  $\mu$  be such that  $Mod(\mu) = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Since  $Min(Mod(\mu), \preceq_{\Psi}) = \{\omega_1, \omega_3\}$ , we expect to have  $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv \{\omega_1, \omega_3\}$ . But  $R_2$  leads to have  $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv \{\omega_3\}$ . Indeed,  $(R_2)$  says that if  $Bel(\Psi) \wedge \mu$  is consistent, then  $Bel(\Psi) \circ \mu \equiv Bel(\Psi) \wedge \mu$ . This equivalence makes sense if for each  $\omega, \omega'$  models of  $Bel(\Psi)$ ,  $\omega =_{\Psi} \omega'$  holds. However, when models of  $Bel(\Psi)$  may be incomparable, then  $(R_2)$  becomes questionable.

We suggest to replace  $R_2$  by the following postulate. It concerns the situation where the new piece of information is a tautology. In this case, agent's current beliefs should not change. Namely:

- ( $P_2$ )  $Bel(\Psi \circ \top) \equiv Bel(\Psi)$ .

### 3.3 Representation theorem

The new set of postulates that we propose for characterizing the revision of partially ordered beliefs are the following ones.

- ( $P_1$ )  $Bel(\Psi \circ \mu) \models \mu$ ,
- ( $P_2$ )  $Bel(\Psi \circ \top) \equiv Bel(\Psi)$ ,
- ( $P_3$ ) if  $\mu$  is satisfiable, then  $Bel(\Psi \circ \mu)$  is satisfiable,
- ( $P_4$ ) if  $\Psi_1 = \Psi_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$  then  $Bel(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi_2 \circ \mu_2)$ ,
- ( $P_5$ )  $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \varphi \models Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \varphi))$ ,
- ( $P_6$ ) if  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \models \mu_2$  and  $Bel(\Psi \circ \mu_2) \models \mu_1$  then  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi \circ \mu_2)$ ,
- ( $P_7$ )  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \wedge Bel(\Psi \circ \mu_2) \models Bel(\Psi \circ (\mu_1 \vee \mu_2))$ .

The postulates  $(P_1)$ ,  $(P_3)$ ,  $(P_4)$ ,  $(P_5)$ , correspond respectively to the postulates  $(R_1)$ ,  $(R_3)$ ,  $(R_4)$ ,  $(R_5)$ . The postulates  $(P_6)$  and  $(P_7)$  are respectively a reformalization of the postulates  $(R_7)$  and  $(R_8)$  proposed in [Katsuno and Mendelzon, 1991] for epistemic states.

Two weakenings of  $(R_2)$  can be derived from this set of postulates:

- ( $P'_2$ )  $Bel(\Psi) \wedge \mu \models Bel(\Psi \circ \mu)$ ,

- ( $P_{2w}$ ) if  $Bel(\Psi) \models \mu$  then  $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv Bel(\Psi) \wedge \mu$ .

The first one means that joint of initial beliefs  $Bel(\Psi)$  and the new information are contained in the set of new belief's models. The second one means that if we revise with some pieces of information that can be inferred from agent's current beliefs, then the agent's beliefs should not change.

Given this set of postulates and the definition of P-faithful assignment, we provide the following representation theorem:

**Theorem 2** A revision operator  $\circ$  satisfies the postulates  $(P_1)$  to  $(P_7)$  iff there exists a P-faithful assignment that maps each  $\Psi$  to a partial pre-order  $\preceq_\Psi$  such that  $Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = Min(Mod(\mu), \preceq_\Psi)$ .

#### 4 Characterization of iterated revision postulates

Several authors (e.g. [Darwiche and Pearl, 1997]) argue that, in order to have a genuine iterated belief revision operator, we should augment basic AGM postulates with some additional postulates. Indeed, these basic postulates constrain the relationships between  $Bel(\Psi)$  and  $Bel(\Psi \circ \mu)$ . The aim of these additional postulates is to provide more constraints between  $\Psi$  and  $\Psi \circ \mu$  by, for instance, expliciting the relationships between  $\preceq_\Psi$  and  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$ . Given a formula  $\mu$ , there are three questions that need to be addressed:

- How the order between models of  $\mu$  does evolve?
- How the order between counter-models of  $\mu$  does evolve?
- How the order between models and counter-models of  $\mu$  does evolve?

Darwiche and Pearl [Darwiche and Pearl, 1997] gave four natural postulates for iterated belief revision that provide answers for these questions.

- (C<sub>1</sub>) if  $\alpha \models \mu$ , then  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$ ,
- (C<sub>2</sub>) if  $\alpha \models \neg\mu$ , then  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$ ,
- (C<sub>3</sub>) if  $Bel(\Psi \circ \alpha) \models \mu$ , then  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \models \mu$ ,
- (C<sub>4</sub>) if  $Bel(\Psi \circ \alpha) \not\models \neg\mu$ , then  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \not\models \neg\mu$ .

Another postulate, which has also been discussed in the literature, is the one which characterizes Boutilier's natural belief revision [Boutilier, 1993] (and hinted in [Spohn, 1988]) for totally ordered beliefs:

- (C<sub>B</sub>) If  $Bel(\Psi \circ \mu) \models \neg\alpha$  then  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$ .

This section provides a characterization of the Darwiche and Pearl's postulates and the Boutilier's postulate, when epistemic states are represented by partial pre-orders.

In the following, we restrict ourselves to iterated belief revision operators that satisfy  $(P_1)$  –  $(P_7)$ . Let  $\circ$  be a such revision operator and  $\preceq_\Psi$  be its associated P-faithful assignment. In order to characterize  $(C_1)$  –  $(C_4)$  and  $(C_B)$ , we define five properties on relationships between  $\preceq_\Psi$  and  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$ .

- (Ip<sub>1</sub>) if  $\omega \models \mu$  and  $\omega' \models \mu$  then  $\omega \prec_\Psi \omega'$  iff  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ,
- (Ip<sub>2</sub>) if  $\omega \not\models \mu$  and  $\omega' \not\models \mu$  then  $\omega \prec_\Psi \omega'$  iff  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ,
- (Ip<sub>3</sub>) if  $\omega \models \mu$  and  $\omega' \not\models \mu$  then  $\omega \prec_\Psi \omega'$  implies  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ,
- (Ip<sub>4</sub>) if  $\omega \models \mu$  and  $\omega' \not\models \mu$  then  $\omega \preceq_\Psi \omega'$  implies  $\omega \preceq_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ,
- (Ip<sub>5</sub>) if  $\omega, \omega' \not\models Bel(\Psi \circ \mu)$  then  $\omega \prec_\Psi \omega'$  implies  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ .

(Ip<sub>1</sub>) (resp. (Ip<sub>2</sub>)) means that the strict order between models (resp. counter-models) of the new piece of information  $\mu$  is preserved. (Ip<sub>3</sub>) means that if a model of  $\mu$  is strictly preferred to a counter-models then this strict preference is preserved. (Ip<sub>4</sub>) is similar with (Ip<sub>3</sub>) for non-strict preference. Finally, (Ip<sub>5</sub>) means that the strict order between the counter-models of the agent's current beliefs is preserved.

The following representation theorem provides a characterization of  $(C_1)$  –  $(C_4)$ .

**Theorem 3** Let  $\circ$  be a revision operator satisfying the postulates  $(P_1)$  –  $(P_7)$ . Then:

- (1)  $\circ$  satisfies  $(C_1)$  iff its associated faithful assignment satisfies (Ip<sub>1</sub>),
- (2)  $\circ$  satisfies  $(C_2)$  iff its associated faithful assignment satisfies (Ip<sub>2</sub>),
- (3)  $\circ$  satisfies  $(C_3)$  iff its associated faithful assignment satisfies (Ip<sub>3</sub>),

Note that only the characterization of  $(C_3)$  is identical to the one provided by Darwiche and Pearl [Darwiche and Pearl, 1997]. The others are different.

More precisely, there are two main differences with the DP representation theorem. First, we have only

- (4) if the faithful assignment associated with  $\circ$  satisfies (Ip<sub>4</sub>) then  $\circ$  satisfies  $(C_4)$ .

The converse does not hold.

The second main difference concerns  $(C_1)$  and  $(C_2)$ . Indeed, Darwiche and Pearl have shown that when  $\preceq_\Psi$  is a total pre-order, then (C<sub>1</sub>) (resp. (C<sub>2</sub>)) guarantees that  $\preceq_\Psi$  and  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$  be identical on their subdomain  $Mod(\mu) \times Mod(\mu)$  (resp.  $Mod(\neg\mu) \times Mod(\neg\mu)$ ). However, when  $\preceq_\Psi$  is a partial pre-order, then only the strict relations  $\prec_\Psi$  and  $\prec_{\Psi \circ \mu}$  are identical. Namely, it may happen that  $\omega =_\Psi \omega'$  and  $\omega \sim_{\Psi \circ \mu} \omega'$  both hold for revision operator satisfying  $(P_1)$  –  $(P_7)$  and  $(C_1)$  (resp.  $(C_2)$ ).

A similar remark also holds for Boutilier's postulate  $(C_B)$ .

**Theorem 4** Let  $\circ$  be a revision operator satisfying the postulates  $(P_1)$  –  $(P_7)$ . Then:

- $\circ$  satisfies  $(C_B)$  iff  $\circ$  satisfies (Ip<sub>5</sub>).

When  $\preceq_\Psi$  is a total pre-order, then  $\prec_{\Psi \circ \mu}$  is uniquely defined for satisfying  $(C_B)$ . Theorem 4 shows that the unicity of the result is no longer valid and hence  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$  is not uniquely defined. Again, only the strict relation associated with  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$  is uniquely defined.

An example of revision operator satisfying  $(C_B)$  is an extension to “natural revision” for partial pre-orders:

**Definition 3** Let  $\Psi$  be an epistemic state and  $\mu$  be a propositional formula, the revised epistemic state  $\Psi \circ_n \mu$  corresponds to the following partial pre-order:

- if  $\omega, \omega' \in Min(Mod(\mu), \preceq_\Psi)$  then  $\omega \preceq_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$  iff  $\omega \preceq_\Psi \omega'$ ,
- if  $\omega, \omega' \notin Min(Mod(\mu), \preceq_\Psi)$  then  $\omega \preceq_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$  iff  $\omega \preceq_\Psi \omega'$ ,

- if  $\omega \in \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \preceq_\Psi)$  and  $\omega' \notin \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \preceq_\Psi)$  then  $\omega \prec_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$ .

The first condition imposes that the order between the preferred models of  $\mu$  is preserved. The second condition preserves the ordering between non-preferred models of  $\mu$ . Finally, the third condition imposes that any minimal models of  $\mu$  is preferred to any other model.

**Example 1** Let us consider the epistemic state  $\Psi$  represented by Figure 3, where  $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$ ,  $\omega_1 = \{a, \neg b\}$ ,  $\omega_2 = \{\neg a, b\}$ ,  $\omega_3 = \{a, b\}$ . Let  $\mu$  be a new piece of information such that  $\text{Mod}(\mu) = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Then the revision of  $\Psi$  by the new piece of information  $\mu$  is represented by the partial pre-order  $\preceq_{\Psi \circ_n \mu}$  described by Figure 4.

$$\begin{array}{c} \omega_2 \\ \downarrow \\ \omega_1 \\ \downarrow \\ \omega_0 \end{array}$$

Figure 3:  $\preceq_\Psi$

$$\begin{array}{c} \omega_2 \\ \downarrow \\ \omega_3 \\ \downarrow \\ \omega_0 \\ \downarrow \\ \omega_1 \approx \omega_3 \end{array}$$

Figure 4:  $\preceq_{\Psi \circ_n \mu}$

According to this definition it can be checked that the revision operator  $\circ_n$  provided by definition 3 satisfies the postulates  $(P_1) - (P_7)$  and  $(C_B)$ . Moreover, it can be noticed that  $\circ_n$  does not satisfy  $(R_2)$  since  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi)) = \{\omega_0, \omega_3\}$ ,  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi) \circ_n \mu) = \{\omega_1, \omega_3\}$  and  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi) \wedge \mu) = \{\omega_3\}$ .

## 5 Two alternative postulates

Among additional postulates  $(C_1) - (C_4)$  proposed in [Darwiche and Pearl, 1997] for iterated belief revision,  $(C_1)$  seems to be very acceptable. However it is less obvious with  $(C_2)$  (for more detailed discussion, see, for instance, [Lehmann, 1995; Friedman and Halpern, 1999]). Moreover,  $(C_3)$  may appear to be too cautious. We now propose to analyze two alternative postulates which capture two other forms of iterated belief revision.

The first one departs from the idea of  $(C_2)$ , and it is close to the idea of conditioning with a completely sure information used in uncertainty theories. In probability theory (and similarly in possibility theory), if we revise a probability distribution by some completely sure formula, then all counter-models of these formulas are considered as impossible. This properties is captured by the following postulate.

$$(C_{cond}) \quad \text{Bel}((\Psi \circ \mu) \circ \neg \mu) \equiv \neg \mu.$$

It expresses that if  $\Psi$  is revised by  $\mu$ , and again by its contrary  $\neg \mu$ , then piece of initial beliefs are ignored, and only last pieces of information are retained. The characterization of this postulate is as follows.

**Theorem 5** A revision operator  $\circ$  satisfies the postulates  $(P1) - (P_7)$  and  $(C_{cond})$  iff its corresponding P-faithful assignment leads to  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$ , which is such that if  $\omega \models \neg \mu$  and  $\omega' \models \neg \mu$  then neither  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ , nor  $\omega' \prec_{\Psi \circ \mu} \omega$  holds.

We illustrate this postulate by the following definition of the extension of qualitative possibilistic revision [Dubois and Prade, 1992].

**Definition 4** Let  $\Psi$  be an epistemic state such that its corresponding P-faithful assignment leads to  $\preceq_\Psi$ . Let  $\mu$  be a propositional formula, The revised epistemic state  $\Psi \circ_\pi \mu$  is defined by:

- if  $\omega, \omega' \in \text{Mod}(\mu)$  then  $\omega \preceq_{\Psi \circ_\pi \mu} \omega'$  iff  $\omega \preceq_\Psi \omega'$ ,
- if  $\omega, \omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  then  $\omega =_{\Psi \circ_\pi \mu} \omega'$ ,
- if  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$  and  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  then  $\omega \prec_{\Psi \circ_\pi \mu} \omega'$ .

Namely,  $\preceq_\Psi$  and  $\preceq_{\Psi \circ_\pi \mu}$  are identical on subdomain  $\text{Mod}(\mu) \times \text{Mod}(\mu)$ . Each models of  $\mu$  are preferred to each counter-models of  $\mu$ . And lastly, the counter-models of  $\mu$  are considered equally preferred.

**Example 2** Let us again consider the epistemic state  $\Psi$  represented by Figure 3. Let  $\mu$  be a new information such that  $\text{Mod}(\mu) = \{\omega_1, \omega_2\}$ . Then, the revision of  $\Psi$  by the new information  $\mu$  is represented by the partial pre-order  $\preceq_{\Psi \circ_\pi}$  described by figure 5

$$\begin{array}{ccc} \omega_0 =_{\Psi \circ_\pi \mu} \omega_2 & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \omega_1 & & \omega_3 \end{array}$$

Figure 5:  $\preceq_{\Psi \circ_\pi \mu}$

According to this definition it can be checked that the revision operator  $\circ_\pi$  provided by definition 4 satisfies the postulates  $(P_1) - (P_7)$ ,  $(C_1)$ ,  $(C_3) - (C_4)$  and  $(C_{cond})$ .

The second postulate concerns relationships between models and counter-models of the new piece of information  $\mu$ . The postulate  $(C_3)$  only requires if some strict preference in  $\preceq_\Psi$  holds, then this preference should also hold in  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$ . We hence propose a stronger version of  $(C_3)$ , called  $(C_{lex})$ , and characterized by:

$$(C_{lex}) \quad \text{If } \alpha \text{ is not contradictory, } \alpha \models \mu \text{ and } \beta \models \neg \mu \text{ then } \text{Bel}((\Psi \circ \mu) \circ (\alpha \vee \beta)) \equiv \text{Bel}(\Psi \circ \alpha).$$

Note also that  $(C_{lex})$  implies  $(C_1)$ , by replacing  $\beta$  by the contradiction  $\perp$ .

**Theorem 6** A revision operator  $\circ$  satisfies the postulates  $(P1) - (P_7)$  and  $(C_{lex})$  iff its associated P-faithful assignments leading to  $\preceq_\Psi$  and  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$  are such that

- if  $\omega, \omega' \models \mu$  then  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$  iff  $\omega \prec_\Psi \omega'$ ,
- if  $\omega \models \mu$  and  $\omega' \not\models \mu$  then  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ .

Revision operator  $\circ$  satisfying  $(C_{lex})$  constraints each models to be strictly preferred to all counter-models of the

new piece of information  $\mu$ . Moreover, it preserves the order between the models of  $\mu$ . An example of revision operator satisfying ( $C_{lex}$ ) is the revision with memory proposed in [Papini, 2001] and hinted by Spohn [Spohn, 1988] (see also [Nayak, 1994; Koniczny and Pino Pérez, 2000]).

**Definition 5** Let  $\Psi$  be an epistemic state and  $\mu$  be a propositional formula, the revised epistemic state  $\Psi \circ_\triangleright \mu$  corresponds to the following partial pre-order:

- if  $\omega, \omega' \in Mod(\mu)$  then  $\omega \preceq_{\Psi \circ_\triangleright \mu} \omega'$  iff  $\omega \preceq_\Psi \omega'$ ,
- if  $\omega, \omega' \notin Mod(\mu)$  then  $\omega \preceq_{\Psi \circ_\triangleright \mu} \omega'$  iff  $\omega \preceq_\Psi \omega'$ ,
- if  $\omega \in Mod(\mu)$  and  $\omega' \notin Mod(\mu)$  then  $\omega \prec_{\Psi \circ_\triangleright \mu} \omega'$ .

**Example 3** Let us again consider the epistemic state  $\Psi$  represented by Figure 3. Let  $\mu$  be a new information such that  $\mu = a$ . We have  $Mod(\mu) = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Then, the revision of  $\Psi$  by the new information  $\mu$  is represented by the partial pre-order  $\preceq_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$  described by figure 6

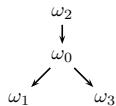


Figure 6:  $\preceq_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$

## 6 Conclusion

This paper has first proposed a new definition of faithful assignment suitable for revising partially ordered information. We then propose a revised version of Katsuno and Mendelzon's postulates. A representation theorem has been proposed for any revision operator satisfying this new set of postulates.

The paper also proposed a characterization of Darwiche and Pearl's postulates and a characterization of Boutilier's postulate when information is partially ordered. Two new postulates with their representation theorem have been proposed for capturing two other forms of belief revision.

When dealing with partial pre-orders, we have shown that revision operators satisfying iterated revision postulates such  $C_1$  does not allow to guarantee that  $\preceq_\Psi$  and  $\preceq_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$  to be identical on some subdomains (for instance on  $Mod(\mu) \times Mod(\mu)$  if  $C_1$  is satisfied). A future work will be to investigate additional postulates that preserve equality on some subdomains. For instance, it would be interesting to consider a stronger version of  $P_2$ , by requiring equality between epistemic states instead of logical equivalence between belief sets.

Even if results of this paper are oriented belief revision, it can be interesting to discuss this work in the framework of updating [Katsuno and Mendelzon, 1992] (since updating has also questioned  $(R_2)$ , even if representation theorems are clearly different).

Another future work is to extend results to this paper to the revision of a partial pre-order by a partial pre-order and extends, for instance, postulate proposed in [Benferhat et al., 2000].

## References

- [Alchourrón et al., 1985] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the logic of theory change: Partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.
- [Benferhat et al., 2000] Salem Benferhat, Sébastien Konieczny, Odile Papini, and Ramón A. Pino Pérez. Iterated revision by epistemic states : Axioms, semantics and syntax. In *Proceedings of European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'2000)*, pages 13–17, 2000.
- [Boutilier, 1993] Craig Boutilier. Revision sequences and nested conditionals. In *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 519–531, 1993.
- [Darwiche and Pearl, 1997] Adnan Darwiche and Judea Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial intelligence*, 89:1–29, 1997.
- [Dubois and Prade, 1992] Didier Dubois and Henri Prade. Belief change and possibility theory. In Peter Gärdenfors, editor, *Belief Revision*, pages 142–182. Cambridge University Press, 1992.
- [Friedman and Halpern, 1999] Nir Friedman and Joseph Y. Halpern. Belief revision: a critique. *Journal of Logic, Language, and Information*, 8:401–420, 1999.
- [Katsuno and Mendelzon, 1991] Hiroyumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.
- [Katsuno and Mendelzon, 1992] Hiroyumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Belief Revision*, pages 183–203. Cambridge University Press, 1992.
- [Koniczny and Pino Pérez, 2000] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. A framework for iterated revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 10(3-4):339–367, 2000.
- [Lehmann, 1995] Daniel Lehmann. Belief revision, revised. In *Proceedings of 14th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, pages 1534–1539, 1995.
- [Nayak, 1994] Abhaya C. Nayak. Iterated belief change based on epistemic entrenchment. *Erkenntnis*, 41(1994):353–390, 1994.
- [Papini, 2001] Odile Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations. In Hans Rott and Mary-Anne Williams, editors, *Frontiers of Belief Revision*, pages 279–301. Kluwer Academic, 2001.
- [Rott, 2001] Hans Rott. *Change, Choice and Inference: A Study of Belief Revision and Nonmonotonic Reasoning*. Oxford University Press, 2001.
- [Spohn, 1988] Wolfgang Spohn. Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1988.

