Logique quasi-possibiliste et mesures de conflit
-
Quasi-possibilistic logic and measures of conflict

Didier Dubois Sébastien Konieczny Henri Prade

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse
{dubois,konieczny,prade}@irit.fr

Résumé

Cet article présente une nouvelle logique, nommée logique quasi-possibiliste, qui généralise la logique possibiliste et la logique quasi-classique (une logique paraconsistante définie dans [BH95]), permettant de tirer parti des avantages des deux logiques, qui sont toutes les deux proches de la logique propositionnelle classique. Cette logique peut résoudre les conflits apparaissant au même niveau de certitude (comme la logique quasi-classique), mais elle peut également prendre en compte la stratification de la base pour introduire de la gradualité dans l'analyse des conflits (comme en logique possibiliste).

Nous présentons également des mesures de conflits associées à la logique définie. Ces mesures de conflits peuvent être utiles dans de nombreux cadres. Par exemple, lors de l'interrogation d'une base de connaissances, il peut être utile de savoir à quel point la réponse fournie provient d'une source d'information conflictuelle.

Mots Clef

Raisonnement en présence d'incohérences, logiques paraconsistantes, logique possibiliste.

Abstract

This paper presents a new logic, called quasi-possibilistic logic, which encompasses possibilistic logic and quasi-classical logic, and preserves the merits of both logics, which are both close to classical logic. Indeed, we can both handle plain conflicts taking place at the same level of certainty (as in quasi-classical logic), and take advantage of the stratification of the knowledge base into certainty layers for introducing gradedness in conflict analysis (as in possibilistic logic).

When querying knowledge bases, it may be of interest to evaluate the extent to which the relevant available information is precise and consistent. The paper review measures of inconsistency/conflict existing in possibilistic logic and quasi-classical logic, and proposes generalized measures in the unified framework.

Keywords

Inconsistency handling, paraconsistent logic, possibilistic logic.

1 Introduction

L'information disponible est souvent empreinte d'une certaine incertitude ou impliquée dans une incohérence. Cet état de fait a conduit au développement de nombreux cadres en intelligence artificielle pour permettre la déduction en présence d'incertitude et/ou d'incohérence. De plus, lorsque l'information disponible à partir d'une source est incertaine ou conflictuelle, il peut être intéressant d'évaluer la quantité d'incertitude ou d'incohérence de la source.

La logique possibiliste et la logique quasi-classique sont deux logiques qui ont été développées en intelligence artificielle pour permettre de mener des raisonnements en présence d'informations conflictuelles, dans des perspectives cependant différentes.

La logique possibiliste (ΠL) permet de calculer des niveaux globaux d'incohérence pour les bases de connaissances. Ceux-ci sont à la base du mécanisme d'inférence qui manipule des formules classiques associées à un niveau de certitude.

Les logiques paraconsistantes ont été développées pour traiter les incohérences localement, afin de tolérer des informations contradictoires sans trivialisation de la relation de conséquence. La logique quasi-classique (QCL) est une de ces logiques.

Ces deux logiques partagent la même qualité d'avoir une sémantique très proche de la logique classique, ce qui est clairement avantageux autant pour la modélisation que pour la complexité algorithmique.

Cet article présente une nouvelle logique, nommée logique quasi-possibiliste, qui généralise la logique possibiliste et la logique quasi-classique, permettant de tirer parti des avantages des deux logiques. Cette logique peut résoudre les conflits apparaissant au même niveau de certitude (comme la logique quasi-classique), mais elle peut également prendre en compte la stratification de la base pour introduire de la gradualité dans l'analyse des conflits (comme en logique possibiliste).

Nous présentons également des mesures de conflits associées à la logique définie. Ces mesures de conflits peuvent être utiles dans de nombreux cadres. Par exemple, lors de l'interrogation de bases de connaissances, il peut être utile de savoir à quel point les bases interrogées sont contradictoires ou conflictuelles.

La section 2 rappelle les définitions de la logique possibiliste et de la logique quasi-classique. La section 3 introduit la logique quasi-possibiliste ($Q\Pi L$). Des mesures de conflits (degrés de cohérence et de criticité) sont également étudiées. Nous concluons en section 4 par quelques pistes de recherche.

2 Traitements logiques de l'incertitude et de l'incohérence

Nous considérerons un langage propositionnel $\mathcal{L}_{PS}$ basé sur un ensemble fini de symboles propositionnels PS et sur les connecteurs $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$. On notera les formules de $\mathcal{L}_{PS}$ par des lettres grecques minuscules $\varphi, \psi, \ldots$. Les symboles propositionnels de PS seront notés $a, b, c, \ldots$. Un littéral, noté $l, l_1, \ldots$ est un symbole propositionnel ou la négation d'un symbole propositionnel. On notera $\vdash_{CL}$ la relation d'inférence de la logique classique. Soit un ensemble totalement ordonné $(L, <)$, on notera les éléments de L par $n, m, n_1, n_2, \ldots$. Une formule possibiliste est un couple (φ, n) où φ est une formule propositionnelle et n est le poids de la formule (i.e. un élément de L). Dans la suite nous considérerons souvent L comme étant l'intervalle $[0, 1]$ pour simplifier les définitions, mais tout intervalle borné d'entiers serait suffisant pour les résultats qui suivent (en adaptant le calcul des degrés à cette nouvelle échelle).

2.1 Logique possibiliste

Une formule de la logique possibiliste [DLP94b, DLP94a] est une formule classique φ pondérée par la borne inférieure d'une mesure de nécessité $n \in (0, 1]$, i.e., la formule possibiliste (φ, n) peut être interprétée comme $N(\varphi) \geq n$, où N est une mesure de nécessité.

Nous rappelons les principales définitions de la logique possibiliste, avant d'introduire quelques extensions paraconsistantes de cette logique.

Mesures de nécessité et de possibilité. Une mesure de nécessité N est une fonction de l'ensemble des formules $\mathcal{L}_{PS}$ dans un ensemble borné totalement ordonné, caractérisée par les axiomes :

i) $N(\top) = 1$,
ii) $N(\bot) = 0$

où $\top$ et $\bot$ dénotent respectivement une tautologie et une contradiction, et 0 et 1 dénotent respectivement le plus petit et le plus grand élément de l'échelle,

iii) $N(\varphi \wedge \psi) = min(N(\varphi), N(\psi))$.

L'axiome caractéristique (iii) exprime que pour être certain de $\varphi \wedge \psi$ à un certain degré, il faut l'être (au moins) autant de φ et ψ séparément.

Une mesure de possibilité Π est la mesure duale d'une mesure de nécessité N,

$$\Pi(\varphi) = 1 - N(\neg\varphi)$$

où $1 - ()$ est l'opération d'inversement de l'échelle. Cela exprime le fait que l'absence de certitude en faveur de $\neg\varphi$ laisse φ possible.

Syntaxe. La min-décomposabilité des mesures de nécessité permet de travailler avec des clauses pondérées sans perte de généralité, puisque $N(\bigwedge_{i=1,k} \varphi_i) \geq m \Leftrightarrow \forall i, N(\varphi_i) \geq m$, i.e., $(\bigwedge_{i=1,k} \varphi_i, m) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1,k} (\varphi_i, m)$.

