Opérateurs de Confluence

Sébastien Konieczny* Ramón Pino Pérez**
konieczny@cril.fr pino@ula.ve

*CRIL - CNRS
Faculté des Sciences, Université d'Artois, Lens, France

**Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

Résumé :
Dans le cadre des approches logiques pour la représentation des connaissances et le raisonnement, beaucoup d'opérateurs ont été définis pour capturer différents types de changement : révision, mise-à-jour, fusion, et beaucoup d'autres. Il y a de forts liens entre révision, mise à jour et fusion. Les opérateurs de fusion peuvent être considérés comme une extension des opérateurs de révision à plusieurs bases. Et les opérateurs de mise à jour peuvent être vus comme des révisions ponctuelles, s'intéressant à chaque modèle de la base, plutôt que de considérer la base globalement. A partir de là, une question naturelle est : Existe-t-il des opérateurs qui sont des fusions ponctuelles, comme la mise à jour est une révision ponctuelle ? Le but de cet artice est de répondre positivement à cette question. A cette fin nous introduisons une nouvelle classe d'opérateurs de changement : les opérateurs de confluence. Ces nouveaux opérateurs peuvent être utiles pour la modélisation de processus de négociation.

Mots-clés : Conciliation, Fusion, Mise à jour, Négociation

Abstract:
In the logic based framework of knowledge representation and reasoning many operators have been defined in order to capture different kinds of change : revision, update, merging and many others. There are close links between revision, update, and merging. Merging operators can be considered as extensions of revision operators to multiple belief bases. And update operators can be considered as pointwise revision, looking at each model of the base, instead of taking the base as a whole. Thus, a natural question is the following one : Are there natural operators that are pointwise merging, just as update are pointwise revision ? The goal of this work is to give a positive answer to this question. In order to do that, we introduce a new class of operators : the confluence operators. These new operators can be useful in modelling negotiation processes.

Keywords: Conciliation, Belief Merging, Update, Negotiation

1 Introduction

La théorie de la dynamique des croyances a produit beaucoup d'opérateurs différents, qui permettent de modéliser les changement des croyances d'un (ou de plusieurs) agent(s). Parmi ceux-ci ont peut citer par exemple la révision [1, 5, 10, 6], la mise à jour [9, 8], la fusion [19, 14], l'abduction [16], l'extrapolation [4], etc.

Dans ce papier on se focalisera sur la révision, la mise à jour et la fusion. Commençons par décrire ces opérateurs de manière informelle :

Révision La révision de croyances est le processus qui consiste à incorporer dans les croyances de l'agent une nouvelle information plus fiable. En révision de croyances le monde est statique, ce ne sont que les croyances de l'agent à propos de ce monde qui évoluent.

Mise à jour Dans le cadre de la mise à jour, la nouvelle information concerne un changement qui est intervenu dans le monde. Le monde est dynamique, et ces changements, lorsqu'ils sont observés, modifient les croyances de l'agent.

Fusion La fusion de croyances consiste à définir les croyances d'un groupe d'agents à partir des croyances (individuelles) de chaque agent.

Ces opérateurs ont donc des utilisations bien différentes. Néanmoins il existe tout de même de forts liens entre ceux-ci. Ceci est particulièrement clair lorsque l'on regarde les définitions techniques.

Les opérateurs de révision [1, 5, 10] et les opérateurs de mise à jour [9] ont des définitions assez proches. La principale différence est que les premiers considèrent les croyances d'un agent globallement, alors que les seconds les considèrent localement [1].

Il y a également un lien entre la révision et la fusion. En fait, les opérateurs de révision peuvent être vus comme un cas particulier d'opérateur de fusion.

A partir de ces deux derniers faits, une question naturelle surgit : Quelle est la famille d'opérateurs qui sont une généralisation des opérateurs de mise à jour, de la même manière que les opérateurs de fusion généralisent les opérateurs de révision ?