## B.6 JLC'09 : Max-Based Prioritized Information Fusion Without Commensurability

Max-based prioritized information fusion  
without commensurability

Salem Benferhat Sylvain Lagrue Julien Rossit

Univ Lille Nord de France, F-5900 Lille, France  
CRIL-CNRS UMR 8788, F-62307 Lens, France

[benferhat,lagrue,rossit]@cril.univ-artois.fr

### Abstract

In the last decade, several approaches have been proposed for merging multiple and potentially conflicting pieces of information. Egalitarian fusion modes pick solutions that minimize the local dissatisfaction of each source (agent, expert) who is involved in the fusion process. When pieces of information to merge are prioritized, or ranked, most existing approaches assume that these priority degrees are commensurable, namely sources are assumed to share the same meaning of uncertainty scales.

This paper provides useful strategies for an egalitarian fusion of incommensurable ranked belief bases under constraints. In particular, it focuses on Max-based merging operators, and proposes a merging operator that allows to aggregate a set of ranked belief bases  $E$ . This operator is based on the concept of compatible scales. We provide three equivalent characterizations of this operator. The first one shows that Max-based merging of incommensurable belief bases can also be defined in terms of a Pareto-like ordering on possible worlds, denominated SMP-ordering. The second one is based on the notion of compatible rankings defined on finite scales. The third one is only based on total pre-orders induced by ranked bases to merge. The last part of the paper analyses rational postulates satisfied by our merging operator and compare it with some related works.

### 1 Introduction

In many situations, relevant pieces of information are provided by different sources. Many applications require to confront all existing pieces of information to obtain a global and coherent point of view, in order to take appropriate decisions. This problem is well-known as a *data fusion problem* and is handled by performing some combination operations on available pieces of information. Merging possibly conflicting pieces of information, issued from different sources, is an important issue for many applications, such as distributed databases frameworks, multi-agent systems or distributed information in general (e.g. web).

Pieces of information, provided by each source, are often uncertain. In this paper, such information will be called *beliefs*. Different frameworks have been proposed to handle uncertainty, such as

non-monotonic logic [KLM90], default logic [Rei80], probabilistic graphical models [Pea88, Jen01], possibilistic logic [DLP94], etc. In our framework, beliefs are represented by means of *ranked formulas*. A ranked formula is a pair composed of a propositional formula and a rank, represented by an integer. This rank expresses the certainty associated with the formula. It may also represent the reliability of the source that provides the formula. The higher is the rank associated with a formula, the more important is this formula. Ranked belief bases are simply multi-sets of ranked formulas, and can be convenient representations of what is usually known as epistemic states e.g. [DP97]. More precisely, each ranked belief base induces a ranking on the set of interpretations (also called possible worlds or solutions). Interpretations assigned to lowest ranks are considered to be the most plausible ones, and encode agent's current beliefs, usually known as belief sets [Gär88]. When dealing with a fusion process, ranks associated with interpretations, and induced by beliefs bases to merge, are compared and combined, in order to get a new ordering representing the result of fusion.

In literature, several approaches have been proposed for merging possibly contradictory belief bases [Rev93, Rev97, LS95, Lin96, KPP98, KPP02, KLM04, EKM08a]. Among them, two major merging modes have been considered: *utilitarian*-based merging operators and *egalitarian*-based merging operators. Utilitarian operators aim to satisfy a maximum of sources and satisfy a so-called majority postulate. This kind of operators is well-adapted to solve conflicts between pieces of information issued from independent sources. Egalitarian operators try to satisfy to the best each source without depriving any other source. Their behavior is very close to the minimax rule used in social choice [Sav71]: they try to minimize the worst case. In other words, utilitarian operators aim to minimize global dissension by satisfying a largest number of sources, while egalitarian merging operators aim to minimize local or individual dissatisfaction, by satisfying each source as high as possible. Egalitarian operators are majority independent: the repetition of a same piece of information does not affect the result of merging. For more discussions on these two subclasses of merging operators, see [KPP02]. This paper more focuses on egalitarian-based merging operators illustrated by the *Max* operator.

Most of existing merging methods are based on the following assumption: ranks associated with beliefs are commensurable from one source to another. This *commensurability assumption* may make sense in some situations, when it is possible to obtain a reference scale between sources, but can appear to be too strong for other applications. Indeed, comparing or combining ranks does not make sense if sources do not share the same meaning of scales.

A natural way to restore commensurability relies on the notion of *compatible scales*. A compatible scale is simply a re-assignment of ranks associated with beliefs in bases, such that the original relative ordering between beliefs is preserved. This paper provides a deep analysis of the Max-based merging operator for incommensurable belief bases, based first on this concept of compatible scales. We provide several equivalent characterizations of our merging operator, including the one that only refers to the relative ordering between beliefs, and the one which is based on a variant of a well-known Pareto ordering. We also provide a postulate-based analysis of our merging operator. This paper is an extended and a revised version of the two conference papers [BLR07a, BLR07b].

The rest of this paper is organized as follow: we first provide in Section 2 some backgrounds on merging commensurable ranked belief bases. Section 3 introduces the notion of compatible scales and shows that this notion can be used to define our Max-based merging operator of incommensurable belief bases. Section 4 provides three equivalent characterizations of Max-based merging incommensurable belief bases. The first one (Section 4.1) shows that considering bounded compatible scales is enough to recover Max-based merging. In section 4.2, we show that an equivalent result

can be obtained if one only uses the relative ordering (and not the ranks) between beliefs. The last characterization, given in terms of Pareto-like ordering on possible interpretations, is provided in Section 4.3. We study, in Section 5, logical properties of the Max-based incommensurable belief bases merging operator. Section 6 provides some related works and Section 7 concludes the paper.

## 2 A refresher on merging belief bases

Let  $\mathcal{L}$  be a *finite* propositional language. We denote by  $\Omega$  the set of interpretations of  $\mathcal{L}$  and by  $\omega$  an element of  $\Omega$ . Greek letters  $\varphi$  and  $\psi$  denote propositional formulas.  $Mod(\varphi)$  represents the set of models of  $\varphi$ ,  $\top$  and  $\perp$  represent respectively a tautology and a contradiction.

### 2.1 Ranked belief bases

A *belief* is an uncertain piece of information provided by a given source (or agent). A *ranked belief* is a belief (denoted by a propositional formula) associated with a rank (or a weight). This rank represents the amount of uncertainty associated with the formula, and can simply express the reliability of the source which provides this belief. Ranked belief bases are sets of ranked formulas and represent a convenient framework to compactly represent uncertain (or prioritized) pieces of information. Ranked belief bases are used in different frameworks, such as possibility theory [DLP94, GLB06], ordinal conditional functions (OCF) [Spo88, Mey01, Wil94, Wil95], etc. They are formally defined as follows:

**Definition 1 (Ranked belief base)** *A ranked belief base  $B_i$  is a multi-set of ranked propositional formulas, namely:*

$$B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})), j \in \{1, \dots, m_i\}\}, \text{ where } \varphi_{ij} \in \mathcal{L}, \text{ and } R_{B_i}(\varphi_{ij}) \in \mathbb{N}^*{}^1.$$

The couple  $(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$  means that  $\varphi_{ij}$  has a priority rank at least equal to  $R_{B_i}(\varphi_{ij})$ . Intuitively, formulas associated with highest ranks are those which are preferred for a given source (or agent). Only strictly positive ranks are represented. Moreover, we reserve the infinity symbol  $+\infty$  for *integrity constraints*. It means that no source can assign the rank  $+\infty$  to any of its own beliefs. The term *constraint* denotes a completely sure and consistent piece of information (also called knowledge). Constraints should be present in the result of the fusion process, while beliefs can be accepted, weakened or if necessary ignored in the fusion process.

We denote by  $B_i^*$  the set of propositional formulas obtained from  $B_i$  by ignoring ranks associated with formulas.

Each ranked belief base induces a total pre-order on interpretations of  $\Omega$ . The rank associated with an interpretation is obtained by aggregating, with some operator  $\diamond$ , the ranks of formulas it falsifies. Typical definitions of  $\diamond$  are minimum operator, sum operator and maximum operator. This rank expresses the compatibility or consistency of a given interpretation with respect to available beliefs. In particular, interpretations which satisfy all beliefs are considered as the preferred ones. Interpretations are then ordered with respect to the rank they are associated with: interpretations with the lowest ranks are the preferred ones. In this paper, we focus on the *Maximum* operator to compute the order representing the epistemic state of a given agent. Thus, each interpretation is associated with the rank of the highest formula that it falsifies. Then an interpretation  $\omega$  is preferred

---

<sup>1</sup>In initial OCF frameworks, formulas are mapped to ordinals. We restrict here the set of ordinals to the set of natural numbers to rank formulas.

to another interpretation  $\omega'$  if and only if the strongest (or most important) belief falsified by  $\omega$  is less important than the strongest belief falsified by  $\omega'$ . Interpretations which are models of  $B_i^*$  have a rank equal to 0 and are the preferred ones. More precisely:

**Definition 2 ( $\kappa$ -function)** A ranking function  $\kappa_{B_i}$  associated with a ranked belief base  $B_i$  is a function that maps each interpretation  $\omega$  of  $\Omega$  to an integer  $\kappa_{B_i}(\omega)$  such that:

$$\kappa_B(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \omega \models \varphi_{ij}; \\ \max\{R_{B_i}(\varphi_{ij}) : \omega \not\models \varphi_{ij}, (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This ordering, known as best out ordering, is the basis of probabilistic logic semantics [DLP94] and adjustment revision [Wil95].

Let us illustrate this definition with the following example:

**Example 1** Consider a ranked belief base  $B = \{(\neg a \vee b, 8), (a \vee b, 5), (a, 2)\}$ . The following table gives the ranking function  $\kappa_B$  associated with  $B$ .

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\kappa_B(\omega_i)$
$\omega_0$	0	0	5
$\omega_1$	0	1	2
$\omega_2$	1	0	8
$\omega_3$	1	1	<b>0</b>

Table 1: An example of ranking function

For instance,  $\kappa_B(\omega_0) = 5$  since the highest formula that it falsifies is  $(a \vee b)$  which has a rank equal to 5. On this example,  $\omega_3$  is the preferred model.

It is very important to note that beliefs are inserted in belief bases as they are and as they come from their sources of information, and we do not add any derived beliefs. This is the spirit of what it is called "belief bases" by Nebel [Neb91]. Hence, the same belief can be present several times in  $B_i$  and this explains why we consider it as a multi-set. Equivalent beliefs have different identification (the identification can be simply an arbitrary numbering of the beliefs in  $B_i$ ). We do not make these identifications explicit since it renders the notation heavy. Formulas of belief bases are distinguished from plausible conclusions which are derived from beliefs. In the context of merging and in presence of inconsistency, the merging approaches developed in this paper must be syntactic in nature, since they use formulas that explicitly appear in the belief base originally, while two inconsistent belief bases over the same language are semantically equivalent (in a trivial way).

## 2.2 Max-based fusion of commensurable bases

Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of  $n$  ranked belief bases, representing beliefs issued from  $n$  sources, and let  $\mu$  be a propositional formula representing integrity constraints to be satisfied. We assume that each ranked belief base is individually consistent (but of course, their union may be inconsistent). The aim of merging is, given  $E$  and  $\mu$ , to rank-order different interpretations of  $\Omega$  with respect to pieces of information provided by sources. This ordering, which is a convenient representation of a collective *epistemic state* (in the sense of [DP97]), is often obtained using a

merging operator denoted here by  $\Delta^\mu$ . Given  $E$ ,  $\Delta^\mu$ , we denote by  $\Delta^\mu(E)$  the epistemic state representing the result of merging, and  $\triangleleft^E$  the ordering on  $\Omega$  induced by  $\Delta^\mu$  and  $E$ . We denote by  $Bel(\Delta^\mu(E))$  the so-called belief set which represents the set of actual beliefs obtained after merging  $E$  and  $\mu$  by  $\Delta^\mu$ .  $Bel(\Delta^\mu(E))$  is defined as usually, namely it is such that its models are those which are minimal with respect to  $\triangleleft^E$ . In the literature, different methods for merging  $E$  have been proposed [KPP02, Lin96, LS95, Rev97]. This section presents the Max-based merging operator, when sources are assumed to be commensurable.

First, we need to introduce the notion of a *profile*, associated with an interpretation  $\omega$ , denoted by  $\nu_E(\omega)$  and defined by:

$$\nu_E(\omega) = \langle \kappa_{B_1}(\omega), \dots, \kappa_{B_n}(\omega) \rangle.$$

The profile  $\nu_E(\omega)$  represents the consistency degree of an interpretation  $\omega$  with respect to the multi-set of ranked bases.

Different methods have been proposed to order interpretations with respect to their profiles. They can be classified into two main categories. The first category uses an aggregation operator on profiles to associate a rank with each interpretation of  $\Omega$ . The second category directly compares profiles with some criterion, such as the Pareto-criterion for example, without aggregating profiles, and without providing an explicit rank for each interpretation. Our approach, detailed later in this paper, belongs to both categories. This section shows how our approach belongs to the first category. Next sections provide characterizations of our merging approach, that show that our merging operator also belongs to the second category. The computation of  $\Delta_\circ^\mu(E)$  relies on combining consistency degrees  $\kappa_{B_i}(\omega)$ 's with an aggregating operator  $\circ$ , and then rank-ordering interpretations with respect to their obtained ranks. We focus on the well-known *Max*-based merging operator: each interpretation is associated with a rank equal to the highest consistency degree in its associated profile. Namely, an interpretation  $\omega$  is said to be preferred to another interpretation  $\omega'$  if the maximum element of the profile associated with  $\omega$  is smaller than the maximum element of the profile associated with  $\omega'$ . More formally:

**Definition 3 (Definition of  $\triangleleft_{Max}^E$ )** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases. Let  $\omega$  and  $\omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ , and  $\nu_E(\omega)$ ,  $\nu_E(\omega')$  be their respective profiles. Then:

$$\omega \triangleleft_{Max}^E \omega' \text{ iff } \text{Max}(\nu_E(\omega)) < \text{Max}(\nu_E(\omega')),$$

where  $\text{Max}(\nu_E(\omega)) = \text{Max}_{i=1,\dots,n} \kappa_{B_i}(\omega)$ .

Max-based merging operator has been very used in literature. It enjoys several interesting properties such as for instance independence to the repetition of same formulas. Max-based merging operator is considered as one of the two important merging operators defined in possibility theory framework [DP94, BDP97], and belongs to one of the three examples of merging operators used in [KPP98] (the two other merging operators *Sum* and *Gmax* defined in [KPP98] are sensitive to repetition of same formulas).

The belief set associated with the result of merging  $\triangleleft_{Max}^E$  is defined as usual:

**Definition 4** The set of beliefs resulting from merging  $E$  and  $\mu$ , is a propositional formula, denoted by  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ , such that:

$$Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu) \text{ such that } \omega' \triangleleft_{Max}^E \omega\}.$$

Let us illustrate this merging operator with the following example:

**Example 2** Let  $E = \{B_1, B_2\}$  be such that  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . The profile associated with each interpretation is given in Table 2

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$	8
$\omega_1$	0	1	8	0	$\langle 8, 0 \rangle$	8
$\omega_2$	1	0	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$	2
$\omega_3$	1	1	4	1	$\langle 4, 1 \rangle$	4

Table 2: Profiles associated with interpretations

The result of the Max-based merging, considering  $\mu \equiv b$ , is such that:

$$Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_3\}$$

Note that in the above example there is no interpretation  $\omega$  such that  $\kappa_{B_1}(\omega) = 0$  and  $\kappa_{B_2}(\omega) = 0$ . This reflects the fact that the bases are conflicting, namely  $B_1^* \wedge B_2^*$  is inconsistent. The value  $Inc(B_1, B_2) = \min_{\omega \in \Omega} \max(\kappa_{B_1}(\omega), \kappa_{B_2}(\omega))$  expresses the fact that the set of beliefs, from both bases, having a rank strictly greater than  $Inc(B_1, B_2)$  is consistent. However, adding formulas of rank  $Inc(B_1, B_2)$  leads to inconsistency. For instance, in our example we have  $Inc(B_1, B_2) = 2$ . One can check that the set of formulas in  $B_1$  and  $B_2$  with a weight greater than 2 is consistent, while adding formulas of rank 2 produces an inconsistent set of beliefs.

Now, we briefly present rational postulates, which have been proposed for characterizing fusion operators [KPP98] under integrity constraints. In fact, these rational postulates have been defined for flat (or non-prioritized) belief bases. Namely  $E$  is a set of flat knowledge bases, each of them can be represented by a propositional formula. This set of postulates is described as follows:

- (IC0)  $\Delta_\mu(E) \models \mu$ ,
- (IC1) If  $\mu$  is consistent, then  $\Delta_\mu(E)$  is consistent,
- (IC2) If  $\bigwedge_{B \in E} B$  is consistent with  $\mu$ , then  $\Delta_\mu(E) \equiv \bigwedge_{B \in E} B \wedge \mu$ ,
- (IC3) If  $E_1 \equiv E_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , then  $\Delta_{\mu_1}(E_1) \equiv \Delta_{\mu_2}(E_2)$ ,
- (IC4) If  $B_1 \models \mu$  and  $B_2 \models \mu$ , then  $\Delta_\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_1$  is consistent  
iff  $\Delta_\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_2$  is consistent,
- (IC5)  $\Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2) \models \Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2)$ ,
- (IC6) If  $\Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2)$  is consistent, then  $\Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2)$ ,
- (IC7)  $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$ ,
- (IC8) If  $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$  is consistent, then  $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ .

A complete description of these postulates can be found in [KPP02]. (IC0) assures that the result of merging  $\Delta_\mu(E)$  satisfies the integrity constraint. (IC1) states that if the integrity constraint is consistent, then the result of merging is consistent. (IC2) states that, whenever it is possible, the result of merging is simply the conjunction of the belief bases with the integrity constraint. (IC3) is the principle of *irrelevancy of syntax*, i.e. if two multi-sets of belief bases are equivalent, and if two integrity constraints are logically equivalent, then the result of the two merging will be logically equivalent. (IC4) says that when two belief bases are merged, merging operators must not give any preference to one of them. (IC5) and (IC6) together state that if one could find two subgroups of

sources which agree on at least one interpretation, then the result of global merging will exactly be those interpretations that are accepted by both subgroups. (IC7) and (IC8) state that the notion of *closeness* is well-behaved (see [KM91]).

### 3 Merging operators for incommensurable belief bases

The merging operation defined above assumes that ranks associated with formulas by sources are commensurable. Namely, all sources are assumed to share the same meaning of scales used to evaluate formulas. Such assumption can be too strong for some applications, for instance when information is obtained from sources of unknown quality (e.g., the web). This section shows how to deal with the commensurability assumption and provides a strategy to merge incommensurable belief bases.

#### 3.1 Using compatible scales to restore commensurability between sources

A natural strategy to merge belief bases, when ranks associated with formulas are not commensurable from one source to another, consists in using the concept of possible common scales, called here *compatible scales*. A scale represents a possible correspondence between ranks provided by agents. A compatible scale affects new ranks to beliefs (represented by formulas) such that initial relative orders between beliefs of each agent are preserved. More formally:

**Definition 5 (Compatible scale)** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of belief bases to merge, where  $B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))\}$ . Then a scale  $\mathcal{S}$  is a function defined by:

$$\mathcal{S} : E = \{B_1, \dots, B_n\} \rightarrow E^{\mathcal{S}} = \{B_1^{\mathcal{S}}, \dots, B_n^{\mathcal{S}}\}$$

such that  $\forall B_i \in E$ ,

- $B_i^{\mathcal{S}} = \{(\varphi_{ij}, \mathcal{S}(\varphi_{ij})) : (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\}$
- $\forall B_i \in E, \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \forall (\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'})) \in B_i, R_{B_i}(\varphi_{ij}) \leq R_{B_i}(\varphi_{ij'}) \text{ iff } \mathcal{S}(\varphi_{ij}) \leq \mathcal{S}(\varphi_{ij'})$ .

Given a compatible scale  $\mathcal{S}$ ,  $B_i^{\mathcal{S}}$  denotes the belief base obtained from  $B_i$  by using a compatible scale  $\mathcal{S}$ . More formally,  $B_i^{\mathcal{S}}$  is obtained by replacing each pair  $(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$  by  $(\varphi_{ij}, \mathcal{S}(\varphi_{ij}))$ . Moreover,  $E^{\mathcal{S}}$  denotes the multi-set obtained by application of  $\mathcal{S}$  on each  $B_i$  from  $E$ .

The following example illustrates the fact that compatible scales are not unique.

**Example 3 (continued)** Let us consider again  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Table 3 gives three scales:  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  and  $\mathcal{S}_3$ .

The scales  $\mathcal{S}_1$  and  $\mathcal{S}_2$  are compatible ones, since they preserve initial orderings inside each ranked base. However, the scale  $\mathcal{S}_3$  is not a compatible one: it inverts the priorities between beliefs inside  $B_1$ . Indeed,  $R_{B_1}(a) = 8 > R_{B_1}(b) = 4$ , while  $\mathcal{S}_3(a) = 4 \not> \mathcal{S}_3(b) = 7$ .