Les règles d'inférence de base en logique possibiliste sont les suivantes :

– $(\neg\varphi \vee \psi, m)\ (\psi \vee \rho, n) \vdash (\psi \vee \rho, \min(m, n))$ **(résolution)**
– $\forall\, n \leq m\ (\varphi, m) \vdash (\varphi, n)$ **(affaiblissement du poids)**
– si $\varphi \vdash_{CL} \psi$, alors $(\varphi, m) \vdash (\psi, m)$ **(affaiblissement logique)**
– $(\varphi, m)\ (\varphi, n) \vdash (\varphi, max(m, n))$ **(fusion des poids)**

où $\vdash$ dénote l'inférence syntaxique en logique possibiliste. L'inférence classique est retrouvée lorsque tous les poids sont égaux à 1. De plus $K \vdash (\varphi, m)$ si et seulement si $K_m \vdash_{CL} \varphi$, où K_m est la coupe de niveau m (ou m-coupe) de la base possibiliste K, définie comme $K_m = \{\varphi \mid (\varphi, n) \in K \text{ avec } n \geq m\}$.

Notons que les formules de la forme $(\varphi, 0)$, qui ne contiennent aucune information (puisque $\forall \varphi, N(\varphi) \geq 0$ est toujours vraie) ne font jamais partie de la base.

La réfutation est facilement étendue à la logique possibiliste. Soit une base de connaissances possibiliste K, prouver (φ, m) à partir de K revient à ajouter $(\neg\varphi, 1)$, sous forme clausale, à la base K, et en utilisant les règles ci-dessus à montrer que $K \cup (\neg\varphi, 1) \vdash (\bot, m)$.

Sémantique. D'un point de vue sémantique, une base de connaissances possibiliste $K = \{(\varphi_i, m_i)\}_{i=1,k}$ est associée à une distribution de possibilité π_K représentant l'ensemble flou des modèles u de K :

$$\pi_K(u) = \min_{i=1,k} \max(\mu_{[\varphi_i]}(u), 1 - m_i) \qquad (1)$$

où $[\varphi_i]$ dénote l'ensemble des modèles de φ_i et $\mu_{[\varphi_i]}$ sa fonction caractéristique. On peut montrer que π_K est la plus grande distribution de possibilité telle que $N_K(\varphi_i) \geq m_i, \forall i = 1, k$, i.e., la distribution de possibilité qui donne le plus grand degré de possibilité possible à chaque interprétation, selon les contraintes induites par la base K (où N_K est la mesure de nécessité associée avec π_K, c'est-à-dire $N_K(\varphi) = \min_{u \in [\neg\varphi]}(1 - \pi_K(u))$).

Une base possibiliste est donc associée à un ensemble flou de modèles. Cela représente l'ensemble des états du monde plus ou moins plausibles (selon l'information disponible), lorsque l'on doit faire face à de l'incertitude. Une distribution de possibilité qui ordonne les mondes possibles est donc sémantiquement équivalente à une base possibiliste. L'inférence sémantique est alors définie comme

$$K \models (\varphi, m) \text{ si et seulement si } N_K(\varphi) \geq m$$
$$(\Leftrightarrow \forall u \ \pi_K(u) \leq \max(\mu_{[\varphi]}(u), 1-m))$$

Niveau d'incohérence. Un des avantages de la logique possibiliste est sa capacité à traiter l'incohérence. Le niveau d'incohérence d'une base possibiliste est défini par $inc(K) = \max\{m \mid K \vdash (\bot, m)\}$ (par convention $\max\emptyset = 0$). On peut interpréter ce niveau d'incohérence en termes de coupes de niveau : le niveau d'incohérence d'une base est le plus grand m tel que la coupe correspondante est classiquement incohérente.
Clairement, toute inférence $K \vdash (\varphi, m)$ avec $m > inc(K)$ peut être récrite comme $K^{cons,m} \vdash (\varphi, m)$, où $K^{cons,m} = \{(\varphi_i, m_i) \in K^{cons} \text{ avec } m_i \geq m\}$ et $K^{cons} = K - \{(\varphi_i, m_i) \text{ avec } m_i \leq inc(K)\}$ est l'ensemble des formules dont les poids sont au dessus du niveau d'incohérence et qui ne sont donc pas concernées par l'incohérence. On peut noter que $inc(K^{cons}) = 0$ et, plus généralement, $inc(K) = 0$ si et seulement si $K^* = \{\varphi_i \mid (\varphi_i, m_i) \in K)\}$ est consistant classiquement. On peut de plus montrer que

$$inc(K) = 1 - \max_u \pi_K(u) \qquad (2)$$

L'inférence syntaxique de la logique possibiliste a été montrée correcte et complète pour cette sémantique [DLP94b, DLP94a] :

$$K \vdash (\varphi, m) \Leftrightarrow K \models (\varphi, m) \text{ pour } m > inc(K)$$

Paraconsitance en logique possibiliste. Une extension de l'inférence possibiliste a été proposée pour manipuler les informations paraconsistantes [BDP99]. Elle est définie comme suit. Tout d'abord, pour toute formule φ telle que (φ, m) est dans K, on calcule (φ, p, q) où p (resp. q) est le plus haut degré avec lequel φ (resp. $\neg\varphi$) est appuyée par K. Plus précisément φ est dite appuyée par K au moins au degré r si il existe une sous-base consistante de K_r^* qui implique φ. Soit K^o l'ensemble des formules bi-pondérées ainsi obtenues.

Exemple 1 *Par exemple, si on prend* $K = \{(a, 0.8), (\neg a \vee b, 0.6), (\neg a, 0.5), (\neg c, 0.3), (c, 0.2), (\neg c \vee b, 0.1)\}$*, alors* $K^o = \{(a, 0.8, 0.5), (\neg a \vee b, 0.6, 0), (\neg a, 0.5, 0.8), (\neg c, 0.3, 0.2), (c, 0.2, 0.3), (\neg c \vee b, 0.6, 0)\}$.

Une formule (φ, p, q) a un degré de paraconsistance égal à $\min(p, q)$. Nous pouvons définir deux mesures à partir de K^o. Le degré de support *(undefeasibility)* d'un ensemble consistant A de formules est :

$$UD(A) = \min\{p \mid (\varphi, p, q) \in K^o \text{ et } \varphi \in A\}$$

Le degré d'insécurité *(unsafeness)* d'un ensemble consistant A de formules est :

$$US(A) = \max\{q \mid (\varphi, p, q) \in K^o \text{ et } \varphi \in A\}$$

On dit que A est une raison pour ψ si A est un sous-ensemble minimal (pour l'inclusion ensembliste) cohérent qui implique ψ, i.e. :
– $A \subseteq K$
– $A^* \nvdash_{CL} \bot$
– $A^* \vdash_{CL} \psi$
– $\forall B \subset A, B^* \nvdash_{CL} \psi$
Soient $label(\psi) = \{(A, UD(A), US(A)) \mid A$ est une raison pour $\psi\}$, et $label(\psi)^* = \{A \mid (A, UD(A), US(A)) \in label(\psi)\}$. Alors $(\psi, UD(A'), US(A'))$ est une DS-conséquence de K^o (ou K), noté $K^o \vdash_{DS} (\psi, UD(A'), US(A'))$, si et seulement si $UD(A') > US(A')$, où A' maximise $UD(A)$ dans $label(\psi)^*$ et dans le cas où il y a plusieurs tels A', celui qui minimise $US(A')$. On peut montrer que $\vdash_{DS}$ étend l'inférence possibiliste.

Exemple 2 *En reprenant l'exemple 1,* $label(\psi) = \{(A, 0.6, 0.5), (B, 0.2, 0.3)\}$ *avec* $A = \{(a, 0.8, 0.5), (\neg a \vee b, 0.6, 0)\}$ *et* $B = \{(c, 0.2, 0.3), (\neg c \vee b, 0.6, 0)\}$. *Donc,* $K^o \vdash_{DS} (b, 0.6, 0.5)$.