[1] Voir [8, 4, 15] pour plus de détails sur la mise à jour et ses liens avec la révision.

$$\begin{tikzcd}
\text{Révision} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Mise à jour} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Fusion} \arrow[r, leftrightarrow] & ?
\end{tikzcd}$$

FIG. 1 – Confluence

Ou, dit autrement, quels sont les opérateurs qui peuvent être considérés comme une fusion ponctuelle, de la même manière que les opérateurs de mise à jour peuvent être considérés comme une révision ponctuelle.

Nous pouvons résumer cela par la figure ci-dessus. Le but de cet article est d'introduire et d'étudier les opérateurs correspondant au point d'interrogation. Nous appelons ces nouveaux opérateurs, opérateurs de confluence.

Ces nouveaux opérateurs sont plus prudents que les opérateurs de fusion. Cela suggère qu'ils peuvent être utilisés pour définir des opérateurs de négociation (voir [2, 20, 18, 17, 12]), ou comme une première étape d'un processus de négociation, afin de trouver tous les résultats possibles de la négociation, puis de sélectionner les plus adéquats.

Pour illustrer l'intérêt de ces opérateurs et la différence de comportement avec les opérateurs de fusion, nous proposons le petit exemple suivant.

Exemple 1 *Sonia et Bruno souhaitent acheter une voiture. Sonia n'aime pas les voitures allemandes, ni les voitures chères. Et elle aime les petites voitures. Bruno hésite entre une petite voiture allemande et chère, et une grande voiture qui ne serait pas chère et pas allemande.*

En considérant les trois variables propositionnelles `Allemande`*,* `Chere`*, et* `Petite` *dans cet ordre, les souhaits de Sonia se représentent donc par* $mod(S) = \{001\}$ *et ceux de Bruno par* $mod(B) = \{111, 000\}$.

Avec la plupart des opérateurs de fusion[2] *le résultat serait* $\{001, 000\}$*. C'est-à-dire le même résultat que l'on obtiendrait si les souhaits de Bruno étaient simplement une grande voiture qui ne serait pas chère et pas allemande (*$mod(B') = \{000\}$*).*

Les opérateurs de confluence prennent en compte la nature disjonctive des souhaits de Bruno, en ajoutant également au résultat des interprétations qui sont un compromis entre 001 *et* 111*. Par exemple les interprétations* 011 *et* 101 *viendront s'ajouter à* 001 *et* 000 *si on utilise l'opérateur de confluence* $\diamond^{d_H,Gmax}$ *(défini section 7).*

Ce genre d'opérateurs est particulièrement intéressant lorsque les bases représentent une situation qui n'est pas parfaitement connue (on ne connaît pas l'ensemble des souhaits des agents), ou qui peut évoluer dans le futur (c'est-à-dire que les agents peuvent ensuite continuer à contraindre leur ensemble de souhaits).

Par exemple les souhaits de Bruno peuvent être soit imparfaitement connus (il désire une des deux situations, mais nous ne savons pas laquelle), ou ses souhaits peuvent évoluer dans le futur (il choisira plus tard entre les deux situations). Dans ces situations les solutions proposées par les opérateurs de confluence sont plus adéquates que celles issues des opérateurs de fusion.

La prochaine section contient les définitions et notations nécessaires à l'article. Dans la section 3 nous rappelons les définitions axiomatiques et les théorèmes de représentation de la révision, de la mise à jour et de la fusion, et les liens entre ces opérateurs. Dans la section 4 nous définissons les opérateurs de confluence. Nous proposons un théorème de représentation pour ces opérateurs dans la section 5. Dans la section 6 nous étudions les liens entre les opérateurs de confluence et la mise à jour et la fusion. Enfin dans la section 7 nous donnons des exemples d'opérateurs de confluence, avant de conclure dans la section 8.

2 Preliminaries

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$, défini à partir d'un ensemble fini de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et des connecteurs standards.

Une interprétation ω est une fonction de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation ω est un modèle d'une formule $\phi \in \mathcal{L}$ si elle la rend vrai. $mod(\varphi)$ dénote l'ensemble des modèles de la formule φ, i.e., $mod(\varphi) = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \models \varphi\}$. Lorsque M est un ensemble de modèles, on note par φ_M une formule telle que $mod(\varphi_M) = M$.