The set of scales compatible with  $E$  is denoted by  $\mathbb{S}_E$ . This set is never empty:

**Proposition 1**<sup>2</sup> Let  $E$  be a set of ranked belief bases. Let  $\mathbb{S}_E$  be the set of all scales compatible with  $E$ . Then  $\mathbb{S}_E \neq \emptyset$ .

---

<sup>2</sup>All proofs are provided in the Appendix.

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$S_1(\varphi_{ij})$	$S_2(\varphi_{ij})$	$S_3(\varphi_{ij})$
$B_1$	$a$	8	5	12	4
	$\neg b$	4	2	2	7
$B_2$	$b$	2	7	17	3
	$\neg a$	1	1	9	2

Table 3: examples of scale

We define an *identity scale*  $S_{Id}$  as follows:

$$\forall B_i \in E, \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, S_{Id}(\varphi_{ij}) = R_{B_i}(\varphi_{ij}).$$

This identity scale is compatible, since it obviously preserves the initial ordering between beliefs inside each belief base.

As we already pointed out, beliefs are considered as self justified. For instance, if a source provides the following belief  $B = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3)\}$ , then this belief base will be accepted and handled, even if the weights express a contradiction since, on one hand, "a" is strictly more important than "b", and on the other hand, we have the converse. In fact,  $B$  is handled as equivalent to  $B' = \{(b, 2), (a, 3)\}$ , where  $(a, 1)$  is ignored and considered as a redundant belief (the belief  $(a, 1)$  is considered to be *subsumed* by  $(a, 3)$ ).

Similarly, for merging belief bases, beliefs are also assumed to be self justified. A compatible scale does not directly handle beliefs but rather ranks associated with beliefs. If, for instance, one have two bases:  $B_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$ , and  $B_2 = \{(b, 3), (a, 5)\}$ ; a possible common scale is  $S$  such that:  $B_1^S = \{(a, 2), (b, 3)\}$ , and  $B_2^S = \{(b, 2), (a, 3)\}$ . This scale is compatible since it simply preserves the initial ordering between beliefs of  $B_1$  and between beliefs of  $B_2$ .

A first approach to merge incommensurable ranked belief bases is to select a unique compatible scale for defining the result of merging.

One way is to select a compatible scale that left weights unchanged, namely using what we have called an identity scale. This simply assumes that all belief bases are commensurable, which is not satisfactory.

Another way is to simply select the *least specific* compatible scale. A compatible scale  $S$  is said to be less specific than another compatible scale  $S'$  iff  $S(\varphi_{ij}) < S'(\varphi_{ij})$  for each  $B_i$  and for each  $\varphi_{ij} \in B_i$ . Selecting one compatible scale (or even a subset of compatible scales with some select function) may be interesting in some applications. However, it may appear arbitrary or adventurous for many situations.

This paper opts for a skeptical option by considering the whole set of compatible scales for defining the result of merging. Using a skeptical approach does not mean that our approach will be too cautious. For instance, we will show later that when belief bases to merge are consistent, the result of merging will simply be their conjunction.

### 3.2 Merging incommensurable belief bases using all compatible scales

A natural approach for merging incommensurable belief bases is to take into account all compatible scales. An interpretation  $\omega$  is said to be preferred to  $\omega'$ , if for each compatible scale  $S$  of  $\mathbb{S}_E$ ,  $\omega$  is preferred to  $\omega'$  using a classical ranked belief bases merging operator (namely,  $\omega \triangleleft^{E^S} \omega'$ ). More precisely:

**Definition 6 (Definition of  $\blacktriangleleft_{Max}^E$ )** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge, and  $\mathbb{S}_E$  be the set of all compatible scales on  $E$ . Let  $\omega, \omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ . Then:

$$\omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega' \text{ iff } \forall S \in \mathbb{S}_E, \omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$$

where  $\triangleleft_{Max}^{E^S}$  is the result of applying Definition 3 on  $E^S$ .

$\blacktriangleleft_{Max}^E$  is a partial order on interpretations of  $\Omega$ : it represents the epistemic state resulting of the merging process. Models of preferred beliefs issued from  $\Delta_{Max}^\mu(E)$  are those which satisfy  $\mu$  and are minimal with respect to  $\blacktriangleleft_{Max}^E$ :

$$Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega \in \Omega : \omega \in Mod(\mu) \text{ and } \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega\}.$$

Let us illustrate this definition with the following example.

**Example 4 (continued)** Let us consider again  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Assume that  $\mu \equiv \top$ . Let us consider again  $S_1$  where  $B_1^{S_1} = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2^{S_1} = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$  and  $S_2$ , where  $B_1^{S_2} = \{(a, 12), (\neg b, 2)\}$  and  $B_2^{S_2} = \{(b, 17), (\neg a, 9)\}$ . Both of them are compatible. Table 4 presents the profile of each interpretation for each compatible scale.

	a	b	$\nu_{E^{S_1}}(\omega)$	Max	$\nu_{E^{S_2}}(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	$\langle 8, 2 \rangle$	8	$\langle 12, 17 \rangle$	17
$\omega_1$	0	1	$\langle 8, 0 \rangle$	8	$\langle 12, 0 \rangle$	12
$\omega_2$	1	0	$\langle 0, 2 \rangle$	<b>2</b>	$\langle 0, 17 \rangle$	17
$\omega_3$	1	1	$\langle 4, 1 \rangle$	4	$\langle 2, 9 \rangle$	<b>9</b>

Table 4: Two examples of compatible scales

Table 5 shows six additional compatible scales. Table 6 gives their associated profiles.

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$
$B_1$	$a$	8	7	6	2	4	20	200
	$\neg b$	4	3	4	1	1	10	100
$B_2$	$b$	2	2	4	2	13	30	400
	$\neg a$	1	1	1	1	1	20	300

Table 5: Representative compatible scales

	$\nu_{E^{S_3}}(\omega)$	$\nu_{E^{S_4}}(\omega)$	$\nu_{E^{S_5}}(\omega)$	$\nu_{E^{S_6}}(\omega)$	$\nu_{E^{S_7}}(\omega)$	$\nu_{E^{S_8}}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 7, 2 \rangle$	$\langle 6, 4 \rangle$	$\langle 4, 13 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 20, 30 \rangle$	$\langle 200, 400 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 7, 0 \rangle$	$\langle 6, 0 \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 20, 0 \rangle$	$\langle 200, 0 \rangle$
$\omega_2$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 4 \rangle$	$\langle 0, 13 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 0, 30 \rangle$	$\langle 0, 400 \rangle$
$\omega_3$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 10, 20 \rangle$	$\langle 100, 300 \rangle$

Table 6: Profiles of interpretations using each presented compatible scale

In fact, we will show later that the six compatible scales given in Table 5 are enough to characterize the result of fusion. Namely, for each compatible scale  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , there exists a scale  $\mathcal{S}_i \in \{3, \dots, 8\}$  given in Table 5, such that  $\omega \triangleleft_{Max}^{\mathcal{S}} \omega'$  iff  $\omega \triangleleft_{Max}^{\mathcal{S}_i} \omega'$ , for all  $\omega$  and  $\omega'$ .

*Bold elements* in Table 6 represent models of  $\Delta_{Max}^\mu$  for a given scale. For instance, interpretations  $\omega_1$  and  $\omega_3$  are models of  $\Delta_{Max}^\mu$  for the compatible scale  $\mathcal{S}_7$  from Tables 5.

Finally, the strict partial order between interpretations is only defined by  $\omega_3 \blacktriangleleft_{Max}^E \omega_0$ . Hence, models of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$  are  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , and  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \equiv a \vee b$ .

The following proposition shows that an interpretation  $\omega$  is a model of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$  if and only if there exists a compatible scale  $\mathcal{S}$  where this interpretation  $\omega$  belongs to the result of the fusion of  $E^{\mathcal{S}}$ , namely  $\omega$  is a model of  $\Delta_{Max}^{\mathcal{S}}(E)$ . More formally:

**Proposition 2** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases, and  $\omega$  be an interpretation of  $\Omega$ . Then

$$\omega \in Mod(\Delta_{Max}^\mu(E)) \text{ iff } \exists \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \in Mod(\Delta_{Max}^\mu(E^{\mathcal{S}})).$$

The Max-based operator defined above is more cautious than the standard one, defined under the commensurability assumption. Namely  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ . Moreover, the epistemic state represented by  $\blacktriangleleft_{Max}^E$  on interpretations is a generalization of the one represented by  $\triangleleft_{Max}^E$ , namely if  $\omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega'$  then  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . This result is immediate since  $\triangleleft_{Max}^E$  is based on only one compatible scale (namely  $\mathcal{S}_{Id}$ ), while  $\blacktriangleleft_{Max}^E$  considers all compatible scales.

As we pointed out before, considering all possible compatible scales does not mean that the approach is too cautious (where for instance only tautologies can be derived from the result of merging). In fact, if the union of bases is consistent, then the result of merging is simply the conjunct of the bases. More formally:

**Proposition 3** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of belief bases to merge. If  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  is consistent, then

$$Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*).$$

Moreover, when belief bases to merge are inconsistent, our approach is not more cautious than considering the disjunction of the belief bases to merge. Namely, it is not true that for each multiset of belief bases to merge  $E$ ,  $\bigvee_{B_i \in E} (B_i^*) \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ , as it shown by the following example.

**Example 5** Let us consider  $B_1 = \{(a, 2)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Assume that  $\mu \equiv \top$ .

Table 7 shows five possible compatible scales. Table 8 gives their associated profiles.

	$\varphi_{ij}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$
$B_1$	$a$	3	2	2	1	1
$B_2$	$b$	2	2	3	2	3
	$\neg a$	1	1	1	1	2

Table 7: Representative compatible scales

	$\nu_{E\mathcal{S}_1}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_2}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_3}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_4}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_5}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 3,2 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 1,3 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 3,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 1,0 \rangle$	$\langle 1,0 \rangle$
$\omega_2$	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$
$\omega_3$	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 0,2 \rangle$

Table 8: Profiles of interpretations using each presented compatible scale

The five compatible scales given in Table 7 are enough to characterize the result of fusion. Namely, for each compatible scale  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , there exists a scale  $\mathcal{S}_i \in \{3, \dots, 8\}$  given in Table 7, such that  $\omega \triangleleft_{Max}^{\mathcal{S}} \omega'$  iff  $\omega \triangleleft_{Max}^{\mathcal{S}_i} \omega'$ , for all  $\omega$  and  $\omega'$ .

Finally, on this example, we have  $Mod(Bel(B_1)) = \{\omega_2, \omega_3\}$ ,  $Mod(Bel(B_2)) = \{\omega_1\}$  and  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Hence,  $\bigvee_{B_i \in E} (B_i^*) \not\models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ .

Note that the converse does not hold neither. More formally, we have not  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \models \bigvee_{B_i \in E} (B_i^*)$ . This means that our operator do not only consider the interpretation of the disjunction of all bases. The following example illustrates this situation in both commensurable and incommensurable cases:

**Example 6** Let us consider a set of ranked belief bases  $E = \{B_1, B_2\}$ , where  $B_1 = \{(\neg a \vee b, 2), (a, 1)\}$ , and  $B_2 = \{(\neg a \vee \neg b, 2), (a, 1)\}$ , and assume on this example that  $\mu \equiv \top$ . The profile associated with each interpretation is given in Table 9.

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	1	1	$\langle 1,1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_1$	0	1	1	1	$\langle 1,1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_2$	1	0	2	0	$\langle 2,0 \rangle$	2
$\omega_3$	1	1	0	2	$\langle 0,2 \rangle$	2

Table 9: Profiles associated with interpretations

On this example, we have  $Mod(B_1^* \vee B_2^*) = \{\omega_2, \omega_3\}$ . However, Table 9 shows that  $\omega_0$  and  $\omega_1$  are the preferred interpretations according  $\triangleleft_{Max}^E$ , since maximum elements of their respective profile are minimal. Hence,  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \not\models \bigvee_{B_i \in E} B_i^*$ .

For the incommensurable case, we consider the same set of beliefs to merge, and we also consider the identical scale  $\mathcal{S}_{Id} \in \mathbb{S}_E$ . Table 10 shows that  $\omega_0$  and  $\omega_1$  are the preferred interpretations according  $\triangleleft_{Max}^{E_{Id}}$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}^{\mathcal{S}_{Id}}(\omega)$	$\kappa_{B_2}^{\mathcal{S}_{Id}}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_{Id}}(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	1	1	$\langle 1,1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_1$	0	1	1	1	$\langle 1,1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_2$	1	0	2	0	$\langle 2,0 \rangle$	2
$\omega_3$	1	1	0	2	$\langle 0,2 \rangle$	2

Table 10: Profiles associated with interpretations

Moreover, according Proposition 2,  $\omega_0$  and  $\omega_1$  must be in the result of merging by  $\Delta_{Max}^\mu$ . However, on this example, we also have  $Mod(B_1^* \vee B_2^*) = \{\omega_2, \omega_3\}$ . Hence, this example shows that  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \neq \bigvee_{B_i \in E} B_i^*$ .

Note that the fact that the disjunction of knowledge bases is not inferred from the result of merging should not be a drawback of our approach. In case of conflicts, commensurable and incommensurable merging operators prefer to get rid of the least important beliefs in order to restore consistency. Hence, it may happen that these ignored least important beliefs are common beliefs. This is the case in our example, where the belief "a" is the least important belief in both bases and hence is ignored (or sacrificed) in order to restore consistency.

Finally, the following proposition shows that the result of merging is consistent with each initial belief bases:

**Proposition 4 (consensus)** *Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of belief bases to merge, and  $\mu$  be a propositional formula representing integrity constraints. Then,*

$$\forall B_i \in E, \text{ if } B_i^* \models \mu, \text{ then } B_i^* \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \text{ is consistent.}$$

This notion of *consensus* is close to the notion of *temperance*, introduced in [EKM08c].

## 4 Characterizations

This section provides three characterizations of the Max-based merging of incommensurable belief bases. The first one only considers a set of bounded compatible scales. The second one is only based on the relative priority ordering between beliefs of ranked bases. The last one directly defines a partial pre-order between interpretations in a way similar to the one based on the Pareto criterion.

### 4.1 Characterizing the result of merging with bounded scales

This section shows that it is not necessary to take into account the whole set of compatible scales to compute the result of merging. We first introduce a notion of restricted compatible scales, called *bounded* compatible scales, and defined as follows:

**Definition 7 (Bounded compatible scales)** *Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of ranked belief bases, and  $p$  be a positive integer. Then,  $\mathbb{S}_E^p$  is defined as the set of compatible scales  $\mathcal{S}$  of  $\mathbb{S}_E$  such that:*

$$\forall B_i \in E, \forall \varphi_{ij} \in B_i : \mathcal{S}(\varphi_{ij}) \leq p.$$

In other words,  $\mathbb{S}_E^p$  only considers compatible scales whose maximal rank is equal or smaller than  $p$ . The smallest possible integer  $\lfloor p \rfloor$  that can be used to define bounded compatible scales is:

$$\lfloor p \rfloor = \max\{|B_i| : B_i \in E\}.$$

where  $|B_i|$  represents the number of different ranks (or weights) in  $B_i$ .

If  $p < \lfloor p \rfloor$ , then the set of compatible scales is empty.

This notion of bounded compatible scales leads to define an incommensurable belief bases merging operator, that we denote  $\Delta_{Max-p}^\mu$  (where Max stands for max-based merging operator while "p" is a positive integer that expresses that ranks in compatible scales are bounded by p). The merging operation  $\Delta_{Max-p}^\mu$  is relying on the following partial order denoted by  $\blacktriangleleft_{Max-p}^E$ :

**Definition 8 (Definition of  $\blacktriangleleft_{Max-p}^E$ )** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of ranked belief bases,  $p$  be a positive integer greater than  $[p]$  and  $\mathbb{S}_E$  be the set of compatible scales associated with  $E$ . Let  $\omega$  and  $\omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ . Then we define the ordering  $\blacktriangleleft_{Max-p}^E$  as follow:

$$\omega \blacktriangleleft_{Max-p}^E \omega' \text{ iff } \forall S \in \mathbb{S}_E^p, \omega \triangleleft_{Max}^{S^S} \omega'$$

and  $Mod(Bel(\Delta_{Max-p}^\mu(E))) = \{\omega \in \Omega : \omega \in Mod(\mu) \text{ and } \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \blacktriangleleft_{Max-p}^E \omega\}$ .

Let us illustrate these definitions with the following example:

**Example 7 (continued)** Let us consider again  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Assume that  $\mu \equiv \top$  and consider that  $p = 4$ .

Tables 11 and 12 show all possible bounded compatible scales, considering that  $p = 4$ . Table 13 and 14 give profiles associated with interpretations for each of these scales.

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
$B_1$	$a$	8	4	3	4	3	4	3
	$\neg b$	4	3	2	2	1	1	2
$B_2$	$b$	2	2	2	3	2	3	3
	$\neg a$	1	1	1	1	1	2	1

Table 11: Bounded compatible scales, with  $p = 4$

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$
$B_1$	$a$	8	2	3	3	2	3	2	2
	$\neg b$	4	1	1	2	1	1	1	1
$B_2$	$b$	2	2	3	4	3	4	3	4
	$\neg a$	1	1	2	1	1	2	2	3

Table 12: Bounded compatible scales, with  $p = 4$

	$\nu_{E S_1}(\omega)$	$\nu_{E S_2}(\omega)$	$\nu_{E S_3}(\omega)$	$\nu_{E S_4}(\omega)$	$\nu_{E S_5}(\omega)$	$\nu_{E S_6}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 4, 3 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 4, 3 \rangle$	$\langle 3, 3 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$
$\omega_2$	$\langle \mathbf{0}, 2 \rangle$	$\langle \mathbf{0}, 2 \rangle$	$\langle \mathbf{0}, 1 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$
$\omega_3$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle \mathbf{2}, 1 \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle \mathbf{1}, 2 \rangle$	$\langle \mathbf{2}, 1 \rangle$

Table 13: Profiles associated with interpretations using each scale of Table 11

*Bold elements in Tables 13 and 14 represent models of  $\Delta_{Max}^\mu$  for a given bounded compatible scale. For instance, interpretations  $\omega_2$  and  $\omega_3$  are models of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu)$  for the bounded compatible scale  $S_2$ .*

*Finally, the strict partial order between interpretations is only defined by  $\omega_3 \blacktriangleleft_{Max}^E \omega_0$ . Hence, considering  $p = 4$ , models of  $Bel(\Delta_{Max-p}^\mu(E))$  are  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , and  $Bel(\Delta_{Max-p}^\mu(E)) \equiv a \vee b$ .*

	$\nu_{Es_7}(\omega)$	$\nu_{Es_8}(\omega)$	$\nu_{Es_9}(\omega)$	$\nu_{Es_{10}}(\omega)$	$\nu_{Es_{11}}(\omega)$	$\nu_{Es_{12}}(\omega)$	$\nu_{Es_{13}}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 3,3 \rangle$	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 2,4 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$
$\omega_2$	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,4 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,4 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,4 \rangle$
$\omega_3$	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 1,3 \rangle$

Table 14: Profiles associated with interpretations using each scale of Table 12

Bounded compatible scales offer a natural way to select a set of compatible scales, since in practice common scales are bounded. Moreover, it allows to characterize the result of merging obtained using the Max-based operator induced by compatible scales, as it is shown in the next proposition:

**Proposition 5** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge,  $\blacktriangleleft_{Max}^E$  and  $\blacktriangleleft_{Max-p}^E$  be their associated partial orders defined using Definition 6 and Definition 8. Then,  $\forall p \geq \lceil p \rceil, \forall \omega, \omega' \in \Omega :$

$$\omega \blacktriangleleft_{Max-p}^E \omega' \text{ iff } \omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega'$$

$$\text{with } \lceil p \rceil = \sum_{i=1, \dots, n} |B_i|.$$

In Example 7, one can check that  $Mod(Bel(\blacktriangle_{Max-p}^\mu(E)))$ , with  $p = 4$  is the same as the one given in Example 4 when considering all compatible scales.