Si nous commençons par minimiser $US(A)$ et maximisons $UD(A')$ ensuite, l'inférence obtenue n'étend pas l'inférence possibiliste. En fait, dans l'exemple ci-dessus, cela sélectionnerait $(B, 0.2, 0.3)$ mais $0.2 > 0.3$ n'est pas vrai, alors que $K \vdash (b, 0.6)$ puisque $0.6 > inc(K) = 0.5$. Notons que $\vdash_{DS}$ est plus productive que l'inférence possibiliste, comme cela peut être vérifié sur l'exemple, puisque par exemple $K^o \vdash_{DS} (\neg c, 0.3, 0.2)$, alors que $K \vdash (\neg c, 0.3)$ n'est pas vrai puisque $0.3 < inc(K) = 0.5$.
Enfin, une relation d'inférence notée $\vdash_{SS}$, et originellement appelée relation de conséquences *safely supported*, moins exigeante que $\vdash_{DS}$, est définie par $K^o \vdash_{SS} \psi$ si et seulement si $\exists A \in label(\psi)$ tel que $UD(A) > US(A)$. On montre que l'ensemble $\{\psi \mid K^o \vdash_{SS} \psi\}$ est consistant [BDP99].

2.2 Logique quasi-classique

Dans [BH95, Hun00] Besnard et Hunter définissent la logique quasi-classique. Cette logique paraconsitante a beaucoup de bonnes propriétés. En particulier, les connecteurs se comportent comme ceux de la logique classique et, lorsque la base est classiquement cohérente, alors la logique quasi-classique donne quasiment les mêmes conclusions que la logique classique[1]. De plus il a été montré dans [MP01] que l'inférence de la logique quasi-classique a une complexité algorithmique très basse (elle est seulement coNP-complète), ce qui est beaucoup moins que la plupart des approches pour raisonner en présence d'incohérences, qui sont typiquement au second niveau de la hiérarchie polynomiale [Neb98], comme toutes les méthodes

[1] En fait seules les tautologies, ou les formules contenant des tautologies ne peuvent être inférées

basées sur des sous-ensembles maximaux (pour l'inclusion ensembliste) de formules par exemple. Dans [MP01] une transformation en temps linéaire de l'inférence quasi-classique en une inférence en logique classique est également proposée. Cela permet d'utiliser les outils de déduction automatique développés dans le cadre de la logique classique. Finalement, une dernière propriété de cette logique est qu'elle possède une sémantique très intuitive, ce qui n'est pas le cas de beaucoup de logiques paraconsistantes.

L'idée de base de cette logique est de permettre l'utilisation de toutes les règles de la théorie de la preuve en logique classique, mais d'interdire l'utilisation de la règle de résolution après l'utilisation de la règle d'introduction de la disjonction (ce qui permet d'échapper au *ex falso quodlibet sequitur*). Les règles de la logique quasi-classique sont donc partagées en deux classes : les règles de composition et les règles de décomposition, et les preuves valides ne peuvent pas utiliser de règles de décomposition après qu'une règle de composition a été employée. Pour plus de détails à ce propos, voir [Hun00]. Nous ne présenterons que la sémantique de cette logique dans la suite de cet article.

Par souci de simplicité, nous nous restreindrons aux formules CNF dans la suite de cet article. On peut généraliser la logique quasi-classique pour des formules quelconques, en ajoutant les conditions nécessaires pour les relations de satisfaction (lois de de Morgan, élimination de la double négation, etc) [Hun00]. Ainsi, se restreindre aux CNF ne perd pas en généralité, mais simplifie les définitions.

Relation de conséquence quasi-classique.

Définition 1 *Soit l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathcal{PS}}$ défini comme suit :*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{PS}} = \{+a \mid a \in PS\} \cup \{-a \mid a \in PS\}$$

Une QC interprétation est un élément $X \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS}})$.

Ces QC interprétations ne sont pas des affectations complètes de valeurs de vérité aux symboles propositionnels (même si on peut trouver une traduction de ces modèles dans une logique quadri-valuée à la Belnap [Hun03a]), mais sont proches des interprétations au sens de Herbrand. Le sens à associer à une telle interprétation X est que $+a \in X$ signifie que nous disposons d'une raison pour a et d'une raison contre $\neg a$. De même $-a \in X$ signifie que nous disposons d'une raison pour $\neg a$ et d'une raison contre a.

Définition 2 *Soit une clause $l_1 \vee \ldots \vee l_n$, alors $literals(l_1 \vee \ldots \vee l_n)$ est l'ensemble des littéraux $\{l_1, \ldots, l_n\}$ de la clause. Soit une clause $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ et soit un littéral l_i tel que $l_i \in literals(l_1 \vee \ldots \vee l_n)$, alors $Focus(l_1 \vee \ldots \vee l_n, l_i)$ est une clause sans le littéral l_i, i.e. $Focus(l_1 \vee \ldots \vee l_n, l_i) = l_1 \vee \ldots l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots l_n$. Let $Focus(l, l) = \perp$.*

Définition 3 *Soit un symbole propositionnel a, $\sim$ est l'opération de complémentation défini par $\sim a$ est $\neg a$ et $\sim (\neg a)$ est a. Cet opérateur ne fait pas parti du langage, il sert de notation pour simplifier les définitions.*

Nous pouvons à présent définir la relation de satisfaction forte :

Définition 4 *Soit une interprétation X, on définit la relation de satisfaction forte $\models_S$ comme suit. Soit un symbole propositionnel a, des littéraux $l_1, \ldots l_n$ et deux formules φ et ψ :*
- *$X \models_S a$ ssi $+a \in X$*
- *$X \models_S \neg a$ ssi $-a \in X$*
- *$X \models_S \varphi \wedge \psi$ ssi $X \models_S \varphi$ et $X \models_S \psi$*
- *$X \models_S l_1 \vee \ldots \vee l_n$ ssi ($X \models_S l_1$ ou $\ldots$ ou $X \models_S l_n$) et $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (si $X \models_S \sim l_i$, alors $X \models_S Focus(l_1 \vee \ldots \vee l_n, l_i)$)*

On peut noter que la disjonction quasi-classique (pour la relation de satisfaction forte) prend plus de précautions que la disjonction de la logique classique, puisqu'elle doit pouvoir faire face à des informations conflictuelles. Nous pouvons illustrer cela par la propriété suivante :

$X \models_S l_1 \vee \ldots \vee l_n$ ssi
- il existe l_i tel que $l_i \in X$ et $\sim l_i \notin X$, ou
- pour tout l_i, $l_i \in X$ et $l_i \in X$

Lorsqu'on réduit cette définition à des clauses binaires, on obtient une expression peut-être plus illustrative :

$X \models_S a \vee b$ ssi ($X \models_S a$ ou $X \models_S b$) et
(si $X \models_S \neg a$, alors $X \models_S b$) et
(si $X \models_S \neg b$, alors $X \models_S a$)

Exemple 3 *Soit $K = \{a, \neg a \wedge b, c \vee d, c \vee e, \neg a \vee f\}$.*
$X = \{+a, -a, +b, +c, +f\}$,
$Y = \{+a, -a, +b, +d, +e, +f\}$ et
$Z = \{+a, -a, +b, -b, +c, -c, +d, -d, +e, -e, +f, -f\}$ sont trois modèles forts K.