Une *base* K est un ensemble fini de formules

[2]Comme par exemple $\triangle^{d_H,\Sigma}$ et $\triangle^{d_H,Gmax}$ [14].

propositionnelles. Afin de simplifier les notations, on identifiera la base K avec la formule φ qui est la conjonction des formule de K[3].

Un *profil* Ψ est un multi-ensemble non vide de bases $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ (donc deux agents peuvent avoir des bases identiques), et représente un groupe de n agents. L'union sur les multi-ensembles est noté $\sqcup$.

On note $\bigwedge \Psi$ la conjonction des bases de $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, i.e., $\bigwedge \Psi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.

Un profil Ψ est dit consistant si et seulement si $\bigwedge \Psi$ est consistant.

Une formule φ est complete si elle a un unique modèle. Un profil Ψ est complet si toutes les bases de Ψ sont des formules complètes.

Si $\leq$ est un pré-ordre sur $\mathcal{W}$ (i.e. une relation transitive et réflexive), alors $<$ dénote l'ordre strict associé, défini par $\omega < \omega'$ si et seulement si $\omega \leq \omega'$ et $\omega' \not\leq \omega$, et $\simeq$ dénote la relation d'équivalence associée, définie par $\omega \simeq \omega'$ si et seulement si $\omega \leq \omega'$ et $\omega' \leq \omega$. Un pré-ordre est *total* si $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$, $\omega \leq \omega'$ ou $\omega' \leq \omega$. Un pré-ordre qui n'est pas total est *partiel*.

Soit un pré-ordre $\leq$ sur A, et $B \subseteq A$, alors $\min(B, \leq) = \{b \in B \mid \nexists a \in B\ a < b\}$.

3 Revision, mise à jour et fusion

Dans cette section nous allons rappeler la définition des opérateurs de révision, mise à jour et fusion. Nous rappellerons également leur théorème de représentation respectifs en terme de pré-ordres sur les interprétations. Cela nous permettra de souligner les liens entre ces opérateurs.

3.1 Révision

Définition 1 (Katsuno-Mendelzon [10]) *Un opérateur $\circ$ est un opérateur de révision AGM si il satisfait les propriétés suivantes :*

(R1) $\varphi \circ \mu \vdash \mu$

(R2) *Si* $\varphi \wedge \mu \nvdash \bot$ *alors* $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$

(R3) *Si* $\mu \nvdash \bot$ *alors* $\varphi \circ \mu \nvdash \bot$

(R4) *Si* $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ *et* $\mu_1 \equiv \mu_2$ *alors* $\varphi_1 \circ \mu_1 \equiv \varphi_2 \circ \mu_2$

(R5) $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi \vdash \varphi \circ (\mu \wedge \phi)$

(R6) *Si* $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi \nvdash \bot$ *alors* $\varphi \circ (\mu \wedge \phi) \vdash (\varphi \circ \mu) \wedge \phi$

Lorsque l'on travaille avec un langage propositionnel fini ces postulats, proposés par Katsuno et Mendelzon, sont équivalents aux postulats AGM [1, 5]. Dans [10] Katsuno et Mendelzon donnent également un théorème de représentation pour les opérateurs de révision, montrant que chaque opérateur de révision correspond à un assignement fidèle, qui est une fonction qui associe à chaque base un pré-ordre sur les interprétations. Ce pré-ordre représentant la plausibilité des différentes interprétations. Cette idée peut être rapprochée des systèmes de sphères de Grove [7].