## 4.2 Focusing on orders induced by belief bases

This section provides a second characterization of our merging operator. We show that total pre-orders induced by initial ranked bases to merge are sufficient to recover  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E)$ . Let  $B_i = \{(\varphi_{ij}, R_i(\varphi_{ij}))\}, i \in \{1, \dots, m_i\}\}$  be a ranked belief base. We denote by  $\leq_i$  a total pre-order defined on formulas of  $B_i^*$  such that:  $\forall \varphi_{ij} \in B_i^*, \forall \varphi_{ik} \in B_i^*$ ,

$$\varphi_{ij} \leq_i \varphi_{ik} \text{ iff } R_{B_i}(\varphi_{ij}) \leq R_{B_i}(\varphi_{ik})$$

The following introduces the counterpart of compatible scales when we only deal with pre-orders:

**Definition 9 (Compatible ordering)** Let  $(\leq_1, \dots, \leq_n)$  be the set of total pre-orders associated respectively with  $E = (B_1, \dots, B_n)$ . We define a compatible ordering as a total pre-order on formulas of  $B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$ , denoted by  $<_c$ , such that:  $\forall \varphi_{ij}, \forall \varphi_{ik}$ ,

$$\varphi_{ij} <_c \varphi_{ik} \text{ iff } \varphi_{ij} <_i \varphi_{ik}.$$

A compatible total pre-order  $<_c$  on formulas induces a total pre-order on interpretations, denoted by  $\blacktriangleleft_c$ , as follows:

**Definition 10** Let  $(\leq_1, \dots, \leq_n)$  be the set of total pre-orders associated respectively with  $E = (B_1, \dots, B_n)$ , and  $<_c$  be a compatible total pre-order. Then  $\forall \omega \in \Omega, \forall \omega' \in \Omega, \omega \blacktriangleleft_c \omega'$  iff

$$\forall \varphi \in B_1^* \sqcup \dots \sqcup B_n^*, \omega \not\models \varphi$$

$$\exists \psi \in B_1^* \sqcup \dots \sqcup B_n^*, \omega' \not\models \psi$$

such that  $\varphi <_c \psi$

Namely, for each formula  $\phi$  falsified by  $\omega$ , there exists a more important formula  $\psi$  (i.e  $\varphi <_c \psi$ ), which is falsified by  $\omega'$ . Interpretations which are minimal with respect to  $\triangleleft_c$  are the preferred ones.

This leads to define a merging operator as follows:

**Definition 11** Let  $E$  be a multi-set of ranked bases. We say that  $\omega$  is strictly preferred to  $\omega'$ , denoted by  $\omega \blacktriangleleft^E \omega'$ , iff for all compatible total pre-orders  $<_c$  we have  $\omega \triangleleft_c \omega'$ . The result of fusion, denoted  $\blacktriangleleft^\mu(E)$ , is defined as usual:

$$Mod(Bel(\blacktriangleleft^\mu(E))) = \{\omega : \omega \in Mod(\mu), \# \omega' \in Mod(\mu) \text{ s.t. } \omega' \blacktriangleleft^E \omega'\}.$$

**Example 8 (continued)** Let us consider again  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Let  $\Omega = \{\omega_0 = \neg a \neg b, \omega_1 = \neg ab, \omega_2 = a \neg b, \omega_3 = ab\}$ . Table 15 presents six compatible total pre-orders and their associated total pre-ordering. These six compatible total pre-orders are enough to recover the result of merging.

Table 15: Representative Compatible pre-orders

	$\leq_{c_i}$	$\triangleleft_{c_i}$
$\leq_{c_1}$	$\neg a <_{c_1} b <_{c_1} \neg b <_{c_1} a$	$\omega_2 \triangleleft_{c_1} \omega_3 \triangleleft_{c_1} \omega_0, \omega_1$
$\leq_{c_2}$	$\neg a <_{c_2} b, \neg b <_{c_2} a$	$\omega_2, \omega_3 \triangleleft_{c_2} \omega_0, \omega_1$
$\leq_{c_3}$	$\neg a, \neg b <_{c_3} b, a$	$\omega_3 \triangleleft_{c_3} \omega_0, \omega_1, \omega_2$
$\leq_{c_4}$	$\neg a, \neg b <_{c_4} a <_{c_4} b$	$\omega_3 \triangleleft_{c_4} \omega_1 \triangleleft_{c_4} \omega_0, \omega_2$
$\leq_{c_5}$	$\neg b <_{c_5} \neg a, a <_{c_5} b$	$\omega_1, \omega_3 \triangleleft_{c_5} \omega_0, \omega_2$
$\leq_{c_6}$	$\neg b <_{c_6} a <_{c_6} \neg a <_{c_6} b$	$\omega_1 \triangleleft_{c_6} \omega_3 \triangleleft_{c_6} \omega_0, \omega_2$

From Table 15 we can check that the result of merging is  $Mod(Bel(\blacktriangleleft^\mu(E))) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ .

Using all compatible orderings allows to recover the result of merging based on all compatible scales, as it is stated in the next proposition:

**Proposition 6** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge,  $\blacktriangleleft_{Max}^E$  and  $\blacktriangleleft^E$  be partial pre-orders given respectively by Definition 6 and Definition 11. Then,  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ :

$$\omega \blacktriangleleft^E \omega' \text{ iff } \omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega'.$$

In Example 8, one can check that  $Mod(Bel(\blacktriangleleft^\mu(E)))$  is the same as the one given in Example 4 when considering all compatible scales.

### 4.3 A characterization based on SMP-ordering

We provide, in this section, another natural way to recover preferred models of merged incomensurable belief bases, without computing any compatible scale. This criterion relies on direct comparisons of profiles associated with interpretations.

We introduce a new Pareto-like ordering, called SMP-ordering (S. for strict, M. for models, P. for Pareto), defined as follows:

**Definition 12 (Definition of  $\triangleleft_{SMP}^E$ )** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a set of ranked belief bases to merge, and  $\omega, \omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ . Then  $\omega$  is said to be SMP-preferred to  $\omega'$ , denoted by  $\omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$ , iff the two following conditions are satisfied:

- $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , such that  $\kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$ , and
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , either  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') = 0$  or  $\kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$ .

The first condition means that  $\omega'$  should not be a model of  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$ , while the second condition means that each source, either the belief base provided by the source is consistent with both  $\omega$  and  $\omega'$ , or the source prefers  $\omega$  to  $\omega'$ .

As usual, given the  $\triangleleft_{SMP}^E$  ordering, we define the set of current beliefs, representing the result of merging, as:

$$Mod(Bel(\Delta_{SMP}^\mu(E))) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \triangleleft_{SMP}^E \omega\}.$$

The following proposition shows that this SMP-based merging operator allows us to recover the result of Max-based incommensurable merging.

**Proposition 7** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge,  $\blacktriangleleft_{Max}^E$  and  $\triangleleft_{SMP}^E$  be partial pre-orders given respectively by Definition 6 and Definition 12. Then,  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ :

$$\omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega' \text{ iff } \omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$$

Let us illustrate this proposition with the following example:

**Example 9 (continued)** Let us consider again  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	8	0	$\langle 8, 0 \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	1	$\langle 4, 1 \rangle$

Table 16: Profiles associated with interpretations

From Table 16,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$  are models of  $Bel(\Delta_{SMP}^\mu(E))$  because they are minimal with respect to  $\triangleleft_{SMP}^E$  ordering defined in Definition 12.

Hence,  $Bel(\Delta_{SMP}^\mu(E)) \equiv a \vee b$  for  $\mu = \top$ . This is exactly the same result as the one given in Example 4.

A complete study on the difference between Pareto-ordering and SMP-ordering is provided Section 6.2.

(\*)

## 5 Logical properties

This section analyzes logical properties of our Max-based incommensurable belief bases merging operator. Several rational postulates have been proposed (e.g. [KPP98]) for characterizing fusion operators under integrity constraints (see Section 2). These postulates were defined when each belief base  $B_i$  is represented by a propositional formula. In our framework, belief bases are represented by ranked belief bases. Some of these postulates need then to be adapted. For instance,  $B_1 \models \mu$  should be replaced by  $B_1^* \models \mu$ . Moreover **(IC3)** needs to be adapted by defining the equivalence between two multi-set of ranked knowledge base, denoted by  $\equiv_r$ . Two multisets of ranked belief bases  $E_1$  and  $E_2$  are equivalent if for each ranked base of  $E_1$ , there exists a ranked base in  $E_2$  inducing the same ranking function, given by Definition 2. More formally:  $E_1 \equiv_r E_2$  if and only if there exists a bijection  $f$  from  $E_1$  to  $E_2$  such that  $\forall \omega \in \Omega, \kappa_{f(B)}(\omega) = \kappa_B(\omega)$ . The postulates recalled in Section 2 are adapted as follows:

- (IC0)**  $Bel(\Delta^\mu(E)) \models \mu$ ,
- (IC1)** If  $\mu$  is consistent, then  $Bel(\Delta^\mu(E))$  is consistent;<sup>3</sup>
- (IC2')** If  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  is consistent with  $\mu$ , then  $Bel(\Delta^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B \in E} B^* \wedge \mu$ ,
- (IC3')** If  $E_1 \equiv_R E_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , then  $Bel(\Delta^{\mu_1}(\{E_1\})) \equiv Bel(\Delta^{\mu_2}(\{E_2\}))$ ,
- (IC4')** If  $B_1^* \models \mu$  and  $B_2^* \models \mu$ , then  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  is consistent  
iff  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^*$  is consistent,
- (IC5)**  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2)) \models Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2))$ ,
- (IC6)** If  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$  is consistent,  
then  $Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \models Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$ ,
- (IC7)**  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2 \models Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ ,
- (IC8)** If  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$  is consistent, then  $Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)) \models Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$ .

In the flat case, namely when belief bases are represented by the means of non-ranked propositional formulas, the Max-based merging operator proposed in [KPP02] satisfies all the original postulates but falsifies **(IC6)**. However, a weaker version of this postulate has been proposed in [KPP02], which adapted to our framework gives:

- (IC6')** If  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$  is consistent,  
then  $Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \models Bel(\Delta^\mu(E_1)) \vee Bel(\Delta^\mu(E_2))$ ;

The Max-based merging operator proposed for the flat case satisfies this weaker postulate.

### 5.1 Logical behavior without the commensurability assumption

In our framework, belief bases are represented by the means of incommensurable ranked belief bases. The following proposition shows that most of the above postulates are satisfied when merging with a max based operator:

**Proposition 8** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of ranked belief bases. Then  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfies **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2')**, **(IC3')**, **(IC4')**, **(IC5)**, and **(IC7)**.

---

<sup>3</sup>Please note that in our paper we assumed that the integrity constraint is always consistent. But of course our definition still works if  $\mu$  is inconsistent (in this case the result of merging is also inconsistent)

However,  $\Delta_{Max}^\mu$  falsifies **(IC6)**. Let us illustrate this fact by the following counter-example.

**Example 10** Let us consider  $\mu = \top$ ,  $E_1 = \{B_1 = \{(a, 1)\}, B_2 = \{(\neg a, 1)\}\}$  and  $E_2 = \{B_3 = \{(a, 1)\}\}$ . Tables 17, 18, and 19 provides profiles associated with interpretations for  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$ ,  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$  and  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$  respectively.

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	1	0	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$
$\omega_1$	0	1	1	0	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
$\omega_3$	1	1	0	1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$

Table 17: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$

	a	b	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	1	$\langle \mathbf{1} \rangle$
$\omega_1$	0	1	1	$\langle \mathbf{1} \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	$\langle \mathbf{0} \rangle$
$\omega_3$	1	1	0	$\langle \mathbf{0} \rangle$

Table 18: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	1	0	1	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
$\omega_1$	0	1	1	0	1	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	1	0	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$
$\omega_3$	1	1	0	1	0	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$

Table 19: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$

We have  $\Delta_{Max}^\mu(E_1) \equiv \top$  and  $\Delta_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . Furthermore, we have  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$ , but  $\Delta_{Max}^\mu(E_1) \wedge \Delta_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . Hence, **(IC6)** is not satisfied since  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$  is consistent, but  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \not\models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ .

In this example, the non-satisfaction of **(IC6)** is not surprising and should be viewed as a drawback. Indeed, in this example accepting the belief "a" in the result of merging means that we are ready to accept majority principle (since "a" is repeated twice instead of " $\neg a$ " which is only provided by one belief base).

Moreover,  $\Delta_{Max}^\mu$  falsifies **(IC6)'**. Let us illustrate this fact by the following counter-example.

**Example 11** Let us consider  $\mu = \top$ ,  $E_1 = \{B_1 = \{(a \vee b, 2), (\neg a \vee \neg b, 1)\}, B_2 = \{(a, 2), (b, 1)\}\}$  and  $E_2 = \{B_3 = \{(b, 2), (a, 1)\}\}$ . Tables 20, 21, and 22 provides profiles associated with interpretations for  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$ ,  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$  and  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$  respectively.

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	2	2	$\langle 2,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	2	$\langle 0,2 \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	1	$\langle 0,1 \rangle$
$\omega_3$	1	1	2	0	$\langle 2,0 \rangle$

 Table 20: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$ 

	a	b	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	2	$\langle 2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	1	$\langle 1 \rangle$
$\omega_2$	1	0	2	$\langle 2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	0	$\langle 0 \rangle$

 Table 21: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$ 

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	2	2	2	$\langle 2,2,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	2	1	$\langle 0,2,1 \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	1	2	$\langle 0,1,2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	1	0	0	$\langle 1,0,0 \rangle$

 Table 22: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$ 

We have  $\Delta_{Max}^\mu(E_1) \equiv a$  and  $\Delta_{Max}^\mu(E_2) \equiv a \wedge b$ . Furthermore, we have  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv a \vee b$ , but  $\Delta_{Max}^\mu(E_1) \vee \Delta_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . Hence, **(IC6)**' is not satisfied since  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$  is consistent, but  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \not\models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \vee Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ .

The Max-based incommensurable belief bases merging operator also falsifies **(IC8)**, as it is illustrated by the following counter-example:

**Example 12** Let us consider  $B_1 = \{((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b), 4), (\neg a, 2)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (a, 1)\}$ . Let us assume that  $\mu_1 = a \vee b$  and  $\mu_2 = a$

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	4	2	$\langle 4,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	1	$\langle 0,1 \rangle$
$\omega_2$	1	0	2	2	$\langle 2,2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	0	$\langle 4,0 \rangle$

Table 23: Profiles associated with interpretations

From Table 23, and using the SMP-ordering, we obtain  $\omega_1 \blacktriangleleft_{Max}^E \omega_0$  and  $\omega_1 \blacktriangleleft_{Max}^E \omega_2$ . Hence, considering  $\mu_1 = a \vee b$ , we obtain that  $\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(E) = \{\omega_1, \omega_3\}$ , and then  $\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 = \{\omega_3\}$ . However, we also have  $\blacktriangle_{Max}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) = \{\omega_2, \omega_3\}$ .

The non-satisfaction of (IC8) is due to the fact that when dealing with incommensurable belief bases,  $\blacktriangle_{Max}^E$  is only a partial order. For instance, in [EKM08b], the fusion mode based on partial order does not satisfy (IC8)

Lastly, there is another rational postulate which characterizes egalitarian merging operators, called *majority independence postulate*, proposed in [KPP02]. It describes the fact that the repetition of a same piece of information does not affect the result of merging. More formally:

**Definition 13 (MI)**  $\forall n, Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2^n)) \equiv Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2))$

In the commensurable case,  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfies (MI). The following proposition shows that in the incommensurable case,  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  also satisfies (MI):

**Proposition 9**  $\forall n, Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2^n)) \equiv Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2))$

Hence, the result of merging is fully independent of the repetition of the beliefs: it only takes into account each different view. As a corollary (also pointed in [KPP02]) of this proposition, we do not need to consider multi-sets of ranked belief bases, but only sets.

Majority independence postulate (MI) has been sometimes qualified as arbitration operator (see for instance [Mey00]). In [KPP98] arbitration is viewed as a weaker form of majority independence postulate defined by:

$$\forall B_1, \exists B_2, B_1^* \not\models B_2^*, \forall n, Bel(\Delta^\mu(B_1 \sqcup B_2^n)) \equiv Bel(\Delta^\mu(B_1 \sqcup B_2)).$$

Clearly, our merging operator satisfies this postulate since it satisfies (MI).

Another form of arbitration has been defined in [KPP02] for merging propositional belief bases. In the case of ranked belief bases, this postulate is adapted as follows. Let  $E = \{B_1, B_2\}$  be a multi-set composed of two ranked belief bases. Then:

$$\left. \begin{array}{l} Bel(\Delta^{\mu_1}(\{B_1\})) \equiv Bel(\Delta^{\mu_2}(\{B_2\})) \\ Bel(\Delta^{\mu_1 \equiv \neg \mu_2}(E)) \equiv (\mu_1 \equiv \neg \mu_2) \\ \mu_1 \not\models \mu_2 \\ \mu_2 \not\models \mu_1 \end{array} \right\} \text{implies } Bel(\Delta^{\mu_1 \vee \mu_2}(E)) \equiv Bel(\Delta^{\mu_1}(\{B_1\})),$$

Our merging operator  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  falsifies this postulate as it is illustrated by the following counter-example:

**Example 13** Let us consider a set of ranked belief bases  $E = \{B_1, B_2\}$ , where  $B_1 = \{(b, 1)\}$ , and  $B_2 = \{(a, 2), (a \wedge \neg b, 1)\}$ . Let us assume that  $\mu_1 \equiv a$  and  $\mu_2 \equiv b$ . Table 24 provides profiles respectively associated with each interpretation:

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	1	2	$\langle 1,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	2	$\langle 0,2 \rangle$
$\omega_2$	1	0	1	0	$\langle 1,0 \rangle$
$\omega_3$	1	1	0	1	$\langle 0,1 \rangle$

 Table 24: A counter-example for **(Arb)**

From Table 24, we have:

- $Mod(Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(B_1))) = Mod(Bel(\Delta_{Max}^{\mu_2}(B_2))) = \{\omega_3\}$ ;
- $Mod(\mu_1 \equiv \neg \mu_2) = \{\omega_1, \omega_2\}$ . From Table 24, and considering the SMP-based characterization, we obtain  $\omega_1 \not\triangleleft_E^\mu \omega_2$  and  $\omega_2 \not\triangleleft_E^\mu \omega_1$ . Hence,  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1 \equiv \neg \mu_2}(E)) \equiv (\mu_1 \equiv \neg \mu_2)$
- $Mod(\mu_1) = \{\omega_2, \omega_3\}$  and  $Mod(\mu_2) = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Hence,  $\mu_1 \not\models \mu_2$  and  $\mu_2 \not\models \mu_1$ .

Moreover, Table 24 gives that  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1 \vee \mu_2}(E))) = \{\omega_2, \omega_3\}$ , since we have  $\omega_3 \triangleleft_{Par}^E \omega_1$ , but  $\omega_2 \not\triangleleft_{Par}^E \omega_3$  and  $\omega_3 \not\triangleleft_{Par}^E \omega_2$ . However, by assumption,  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(B_1))) = \{\omega_3\}$ . Hence, on this example, **(Arb)** is not satisfied.

## 5.2 A comparison with the commensurable case

In the commensurable case,  $\Delta_{Max}^\mu$  falsifies **(IC6)**. Let us illustrate this fact by the following counter-example.

**Example 14** Let us consider again  $\mu = \top$ ,  $E_1 = \{B_1 = \{(a, 1)\}, B_2 = \{(\neg a, 1)\}\}$  and  $E_2 = \{B_3 = \{(a, 1)\}\}$ . Tables 25, 26, and 27 provide profiles associated with interpretations for  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$ ,  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$  and  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$  respectively.

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	1	0	$\langle 1,0 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_1$	0	1	1	0	$\langle 1,0 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_2$	1	0	0	1	$\langle 0,1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_3$	1	1	0	1	$\langle 0,1 \rangle$	<b>1</b>

 Table 25: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$ 

	a	b	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	1	$\langle 1 \rangle$	1
$\omega_1$	0	1	1	$\langle 1 \rangle$	1
$\omega_2$	1	0	0	$\langle 0 \rangle$	<b>0</b>
$\omega_3$	1	1	0	$\langle 0 \rangle$	<b>0</b>

 Table 26: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	1	0	1	$\langle 1,0,1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_1$	0	1	1	0	1	$\langle 1,0,1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_2$	1	0	0	1	0	$\langle 0,1,0 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_3$	1	1	0	1	0	$\langle 0,1,0 \rangle$	<b>1</b>

 Table 27: Profiles associated with interpretations, concerning  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$ 

We have  $\Delta_{Max}^\mu(E_1) \equiv \top$  and  $\Delta_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . Furthermore, we have  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$ , but  $\Delta_{Max}^\mu(E_1) \wedge \Delta_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . Hence, **(IC6)** is not satisfied since  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$  is consistent, but  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \not\models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ .

Moreover,  $\Delta_{Max}^\mu$  also falsifies **(IC4)'**. Let us illustrate this fact by the following counter-example.

**Example 15** Let us consider  $B_1 = \{(\neg a, 2), (b, 1)\}$  and  $B_2 = \{(a, 3), (b, 2)\}$ . Let us assume that  $\mu = a \vee b$ . Let us consider  $E = \{B_1, B_2\}$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Max( $\nu_E(\omega)$ )
$\omega_0$	0	0	1	3	$\langle 1,3 \rangle$	3
$\omega_1$	0	1	0	3	$\langle 0,3 \rangle$	3
$\omega_2$	1	0	2	2	$\langle 2,2 \rangle$	2
$\omega_3$	1	1	2	0	$\langle 2,0 \rangle$	2

Table 28: Profiles associated with interpretations

On this example, we have  $B_1 \models \mu$  and  $B_2 \models \mu$ . From Table 28, considering  $\mu = a \vee b$ , we obtain that  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_2, \omega_3\}$ , and then  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \equiv a$ . Hence, on this example,  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^*$  is consistent, but  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  is not.

The non-satisfaction of this postulate is clearly due to the commensurability assumption between ranks expressed by each source. One can remark that if, in a degenerate case, if a given source associates very large certainty degrees to formulas that it provides, while other sources use small certainty values, then the result of merging will be exactly the set of beliefs provided by that source.