La notion de modèle fort s'étend facilement aux bases de connaissances, en définissant les modèles forts de K comme étant les interprétations X qui satisfont fortement (i.e. au sens de la relation de satisfaction forte) toutes les formules de K.

On peut également remarquer que l'interprétation $X = \mathcal{O}_{\mathcal{PS}}$ est un modèle fort de toutes les formules de $\mathcal{L}_{PS}$. Donc chaque formule de $\mathcal{L}_{PS}$ a toujours au moins un modèle fort.

On définit également une relation de satisfaction faible :

Définition 5 *Soit une interprétation X, on définit la relation de satisfaction faible $\models_w$ comme suit. Soit un symbole propositionnel a, des littéraux $l_1, \ldots l_n$ et deux formules φ et ψ :*
- *$X \models_w a$ ssi $+a \in X$*
- *$X \models_w \neg a$ ssi $-a \in X$*
- *$X \models_w \varphi \wedge \psi$ ssi $X \models_w \varphi$ et $X \models_w \psi$*

– $X \models_S l_1 \vee \ldots \vee l_n$ *ssi* ($X \models_S l_1$ *ou* $\ldots$ *ou* $X \models_S l_n$)

Exemple 4 *Soit* $K = \{a, \neg a \wedge b, c \vee d, c \vee e, \neg a \vee f\}$. $X_1 = \{+a, -a, +b, +c\}$ *et* $X_2 = \{+a, -a, +b, -c, +d, +e, +f, -f\}$ *sont deux modèles faibles de* K.

On peut noter que tout modèle fort d'une formule est également un modèle faible. La relation de conséquence de la logique quasi-classique est alors définie comme :

Définition 6 *Une formule* ψ *est une conséquence de la formule* φ *si et seulement si tous les modèles forts de* φ *sont des modèles faibles de* ψ *:*

$$\varphi \models_{QC} \psi \text{ ssi } \forall X (X \models_S \varphi \Rightarrow X \models_w \psi)$$

Comme d'habitude, la définition de la relation de conséquence s'étend à des bases (ensembles de formules) en les considérant conjonctivement, c'est-à-dire qu'une formule ψ est une conséquence d'une base K si toutes les interprétations qui sont des modèles forts de toutes les formules de K sont des modèles faibles de ψ.

Exemple 5 $K = \{a, \neg a \wedge b, c \vee d, c \vee e, \neg a \vee f\}$. *Les conséquences de* K *sont par exemple* a, $\neg a$, $c \vee d$, $b \vee c$, $f \wedge b$.

Notons que si K est en CNF et est classiquement cohérente (i.e. K a un modèle classique), alors la définition 6 donne exactement l'inférence en logique classique (aux tautologies près). On peut également noter que les QC modèles sont dans ce cas une réécriture des termes d'une DNF. Plus formellement, soit $\tilde{\varphi}$ la formule obtenue en enlevant les clauses tautologiques de la formule CNF φ, on a la propriété suivante :

Proposition 1 *Si* K *et* φ *sont en CNF et si* K *est classiquement cohérente, alors* $K \models_{QC} \tilde{\varphi}$ *ssi* $K \models_{CL} \varphi$.

Modèles QC minimaux - degré de Cohérence. Notons $\mathsf{QC}(K)$ l'ensemble des modèles forts de K. Définissons à présent la notion de modèle minimal.

Définition 7 *L'ensemble des modèles (forts) minimaux de* K *est défini comme :*
$\mathsf{MQC}(K) = \{X \in \mathsf{QC}(K) \mid \textit{si } Y \subset X, \textit{alors } Y \notin \mathsf{QC}(K)\}$

Par exemple si $K = \{a \vee b\}$, alors les QC modèles de K sont $\mathsf{QC}(K) = \{\{+a\}, \{+b\}, \{+a, +b\}, \{+a, -a, +b\}, \{+a, +b, -b\}, \{+a, -a, +b, -b\}\}$. Les QC modèles minimaux de K sont $\mathsf{MQC}(K) = \{\{+a\}, \{+b\}\}$.
Nous allons à présent définir une mesure de conflit, nommée cohérence [Hun02]. Il nous faut tout d'abord définir les notions de base de conflit ($\mathsf{Conflictbase}_{\mathsf{QC}}$) et de base d'opinion ($\mathsf{Opinionbase}_{\mathsf{QC}}$) d'une interprétation.

Définition 8 *Soit une interprétation* X,
$\mathsf{Conflictbase}_{\mathsf{QC}}(X) = \{a \mid +a \in X \textit{ et } -a \in X\}$
$\mathsf{Opinionbase}_{\mathsf{QC}}(X) = \{a \mid +a \in X \textit{ ou } -a \in X\}$

Le degré de cohérence d'une interprétation est alors défini comme

Définition 9 $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}$ *est une fonction de l'ensemble des interprétations dans* $[0, 1]$ *définie comme :*

$$\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(X) = 1 - \frac{|\mathsf{Conflictbase}_{\mathsf{QC}}(X)|}{|\mathsf{Opinionbase}_{\mathsf{QC}}(X)|}$$

Si $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(X) = 1$, alors X est totalement cohérent, et si $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(X) = 0$, alors X est totalement incohérent.

Exemple 6 *Par exemple, si* $X = \{+a, -a, +b, +c, +f\}$, *et* $Y = \{+a, -a, +b, +d, +e, +f\}$, *alors* $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(X) = 3/4$ *et* $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(Y) = 4/5$.

On peut alors définir le degré de cohérence d'une base de connaissances :

Définition 10 *Soit une base de connaissances* K, *alors* $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K)$ *est défini comme :*

$$\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K) = \max_{X \in \mathsf{MQC}(K)} \mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(X)$$

Remarquons que choisir de prendre le minimum (ou un autre opérateur d'agrégation) au lieu du maximum, peut mener à d'autres mesures intéressantes.

Exemple 7 $K = \{a, \neg a \wedge b, c \vee d, c \vee e, \neg a \vee f\}$. *Alors* $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K) = 4/5$.

Degré de criticité d'un conflit. Dans [Hun03b], Hunter définit également un degré de criticité (*Significance*) d'une contradiction. Ce degré de criticité nécessite une méta-information additionnelle indiquant quelle est l'importance relative des conflits qui peuvent affecter les variables propositionnelles (ce qui peut être vu comme les "thèmes" de la base). On peut alors calculer le degré de criticité des contradictions contenues dans une QC interprétation donné de la façon suivante :

Définition 11 *Une fonction de masse* μ *est une fonction de* $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS}})$ *dans* $[0, 1]$ *telle que :*
– *Si* $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(X) = 1$, *alors* $\mu(X) = 0$
– $\sum_X \mu(X) = 1$

Pour expliquer ce que représente cette fonction de masse et ce degré de criticité, on peut donner l'exemple suivant [Hun03b] : supposons que nos informations disponibles à propos d'un match de football proviennent de plusieurs journaux différents. Si ces informations sont contradictoires à propos de la nationalité de l'arbitre, certes cela nous interpellera lorsque nous nous rendrons compte de la contradiction, mais ça n'a globalement pas une grande importance. Ce n'est pas la même chose si le conflit porte sur l'issue de la partie. Si un des journaux dit que c'est l'équipe A qui a remporté le match, alors qu'un autre annonce que le vainqueur est l'équipe B, ce sera un conflit très gênant. Un exemple de fonction de masse dans ce cas, pourrait être de donner une masse de 0.05 au conflit sur la nationalité de l'arbitre, et une masse de 0.5 au conflit sur le résultat (le reste de la masse étant destiné aux conflits à propos des autres informations portant sur le match).