Définition 2 *Un assignement fidèle est une fonction qui associe à chaque base φ un pré-ordre $\leq_\varphi$ sur les interprétations tel que :*

1. *Si $\omega \models \varphi$ et $\omega' \models \varphi$, alors $\omega \simeq_\varphi \omega'$*
2. *Si $\omega \models \varphi$ et $\omega' \not\models \varphi$, alors $\omega <_\varphi \omega'$*
3. *Si $\varphi \equiv \varphi'$, alors $\leq_\varphi = \leq_{\varphi'}$*

Théorème 1 (Katsuno-Mendelzon [10]) *Un opérateur $\circ$ est un opérateur de révision (i.e. il satisfait (R1)-(R6)) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ tel que*

$$mod(\varphi \circ \mu) = \min(mod(\mu), \leq_\varphi).$$

Ce théorème de représentation est important puisqu'il fournit un moyen de définir facilement des opérateurs de révision en définissant les assignements fidèles. Mais également parce qu'il existe des théorèmes similaires pour la mise à jour et pour la fusion, et que cette représentation en termes d'assignements permet de trouver facilement les liens entre ces opérateurs.

3.2 Mise à jour

Définition 3 (Katsuno-Mendelzon [9, 11]) *Un opérateur $\diamond$ est un opérateur de mise à jour (partielle) si il satisfait les propriétés* **(U1)-(U8)**. *C'est un opérateur de mise à jour totale si il satisfait les propriétés* **(U1)-(U5), (U8), (U9)**.

[3] Certaines approches sont sensibles à la représentation syntaxique. Dans ce cas il est important de faire une distinction entre K et la conjonction de ses formules (voir e.g. [13]). Mais les opérateurs que nous définissons dans cet articles sont tous indépendants de la syntaxe.

(U1) $\varphi \diamond \mu \vdash \mu$
(U2) *Si* $\varphi \vdash \mu$*, alors* $\varphi \diamond \mu \equiv \varphi$
(U3) *Si* $\varphi \nvdash \bot$ *et* $\mu \nvdash \bot$ *alors* $\varphi \diamond \mu \nvdash \bot$
(U4) *Si* $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ *et* $\mu_1 \equiv \mu_2$ *alors* $\varphi_1 \diamond \mu_1 \equiv \varphi_2 \diamond \mu_2$
(U5) $(\varphi \diamond \mu) \wedge \phi \vdash \varphi \diamond (\mu \wedge \phi)$
(U6) *Si* $\varphi \diamond \mu_1 \vdash \mu_2$ *et* $\varphi \diamond \mu_2 \vdash \mu_1$*, alors* $\varphi \diamond \mu_1 \equiv \varphi \diamond \mu_2$
(U7) *Si* φ *est une formule complète, alors* $(\varphi \diamond \mu_1) \wedge (\varphi \diamond \mu_2) \vdash \varphi \diamond (\mu_1 \vee \mu_2)$
(U8) $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \diamond \mu \equiv (\varphi_1 \diamond \mu) \vee (\varphi_2 \diamond \mu)$
(U9) *Si* φ *est une formule complète et* $(\varphi \diamond \mu) \wedge \phi \nvdash \bot$*, alors* $\varphi \diamond (\mu \wedge \phi) \vdash (\varphi \diamond \mu) \wedge \phi$

Comme pour la révision, il y a un théorème de représentation en termes d'assignements fidèles.

Définition 4 *Un assignement fidèle est une fonction qui associe à chaque interprétation* ω *un pré-ordre sur les interprétations* $\leq_\omega$ *tel que si* $\omega \neq \omega'$*, alors* $\omega <_\omega \omega'$*.*

On peut facilement vérifier que ces assignements fidèles sur les interprétations sont justes un cas particulier des assignements fidèles sur les bases définis dans la section précédente lorsque l'on considère les bases complètes correspondant aux interprétations.

Katsuno et Mendelzon donnent deux théorèmes de représentation pour les opérateurs de mise à jour. Le premier théorème correspond à la mise à jour partielle.

Théorème 2 (Katsuno-Mendelzon [9, 11]) *Un opérateur de mise à jour* $\diamond$ *satisfait (U1)-(U8) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque interprétation* ω *un pré-ordre partiel* $\leq_\omega$ *tel que*

$$mod(\varphi \diamond \mu) = \bigcup_{\omega \models \varphi} \min(mod(\mu), \leq_{\varphi_{\{\omega\}}})$$

Le second théorème correspond aux pré-ordres totaux.