The following proposition shows that  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfies most of the original postulates and **(IC6)'** but falsifies **(IC6)** and **(IC4)'** (as it was shown above):

**Proposition 10** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of ranked belief bases. Then  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfies **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)'**, **(IC3)'**, **(IC5)**, **(IC6)'**, **(IC7)** and **(IC8)**.

When assuming a commensurability between sources to merge, the standard Max-based ranked belief bases merging operator  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfies most of proposed rational postulates. However, and due to this commensurability assumption,  $\Delta_{Max}^\mu$  falsifies **(IC4)'**, which characterizes the *fairness* of a merging operator. When dealing with incommensurability by means of compatible scales, the Max-based merging operator  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfies again **(IC4)'**. However, and since this operator only establishes partial orders between possible worlds, falsifies **(IC8)** and **(IC6)'**.

## 6 Related works

This section focuses on some related works. More precisely, it shows how our method differs from other proposed method.

### 6.1 Merging without commensurability assumptions

There exist some approaches that merge stratified beliefs bases without commensurability assumptions. For instance, the approach proposed in [BDP99] in possibility theory framework, indeed drops the commensurability but assumes the existence of an ordering between stratified bases to merge. More precisely, the proposed approach is closed to what is known in social choice theory under the name "dictator" approach. The idea is to refine one ranking by the other. More precisely, to merge two ranked belief bases  $B_1$  and  $B_2$ , we first assume for instance that  $B_1$  has priority over  $B_2$ . The result of combination, represented by a total pre-ordering  $\leq_\pi$  on interpretation, is obtained from the following rules,  $\forall \omega, \omega'$

- if  $\kappa_{B_1}(\omega) < \kappa_{B_1}(\omega')$  then  $\omega <_\pi \omega'$ , and
- if  $\kappa_{B_1}(\omega) = \kappa_{B_1}(\omega')$  then  $\kappa_{B_2}(\omega) \leq \kappa_{B_2}(\omega') \omega \leq_\pi \omega'$

Clearly the combination result is simply the refinement of  $B_1$  (the dictator) by  $B_2$ . It consists of taking all conclusions given by  $B_1$  and adding as many conclusions as possible (with respect to consistency criterion) from  $B_2$ . This approach clearly is based on an assumption that priority relations between sources (belief bases to merge) are available. Our approach does not require such assumption.

Recently, an approach has been proposed to merge stratified belief bases [GLB06]. Basically, their approach can be described as follows: each stratified belief base, on the basis of same ordering strategy, induces a ranking between interpretations. Namely, possible interpretations are associated with vectors of priority levels in all the original belief bases. The result of merging are obtained by only considering interpretations whose associated vectors are minimal with respect to lexicographical ordering. The main problem with such approach is that priorities issued from different sources are considered to be comparable. Hence, commensurability assumption is not satisfied. In the sense that if some source assigns a rank  $i$  to some formula  $\varphi$ , and another source assigns a rank  $j$  to another formula  $\psi$ , if both sources use the same ordering strategy, then  $\varphi$  and  $\psi$  can be compared. In our approach,  $\varphi$  and  $\psi$  are not assumed to be comparable.

### 6.2 SMP-ordering vs. Pareto-ordering

Our SMP-ordering is very similar to the well-known Pareto ordering [Mou88]. The *Pareto criterion* is used to characterize *Pareto-optima* solutions. A solution is said to be Pareto-optimal when it is not possible to increase satisfaction of an agent (or a source) without reducing satisfaction of at least one other agent. This criterion is well-known in many areas such as economy or social choice theory [Mou88].

Adapted to our framework, the Pareto criterion can be informally described as follows: an interpretation is said to be Pareto-optimal if it is not possible to reduce the consistency degree associated with a given source without increasing the consistency degree associated with at least one other source. More formally:

**Definition 14 (Definition of  $\triangleleft_{Par}^E$ )** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a set of ranked belief bases to merge, and  $\omega, \omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ . Then  $\omega$  is said to be Pareto-preferred to  $\omega'$ , denoted by  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ , iff the two following conditions are satisfied:

- (i)  $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_j}(\omega) \leq \kappa_{B_j}(\omega')$ , and
- (ii)  $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$ .

The first condition means that  $\omega$  is at least as preferred as  $\omega'$  with respect to each belief base, while the second condition means that there exists at least one belief base which expresses a strict preference for  $\omega$ .

The SMP-ordering, defined in this paper, differs from the one induced by the Pareto criterion. More precisely, the following proposition shows that if an interpretation  $\omega$  is SMP-preferred to another interpretation  $\omega'$ , then  $\omega$  is also Pareto-preferred to  $\omega'$ . More formally:

**Proposition 11** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge,  $\triangleleft_{Par}^E$  and  $\triangleleft_{SMP}^E$  be partial pre-orders given respectively by Definition 14 and Definition 12. Then,  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ :

$$\text{if } \omega \triangleleft_{SMP}^E \omega' \text{ then } \omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$$

The converse is false, as it is shown by the following example:

**Example 16** Let us consider again  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	8	0	$\langle 8, 0 \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	1	$\langle 4, 1 \rangle$

Table 29: Profiles associated with interpretations

From Table 29, using Definitions 14 and 12, and regarding their respective associated profiles, we can check that  $\omega_1$  is Pareto-preferred to  $\omega_0$  but not SMP-preferred. The reason is that the first belief base  $B_1$  does not express any preference between these two interpretations, since both of them falsify the highest belief of  $B_1$ .

Hence, the Pareto ordering is a refinement of the SMP-ordering defined in this paper.

Let us now define the notion of strict Pareto-ordering :

**Definition 15 (Definition of  $\triangleleft_{ParSt}^E$ )** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a set of ranked belief bases to merge, and  $\omega, \omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ . Then  $\omega$  is said to be strict Pareto-preferred to  $\omega'$ , denoted by  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ , iff  $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_j}(\omega) < \kappa_{B_j}(\omega')$ .

Contrarily to Pareto ordering, our method is a refinement of strict Pareto-ordering, as shown by the following proposition.

**Proposition 12** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge,  $\triangleleft_{Par}^E$  and  $\triangleleft_{SMP}^E$  be partial pre-orders given respectively by Definition 15 and Definition 12. Then,  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ :

$$\text{if } \omega \triangleleft_{ParSt}^E \omega' \text{ then } \omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$$

The proof is immediate by directly considering Definition 12 and Definition 15.

## 7 Conclusions

This paper has addressed an issue which is not widely considered in belief fusion. It concerns the problem of merging incommensurable ranked belief bases, which is present in many applications. We have first proposed a natural way to merge incommensurable belief bases by considering the concept of compatible scales. A compatible scale is simply a re-assignment of ranks associated with beliefs in bases, such that the original relative ordering between beliefs is preserved. A compatible scale can hence be viewed as a common scale on which source agree.

We have shown that our merging operator can be characterized in terms of the family of bounded compatible scales, or only on the ordering induced by belief bases. Bounded compatible scales offer a natural way to select a set of compatible scales, since in practice common scales are bounded. Moreover, we have shown that it is possible to equivalently define the result of merging by ordering interpretations with respect to a variant of Pareto criterion, called SMP-ordering. This SMP-ordering is weaker than a standard pareto ordering, but stronger than a strict pareto ordering.

This paper has also studied rational postulates for our merging operator, and we showed that it satisfies most of rational postulates proposed for merging operators, even if commensurability is not assumed. In particular, if belief bases are consistent then the result of merging covers the conjunction of belief bases. Moreover, our merging operator is independent of the repetition of same formulas (namely it is majority independent), and is consensual in the sense that the result of merging is consistent with initial bases. A future work is to extend main ideas developed in this paper to other merging operators such as the sum-based merging operator.

## A Appendix

**Proposition 1** Let  $E$  be a set of ranked belief bases. Let  $\mathbb{S}_E$  be the set of all compatible scales with  $E$ . Then  $\mathbb{S}_E \neq \emptyset$ .

### Proof of Proposition 1

The proof is immediate. Let  $E$  be a multi-set of belief ranked bases. Let  $\mathcal{S}_{id}$  be the scale where  $\forall \varphi_{ij} \in B_i, \mathcal{S}_{id}(\varphi_{ij}) = R_i(\varphi_{ij})$ . By definition, this scale is a compatible one, namely  $\mathcal{S}_{id} \in \mathbb{S}_E$ , since it trivially preserves the relative orders between beliefs inside each belief base.

**Proposition 2** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases, and  $\omega$  be an interpretation of  $\Omega$ . Then,

$$\omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) \text{ iff } \exists \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E^\mathcal{S}))).$$

In order to prove Proposition 2, we first need to show the following Lemma. It says that if  $\omega'$  is not

strictly preferred to  $\omega$ , and  $\omega$  is not a model of each  $B_i^*$ , then there exists a belief base  $B_j$  where  $\omega$  is at least as preferred as  $\omega'$ .

**Lemma 1** *Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases, and  $\omega, \omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ . Then*

*if  $(\omega' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega)$  and  $(\exists B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega) \neq 0)$  then  $\exists B_j \in E$  such that  $\kappa_{B_j}(\omega') \geq \kappa_{B_j}(\omega)$ .*

**Proof of Lemma 1** Let us assume that  $\omega' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega$  and  $\exists B_i \in E$  such that  $\kappa_{B_i}(\omega) \neq 0$ . Hence, by definition of  $\blacktriangleleft_{Max}^E$  (Definition 6), there exists a compatible scale  $S \in \mathbb{S}_E$  such that  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^S} \omega$ . Applying the definition of  $\triangleleft_{Max}^E$  (Definition 3), we obtain, for this compatible scale  $S$ ,  $\max(\nu_{E^S}(\omega')) \geq \max(\nu_{E^S}(\omega)) > 0$ . Indeed, if  $\max(\nu_{E^S}(\omega)) = 0$ , then for each  $B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k^S}(\omega) = 0$ . This means that  $\omega$  is a model of each  $B_k \in E$ , namely  $\forall B_k \in E, \kappa_{B_k}(\omega) = 0$  which is impossible and contradicts our assumption.

Let  $B_j$  be a belief base of  $E$  such that  $\kappa_{B_j^S}(\omega') = \max(\nu_{E^S}(\omega'))$ . Since  $\max(\nu_{E^S}(\omega')) \geq \max(\nu_{E^S}(\omega))$ , we have  $\kappa_{B_j^S}(\omega') \geq \kappa_{B_j^S}(\omega)$ .

Let  $\varphi$  be a formula of  $B_j^*$  such that  $S(\varphi) = \kappa_{B_j^S}(\omega)$ . Namely,  $\varphi$  is the highest formula falsified by  $\omega$ , which means that  $\forall \psi \in B_j$  such that  $\omega \not\models \psi$ ,  $S(\psi) \leq S(\varphi)$ . Let  $\varphi'$  be a formula of  $B_j^*$  such that  $S(\varphi') = \kappa_{B_j^S}(\omega')$ . Again,  $\varphi'$  is the highest formula falsified by  $\omega$ , which means that  $\forall \psi' \in B_j$  such that  $\omega' \not\models \psi'$ ,  $S(\psi') \leq S(\varphi')$ . Hence, we have for this compatible  $S$ ,  $\exists B_j \in E$ ,  $S(\varphi') \geq S(\varphi)$ . Using the definition of compatible scale, we obtain that  $\exists B_j \in E$ ,  $R_{B_j}(\varphi') \geq R_{B_j}(\varphi)$  since  $R_{B_j}(\varphi) \geq R_{B_j}(\varphi')$  iff  $S(\varphi) \geq S(\varphi')$ . Using the previous construction of  $\varphi$  and  $\varphi'$ , we finally obtain that  $\exists B_j \in E$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega') \geq \kappa_{B_j}(\omega)$

### Proof of Proposition 2

#### Proof of the first part of Proposition 2

Let us show that if  $\omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)))$ , then there exists a compatible scale  $S \in \mathbb{S}_E$  such that  $\omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E^S)))$ . Let  $\omega$  be a possible interpretation of  $\Omega$ . Assume that  $\omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)))$ . Let  $S$  be a compatible scale on  $E$  (such  $S$  always exists using Proposition 1). From  $S$ , let us build a new compatible scale  $S'$  such that  $\omega \in Mod(\Delta_{Max}^\mu(E^{S'}))$ . Let us first consider  $B_i$  such that  $\kappa_{B_i^S}(\omega) = \max(\nu_{E^S}(\omega))$ .  $S'$  is defined as follows:

- $\forall \varphi \in B_i^*, S'(\varphi) = S(\varphi) ;$
- $\forall B_j \in E, j \neq i,$ 
  - if  $\omega \models B_j^*, \forall \varphi \in B_j^*, S'(\varphi) = S(\varphi) + \kappa_{B_i^S}(\omega) ;$
  - if  $\omega \not\models B_j^*$ , let  $\varphi_{jk}$  be a formula of  $B_j^*$  such that  $S(\varphi_{jk}) = \kappa_{B_j^S}(\omega)$ . Then,  $\forall \varphi \in B_j^*$ 
    - \* if  $S(\varphi) < S(\varphi_{jk})$ , then  $S'(\varphi) = S(\varphi) ;$
    - \* otherwise  $S'(\varphi) = S(\varphi) + \kappa_{B_i^S}(\omega) - \kappa_{B_j^S}(\omega).$

Let us first give some remarks on this construction of compatible scale. Since  $\kappa_{B_i^S}(\omega) = \max(\nu_{E^S}(\omega))$ , we have that  $\kappa_{B_i^S}(\omega) - \kappa_{B_j^S}(\omega) \geq 0$ .

One can also remark that  $S'$  is a compatible scale. Indeed, recall that A compatible scale is simply a re-assignment of ranks associated with beliefs in bases, such that the original relative ordering between beliefs is preserved. Recall also that  $S'$  is based on a compatible scale  $S$ . From the construction of  $S'$  we can distinguish three cases :

- For the belief base  $B_i$ , by definition we have  $\forall \varphi \in B_i^*, S'(\varphi) = S(\varphi)$  ; and since  $S$  is a compatible scale, then  $S'$  also preserves the original relative ordering between beliefs of  $B_i$ .
- For belief bases  $B_j$  where  $j \neq i$  and  $\omega \models B_j^*$ , by construction, we have  $\forall \varphi \in B_j^*, S'(\varphi) = S(\varphi) + \kappa_{B_i^S}(\omega)$ . Again since  $S$  is compatible, and  $S'$  only adds a same rank (a same constant) to all beliefs of  $B_j$ , then  $S'$  also preserves the original relative ordering between beliefs of  $B_j^*$ .
- For belief bases  $B_j$  where  $j \neq i$  and  $\omega \not\models B_j^*$ , then by construction, formulas  $\varphi$  of  $B_j$  such that  $S(\varphi) < S(\varphi_{jk})$ , we have  $S'(\varphi) = S(\varphi)$ . Hence for formulas  $\varphi$  of  $B_j$  which are less important than  $S(\varphi_{jk})$ ,  $S'$  preserves their relative ordering since  $S$  is a compatible scale. For other formulas (namely those that are at least as important than  $S(\varphi_{jk})$ ), then  $S'$  only adds a same rank (a same constant) to all these important beliefs of  $B_j$ , and hence  $S'$  also preserves the original relative ordering between these important beliefs. Therefore  $S'$  preserves the original relative ordering between all beliefs of  $B_j$ .

By construction, we also have  $\max(\nu_{E^{S'}}(\omega)) = \kappa_{B_i^S}(\omega)$ . Indeed,

- either  $k = i$ . Since  $\forall \varphi \in B_i, S'(\varphi) = S(\varphi)$ , we have  $\kappa_{B_k^{S'}}(\omega) = \kappa_{B_i^{S'}}(\omega) = \kappa_{B_i^S}(\omega)$ ;
- or  $k \neq i$ . At this step, either  $\omega \models B_k^*$ , and  $\kappa_{B_k^{S'}}(\omega) = 0$ ; or  $\omega \not\models B_k^*$ . Let  $\varphi_{kl}$  be the highest formula of  $B_k^*$  such that  $S(\varphi_{kl}) = \kappa_{B_k^S}(\omega)$ . Since  $S(\varphi_{kl}) \not\leq S(\varphi_{kl})$ , we obtain  $S'(\varphi_{kl}) = S(\varphi_{kl}) + \kappa_{B_i^S}(\omega) - \kappa_{B_k^S}(\omega)$ . We finally obtain  $\kappa_{B_k^{S'}}(\omega) = \kappa_{B_k^S}(\omega) + \kappa_{B_i^S}(\omega) - \kappa_{B_k^S}(\omega) = \kappa_{B_k^S}(\omega)$ .

Since  $\kappa_{B_k^{S'}}(\omega) = \kappa_{B_k^S}(\omega)$  or  $\kappa_{B_k^{S'}}(\omega) = 0$ , we obtain  $\max(\nu_{E^{S'}}(\omega)) = \kappa_{B_i^S}(\omega)$ .

Let us show that  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Delta_{\text{Max}}^\mu(E^{S'})))$ . We know that  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Delta_{\text{Max}}^\mu(E)))$  (by assumption). Hence,  $\forall \omega' \in \text{Mod}(\mu)$  when  $\omega' \neq \omega$ , we have  $\omega' \not\models_{\Delta_{\text{Max}}^\mu} E^{S'}$ . Let us show that  $\forall \omega' \in \text{Mod}(\mu)$  when  $\omega' \neq \omega$ , we also have  $\omega' \not\models_{\Delta_{\text{Max}}^\mu} E^{S'}$ . Let  $\omega'$  be a model of  $\mu$ , such that  $\omega' \neq \omega$ . We have two cases:

- either  $\omega'$  is model of each belief base  $B_i$ , namely  $\forall B_i^{S'} \in E^{S'}, \omega' \models (B_i^{S'})^*$ . Hence,  $\bigwedge_{B_i \in E} B_i^*$  is consistent. Since  $\omega$  is a model of  $\text{Bel}(\Delta_{\text{Max}}^\mu(E))$ , and since  $\Delta_{\text{Max}}^\mu$  satisfies (IC2'), we obtain that  $\omega$  is a model of  $\bigwedge_{B_i \in E} B_i^*$ , since  $\text{Bel}(\Delta_{\text{Max}}^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu$ . Using (IC2') again, since  $\Delta_{\text{Max}}^\mu$  also satisfies this postulate, we obtain  $\omega \models \text{Bel}(\Delta_{\text{Max}}^\mu(E^{S'})) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu$ . Hence, we obtain  $\omega' \not\models_{\Delta_{\text{Max}}^\mu} E^{S'}$ ;
- or there exists a belief base  $B_j$  such that  $\omega'$  is not model of  $B_j^*$ . By definition,  $\omega'$  is neither a model of  $(B_j^{S'})^*$ . Let  $\varphi$  be the highest formula of  $B_j$  falsified by  $\omega'$ . Again, we consider two cases:

- either  $\omega$  is a model of  $B_j^*$ . Hence, by construction of  $S'$ ,  $\kappa_{B_j^{S'}}(\omega') = (\kappa_{B_j^S}(\omega') + \kappa_{B_i^S}(\omega))$  (since  $\omega$  is a model of  $B_j$ ). In that case,  $\kappa_{B_j^{S'}}(\omega') \geq \max(\nu_{E^{S'}}(\omega)) = \kappa_{B_i^S}(\omega)$ . Hence,  $\max(\nu_{E^{S'}}(\omega')) \geq \max(\nu_{E^{S'}}(\omega))$ . Finally, using the definition of  $\triangleleft_{Max}^{E^{S'}}$ , we obtain  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E^{S'}} \omega$ ;
- or  $\omega$  is not a model of  $B_j^*$ . By definition,  $\omega$  is neither a model of  $(B_j^{S'})^*$ . Let  $\varphi'$  be the highest formula of  $B_j$  falsified by  $\omega$ . Again, two cases are possible:
  - \* either  $S'(\varphi') \geq S'(\varphi)$ . Hence, by definition,  $\kappa_{B_j^{S'}}(\omega') \geq \kappa_{B_j^S}(\omega)$ . Since, by construction,  $\kappa_{B_j^{S'}}(\omega) = \max(\nu_{E^{S'}}(\omega))$ , we finally obtain  $\max(\nu_{E^{S'}}(\omega')) \geq \max(\nu_{E^{S'}}(\omega))$ . Hence,  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S'}} \omega$ ;
  - \* or  $S'(\varphi') < S'(\varphi)$ . Since  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S'}} \omega$  and  $\exists B_i \in E$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) \neq 0$ , using Lemma 1, we obtain that  $\exists B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k}(\omega') \geq \kappa_{B_k}(\omega)$ . Thus,  $\exists \varphi \in B_k, \omega \not\models \varphi$  and  $\exists \varphi' \in B_k, \omega' \not\models \varphi'$ . Using the definition of compatible scales, we obtain that  $\exists B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k^{S'}}(\omega') \geq \kappa_{B_k^S}(\omega) > 0$ . Hence, considering the construction of  $S'$ , we obtain that  $\max(\nu_{E^{S'}}(\omega')) \geq \max(\nu_{E^{S'}}(\omega))$ , and finally  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S'}} \omega$ .

Thus,  $\forall \omega' \in Mod(\mu), \omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S'}}$ . Hence, there exists a compatible scale  $S$  in  $\mathbb{S}_E$ , namely  $S'$ , such that  $\omega \in Mod(Bel\Delta_{Max}^\mu(E^S))$ .