Définition 12 *La fonction de criticité (induite par μ), notée S^{μ}_{QC} est la fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS}})$ dans $[0,1]$ définie par :*

$$S^{\mu}_{\mathsf{QC}}(X) = \sum_{Y \subseteq X} \mu(Y)$$

Le degré de criticité est étendu aux bases de connaissances :

Définition 13 *Soit une base de connaissances K, alors le degré de criticité est défini par :*

$$S^{m}_{\mathsf{QC}}(K) = \min(\{S^{m}_{\mathsf{QC}}(X) | X \in \mathsf{MQC}(K)\})$$

Exemple 8 *Soit $K = \{a, \neg a \wedge b, c \vee d, c \vee e, \neg a \vee f\}$, Si $\mu(\{+a, -a\}) = 0.1$, $\mu(\{+a, -a, +c\} = 0.4$, $\mu(\{+c, -c\}) = 0.3$, $\mu(\{+f, -f\}) = 0.2$ est la fonction de masse correspondante, alors on a $S_{\mathsf{QC}}(\{+a, -a, +b, +c, +f\}) = 0.5$, et $S_{\mathsf{QC}}(\{+a, -a, +b, +d, +e, +f\}) = 0.1$, et $S_{\mathsf{QC}}(K) = 0.1$.*

3 Logique quasi-possibiliste

Dans la sémantique de la logique possibiliste, les interprétations de la logique classique sont pondérées par des degrés de possibilités. En logique quasi-classique la sémantique est exprimée en termes de raisons pour ou contre des variables propositionnelles. Nous allons donc pondérer ces raisons pour ou contre les variables propositionnelles pour définir la logique quasi-possibiliste.

3.1 Relation de conséquence quasi-possibiliste

On définit la notion d'interprétation comme suit :

Définition 14 *Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{PS},\mathcal{L}}$ l'ensemble défini par :*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{PS},\mathcal{L}} = \{(+a\ n) \mid a \in PS, n \in L\} \cup \{(-a\ n) \mid a \in PS, n \in L\}$$

Une $\mathsf{Q}\Pi$ interprétation est un élément $X \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS},\mathcal{L}})$.

Notons que par définition une ($\mathsf{Q}\Pi$) interprétation X peut contenir à la fois $(+a\ n_1)$ et $(-a\ n_2)$ pour une variable a. De même, la définition permet d'avoir plusieurs $(+a\, n_1), \ldots, (+a\, n_i)$ dans une interprétation. Néanmoins, nous verrons que seule l'occurrence avec le plus grand n_k ($k \in 1, i$) peut être prise en considération (les autres sont subsumées par celle-ci).
Le sens à accorder à une telle interprétation X est que $(+a\ n) \in X$ signifie que nous disposons d'une raison pour a avec une confiance de n et d'une raison contre $\neg a$ avec une confiance de n. De même $(-a\ n) \in X$ signifie que nous avons une raison pour $\neg a$ avec une confiance de n et d'une raison contre a avec une confiance de n.
On peut alors définir la relation de satisfaction forte :

Définition 15 *Soit une interprétation X, on définit la relation de satisfaction forte $\models_S$ comme suit. Soit un symbole propositionnel a, des littéraux $l_1, \ldots l_n$ et deux formules propositionnelles φ et ψ :*
- *$X \models_S (a, n)$ ssi $(+a\ m) \in X$ avec $m \geq n$*
- *$X \models_S (\neg a, n)$ ssi $(-a\ m) \in X$ avec $m \geq n$*
- *$X \models_S (\varphi \wedge \psi, n)$ ssi $X \models_S (\varphi, n)$ et $X \models_S (\psi, n)$*
- *$X \models_S (l_1 \vee \ldots \vee l_n, n)$ ssi
($X \models_S (l_1, n)$ ou ... ou $X \models_S (l_n, n)$) et
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (si $X \models_S (\sim l_i, n)$,
alors $X \models_S (Focus(l_1 \vee \ldots \vee l_n, l_i), n)$)*

La notion de modèle fort est étendue directement aux bases de connaissances (ensembles de formules) puisque une interprétation X est un modèle fort de K si X est un modèle fort de toutes les formules de K.

Exemple 9 $K = \{(a, 0.8), (\neg a \wedge b, 0.6), (c \vee d, 0.5), (c \vee e, 0.3), (\neg a \vee f, 0.2)\}$.
$X = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.6), (+b\ 0.6), (+c\ 0.5), (+f\ 0.2)\}$, $Y = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.6), (+b\ 0.6), (+d\ 0.5), (+e\ 0.3), (+f\ 0.2)\}$ et $Z = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.9), (+b\ 0.6), (+c\ 1), (+f\ 0.4), (-f\ 0.7)\}$ sont trois modèles forts de K.

On peut noter que l'interprétation $X = \mathcal{O}_{\mathcal{PS},\mathcal{L}}$ est un modèle fort de toute formule possibiliste. Donc toute base de connaissance possibiliste a toujours au moins un modèle fort.
On définit également la relation de satisfaction faible :

Définition 16 *Soit une interprétation X, on définit la relation de satisfaction faible $\models_w$ par :*
- *$X \models_w (a, n)$ ssi $(+a\ m) \in X$ avec $m \geq n$*
- *$X \models_w (\neg a, n)$ ssi $(-a\ m) \in X$ avec $m \geq n$*
- *$X \models_w (\varphi \wedge \psi, n)$ ssi $X \models_w (\varphi, n)$ et $X \models_w (\psi, n)$*
- *$X \models_S (l_1 \vee \ldots \vee l_n, n)$ ssi
($X \models_S (l_1, n)$ ou ... ou $X \models_S (l_n, n)$)*

Exemple 10 $K = \{(a, 0.8), (\neg a \wedge b, 0.6), (c \vee d, 0.5), (c \vee e, 0.3), (\neg a \vee f, 0.2)\}$.
$X = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.6), (+b\ 0.6), (+c\ 0.5)\}$ et $Y = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.9), (+b\ 0.9), (+d\ 0.5), (+e\ 0.3), (+f\ 0.2)\}$ sont deux modèles faibles de K.

Remarquons qu'ici aussi, tout modèle fort d'une formule est aussi un de ses modèles faibles. La relation de conséquence est alors définie comme :

Définition 17 *Une formule ψ est une conséquence de φ si et seulement si tous les modèles forts de φ sont des modèles faibles de ψ :*

$$\varphi \models_{Q\Pi L} \psi \text{ ssi } \forall X (X \models_S \varphi \Rightarrow X \models_w \psi)$$

Exemple 11 $K = \{(a, 0.8), (\neg a \wedge b, 0.6), (c \vee d, 0.5), (c \vee e, 0.3), (\neg a \vee f, 0.2)\}$. *Les conséquences de K sont par exemple* $(a, 0.8)$, $(f, 0.2)$, $(b \vee g, 0.6)$, *etc.*

Soulignons que la relation de conséquence ainsi définie est une généralisation de la relation de conséquence possibiliste :

Proposition 2 *Si K est en CNF et est classiquement cohérente (i.e. K^* a un modèle classique), alors $K \models_{Q\Pi L}$ $(\tilde{\varphi}, n)$ si et seulement si $K \models_{\Pi L} (\varphi, n)$.*

Donc la relation de conséquence $Q\Pi L$ ainsi définie donne le même résultat que la relation ΠL lorsque la distribution de possibilités est normalisée, mais continue de donner des conclusions intéressantes dans le cas de conflits (i.e. lorsque la distribution de possibilités est non normalisée).
Notons finalement que la relation de conséquence ainsi définie est différente des relations $\vdash_{DS}$ et $\vdash_{SS}$ de la section 2.1. Cela est facile à montrer pour la relation $\vdash_{SS}$ puisque l'ensemble des inférences $\{\psi \mid K^o \vdash_{SS} \psi\}$ obtenues à partir de cette relation forme un ensemble classiquement cohérent [BDP99]. Ce n'est pas le cas avec notre inférence paraconsistante de la logique quasi-possibiliste, puisque par exemple avec la base $K = \{(a, 0.8), (\neg a, 0.8)\}$, nous allons pouvoir inférer à la fois $(a, 0.8)$ et $(\neg a, 0.8)$.
Pour montrer que la relation d'inférence quasi-possibiliste est différente de $\vdash_{DS}$ il suffit de noter que sur l'exemple 1 cette relation ne permet pas d'inférer quoi que ce soit à propos de c, alors qu'avec l'inférence quasi-possibiliste on pourra inférer $(c, 0.2)$ par exemple.