Théorème 3 (Katsuno-Mendelzon [9, 11]) *Un opérateur de mise à jour* $\diamond$ *satisfait (U1)-(U5), (U8) et (U9) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque interprétation* ω *un pré-ordre total* $\leq_\omega$ *tel que*

$$mod(\varphi \diamond \mu) = \bigcup_{\omega \models \varphi} \min(mod(\mu), \leq_{\varphi_{\{\omega\}}})$$

3.3 Fusion

Définition 5 (Konieczny-Pino Pérez [14]) *Un opérateur* $\triangle$ *est un opérateur de fusion contrainte (IC merging) si il satisfait les propriétés suivantes :*

(IC0) $\triangle_\mu(\Psi) \vdash \mu$

(IC1) *Si* $\mu \nvdash \bot$*, alors* $\triangle_\mu(\Psi) \nvdash \bot$

(IC2) *Si* $\bigwedge \Psi \wedge \mu \nvdash \bot$*, alors* $\triangle_\mu(\Psi) \equiv \bigwedge \Psi \wedge \mu$

(IC3) *Si* $\Psi_1 \equiv \Psi_2$ *et* $\mu_1 \equiv \mu_2$*, alors* $\triangle_{\mu_1}(\Psi_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(\Psi_2)$

(IC4) *Si* $\varphi_1 \vdash \mu$ *et* $\varphi_2 \vdash \mu$*, alors* $\triangle_\mu(\{\varphi_1, \varphi_2\}) \wedge \varphi_1 \nvdash \bot$ *si et seulement si* $\triangle_\mu(\{\varphi_1, \varphi_2\}) \wedge \varphi_2 \nvdash \bot$

(IC5) $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$

(IC6) *Si* $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2) \nvdash \bot$*, alors* $\triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$

(IC7) $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$

(IC8) *Si* $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \nvdash \bot$*, alors* $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \triangle_{\mu_1}(\Psi)$

Il y a également un théorème de représentation en termes de pré-ordres sur les interprétations pour les opérateurs de fusion [14].

Définition 6 *Un* assignement syncrétique *est une fonction qui associe à chaque profil* Ψ *un pré-ordre total sur les interprétations* $\leq_\Psi$ *tel que :*

1. *Si* $\omega \models \Psi$ *et* $\omega' \models \Psi$*, alors* $\omega \simeq_\Psi \omega'$
2. *Si* $\omega \models \Psi$ *et* $\omega' \not\models \Psi$*, alors* $\omega <_\Psi \omega'$
3. *Si* $\Psi_1 \equiv \Psi_2$*, alors* $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$
4. $\forall \omega \models \varphi\ \exists \omega' \models \varphi'\ \omega' \leq_{\{\varphi\} \sqcup \{\varphi\}'} \omega$
5. *Si* $\omega \leq_{\Psi_1} \omega'$ *et* $\omega \leq_{\Psi_2} \omega'$*, alors* $\omega \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} \omega'$
6. *Si* $\omega <_{\Psi_1} \omega'$ *et* $\omega \leq_{\Psi_2} \omega'$*, alors* $\omega <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} \omega'$

Théorème 4 (Konieczny-Pino Pérez [14]) *Un opérateur* $\triangle$ *est un opérateur de fusion contrainte si et seulement si il existe un assignement syncrétique qui associe à chaque profil* Ψ *un pré-ordre total* $\leq_\Psi$ *tel que :*

$$mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

3.4 Révision et mise à jour

Intuitivement les opérateurs de révision transforment la base minimalement en sélectionnant les modèles les plus plausibles parmi les modèles de la nouvelle information. Alors que les opérateurs de mise à jour apportent un changement minimal à chaque monde possible (modèle) de la base, afin de prendre en compte le changement décrit par la nouvelle information pour chacun de ces mondes possibles.

Donc, si l'on examine les théorèmes de représentation (théorèmes 1, 2 et 3), on obtient facilement le résultat suivant :

Théorème 5 *Si $\circ$ est un opérateur de révision (i.e. il satisfait (R1)-(R6)), alors l'opérateur $\diamond$ défini par :*

$$\varphi \ \diamond \ \mu = \bigvee_{\omega \models \varphi} \varphi_{\{\omega\}} \ \circ \ \mu$$

est un opérateur de mise à jour qui satisfait (U1)-(U9).