#### Proof of the other part of Proposition 2

Let us now show the other direction of the proposition, namely if  $\exists S \in \mathbb{S}_E$ ,  $\omega \in Mod(Bel\Delta_{Max}^\mu(E^S))$ , then  $\omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)))$ . Let us assume that there exists a compatible scale  $S$  in  $\mathbb{S}_E$  such that  $\omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E^S)))$ . Then by definition, for this compatible scale, for each  $\omega' \in \Omega$ ,  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^S} \omega$ . Hence, for each  $\omega' \in \Omega$ , there exists a compatible scale  $S$  in  $\mathbb{S}_E$  such that  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^S} \omega$ . Therefore,  $\forall \omega' \in \Omega$ ,  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^E \omega$ .

**Proposition 3** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of belief bases to merge, and  $\mu$  be a propositional formula representing integrity constraints. Then,

$$\forall B_i \in E, \text{ if } B_i \models \mu, \text{ then } B_i^* \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \text{ is consistent.}$$

**Proof of Proposition 3** See the proof of Proposition 8 (**IC2'**).

**Proposition 4** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of belief bases to merge, and  $\mu$  be a propositional formula representing integrity constraints. Then,

$$\forall B_i \in E, \text{ if } B_i \models \mu, \text{ then } B_i^* \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \text{ is consistent.}$$

**Proof of Proposition 4** Let  $B_i$  be a belief base of  $E$ . Let us assume that  $B_i \models \mu$ . In this paper, each source  $B_j$  is assumed to be consistent. Let  $\omega$  be a model of  $B_i^*$  (we know by assumption that

$\omega$  is also a model of  $\mu$ ) such that  $\nexists \omega' \in Mod(B_i^*)$ ,  $\omega' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega$ . We know that  $\kappa_{B_i}(\omega) = 0$ .

Let  $\omega''$  be an interpretation of  $\mu$ . Two cases are possible:

- either  $\omega'' \models B_i^*$  and by assumption,  $\omega'' \not\blacktriangleleft_{Max}^E \omega$ ;
- either  $\omega'' \not\models B_i^*$ . Hence, we have  $\kappa_{B_i}(\omega'') > 0$  and then  $\omega'' \not\blacktriangleleft_{SMP}^E \omega$ . Using the SMP-ordering equivalence (see Proposition 7), we obtain  $\omega'' \not\blacktriangleleft_{Max}^E \omega$ .

Hence, we obtain  $\nexists \omega'' \in Mod(\mu)$ ,  $\omega'' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega$ . Namely,  $\omega$  is a model of  $B_i^*$  and  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ . Hence,  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \wedge B_i^*$  is consistent.

**Proposition 5** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge. Then,

$$\forall p \geq [p], \forall \omega, \omega' \in \Omega : \omega \blacktriangleleft_{Max-p}^E \omega' \text{ iff } \omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega',$$

with  $[p] = \sum_{i=1,\dots,n} |B_i|$ .

**Proof of Proposition 5** Let  $\omega$  and  $\omega'$  be two possible interpretations of  $\Omega$ . Let us assume that  $\omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega'$ . By definition, for each compatible scale in  $\mathbb{S}_E$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . Because  $\mathbb{S}_p^E \subset \mathbb{S}_E$ , for each compatible scale in  $\mathbb{S}_E^p$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . Hence, by definition,  $\omega \blacktriangleleft_{Max-p}^E \omega'$ .

Let us now assume that  $\omega \not\blacktriangleleft_{Max}^E \omega'$ . By definition, there exists a compatible scale  $S$  in  $\mathbb{S}_E$  such that  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . At this step, there are two cases to consider:

- either  $S$  is in  $\mathbb{S}_E^p$ , and by definition  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$  ;
- or  $S$  is in  $\mathbb{S}_E \setminus \mathbb{S}_E^p$ . Let  $\{r_1, \dots, r_n\}$  be the set of ranks used in  $S$ , such that  $r_i < r_j$  iff  $i < j$ . Note that  $n$  is less than  $[p]$ , hence less than  $p$ . Let now define a new compatible scale  $S'$ , such that  $S(\varphi) = r_i$  iff  $S'(\varphi) = i$ . Since  $S$  is compatible, then  $S'$  is also compatible. Now,  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$  implies  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^{S'}} \omega'$ . Indeed  $Max(\nu_{E^S}(\omega)) = r_j > Max(\nu_{E^S}(\omega')) = r_k$  iff  $Max(\nu_{E^{S'}}(\omega)) = j > Max(\nu_{E^{S'}}(\omega')) = k$

Hence, in both cases, there exists a compatible scale in  $\mathbb{S}_E^p$  such that  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ , and by definition,  $\omega \blacktriangleleft_{Max-p}^E \omega'$

**Proposition 6** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge. Then,

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega : \omega \blacktriangleleft_<^E \omega' \text{ iff } \omega \Delta_{Max}^\mu \omega'.$$

**Proof of Proposition 6** Let  $\mathbb{O}_E$  be the set of all compatible orderings (see Definition 9) with  $E$ . For each of this compatible ordering  $<_c$  in  $\mathbb{O}_E$ , it is possible to build an associated compatible scale as follows:

a compatible scale  $S$ , associated with  $<_c$ , is such that for each pair of formulas  $\varphi, \psi$  in  $\bigcup B_i^*$ ,  $S(\varphi) < S(\psi)$  iff  $\varphi <_c \psi$ . Let us build this compatible scale as follows:  $\forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i$ ,

$\mathcal{S}(\varphi) = |\{\psi \in B_i R_{B_i}(\psi) < R_{B_i}(\varphi)\}| + 1$ . Informally, each formula is associated with the number of less important formulas issued from the same belief base. Hence,  $<_c$  preserves the relative ordering between formulas from each belief base of  $E$  (see Definition 9), namely  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ .

Let us now show that  $<_c$  and  $\mathcal{S}$  induce the same ordering on interpretations of  $\Omega$ . Namely, let us show that  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega' \text{ iff } \omega \triangleleft_c \omega'$ .

Let us first show that if  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$  then  $\omega \triangleleft_c \omega'$ . Assume that  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . Hence, by definition,  $Max(\nu_{E^S}(\omega)) < Max(\nu_{E^S}(\omega'))$ . Hence, for each  $\varphi \in \bigsqcup B_i^*$  such that  $\omega' \not\models \varphi$ , there exists  $\psi \in \bigsqcup B_i^*$ :  $\omega \not\models \psi$ , such that  $\mathcal{S}(\varphi) < \mathcal{S}(\psi)$ . By definition of  $\mathcal{S}$  associated with  $<_c$ , we also have that  $\varphi <_c \psi$ . Hence, by definition,  $\omega \triangleleft_c \omega'$ .

Let us now show that if  $\omega \triangleleft_c \omega'$  then  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . Let us suppose that  $\omega \triangleleft_c \omega'$ . Hence, by definition of  $\triangleleft_c$ , we know that for each  $\varphi \in \bigsqcup B_i^*$  such that  $\omega \not\models \varphi$ , there exists  $\psi \in \bigsqcup B_i^*$  such that  $\omega' \not\models \psi$  and  $\varphi <_c \psi$ . Hence, by definition of  $\mathcal{S}$  associated with  $<_c$ , we also have that  $\mathcal{S}(\varphi) < \mathcal{S}(\psi)$ . Hence, we obtain that  $Max(\nu_{E^S}(\omega)) < \kappa_{B_i}(\omega')$ , and by definition,  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ .

**Proposition 7** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge. Then,

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega : \omega \blacktriangleleft_{Max}^{E^S} \omega' \text{ iff } \omega \triangleleft_{SMP}^{E^S} \omega'$$

**Proof of Proposition 7** Let  $\omega$  and  $\omega'$  be two interpretations. There are three cases to consider:

- $\omega$  and  $\omega'$  are both models of  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$ . Then  $\omega$  and  $\omega'$  are both minimal with respect to  $\triangleleft_{SMP}$ , and minimal with respect to  $\blacktriangleleft_{Max}^E$ .
- $\omega$  is a model of  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$  and  $\omega'$  is not. Hence,  $\omega$  is minimal with respect to  $\triangleleft_{SMP}$  and  $\omega'$  is not, and  $\omega$  is minimal with respect to  $\blacktriangleleft_{Max}^E$  and  $\omega'$  is not. In both case,  $\omega$  is preferred to  $\omega'$ .
- neither  $\omega$  nor  $\omega'$  models of  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$ .

– First, let us show that  $\omega \triangleleft_{SMP} \omega'$  implies  $\omega \blacktriangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . By contraposition, let us assume that  $\omega \not\blacktriangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ ; then by definition of  $\blacktriangleleft_{Max}^E$ , there exists  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  such that  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . Namely, there exists  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  such that  $Max(\kappa_{B_i^S}(\omega), i = 1, \dots, n) \geq Max(\kappa_{B_i^S}(\omega'), i = 1, \dots, n)$ .

Hence, there exists  $B_i$  in  $E$  such that there exists  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{S}_E$  where  $\kappa_{B_i^S}(\omega) \geq Max(\kappa_{B_i^S}(\omega'), i = 1, \dots, n)$ . Namely, there exists  $B_i \in E$  and  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  such that  $\kappa_{B_i^S}(\omega) \geq \kappa_{B_i^S}(\omega')$ , where  $\kappa_{B_i^S}(\omega) \neq 0$  (since  $Max(\kappa_{B_i^S}(\omega)) > 0$  due to the fact that  $\omega$  is not a model) and  $\kappa_{B_i^S}(\omega') \neq 0$  (due to the same reasons). Because  $\mathcal{S}$  is assumed to be compatible, there exists  $B_i$  in  $E$  such that  $\kappa_{B_i}(\omega) \geq \kappa_{B_i}(\omega')$ . Using definition of  $\triangleleft_{SMP}$ , we obtain that  $\omega \not\triangleleft_{SMP} \omega'$ ;

– Let us now show that  $\omega \triangleleft_{SMP} \omega'$  implies  $\omega \blacktriangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . By contraposition, suppose that  $\omega \not\blacktriangleleft_{Max}^{E^S} \omega'$ . This means that there exists  $B_i$  in  $E$  such that  $\kappa_{B_i}(\omega) \geq \kappa_{B_i}(\omega')$ . Hence, it is possible to build a compatible scale such that  $\kappa_{B_k^S}(\omega) = Max(\nu_{B_k^S}(\omega), k = 1, \dots, n)$

and  $\kappa_{B_i^S}(\omega') = \text{Max}(\nu_{B_i^S}(\omega'), k = 1, \dots, n)$ . Let  $\varphi_i$  be a formula of  $B_i^*$  such that  $\kappa_{B_i^S}(\omega) = \mathcal{S}(\varphi_i)$ . Hence, it is enough to have a compatible scale where new ranks of  $\varphi_j \in B_j \neq B_i$  are in  $\{1, \dots, \max_{k \neq i}(|B_k|)\}$  and ranks of  $B_i$  are in  $\{\max_{k \neq i}(|B_k|) + 1, \dots, \max_{k \neq i}(|B_k|) + |B_i| + 1\}$ . Using definition of  $\triangleleft_{\text{Max}}^{E^S}$ , from this compatible, we have  $\omega \not\triangleleft_{\text{Max}}^{E^S} \omega'$ . Using definition of  $\blacktriangleleft_{\text{Max}}^E$ , we finally get  $\omega \blacktriangleleft_{\text{Max}}^E \omega'$ .

**Proposition 11** Let  $E$  be a multi-set of ranked belief bases to merge. Then,

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega : \text{if } \omega \triangleleft_{\text{SMP}}^E \omega' \text{ then } \omega \triangleleft_{\text{Par}}^E \omega'$$

**Proof of Proposition 11** Let  $\omega$  and  $\omega'$  be two interpretations of  $\Omega$ . Let us assume that  $\omega \triangleleft_{\text{SMP}}^E \omega'$ . Hence, by definition, there exists  $i \in \{1, \dots, n\}$ , such that  $\kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$ , and for all  $i \in \{1, \dots, n\}$ , either  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') = 0$  or  $\kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$ . Hence, we have straightforwardly that for all  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega) \leq \kappa_{B_j}(\omega')$ , and there exists  $i \in \{1, \dots, n\}$  such that  $\kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$ .

**Proposition 8** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of ranked belief bases. Then  $\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu$  satisfies (IC0), (IC1), (IC2'), (IC3'), (IC4'), (IC5), and (IC7).

#### Proof of Proposition 8

- (IC0)  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E)) \models \mu$

We recall that  $\mathcal{L}$  is assumed to be a finite propositional language. The proof is immediate. By definition,  $\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E))) = \{\omega \in \text{Mod}(\mu) : \omega' \in \text{Mod}(\mu), \omega' \blacktriangleleft_{\text{Max}}^E \omega\}$ . Hence,  $\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E))) \subseteq \text{Mod}(\mu)$  and  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E)) \models \text{Mod}(\mu)$ .

- (IC1) If  $\mu$  is consistent, then  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E))$  is consistent

$\mathcal{L}$  is a finite propositional language. Assume that  $\mu$  is consistent (in fact,  $\mu$  is assumed to be consistent in this paper). Hence,  $\text{Mod}(\mu)$  is finite and  $\text{Mod}(\mu) \neq \emptyset$ .  $\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E))) = \{\omega \in \text{Mod}(\mu) : \omega' \in \text{Mod}(\mu), \omega' \blacktriangleleft_{\text{Max}}^E \omega\}$  is a non-empty subset of  $\text{Mod}(\mu)$ . Let us assume that  $\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E)))$  is empty. Then, by definition of  $\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu$ ,  $\forall \omega \in \text{Mod}(\mu)$ ,  $\exists \omega' \in \text{Mod}(\mu)$ ,  $\omega' \blacktriangleleft_{\text{Max}}^E \omega$ . This situation is clearly absurd. Hence  $\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E)))$  is consistent.

- (IC2') If  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  is consistent with  $\mu$ , then  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B \in E} B^* \wedge \mu$

This also provides a proof for Proposition 3

Let us first show that if  $\omega$  is model of  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , then  $\omega$  is also model of  $\text{Bel}(\triangle_{\text{Max}}^\mu(E))$ . Assume that  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  is consistent. Hence, there exists  $\omega$  which is model of  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ . Hence, for each belief base  $B_i$ ,  $k_{B_i}(\omega) = 0$  and for each compatible scale  $S$ , the profile associated with  $\omega$  will be such that  $\nu_{ES}(\omega) = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ . In other words, for each compatible scale,  $\text{Max}(\nu_{ES}) = 0$ . Hence,  $\omega$  is minimal.

Let us show that if  $\omega$  is not model of  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , then  $\omega$  is not model of  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^\mu(E))$ . Assume that  $\omega'$  is an interpretation which falsifies at least one belief base  $B_i$ . Hence, there exists

at least one belief base  $B_i$  such that  $k_{B_i}(\omega) > 0$  and for each compatible scale,  $\text{Max}(\nu_{E^S}) > 0$ .  $\omega'$  is not minimal.

- **(IC3')** If  $E_1 \equiv_R E_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , then  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu_1}(\{E_1\})) \equiv \text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu_2}(\{E_2\}))$   
 Assume that  $E_1 \equiv_R E_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$ . Let  $\omega$  be a model of  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu_1}(E))$ :  $\omega$  is a model of  $\mu_1$  minimal with respect to  $\blacktriangle_{\text{Max}}^{E_1}$ . Because  $\mu_1 \equiv \mu_2$  then  $\omega$  is also model of  $\mu_2$  (and conversely). Because  $\omega$  is minimal with respect to  $\blacktriangle_{\text{Max}}^{E_1}$ , then  $\omega$  is minimal with respect to  $\triangle_{\text{SMP}}^{E_1}$ . By definition of  $E_1 \equiv_R E_2$  and  $\triangle_{\text{SMP}}^{E_1}$ ,  $\omega$  is minimal with respect to  $\triangle_{\text{SMP}}^{E_2}$  (and conversely) and is also minimal with respect to  $\blacktriangle_{\text{Max}}^{E_2}$ .
- **(IC4')** If  $B_1^* \models \mu$  and  $B_2^* \models \mu$ , then  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  is consistent iff  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^*$  is consistent.  
 Let us assume that  $B_1 \models \mu$  and  $B_2 \models \mu$ . Hence, using Proposition 4 on  $B_1$  and  $B_2$ , we trivially obtain that  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  is consistent and  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^*$  is consistent.
- **(IC5)**  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_1)) \wedge \text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_2)) \models \text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$   
 Let  $\omega$  be a model of  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_1))$  and  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_2))$ . By definition, and using the SMP-based characterization, for each  $\omega'$  which is model of  $\mu$ , we have  $\omega' \not\triangle_{\text{SMP}}^{E_1} \omega$  and  $\omega' \not\triangle_{\text{SMP}}^{E_2} \omega$ . Again, by definition of  $\triangle_{\text{SMP}}$ , we obtain that  $\omega \not\triangle_{\text{SMP}}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$  and  $\omega \in \text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ .
- **(IC7)**  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E)) \wedge \mu_2 \models \text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$   
 Let  $\omega$  be a model of  $\mu_2$  and  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu_1}(E))$ . Then  $\omega$  is a model of  $\mu_2$  and  $\mu_1$  minimal with respect to  $\blacktriangle_{\text{Max}}^E$  and then, by definition, a model of  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

**Proposition 9** (MI)  $\forall n, \text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2^n)) \equiv \text{Bel}(\blacktriangle_{\text{Max}}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$

#### Proof of Proposition 9

Let  $\omega$  and  $\omega'$  be two interpretations of  $\Omega$  such that  $\omega \blacktriangle_{\text{Max}}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$ . Hence, we know that  $\omega \triangle_{\text{SMP}}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$ . Using the definition of  $\triangle_{\text{SMP}}$ , we obtain directly (and reciprocally) that for all  $n \in \mathbb{N}$   $\omega \triangle_{\text{SMP}}^{E_1 \sqcup E_2^n} \omega'$ . Hence,  $\omega \blacktriangle_{\text{Max}}^{E_1 \sqcup E_2^n} \omega'$ .

**Proposition 10** Let  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  be a multi-set of ranked belief bases. Then  $\triangle_{\text{Max}}^{\mu}$  satisfies (IC0), (IC1), (IC2'), (IC3'), (IC5), (IC6'), (IC7) and (IC8).

#### Proof of Proposition 10

- **(IC0)**  $\text{Bel}(\triangle_{\text{Max}}^{\mu}(E)) \models \mu$   
 This proof is exactly the same as the one used in Proposition 8 (IC0).
- **(IC1)** If  $\mu$  is consistent, then  $\text{Bel}(\triangle_{\text{Max}}^{\mu}(E))$  is consistent  
 This proof is exactly the same as the one used in Proposition 8 (IC1).

## B.6 JLC'09 : Max-Based Prioritized Information Fusion Without Commensurability

- **(IC2')** If  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  is consistent with  $\mu$ , then  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B \in E} B^* \wedge \mu$   
 Let us assume that  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  is consistent with  $\mu$ . Then, there exists  $\omega \in Mod(\mu)$  such that  $\omega \models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Since  $\omega$  is a model of each belief base  $B_i^*$ , then  $\forall B_i \in E$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) = 0$ , and then  $Max(\nu_E(\omega)) = 0$ .