3.2 Degré de cohérence

Nous allons utiliser la notation $\pm a$ pour désigner indifféremment $+a$ ou $-a$.
On définit l'ensemble des interprétations qui subsument une interprétation X (c'est-à-dire l'ensemble des interprétations qui satisfont fortement au moins autant de formules que l'interprétation X).
Notons X^* la QC interprétation obtenue à partir de la $\mathsf{Q}\Pi$ interprétation X, c'est-à-dire X où l'on "oublie" les poids. Par exemple si $X = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.6), (+b\ 0.8), (+c\ 0.4)\}$, alors $X^* = \{+a, -a, +b, +c\}$.

$$\begin{aligned} subsum(X) = \{Y \mid Y \neq X \text{ et } Y^* \subseteq X^* \text{ et} \\ \forall(+a_i\ n) \in X, \exists(+a_i\ m) \in Y \text{ avec } m \leq n, et \\ \forall(-a_i\ n) \in X, \exists(-a_i\ m) \in Y \text{ avec } m \leq n\} \end{aligned}$$

Notons $\mathsf{Q}\Pi(K)$ l'ensemble des modèles forts de K. On peut alors définir la notion de $\mathsf{Q}\Pi$ modèle minimal.

Définition 18 *L'ensemble des modèles (forts) minimaux de K est défini par :*

$$\mathsf{MQ}\Pi(K) = \{X \in \mathsf{Q}\Pi(K) \mid \textit{ si } Y \in subsum(X), \textit{ alors } Y \notin \mathsf{Q}\Pi(K)\}$$

Nous allons a présent définir des extensions de la mesure de cohérence [Hun02] dans notre cadre. Voyons dans un premier temps une extension directe où la cardinalité scalaire floue remplace la cardinalité.
Il nous faut d'abord définir les notions de base de conflits ($\mathsf{Conflictbase}_{\mathsf{Q}\Pi}$) et de base d'opinion ($\mathsf{Opinionbase}_{\mathsf{Q}\Pi}$) d'une interprétation X. Comme nous avons besoin de définir des mesures, nous supposerons à partir d'ici que l'ensemble ordonné utilisé pour définir les formules est l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 19 *Soit une interprétation X,*

$$\begin{aligned} \mathsf{Conflictbase}_{\mathsf{Q}\Pi}(X) = \{(a\ n) \mid (+a\ n_1) \in X \\ \textit{ et } (-a\ n_2) \in X \textit{ et } n = min(n_1, n_2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{Opinionbase}_{\mathsf{Q}\Pi}(X) = \{(a\ n) \mid (\pm a\ n) \in X \\ \textit{ et } \nexists(\pm a\ m) \in X \textit{ avec } m > n\} \end{aligned}$$

Définissons donc à présent la quantité de conflit et d'opinion correspondant à ces deux ensembles, en considérant leur cardinalité scalaire floue :

Définition 20 *Soit B un ensemble de couples $(a\ n)$, où $a \in PS$ et $n \in [0, 1]$, alors* $\mathcal{A}(B) = \sum_{(a\ n) \in B} n$

On définit alors le degré de cohérence de la façon suivante :

Définition 21 *Le degré de $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}$ est une fonction de l'ensemble des modèles dans $[0, 1]$ définie par :*

$$\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(X) = 1 - \frac{\mathcal{A}(\mathsf{Conflictbase}_{\mathsf{Q}\Pi}(X))}{\mathcal{A}(\mathsf{Opinionbase}_{\mathsf{Q}\Pi}(X))}$$

Si $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(X) = 1$, alors X est totalement cohérent, et si $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(X) = 0$, alors X est totalement incohérent.

Exemple 12 *Si* $X = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.6), (+b\ 0.6), (+c\ 0.5), (+f\ 0.2)\}$, *et* $Y = \{(+a\ 0.8), (-a\ 0.6), (+b\ 0.6), (+d\ 0.5), (+e\ 0.3), (+f\ 0.2)\}$.
Alors $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(X) = 0.71$ *et* $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(Y) = 0.75$.

On peut donc définir le degré de cohérence d'une base de connaissances :

Définition 22 *Soit une base de connaissances K, alors $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(K)$ est définie par :*

$$\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(K) = \max_{X \in \mathsf{MQ}\Pi(K)} \mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(X)$$

Comme dans le cadre standard, choisir un autre opérateur d'agrégation que le maximum peut également donner des mesures intéressantes.

Exemple 13 $K = \{(a, 0.8), (\neg a \wedge b, 0.6), (c \vee d, 0.5), (c \vee e, 0.3), (\neg a \vee f, 0.2)\}$. $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{Q}\Pi}(K) = 0.75$

3.3 Distribution de cohérence

Le degré de cohérence de la section précédente permet de représenter de manière concise la quantité de conflit dans une base de connaissances possibiliste. Mais l'inconvénient est que cela n'obéit pas au cadre purement qualitatif de la logique possibiliste, puisque plusieurs petits conflits peuvent avoir autant d'importance dans la détermination du degré qu'un conflit important.
On peut donc imaginer une autre généralisation de la fonction de cohérence, basée sur la notion de coupe de niveau, qui permet de donner une représentation plus précise de la quantité de conflits contenue dans une base de connaissances possibiliste. Formellement, la distribution de cohérence associée à la base possibiliste K est définie comme :

$$\mathsf{DistCoherence}(K) = \{(K_m, \mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K^*_m)), \\ m \in [0,1]\}$$

Exemple 14 $K = \{(a, 0.8), (\neg a \wedge b, 0.6), (c \vee d, 0.5), (c \vee e, 0.3), (\neg a \vee f, 0.2)\}$.
$\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K_{0.8}) = 1$, $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K_{0.6}) = 1/2$, $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K_{0.5}) = 2/3$,
$\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K_{0.3}) = 3/4$, $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K_{0.2}) = 4/5$.

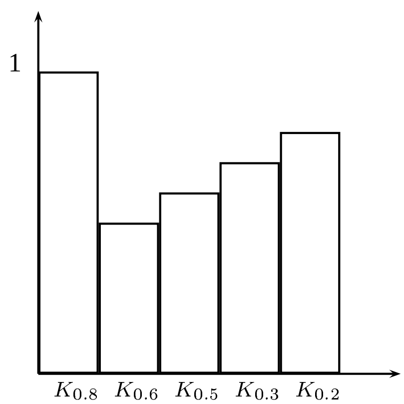

FIG. 1 – Distribution de Cohérence de K

Cet exemple illustre l'intérêt d'avoir une représentation plus précise que la mesure donnée par la fonction définie à la section précédente, puisque le degré de cohérence n'est pas monotone en ce qui concerne les coupes de niveau d'une base. Ainsi, la figure 1 montre que sur notre exemple c'est la strate 0.6 qui est responsable de la plus grande partie des conflits de la base.
A partir de cette distribution de cohérence on peut calculer un nouveau degré de cohérence, dérivé de la distribution et utilisant les écarts de certitude des coupes de niveau.