De plus, pour chaque opérateur de mise à jour $\diamond$, il existe un opérateur de révision $\circ$ qui lui correspond au sens de cette équation.

Cette proposition explique donc formellement en quoi la mise à jour peut être considérée comme une révision ponctuelle.

3.5 Révision et fusion

Les opérateurs de révision sélectionnent dans une formule (la nouvelle information) l'information la plus proche d'une information de base (la base actuelle). Similairement, les opérateurs de fusion contraintes sélectionnent dans une formule (les contraintes d'intégrité) l'information la plus proche d'une information de base (le profil). A partir de ce parallèle, on peut donc facilement envisager le lien entre fusion contrainte et révision [14] :

Théorème 6 (Konieczny-Pino Pérez [14]) *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion contrainte (il satisfait (IC0-IC8)), alors l'opérateur $\circ$, défini par $\varphi \circ \mu = \triangle_\mu(\varphi)$, est un opérateur de révision AGM (il satisfait (R1-R6)).*

Voir [14] pour plus de détails sur les liens entre la révision et la fusion contrainte.

4 Opérateurs de confluence

A présent que l'on a étudié précisemment les connections décrites dans la figure 1 entre la révision, la mise à jour et la fusion, nous pouvons définir les opérateurs de confluence, que l'on désire définir comme des fusions ponctuelles, tout comme la mise à jour peut être considérée comme une révision ponctuelle, comme décrit section 3.4.

Définissons tout d'abord la notion de p-consistance pour les profils.

Définition 7 *Un profil $\Psi = \{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ est* p-consistant *si toutes ses bases sont consistantes, i.e $\forall \varphi_i \in \Psi$, φ_i est consistant.*

Notons que la notion de p-consistance est bien plus faible que celle de consistance pour un profil. La première notion demande juste que toutes les bases du profil soient consistantes, la seconde exige que leur conjonction soit consistante.

Définition 8 *Un operator $\Diamond$ est un opérateur de confluence si il satisfait les propriétés suivantes :*

(UC0) $\Diamond_\mu(\Psi) \vdash \mu$

(UC1) *Si $\mu \nvdash \bot$ et Ψ is p-consistent, alors $\Diamond_\mu(\Psi) \nvdash \bot$*

(UC2) *Si Ψ est complet, $\Psi \nvdash \bot$ et $\bigwedge \Psi \vdash \mu$, alors $\Diamond_\mu(\Psi) \equiv \bigwedge \Psi$*

(UC3) *Si $\Psi_1 \equiv \Psi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\Diamond_{\mu_1}(\Psi_1) \equiv \Diamond_{\mu_2}(\Psi_2)$*

(UC4) *Si φ_1 et φ_2 sont des formules completes et $\varphi_1 \vdash \mu$, $\varphi_2 \vdash \mu$, alors $\Diamond_\mu(\{\varphi_1, \varphi_2\}) \wedge \varphi_1 \nvdash \bot$ si et seulement si $\Diamond_\mu(\{\varphi_1, \varphi_2\}) \wedge \varphi_2 \nvdash \bot$*

(UC5) $\Diamond_\mu(\Psi_1) \wedge \Diamond_\mu(\Psi_2) \vdash \Diamond_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$

(UC6) *Si Ψ_1 et Ψ_2 sont des profils complets et $\Diamond_\mu(\Psi_1) \wedge \Diamond_\mu(\Psi_2) \nvdash \bot$, alors $\Diamond_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \Diamond_\mu(\Psi_1) \wedge \Diamond_\mu(\Psi_2)$*

(UC7) $\Diamond_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \Diamond_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$

(UC8) *Si Ψ est un profil complet et si $\Diamond_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \nvdash \bot$, alors $\Diamond_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \Diamond_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$*

(UC9) $\Diamond_\mu(\Psi \sqcup \{\varphi \vee \varphi'\}) \equiv \Diamond_\mu(\Psi \sqcup \{\varphi\}) \vee \Diamond_\mu(\Psi \sqcup \{\varphi'\})$

Certains postulats (UC) sont exactement les mêmes que le postulats (IC), tout comme certains postulats (U) pour la mise à jour, sont exactement les mêmes que les postulats (R) pour la révision.