Let  $\omega'$  be a model of  $\mu$ . Two cases are possible:

1. either  $\omega' \models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Since  $\omega'$  is a model of each belief base  $B_i^*$ , then  $\forall B_i \in E$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega') = 0$ , and then  $Max(\nu_E(\omega')) = 0$ . By definition,  $\nexists \omega'' \in Mod(\mu)$  such that  $Max(\nu_E(\omega'')) < Max(\nu_E(\omega')) = 0$ . Hence,  $\nexists \omega'' \in Mod(\mu)$  such that  $\omega'' \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , and  $\omega' \in Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ ;
  2. or  $\omega' \not\models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . In that case,  $\exists B_i \in E$  such that  $\kappa_{B_i}(\omega') > 0$ , and then  $Max(\nu_E(\omega')) > 0$ . Hence, since  $Max(\nu_E(\omega)) = 0$ ,  $Max(\nu_E(\omega)) < Max(\nu_E(\omega'))$ . Hence, we obtain that  $\exists \omega \in Mod(\mu)$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Finally,  $\omega' \notin Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ .
- **(IC3')** If  $E_1 \equiv_R E_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , then  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(\{E_1\})) \equiv Bel(\Delta_{Max}^{\mu_2}(\{E_2\}))$   
 Let us assume that  $E_1 \equiv_R E_2$  and  $\mu_1 \equiv \mu_2$ . Let  $\omega$  be a model of  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(E_1))$  (the other case is symmetric):  $\omega$  is a model of  $\mu_1$  minimal with respect to  $\triangleleft_{Max}^{E_1}$ . Since  $\mu_1 \equiv \mu_2$  then  $\omega$  is also model of  $\mu_2$ . Since  $\omega$  is minimal with respect to  $\triangleleft_{Max}^{E_1}$ , then  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_1)$  such that  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega$ . In other words,  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_1)$  such that  $Max(\nu_{E_1}(\omega')) < Max(\nu_{E_1}(\omega))$ . Since  $E_1 \equiv_R E_2$ ,  $\nu_{E_1}(\omega) = \nu_{E_2}(\omega)$  and  $\nu_{E_1}(\omega') = \nu_{E_2}(\omega')$ , and then, since  $\mu_1 \equiv \mu_2$ ,  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_2)$  such that  $Max(\nu_{E_2}(\omega')) < Max(\nu_{E_2}(\omega))$ . By definition, we obtain  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_2)$  such that  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega$ . Hence,  $\omega$  is a model of  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_2}(E_2))$
  - **(IC5)**  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2)) \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2))$   
 Let  $\omega$  be a model of  $\mu$  such that  $\omega$  is not a model of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2))$ . Hence,  $\exists \omega' \in Mod(\mu)$  such that  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_1 \sqcup E_2} \omega$ . In other words,  $Max(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega')) < Max(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega))$ . By definition,  $\exists B_i \in E_1 \sqcup E_2$  such that  $\forall B_j \in E_1 \sqcup E_2$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega') < \kappa_{B_i}(\omega)$ . At this step, two cases are possible:
    - either  $B_i \in E_1$ . In that case,  $\exists B_i \in E_1$  such that  $\forall B_j \in E_1$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega') < \kappa_{B_i}(\omega)$ , By definition,  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_1} \omega$ , and then  $\omega$  is not a model of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1))$ ;
    - or  $B_i \in E_2$ . In that case,  $\exists B_i \in E_2$  such that  $\forall B_j \in E_2$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega') < \kappa_{B_i}(\omega)$ , By definition,  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega$ , and then  $\omega$  is not a model of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ .
- In both cases,  $\omega$  is not a model of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ .
- **(IC6')** If  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$  is consistent, then  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \vee Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ .  
 Let us assume that  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$  is consistent. Then  $\exists \omega \in Mod(\mu)$ ,  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1))$  and  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ . Let  $\omega'$  be a model of  $\mu$  such that  $\omega'$  is not a model of  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \vee Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ . Since  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1))$ ,  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1))$ , and  $\triangleleft_{Max}^E$  is a total pre-order, we obtain  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_1} \omega'$ . Since  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ ,  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ , and  $\triangleleft_{Max}^E$  is a total pre-order, we obtain  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega'$ . Hence, using the definition of  $\triangleleft_{Max}^E$ , we have  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$ . By definition, we finally obtain  $\omega \not\models Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2))$ .
  - **(IC7)**  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2 \models Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$   
 Let  $\omega$  be a model of  $\mu_2$  and  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(E))$ . Then  $\omega$  is a model of  $\mu_2$  and  $\mu_1$  minimal with respect to  $\triangleleft_{Max}^E$  and then, by definition, a model of  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

- **(IC8)** If  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$  is consistent, then

$$Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)) \models Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$$

Let us assume that  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$  is consistent. Hence,  $\exists \omega \in Mod(\mu_2), \omega \models Bel(\Delta^{\mu_1}(E))$ . Let  $\omega'$  be a model of  $\mu_1$ . Let us assume that  $\omega'$  is not a model of  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$ . At this step, two cases are possible:

- either  $\omega' \not\models \mu_2$ , and then  $\omega' \not\models Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ ;
- or  $\omega' \models \mu_2$  and  $\omega' \not\models Bel(\Delta^{\mu_1}(E))$ . Since  $\omega \models Bel(\Delta^{\mu_1}(E))$  and  $\triangleleft_{Max}^E$  is a total pre-order, we have  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Since  $\omega \models \mu_1 \wedge \mu_2$  and  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , we obtain, by definition,  $\omega' \not\models Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

In both case,  $\omega'$  is not a model of  $Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

## References

- [BDP97] Salem Benferhat, Didier Dubois, and Henri Prade. From semantic to syntactic approaches to information combination in possibilistic logic. *Aggregation and Fusion of Imperfect Information*, Physica Verlag, pages 141–151, 1997.
- [BDP99] Salem Benferhat, Didier Dubois, and Henri Prade. Some syntactic approaches to the handling of inconsistent knowledge bases: a comparative study part 2: the prioritized case. In E. Orlowska, editor, *Logic at Work: Essays Dedicated to the Memory of Helen Rasiowa*, Studies in Fuzziness and Soft Computing vol 24, pages 437–511. Physica-Verlag, 1999.
- [BLR07a] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rossit. An egalitarian fusion of incomensurable ranked belief bases under constraints. In *Proceedings of the 22<sup>th</sup> National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'07)*, pages 367–372, 2007.
- [BLR07b] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rossit. A max-based merging of incomensurable ranked belief bases based on finite scales. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> Conference of the International Society of Information Fusion (FUSION'07)*, 2007.
- [DLP94] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.
- [DP94] Didier Dubois and Henri Prade. Possibility theory and data fusion in poorly informed environments. In *Control Engineering Practice*, volume 2(5), pages 811–823, 1994.
- [DP97] Adnan Darwiche and Judea Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial intelligence*, 89:1–29, 1997.
- [EKM08a] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Conflict-based merging operators. In *Proceedings of the 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 348–357, 2008.

- [EKM08b] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. A diff-based merging operator. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR'08)*, pages 19–25, 2008.
- [EKM08c] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Propositional merging operators based on set-theoretic closeness (short paper). In *Proceedings of the 18<sup>th</sup> European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'08)*, pages 737–738, 2008.
- [Gär88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in flux: modeling the dynamics of epistemic states*. Bradford Books. MIT Press, Cambridge, 1988.
- [GLB06] Qi Guilin, Weiru Liu, and David A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proceedings of the 21<sup>th</sup> National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, pages 348–356, july 2006.
- [Jen01] Finn V. Jensen. *Bayesian Networks and Decision Graphs*. Springer, 2001.
- [KLM90] Sarit Kraus, Daniel Lehmann, and Menachem Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44:167–207, 1990.
- [KLM04] Sébastien Konieczny, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. DA<sup>2</sup> merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1-2):49–79, 2004.
- [KM91] Hirofumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.
- [KPP98] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.
- [KPP02] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints: a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808, 2002.
- [Lin96] Jinxin Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83(2):363–378, 1996.
- [LS95] Paolo Liberatore and Marco Schaerf. Arbitration: A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, pages 217–228, 1995.
- [Mey00] Thomas Meyer. Merging epistemic states. In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence (PRICAI'00)*, pages 286–296, 2000.
- [Mey01] Thomas Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2):59–84, 2001.
- [Mou88] Hervé Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, 1988.
- [Neb91] Bernhard Nebel. Belief revision and default reasoning: Syntax-based approaches. In *Proceedings of the International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 417–428, july 1991.

- [Pea88] Judea Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann, 1988.
- [Rei80] Raymond Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13:81–132, 1980.
- [Rev93] Peter Revesz. On the semantics of theory change: arbitration between old and new information. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of Databases*, pages 71–92, 1993.
- [Rev97] Peter Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2):133–160, 1997.
- [Sav71] Leonard J. Savage. *The foundations of statistics*. Dover publications, New York, second revised edition, 1971.
- [Spo88] Wolfgang Spohn. Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1988.
- [Wil94] Mary-Anne Williams. Transmutations of knowledge systems. In J. Doyle et al., editor, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 619–629. Morgan Kaufmann, 1994.
- [Wil95] Mary-Anne Williams. Iterated theory base change: a computational model. In *Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1541–1547, 1995.

## B.7 CG'10 : A Markovian Process Modelling for Pickomino

### A Markovian Process Modelling for Pickomino

Stéphane Cardon, Nathalie Chetcuti-Sperandio, Fabien Delorme, and Sylvain Lagrue

Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France  
UArtois, CRIL, F-62307 Lens, France  
CNRS, UMR 8188, F-62300 Lens, France  
[cardon|chetcuti|delorme|lagrue]@cril.fr,  
WWW home page:  
[http://www.cril.fr/~\[cardon|chetcuti|delorme|lagrue\]](http://www.cril.fr/~[cardon|chetcuti|delorme|lagrue])

**Abstract.** This article deals with a nondeterministic game based on die rolls and on the "stop or continue" principle: Pickomino. During his turn, each participant has to make the best decisions first to choose the dice to keep, then to choose between continuing or stopping depending on the previous rolls and on the available resources. Markov Decision Processes (MDPs) offer the formal framework to model this game. The two main difficulties are first to determine the set of states then to compute the transition probabilities.

We provide in this paper original solutions to both problems: we provide a compact representation of states and a constructive method to compute the probability distributions, based on the partitioning of the space of roll results depending on a set of marked values. Finally we show the efficiency of the proposed method through numerous experimental results: it turns out to be impressive compared with previous programs we developed.

#### 1 Introduction

When studying games, one is confronted with combinatorial, algorithmic and stochastic problems in universes restricted indeed with regard to the real world but nevertheless rich and complex enough to offer an interesting framework to test various decision-making approaches. Many deterministic games, i.e. games for which the consequences of the actions of the players are definite, were studied with convincing results (see e.g. [1,2]). On the other hand, the case of their nondeterministic counterparts yielded far fewer works, even if some programs of Backgammon [3,4] and of Scrabble [5] are at world championship level. The *randomness* of these games, generally based on die rolls, distributions of cards or other random draws seems *a priori* to put the players on an equal footing. However, good players win significantly more often when they play a sufficient number of games.

We study in this paper a nondeterministic game: Pickomino (Heckmeck am Bratwurst in its original German version). We selected this game because it possesses various interesting characteristics. It is based on die rolls, which makes it nondeterministic. Furthermore, this game provides complete information, the current state of the game being known by all. Then a system of risk-taking of "stop or continue" kind makes it possible for a player to throw the dice again to reach more resources or to possibly

lose everything, which requires a precise evaluation of the risks. Finally, the choice of the dice and of the objectives according to the accessibility of the resources should be adaptable to other real-life applications (financial markets for example). The biggest difficulty of this game lies in the evaluation and the handling of die rolls. Probabilities depend very strongly on the current state of the game, on available resources and on choices previously made. An excellent level was reached in previous works on this game by estimating probabilities by means of a *Monte Carlo*-based algorithm [6].

We present in this paper a new method, based on Markov Decision Processes (MDPs) [7,8,9]. MDPs can be seen as stochastic automata where the uncertainty of the consequences of actions is modelled by a probability distribution on accessible states. They associate a reward or a cost with every action applied from a state, which makes it possible to quantify the *expected utility* of a sequence of actions.

We explain briefly the rules of the game in Section 2. Then the Markovian modelling which we used to represent all the possible die rolls is presented in Section 3. In particular the notion of state, the construction of the transitions and the properties of the resulting graph are described. A constructive method to compute the transition probabilities is given in Section 4. Finally, Section 5 presents experimental results (about 500,000 matches were played) which show that the MDP-based program we developed turns out to be an impressive opponent.

## 2 Game rules

Pickomino<sup>1</sup> is a German game created by Reiner Knizia. Its original title (Heckmeck Am Bratwurmeck) means approximately "panic on the skewer of roasted worms". The purpose of the game is to pile up a maximum of worms represented on dominoes (called "pickominos").

**Game equipment** The game equipment includes eight six-sided dice, numbered from 1 to 5, the sixth side bearing a 5-point-worth worm :



As for pickominos they are characterized by two numbers: the value to be reached to be able to take them and the number of worms they bear. The pickomino values range from 21 to 36 and their numbers of worms from 1 to 4, such that  $\#\text{worms} = \lceil \frac{\text{value}-20}{4} \rceil$ . At the beginning of the game, all the pickominos are laid face upwards on the table (see Fig. 1) and make a "skewer".

**A player's turn** The players play in turn. The current player throws the dice then he selects and keeps all the dice of some value, provided that this value was not already chosen. If it is not possible, the turn passes to the next player. If the score of all the kept dice is sufficient, the player can get the corresponding pickomino of the skewer. If this

---

<sup>1</sup> For further information, see e.g. [10]



**Fig. 1.** A game in progress

one is not available anymore the player can pick the pickomino of the skewer the value of which is directly less than the score. Alternatively the player can choose to seize the pickomino at the top of an opponent's stack on the condition of having obtained its value exactly. In all cases, at least one of the kept dice must bear a worm (虫). If the player chooses to take a pickomino he puts it on the top of his stack, else he throws the remaining dice again. If there is no more dice and no pickomino to be picked out, the player's turn is unsuccessful.

**Failure in a turn** When a player is blocked (either he cannot choose any die following his last roll, or he has no more dice to throw and he cannot get any pickomino), he must lay his top-stack pickomino (if there is any) back on the table. Moreover the highest-numbered pickomino of the skewer is returned face downwards, becoming thus unavailable for the rest of the game, except when this pickomino happens to be the one just put back. Then the turn passes to the next player.

**End of a game** When the skewer is empty, the game is over. The winner is the player with the most worms (sum of the worms on the pickominos of his stack). In case of a tie, the winner is the player with the highest-numbered pickomino.

### 3 Markov modelling

Markov Decision Processes (MDPs) are based on a stochastic state-transition graph which represent the set of the possible states of the modelled system as well as the available actions and their consequences [7,8,9]. The process must have the following Markov property: the probability of a transition is independent from previous transitions. In other words, the current state must carry all the information needed for decision-making. The evaluation of the best policy to follow - consequently, of the best action to choose - is founded on a *reward* function.

Formally, a Markov decision process is a 4-tuple  $\langle S, A, p, r(G) \rangle$  such that:

- $S$  is the set of the states of the system;
- $A$  is the set of the possible actions;

- $p$  describes the probability to go from one state to another given an action;
- $r(G)$  is the reward depending on the game state  $G^2$ .

As for Pickomino, we consider a finite horizon since the number of thrown dice decreases strictly after each step.

Note that, here, an MDP models the sequence of the die rolls during **one player's turn** and does not take the available pickominos into account (this information is considered by Algorithm 1 for decision-making).

### 3.1 States

Naïvely the only information useful for decision-making is the dice kept until now. Now, considering all the possible results is not feasible in practice: for eight six-sided dice, there are  $6^8$  states, more than one million, at the first roll.

We propose in this article a much more compact representation of states. For example, consider two sequences of kept dices:  and . The sums of the values of the dice are identical (15) and for the next rolls the same number and values of dice could be kept (at most three dice, the values of which could be 1, 2 or 3). Only the three following pieces of information are really useful to model the sequence leading to a state: the sum of the values of the kept dice, the number of kept dice and the set of the kept die values.

This brings us to the following definition of states:

**Definition 1.** Let  $\mathcal{D} = \{\square, \blacksquare, \blacksquare\}$  be the set of possible die values. A state  $s$  is a triple  $\langle \sigma, N, V_C \rangle$  such that:

- $\sigma \in \{0, \dots, 40\}$  is the sum of the values of the kept dice;
- $N \in \{0, \dots, 8\}$  is the number of kept dice;
- $V_C \in 2^{\mathcal{D}}$  is the set of the kept die values<sup>3</sup>.

A state thus describes all the possibilities of obtaining the sum  $\sigma$  after keeping  $N$  dice: so the number of dice put aside after each roll, the values of these dice and the order in which they were chosen are not involved in the modelling. We also consider a sink, denoted  $s_{\perp}$ , in which the turn passes to the next player.

As far as this state is concerned (it includes all the states not allowing either to take a pickomino or to throw dice again), the triple  $\langle \sigma, N, V_C \rangle$  makes no sense.

*Example 1.* Five dice were kept; their values are among  $\{\square, \blacksquare, \blacksquare\}$  and the sum of their values is equal to 15. Several sequences of die choices can lead to that state:  $\{\blacksquare, \blacksquare\} \rightarrow \{\square, \square\} \rightarrow \{\blacksquare\}$  or  $\{\blacksquare, \blacksquare\} \rightarrow \{\blacksquare\} \rightarrow \{\square, \square\}$  or  $\{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\} \rightarrow \{\blacksquare\} \rightarrow \{\square\}$ , etc. The state corresponding to all the sequences is  $s = \langle \sigma, N, V_C \rangle$  such that  $\sigma = 15$ ,  $N = 5$  and  $V_C = \{\square, \blacksquare, \blacksquare\}$ .

<sup>2</sup>  $G$  holds the content of the players' stacks and of the skewer.

<sup>3</sup>  $2^E$  is the power set of  $E$ , i.e. the set of all the subsets of  $E$ .

### 3.2 Actions

After throwing the dice and if he is not brought to have an unsuccessful turn, the player has to make two decisions. The first one is to choose the dice to be kept. The second one is to decide either to stop and take a pickomino (if one is available) or to go on playing to improve his score.

So the actions inducing the various transitions of the MDP will be  $a_v$ , keeping some value  $v \in \mathcal{D}$  and throwing the remaining dice;  $a_{\perp}$ , failing (the turn passes to the next player) and  $a_{p,x}$ , taking the  $x$ -valued pickomino, which is a "final" action in the same way as  $a_{\perp}$ .

### 3.3 Properties of the graph

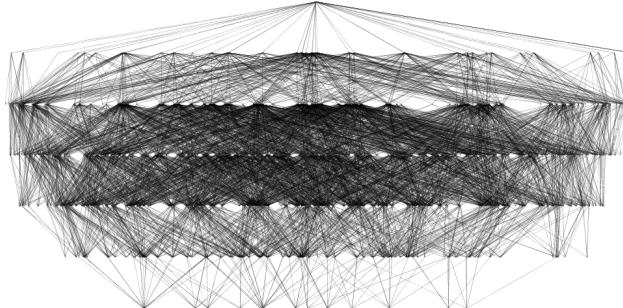
The choice of the state modelling entails various properties on the graph. First the subgraph built from actions different from  $a_{p,x}$  and from  $a_{\perp}$  is a directed acyclic graph (DAG) since keeping a value increases the cardinal of the set of the kept values  $V_C$ . As for other actions, they end the decision-making and do not affect  $V_C$ .

More generally, it is possible to make a partition of the set of the states of  $S$  according to the number of kept values ( $|V_C|$ ):

$$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_6 \cup \{s_{\perp}\},$$

so that  $s = \langle \sigma, N, V_C \rangle \in S_i$  if and only if  $|V_C| = i$ . Then a transition from a state of a not final stratum can only lead to a state of the *following* stratum or to the sink  $s_{\perp}$ .

**Proposition 1** *Let  $s = \langle \sigma, N, V_C \rangle$  and  $s' = \langle \sigma', N', V'_C \rangle$  be two states different from  $s_{\perp}$ . If  $|V'_C| - |V_C| \neq 1$ , then there is no transition from  $s$  towards  $s'$ .*



**Fig. 2.** The Markovian graph

Indeed, a transition always corresponds to the choice of a unique value when the decision to continue is made. Consequently, for a transition from  $\langle \sigma, N, V_C \rangle$  towards  $\langle \sigma', N', V'_C \rangle$ ,  $|V'_C| = |V_C| + 1$ . Fig. 2 presents the MDP (for clarity's sake,  $s_{\perp}$  is not represented). Note finally that the only states from which no transition leads to the sink  $s_{\perp}$  are the states such that  $\exists \square \in V_C, \sigma > 20$  and  $N = 8$  or such that  $N = 0$ .

## 4 Markovian decision-making

The reward function  $r$  and the family of probability distributions  $p$  are yet to be defined. Considering the rules of the game, these are closely connected to *the probability to obtain  $X$  same-valued dice knowing that  $Z$  dice are thrown and that certain values are "forbidden"*. The particular case where the player chooses to stop so as to take a pickomino has a probability of 1.

Consider the following example: values  $\text{S}$  and  $\text{F}$  were previously kept and 4 dice remain. How to decide between continuing or stopping? Intuitively, if a majority of all the possible results of 4-die rolls leads to obtaining only forbidden values, it is better to avoid throwing dice again. Actually it is essential in order to compute the transition probabilities to count the cases where:

- all the values of the thrown dice are in  $\{\text{F}, \text{S}\}$ ;
- exactly one die has its value in  $\{\text{O}, \text{I}, \text{S}, \text{H}, \text{B}, \text{S}\} \setminus \{\text{F}, \text{S}\}$ ;
- 2, 3 or 4 dice are same-valued.

It seems then natural to divide the space of the results according to the number of same-valued dice.

### 4.1 Partition of the space of the results

To free us from symmetric results (for example, with two dice only,  $(\text{S}, \text{S})$  and  $(\text{S}, \text{F})$  denote the "same" result), we represent die rolls by means of ordered lists. The following definition provides the representation of the set of all the possible results of a die roll the values of which belong to a given set.

**Definition 2.** Let  $Z \in \mathbb{N}$  and  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}$ .  $\mathcal{Y}^Z = \{[a_1, \dots, a_Z] \text{ such that } \forall i \in \{1, \dots, Z\}, (a_i \in \mathcal{Y} \text{ and } \forall j \in \{1, \dots, Z\}, i < j \text{ implies } a_i \leq a_j)\}$  is the set of the ordered results of  $Z$ -die rolls the values of which are in  $\mathcal{Y}$ .

We partition then this set according to a set of marked values and to the number of dice having one of these values.

**Definition 3.** Let  $X, Z \in \mathbb{N}$  and  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}$ .  $R_{X, \mathcal{Y}, Z} = \{[a_1, \dots, a_Z] \in \mathcal{D}^Z \text{ such that } \exists \sigma \text{ permutation of } \{1, \dots, Z\} \text{ such that } \forall i \in \{1, \dots, X\}, a_{\sigma(i)} \in \mathcal{Y} \text{ and } \forall j \in \{X + 1, \dots, Z\}, a_{\sigma(j)} \notin \mathcal{Y}\}$  is the set of  $Z$ -die rolls such that exactly  $X$  dice have their values in  $\mathcal{Y}$ .