Définition 23

$$\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QIID}}(K) = \sum_{j=1,s} (m_j - m_{j+1}).\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QC}}(K_{m_j})$$

où les K_{m_j} sont les coupes de niveau m_j de K, et $m_1 = 1$.

Exemple 15 $\mathsf{Coherence}_{\mathsf{QIID}}(K) = (0.8-0.6)1 + (0.6-0.5)1/2 + (0.5-0.3)2/3 + (0.3-0.2)3/4 + (0.2)4/5 \simeq 0.62$

3.4 Degré de criticité

Nous pouvons également définir une contrepartie du degré de criticité [Hun03b] dans le cadre de la logique quasi-possibiliste.
Dans ce cadre le degré de criticité doit prendre en compte la force des conflits concernant les littéraux. Par exemple si $\mu(\{+a, -a\}) = 0.3$, alors pour les deux bases $K = \{(a, 0.1), (\neg a, 1)\}$ et $K' = \{(a, 1), (\neg a, 1)\}$, on constate qu'il y a un très important conflit dans K' à propos de a, alors que dans K un des deux littéraux n'est que très faiblement supporté, et le conflit est donc beaucoup moins important. On définira donc des degrés de criticité prenant la force des conflits en compte pour pondérer la méta-information fournie par la fonction de masse.
Pour expliquer cela reprenons l'exemple du match de football de la section 2.2. Supposons que nos informations proviennent de 3 journaux différents, que le premier journal nous dit que l'issue du match est un gain de l'équipe A. Ce journal est un journal sportif spécialisé, nous avons donc une grande confiance en ses informations. Le deuxième journal, grand quotidien généraliste, nous dit que l'arbitre était belge, et que l'équipe A a gagné. Le troisième journal, un quotidien régional dont certains articles sont écrits à la hâte, affirme que c'est l'équipe B qui a gagné et que l'arbitre était de nationalité italienne. On peut donc modéliser ceci par la base suivante : $K = \{(a, 0.8), (a \wedge b, 0.6), (\neg a \wedge \neg b, 0.4)\}$ où a dénote le gain de l'équipe A et b la nationalité belge de l'arbitre. Avec la fonction de masse $\mu(\{+a, -a\} = 0.5$, $\mu(\{+b, -b\}) = 0.05$ (le reste de la masse portant sur des conflits sur d'autres informations à propos du match non détaillés ici), il est donc nécessaire de pouvoir définir quel est la criticité du conflit dans ce cadre, tenant compte des degrés de confiance/nécessité des informations.
On peut exprimer quelques propriétés logiques que l'on peut attendre de tels degrés de criticité. Nous allons proposer plusieurs alternatives candidates pour cette généralisation du degré de criticité, satisfaisant ces propriétés.

(S1) If $\mathsf{Coherence}(K) = 1$, then $S(K) = 0$

(S2) If $\mathsf{Coherence}(K) = 0$, then
$\forall K'$ s.t. $Atoms(K') = Atoms(K)$ $S(K') \leq S(K)$

(S3) $S(K \cup K') \geq \max(S(K), S(K'))$

(S4) If $Atoms(K) \cap Atoms(K') = \emptyset$, then
$S(K \cup K') \geq S(K) + S(K')$

La première propriété est la minimalité : lorsqu'il n'y a pas de conflit dans une base, alors la criticité doit être nulle. La seconde est la maximalité, disant que la criticité maximale est atteinte lorsque la base est entièrement conflictuelle. La troisième propriété dit que lorsqu'on joint deux bases de croyances, la criticité du conflit de la base résultante est au moins aussi importante que la criticité de chacune des bases. Cette monotonie du degré de criticité est à mettre en relation avec la non-monotonie du degré de cohérence. La dernière propriété est une propriété de séparabilité. Elle exprime le fait que lorsque l'on joint deux bases qui sont indépendantes, dans le sens où elles ne partagent aucun symbole propositionnel, alors la criticité du conflit est plus grande que la somme des criticités respectives des deux bases. Cela s'explique facilement par le fait que lorsqu'on prend l'union de deux bases, on récupère les conflits déjà présents dans les deux bases, mais en présence d'informations supplémentaires ces conflits peuvent devenir plus gênants (selon la fonction de masse).

Criticité cardinale. La première alternative est une généralisation naïve de la définition de Hunter. Nous avons besoin d'une définition basée sur la cardinalité scalaire floue.

Définition 24 *Soit B un ensemble de couples $(a\ n)$, où $a \in PS$ et $n \in [0,1]$, alors* $\mathcal{C}(B) = \dfrac{\sum_{(a\ n)\in B} n}{|B|}$

Définition 25 *Le degré de criticité cardinale possibiliste (induit par une fonction de masse μ), noté $S^{\mu}_{\text{Q}\Pi_1}$ est une fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS},\mathcal{L}})$ dans $[0,1]$ définie par :*

$$S^{\mu}_{\text{Q}\Pi_1}(X) = \sum_{Y^*\subseteq X^*} \mu(Y^*) \times \mathcal{C}(\text{Conflictbase}_{\text{Q}\Pi}(Y))$$

Exemple 16 *Soit* $K = \{(a,0.8),(\neg a \wedge b,0.6),(c \vee d,0.5),(c \vee e,0.3),(\neg a \vee f,0.2)\}$. *Avec* $\mu(\{+a,-a\}) = 0.1$, $\mu(\{+a,-a,+c\} = 0.4$, $\mu(\{+c,-c\}) = 0.3$, $\mu(\{+f,-f\}) = 0.2$ *comme fonction de masse. On a alors* $S_{\text{Q}\Pi_1}(\{(+a\ 0.8),(-a\ 0.6),(+b\ 0.6),(+c\ 0.5),(+f\ 0.2)\}) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$, *et* $S_{\text{Q}\Pi_1}(\{(+a\ 0.8),(-a\ 0.6),(+b\ 0.6),(+d\ 0.5),(+e\ 0.3),\ (+f\ 0.2)\}) = 0.1 \times 0.6 = 0.06$, *et finalement* $S_{\text{Q}\Pi_1}(K) = 0.06$.

Cette définition, basée sur une cardinalité scalaire floue souffre du fait que plusieurs petit conflits peuvent devenir aussi important qu'un fort conflit. Si on désire donc éviter ce comportement, il nous faut donc trouver d'autres définitions. C'est ce que nous faisons maintenant.

Criticité intégrale. Cette généralisation permet de prendre en compte les écarts entre les niveaux de conflits et utilise la définition classique du degré de criticité. Elle est basée sur une intégrale de Choquet.

Définition 26 *Le degré de criticité intégral possibiliste (induit par la fonction de masse μ), noté $S^{\mu}_{\text{Q}\Pi_2}$ est une fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS},\mathcal{L}})$ dans $[0,1]$ définie comme :*

$$S^{\mu}_{\text{Q}\Pi_2}(X) = \sum_{j=1,s} (m_j - m_{j+1}) S_{\text{QC}}(X^*_{m_j})$$

où $X^*_m = \{+a \mid (+a\ n) \in X$ *avec* $n \geq m\} \cup \{-a \mid (-a\ n) \in X$ *avec* $n \geq m\}$

Exemple 17 *Soit* $K = \{(a,0.8),(\neg a \wedge b,0.6),(c \vee d,0.5),(c \vee e,0.3),(\neg a \vee f,0.2)\}$. *Et soit la fonction de masse* $\mu(\{+a,-a\}) = 0.1$, $\mu(\{+a,-a,+c\} = 0.4$, $\mu(\{+c,-c\}) = 0.3$, $\mu(\{+f,-f\}) = 0.2$. *On obtient* $S_{\text{Q}\Pi_2}(\{(+a\ 0.8),(-a\ 0.6),(+b\ 0.6),(+c\ 0.5),(+f\ 0.2)\}) = (0.8 - 0.6)0 + (0.6 - 0.5)0.1 + (0.5 - 0.2)0.5 + (0.2)0.5 = 0.26$ *et* $S_{\text{Q}\Pi_2}(\{(+a\ 0.8),(-a\ 0.6),(+b\ 0.6),(+d\ 0.5),(+e\ 0.3),\ (+f\ 0.2)\}) = (0.6)0.1 = 0.06$, *et* $S_{\text{Q}\Pi_2}(K) = 0.06$.

On peut, comme pour le degré de cohérence, définir une distribution de criticité pour la base. Ce qui permet d'avoir une représentation plus précise de cette mesure. D'un autre coté, calculer le degré de criticité $S_{\text{Q}\Pi_2}$ résume de manière plus concise cette distribution.
La définition de ce degré est toujours quantitative, puisqu'on calcule un écart entre les nécessités des coupes.

Criticité qualitative. Cette généralisation du degré de criticité est purement qualitative, mais nécessite une définition de la fonction de masse plus qualitative.

Définition 27 *Une fonction de masse qualitative μ^* est une fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS}})$ dans $[0,1]$ telle que*
– *Si* $\text{Coherence}_{\text{Q}\Pi}(X) = 1$, *alors* $\mu^*(X) = 0$
– $\max_X \mu^*(X) = 1$

Définition 28 *Soit B un ensemble de couples $(a\ n)$, où $a \in PS$ et $n \in [0,1]$, alors $\mathcal{B}(B) = \max\{n \mid (a\ n) \in B\}$.*

Définition 29 *Le degré de criticité qualitative possibiliste (induite par une fonction de masse qualitative μ^*), noté $S^{\mu^*}_{\text{Q}\Pi_3}$ est une fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{PS},\mathcal{L}})$ dans $[0,1]$ définie par :*

$$S^{\mu^*}_{\text{Q}\Pi_3}(X) = \max_{Y^*\subseteq X^*} \min(\mu^*(Y^*), \mathcal{B}(\text{Conflictbase}_{\text{Q}\Pi}(Y)))$$

Exemple 18 *Soit* $K = \{(a,0.8),(\neg a \wedge b,0.6),(c \vee d,0.5),(c \vee e,0.3),(\neg a \vee f,0.2)\}$. *Avec la fonction de masse* $\mu^*(\{+a,-a\}) = 0.1$, $\mu^*(\{+a,-a,+c\}) = 0.4$, $\mu^*(\{+c,-c\}) = 0.3$, $\mu^*(\{+f,-f\}) = 0.2$, $\mu^*(\{+b,-b\}) = 1$. *On a* $S_{\text{Q}\Pi_3}(\{(+a\ 0.8),(-a\ 0.6),(+b\ 0.6),(+c\ 0.5),(+f\ 0.2)\}) = \max(\min(\{0.1,0.6\},\min(\{0.4,0.6\})) = 0.4$, *et* $S_{\text{Q}\Pi_3}(\{(+a\ 0.8),(-a\ 0.6),(+b\ 0.6),(+d\ 0.5),(+e\ 0.3),(+f\ 0.2)\}) = \max(\min(\{0.1,0.6\})) = 0.1$, *et* $S_{\text{Q}\Pi_3}(K) = 0.1$.

Les propriétés (S1)-(S4) sont satisfaites par le degré de criticité dans le cadre de la logique quasi-classique. On vérifie également facilement qu'elles sont satisfaites par les degrés de criticité cardinale et intégrale. Par contre il n'est pas surprenant de constater que la criticité qualitative ne vérifie pas (S4), dont la définition basée sur une somme ne peut pas être satisfaite par cette criticité qualitative. D'un autre coté la contrepartie qualitative de (S4) (en utilisant le max au lieu de la somme) est un cas particulier de la propriété (S3).

4 Conclusion

Cet article présente la logique quasi-possibiliste, qui permet de traiter les conflits en utilisant les niveaux de priorité (ou de certitude) de la base, mais aussi de raisonner lorsque les conflits apparaissent à un même niveau. Mais d'autres aspects de cette logique doivent encore être développés, en particulier la contrepartie syntaxique. Une comparaison plus systématique avec les autres relations d'inférence possibilistes permettant de manipuler des informations paraconsistantes doit également être menée.

Une autre approche antérieure [BL94] a proposé un cadre général permettant de définir une structure possibiliste sur une logique non-classique. Ils ont en particulier proposé une extension de la logique paraconsistante C_1 de da Costa [da 74] à la logique possibiliste. Nous pensons que la logique quasi-classique, avec sa sémantique très proche de la logique classique, permet une meilleure articulation avec la logique possibiliste.

Cet article est une version française abrégée d'un article à paraître [DKP03], auquel le lecteur pourra se reporter pour plus de détails.

Références

[BDP99] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. An overview of inconsistency-tolerant inferences in prioritized knowledge bases. In *Fuzzy Sets, Logic and Reasoning about Knowledge*, volume 15 of *Applied Logic Series*, pages 395–417. Kluwer, 1999.

[BH95] P. Besnard and A. Hunter. Quasi-classical logic : Non-trivializable classical reasoning from inconsistent information. In *Proceedings of the 3rd European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU'95)*, volume LNAI 946, pages 44–51. Springer Verlag, 1995.

[BL94] P. Besnard and J. Lang. Possibility and necessity functions over non-classical logics. In *Proceedings of the 10th Int. Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'94)*, pages 69–76, 1994.

[da 74] N. C. A. da Costa. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15 :497–510, 1974.

[DKP03] D. Dubois, S. Konieczny, and H. Prade. Quasi-possibilistic logic and its measures of information and conflict. *Fundamenta Informaticae*, 57(2-4), 2003.

[DLP94a] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Automated reasoning using possibilistic logic : Semantics, belief revision and variable certainty weights. *IEEE Trans. Data and Knowledge Engineering*, 6 :64–71, 1994.

[DLP94b] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, chapter Possibilistic logic, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.

[Hun00] A. Hunter. Reasoning with conflicting information using quasi-classical logic. *Journal of Logic and Computation*, 10 :677–703, 2000.

[Hun02] A. Hunter. Measuring inconsistency in knowledge via quasi-classical models. In *Proceedings of the American National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'02)*, pages 68–73, 2002.

[Hun03a] A. Hunter. Evaluating coherence and compromise in inconsistent information. Manuscript. University College London., 2003.

[Hun03b] A. Hunter. Evaluating significance of inconsistencies. In *Proceedings of the 18th International Joint Conference in Artificial Intelligence (IJCAI'03)*, pages 468–473, 2003.

[MP01] P. Marquis and N. Porquet. Computational aspects of quasi-classical entailment. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11 :295–312, 2001.

[Neb98] B. Nebel. *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 3, chapter How hard is it to revise a belief base ?, pages 77–145. Kluwer Academic Publishers, 1998.