*Example 2.* After throwing 3 dice, 2 of them belong to  $\{\text{H}\}$  while the third one does not:  $R_{2, \{\text{H}\}, 3} = \{[\text{O}, \text{H}, \text{H}], [\text{H}, \text{H}, \text{H}], [\text{S}, \text{H}, \text{H}], [\text{H}, \text{H}, \text{S}], [\text{H}, \text{S}, \text{H}]\}$

We derive easily from definition 3 the following properties:

**Proposition 1.** Let  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}$ ,  $X, Z \in \mathbb{N}$ .

1.  $R_{0, \mathcal{Y}, Z} = (\mathcal{D} \setminus \mathcal{Y})^Z$
2. If  $X > Z$  then  $R_{X, \mathcal{Y}, Z} = \emptyset$

The idea now is to consider a  $Z$ -die roll recursively as a  $(Z - 1)$ -die roll to which is added the result of a 1-die roll by means of the internal composition law for die rolls defined hereafter.

**Definition 4.** Let  $\mathcal{L}$  be the set of the ordered lists with values in  $\mathcal{D}$ . Then  $\otimes$  is a function from  $2^{\mathcal{L}} \times 2^{\mathcal{L}}$  to  $2^{\mathcal{L}}$  which associates  $(E, F)$  with the set of ordered lists  $E \otimes F$  such that:

$E \otimes F = \{l = [a_1, \dots, a_{|E|+|F|}] : \text{there is a permutation } \sigma \text{ of } \{1, \dots, |E| + |F|\} \text{ such that } [a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(|E|)}] \in E \text{ and } [a_{\sigma(|E|)+1}, \dots, a_{\sigma(|E|+|F|)}] \in F\}$ .

The following proposition states that a  $Z$ -die roll such that exactly  $X$  dice have their values in  $\mathcal{Y}$  is either a  $(Z - 1)$ -die roll such that exactly  $(X - 1)$  dice have their values in  $\mathcal{Y}$  plus one die belonging to  $\mathcal{Y}$  or a  $(Z - 1)$ -die roll such that exactly  $X$  dice have their values in  $\mathcal{Y}$  plus one die not belonging to  $\mathcal{Y}$ .

**Proposition 2** Let  $X, Z \in \mathbb{N}$  and  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}$ .

$$R_{X,Y,Z} = (R_{X-1,Y,Z-1} \otimes \mathcal{Y}^1) \cup (R_{X,Y,Z-1} \otimes (\mathcal{D} \setminus \mathcal{Y})^1)$$

The following proposition states that the sets of the previous proposition are disjoint (the proof is immediate since  $\mathcal{Y} \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{Y}) = \emptyset$ ):

**Proposition 3** Let  $X, Z \in \mathbb{N}$  and  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}$ .

$$(R_{X-1,Y,Z-1} \otimes \mathcal{Y}^1) \cap (R_{X,Y,Z-1} \otimes (\mathcal{D} \setminus \mathcal{Y})^1) = \emptyset$$

Propositions 1 and 2 provide a method to compute constructively  $R_{X,Y,Z}$ . Nevertheless, aiming to compute the probabilities, we need only the cardinal of the elements of the partition.

**Enumeration of the lists of the partition** Thanks to the previous propositions and by denoting  $y$  the cardinal of the set  $\mathcal{Y}$  (i.e.  $y = |\mathcal{Y}|$ ), we obtain the following properties:

1.  $|R_{0,Y,Z}| = (6 - y)^Z$
2. if  $X > Z$  then  $|R_{X,Y,Z}| = 0$
3.  $|R_{X,Y,Z}| = y \times |R_{X-1,Y,Z-1}| + (6 - y) \times |R_{X,Y,Z-1}|$

From these results, a matrix  $M$  of probabilities according to  $X$  and  $Z$  and for some  $\mathcal{Y}$  can be computed recursively (*à la* Pascal's arithmetical triangle), mainly by using point 3 of the previous properties:

$X \rightarrow$ $Z \downarrow$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	...
<b>1</b>	$6 - y$	$y$	0	0	0	0	
<b>2</b>	$(6 - y)^2$	$2y(6 - y)$	$y^2$	0	0	0	
<b>3</b>	$(6 - y)^3$	$3y(6 - y)^2$	$3y^2(6 - y)$	$y^3$	0	0	...
<b>4</b>	$(6 - y)^4$	$4y(6 - y)^3$	$6y^2(6 - y)^2$	$4y^3(6 - y)$	$y^4$	0	
<b>5</b>	$(6 - y)^5$	$5y(6 - y)^4$	$10y^2(6 - y)^3$	$10y^3(6 - y)^2$	$5y^4(6 - y)$	$y^5$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

The intersection between column 1 and row 2 (i.e.  $2y(6 - y)$ ) corresponds to the number of 2-die rolls such that one die takes value in  $\mathcal{Y}$  and the other one has its value in  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{Y}$ . For a given number of thrown dice, the sum of the elements of the corresponding row is equal to the number of possible different results:

**Proposition 4** *Let  $Z \in \{0, \dots, 8\}$  and  $M$  be the matrix of probabilities previously computed.*

$$\sum_{t=0}^Z M_{Z,t} = 6^Z$$

#### 4.2 Computation of the families of probabilities

For a given state and a given action, the sum of the probabilities of the transitions from this state for this action must be equal to 1. The case of the starting state being set apart, we shall focus on a transition from a state  $s = \langle \sigma, N, V_C \rangle$  of a not final stratum  $S_i$  ( $i < 6$ ) to a state  $s' = \langle \sigma', N', V'_C \rangle$ . The action of choosing some value  $v$  is connected to the number  $n$  of  $v$ -valued dice. By extension the action  $a_\perp$  means choosing a value and having no die with this value. In these conditions, the state  $s'$  can be completely described as being the triple  $\langle \sigma', N', V'_C \rangle$  such that  $\sigma' = \sigma + n \cdot v$ ,  $N' = N + n$  and  $V'_C = V_C \cup \{v\}$  if  $v \notin V_C$ , else  $s_\perp$ . We thus consider, for a given die value  $v$ , the probability distribution  $P(\mathcal{T}(s, v, n, s'))$ , where  $\mathcal{T}(s, v, n, s')$  corresponds to the choice of the action  $a_v$  from the state  $s$  which leads to the state  $s'$ .

We note  $T_n = \mathcal{T}(s, v, n, s')$  and consider whether or not  $v$  is in the set of the values kept in the state  $s$ :

$$\begin{aligned} P(T_n) &= P(T_n \cap v \in V_C) + P(T_n \cap v \notin V_C) \\ &= P(T_n | v \in V_C) \cdot P(v \in V_C) + P(T_n | v \notin V_C) \cdot P(v \notin V_C) \end{aligned}$$

Consider  $\alpha$  a  $\bar{N} = (8 - N)$ -die roll, then obviously from 0 to  $\bar{N}$  dice have their values in  $V_C$ . We break up the probability to obtain  $n$  same-valued dice according to the number of dice having their values in  $V_C$ , i.e. knowing that we are in one part of the partition of the result space generated by  $R$ :

$$\begin{aligned} P(T_n | v \in V_C) &= \sum_{c=0}^{\bar{N}} P((T_n | v \in V_C) \cap \alpha \in R_{c, V_C, \bar{N}}) \\ &= \sum_{c=0}^{\bar{N}} P(T_n | v \in V_C, \alpha \in R_{c, V_C, \bar{N}}) \cdot P(\alpha \in R_{c, V_C, \bar{N}}) \\ &= \sum_{c=0}^{\bar{N}} P(T_n | v \in V_C, \alpha \in R_{c, V_C, \bar{N}}) \cdot \frac{M_{\bar{N}, c}}{6^{\bar{N}}} \end{aligned}$$

We focus now on the enumeration of the possible results, knowing that  $\alpha \in R_{c, V_C, \bar{N}}$ , i.e.  $c$  dice out of  $\bar{N}$  thrown dice have their values in  $V_C$ . Intuitively, if  $c < n$ , then the

probability to obtain  $n$  identical values of  $V_C$  is nil:  $P(T_n|v \in V_C, \alpha \in R_{c,V_C,\bar{N}}) = 0$ . If  $c \geq n$  then there are necessarily  $n$  identical values. Moreover, the values of  $\alpha$  not belonging to  $V_C$  can take all their possible values, which does not interfere in this computation. Hence, among the  $c - n$  values remaining in  $V_C$ , these ones must be different from the  $n$  identical ones. Furthermore, these  $c - n$  values are randomly chosen among  $c$ . Thus:

$$P(T_n|v \in V_C, \alpha \in R_{c,V_C,\bar{N}}) = \begin{cases} 0 & \text{if } c < n \\ \frac{\binom{c-n}{c} \cdot (y-1)^{c-n}}{y^c} & \text{if } c \geq n \end{cases}$$

By a similar reasoning, we obtain:

$$P(T_n|v \notin V_C, \alpha \in R_{c,V_C,\bar{N}}) = \begin{cases} 0 & \text{if } c > \bar{N} - n \\ \frac{\binom{\bar{N}-c-n}{\bar{N}-c} \cdot (5-y)^{\bar{N}-c-n}}{(6-y)^{\bar{N}-c}} & \text{if } c \leq \bar{N} - n \end{cases}$$

Therefore the formula for the probability distribution is the following one:

$$P(T_n) = \frac{y}{6} \sum_{c=0}^{\bar{N}} \frac{M_{\bar{N},c}}{6^{\bar{N}}} \begin{cases} 0 & \text{if } c < n \\ \frac{\binom{c-n}{c} \cdot (y-1)^{c-n}}{y^c} & \text{if } c \geq n \end{cases} + \frac{6-y}{6} \sum_{c=0}^{\bar{N}} \frac{M_{\bar{N},c}}{6^{\bar{N}}} \begin{cases} 0 & \text{if } c > \bar{N} - n \\ \frac{\binom{\bar{N}-c-n}{\bar{N}-c} \cdot (5-y)^{\bar{N}-c-n}}{(6-y)^{\bar{N}-c}} & \text{if } c \leq \bar{N} - n \end{cases}$$

The following proposition states that the sum of the probabilities of the transition from a state  $s$  to a state  $s'$  is equal to 1.

#### Proposition 5

$$\sum_{n=0}^{\bar{N}} P(T_n) = 1$$

#### 4.3 Decision-making

Within the framework of a finite-horizon MDP (actually, we only focus in this paper on one player's turn) we can compute the best policy (sequence of actions) by means of the algorithm *value iteration* [7]. To do so, we have to define the reward: continuing brings in nothing directly consequently its reward is nil. On the other hand stopping and taking one pickomino brings in points.

The following algorithm is a rewriting of the value-iteration algorithm which includes the calculation of the policy because of the DAG structure of the MDP. During the calculation of the value of a state, the best action to choose from this state can be highlighted. The current state of the game, denoted by  $G$ , holds the content of the players' stacks and of the skewer, which is used to refine the reward function. Moreover we customize this algorithm with the function aggregating the computed values and the function evaluating the reward with respect to the game state.

---

**Algorithm 1:** Decision-making in a state and computation of the value  $VI_{agreg,eval}(s, G)$ 


---

**Data:**  $s = \langle \sigma, N, V_C \rangle$  current state of the MDP,  $G$  current state of the game  
**Result:** (choice (stop or continue), reward of  $s$ , chosen value  $v_c$ )

```

if  $\exists$  pickomino  $p$  the value of which  $\leq \sigma$  in  $G$  then
|    $c \leftarrow$  stop;  $u \leftarrow eval(take, p, G);$ 
else
|   if  $s = s_\perp$  or  $s \in S_6$  then
|   |    $c \leftarrow$  stop;  $u \leftarrow eval(lose, top of the stack, G);$ 
|   else
|   |    $c \leftarrow$  continue;  $u \leftarrow 0;$ 
|    $v_c \leftarrow -1$  /* no chosen value */
foreach value  $v \in \mathcal{D} \setminus V_C$  do
|   |    $t \leftarrow 0;$ 
|   |   foreach transition  $T_n = T(s, v, n, s')$  do
|   |   |    $t \leftarrow aggreg(t, P(T_n) \cdot VI_{agreg,eval}(s', G));$ 
|   |   if  $t > u$  then
|   |   |    $c \leftarrow$  continue;  $u \leftarrow t; v_c \leftarrow v;$ 
return  $(c, u, v_c);$ 
```

---

## 5 Experimental results

We present in this section the experiments which we made to validate empirically our method. For that purpose, we set the programs developed in [6] against three programs based on the MDPs described previously, with different utility and aggregation functions. Each match comprises 20,000 games, the programs playing first alternately. This number of games was chosen because it was observed that the ratio of victories stabilized around 10,000 games. We give first of all a brief description of each method (for more details concerning the first methods, see [6]).

**SimpleAI (S)** and **Simple3AI (S3)** are voluntarily simplistic approaches. The first one always keeps worms after the first roll, whereas the second one computes the expected return of what can be obtained after each roll.

**MonteCarloAI (MC)**, **MonteCarloCumulAI (MCC)**, **MonteCarlo4CumulAI (MC4C)** estimate the accessibility of pickominos with a *Monte Carlo*-based algorithm. **MC** only differs from **MCC** in the method used for aggregating the estimated probabilities. Furthermore **MC4C**, an extension of **MCC**, takes risks and manages the ends of the games better.

In **MarkovBinaryMaxAI (MBM)**, the aggregation function is *max* and the reward is the following one: taking a pickomino brings in one point, taking no pickomino or losing the top-stack one brings in nothing. In **MarkovBinarySumAI (MBS)**, the aggregation function is the *sum*.

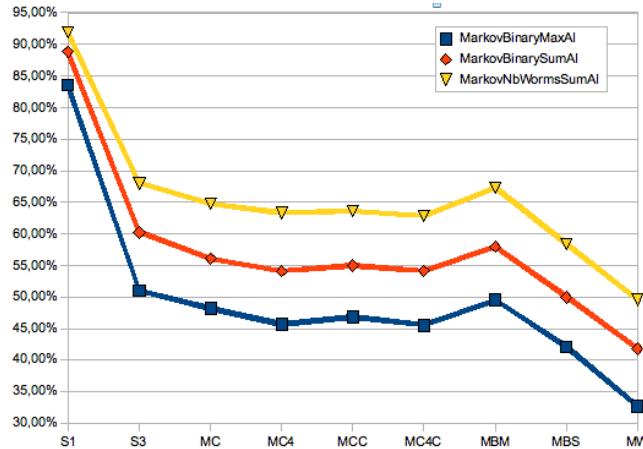
In **MarkovNbWormsSumAI (MWS)**, taking a pickomino brings in its number of worms as points (doubled if it is an opponent's top-stack pickomino) and losing a pickomino costs its number of worms .

Tab. 1 synthetizes the results obtained according to the number of victories. For example, the intersection between the second row and the third column indicates that, out of 20,000 matches, **MBS** won 11,219 times against **MC**. Fig. 3 shows in one chart

**Table 1.** The 480,000 matches

vs.	S	S3	MC	MCC
<b>MBM</b>	16,705 <b>83.5%</b>	10,109 <b>50.5%</b>	9,640 <b>48.2%</b>	9,139 <b>45.7%</b>
<b>MBS</b>	17,769 <b>88.8%</b>	12,046 <b>60.2%</b>	11,219 <b>56.1%</b>	11,001 <b>55.0%</b>
<b>MWS</b>	18,370 <b>91.8%</b>	13,601 <b>68.0%</b>	12,964 <b>64.8%</b>	12,710 <b>63.5%</b>
	<b>MC4C</b>	<b>MBM</b>	<b>MBS</b>	<b>MWS</b>
<b>MBM</b>	9,105 <b>45.5%</b>	10,091 <b>50.6%</b>	8,412 <b>42.1%</b>	6,546 <b>32.7%</b>
<b>MBS</b>	10,828 <b>54.1%</b>	11,588 <b>57.9%</b>	10,004 <b>50.02%</b>	8,363 <b>41.8%</b>
<b>MWS</b>	12,574 <b>62.9%</b>	13,454 <b>67.3%</b>	11,677 <b>58.4%</b>	10,087 <b>50.4%</b>

the behaviour of the three Markovian approaches against the other programs. One can notice that **MWS** dominates all the programs, including **MC4C** that was already a competitive opponent for human players.



**Fig. 3.** Comparison between the three Markovian approaches

## 6 Conclusion and perspectives

We proposed in this paper a modelling of the game Pickomino using Markov decision processes. In particular, we defined a notion of state such that all the possible rolls

are represented in a compact way. Besides, this representation of states yields a stratification of the graph, thus limiting the number of transitions between states. We also specified how to compute efficiently the probability distributions associated with the transitions. Alternatively, reinforcement learning methods [11] could offer a generic technique, easy to implement, to learn the transition probabilities. Nevertheless, reinforcement learning methods only give an approximation of the probabilities whereas we propose an exact calculation of them.

We showed how to exploit the decision graph by using various definitions of the expected utility, all these ones being functions of the current state of the game. Finally, we established experimentally the great efficiency of the proposed methods, as the best one largely defeated the programs developed previously. The program, with different algorithms, can be downloaded on <http://www.cril.univ-artois.fr/~lagrue/pickomino/>.

However, the program could be even more improved. Indeed, if this one turns out to be very efficient tactically, in particular in choosing dice, it suffers on the other hand from having quite short-sighted objectives. One obvious example is the following one. Suppose that pickomino 21 is the only one remaining in the skewer, that pickomino 22 is the opponent's top-stack element, that the machine has a lead of 3 worms and that its current score is 22. In that case, the *only* decision likely to make the program lose is the one that it will make systematically: taking pickomino 22. An immediate prospect thus is to give a more strategic dimension to our program.

## References

1. Campbell, M., Hoane Jr., A.J., Hsu, F.h.: Deep Blue. *Artificial Intelligence* **134**(1-2) (2002) 57–83
2. Schaeffer, J., Björnsson, Y., Burch, N., Kishimoto, A., Müller, M., Lake, R., Lu, P., Sutphen, S.: Solving checkers. In: Proceedings of the Nineteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05). (2005) 292–297
3. Berliner, H.J.: Backgammon computer program beats world champion. *Artificial Intelligence* **14**(2) (1980)
4. Tesauro, G.: Programming backgammon using self-teaching neural nets. *Artificial Intelligence* **134**(1-2) (2002)
5. Sheppard, B.: World-championship-caliber scrabble. *Artificial Intelligence* **134**(1-2) (2002) 241–275
6. Chetcuti-Sperandio, N., Delorme, F., Lagrue, S., Stackowiack, D.: Determination and evaluation of efficient strategies for a stop or roll dice game: Heckmeck am bratwurmeck (pickomino). In: IEEE Symposium on Computational Intelligence and Games (CIG'2008). (2008) 175–182
7. Bellman, R.E.: Dynamic Programming. Princeton University Press (1957)
8. Bertsekas, D.P.: Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice Hall (1987)
9. Puterman, M.L.: Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. Willey (1994)
10. Brettspielwelt website: <http://www.zoch-verlag.com/nc/en/games/chicken-world/heckmeck-am-bratwurmeck.html>.
11. Sutton, R.S., Barto, A.G.: Reinforcement Learning: An Introduction. MIT Press (1998)





## Résumé

Situés dans le domaine de l'Intelligence Artificielle, nos travaux s'articulent autour de deux grands thèmes de recherche fédérateurs : le raisonnement à partir de croyances incertaines ainsi que leur dynamique. Nous nous sommes plus particulièrement attelés à la gestion des problèmes d'incomparabilité et d'incommensurabilité pouvant survenir lorsque l'on cherche à gérer des informations issues de sources fortement hétérogènes.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés au raisonnement en présence d'incohérences, d'un point de vue purement ordinal comme d'un point de vue plus numérique. Dans le premier cas, nous proposons et étudions différentes généralisations de méthodes de raisonnement bien connues, mais se concentrant sur des formules totalement ordonnées. Ces généralisations permettent ainsi de gérer des incomparabilités. Dans un cadre plus numérique, nous avons étendu la logique possibiliste afin de permettre la représentation de l'incertitude associée aux informations à l'aide d'intervalles. Nous avons également proposé différentes méthodes permettant d'améliorer la productivité d'inférences basées sur la logique des pénalités en évitant les collisions.

Concernant la dynamique des croyances, nous avons proposé un nouveau jeu de postulats permettant de réviser des états épistémiques représentés par des préordres partiels. Nous présentons différents opérateurs les vérifiant ainsi qu'un théorème de représentation. Nous nous sommes également intéressés à la généralisation du processus de fusion dans le cas où les agents ne partagent pas une échelle unique et où les poids qu'ils fournissent sont incommensurables. Nous proposons différents opérateurs permettant de modéliser ce processus, leur étude logique, ainsi qu'un théorème d'impossibilité.

Enfin, nous nous sommes intéressés empiriquement à la prise décision en univers non-déterministe et stochastique par l'intermédiaire d'un jeu de dé récent, Pickomino.

**Mots-clés :** représentation des connaissances, dynamique des croyances, gestion de l'incohérence, incommensurabilité, incomparabilité, fusion, révision, Pickomino