Plus exactement (UC0), (UC3), (UC5) et (UC7) sont exactement les mêmes que les postulats (IC) correspondants. Donc la particularité des opérateurs de confluence doit être recherchée dans les postulats (UC1), (UC2), (UC6), (UC8) et (UC9). (UC4), (UC6) et (UC8) sont proches des postulats (IC) correspondants, mais ne sont vraies que pour des profils complets. (UC2) est très proche du postulat (U2) de la mise à jour. Mais notons que dans le cas de profil complet, l'hypothèse de (UC2) équivaut à demander la consistance avec les contraintes, i.e. l'hypothèse de (IC2). Les postulats (UC8) et (UC9) expriment les plus grandes différences avec les postulats pour la fusion contrainte, et correspondent également aux différences principales entre la révision et la mise à jour. (UC9) est le postulat le plus important, qui défini les opérateurs de confluences comme des opérateurs de fusion ponctuelle, tout comme (U8) défini les opérateurs de mise à jour comme des opérateurs de révision ponctuelle. Cela sera exprimé plus formellement dans la prochaine section (Lemme 1).

5 Théorème de représentation pour les opérateurs de confluence

Afin de définir le théorème de représentation pour les opérateurs de confluence, nous devons d'abord trouver un moyen de "ponctualiser" le problème. Pour la mise à jour cela est fait en examinant chaque modèle de la base séparément, au lieu de considérer la base (l'ensemble des modèles) comme un tout (comme le fait la révision). Donc, pour le problème de l'agrégation, nous devons trouver la notion de vue ponctuelle d'un profil. C'est ce que nous appelons un état.

Définition 9 *Un multi-ensemble d'interpretations est appelé un* état. *On notera les états* e. *Si* $\Psi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ *est un profil et* $e = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *est un état tel que* $\omega_i \models \varphi_i$ *pour tout* i, *on dit que* e *est un état du profil* Ψ, *ou que l'état* e *satisfait le profil* Ψ, *ce qui sera noté* $e \models \Psi$.

Si $e = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *est un état, on définit le profil* Ψ_e *par* $\Psi_e = \{\varphi_{\{\omega_1\}}, \dots, \varphi_{\{\omega_n\}}\}$.

La notion d'état est une notion intéressante. Si on considère chaque base comme le point de vue actuel d'un agent (ou ses buts), qui peuvent éventuellement être affinés dans le futur, alors les états sont tous les points de départ possibles pour des négociations.

Les états sont les points d'intérêt pour les opérateurs de confluence (comme les interprétations pour la mise à jour), comme souligné dans le lemme suivant :

Lemme 1 *Si* $\diamond$ *satisfait (UC3) et (UC9) alors* $\diamond$ *satisfait la propriété suivante*

$$\diamond_\mu(\Psi) \equiv \bigvee_{e \models \Psi} \diamond_\mu(\Psi_e)$$

Si on définit la satisfaction de profil par $\Psi \vdash \Psi'$ si tout état de Ψ est un état de Ψ', le lemme précédent a comme corollaire :

Corollaire 1 *Si* $\diamond$ *est un opérateur de confluence, alors il est monotone pour les profils, i.e. si* $\Psi \vdash \Psi'$ *alors* $\diamond_\mu(\Psi) \vdash \diamond_\mu(\Psi')$

Cette propriété de monotonie, qui n'est pas vérifiée par les opérateurs de fusion, montre une importante différence entre les opérateurs de confluence et de fusion. Remarquons qu'il y a une propriété similaire de monotonie pour la mise à jour.

Tout comme les assignements fidèles doivent être "localisés" aux interprétations pour la mise à jour, les assignements syncrétiques doivent être "localisés" aux états pour la confluence.

Définition 10 *Un* assignment distribué *est une fonction qui associe à chaque état* e *un pré-ordre total* $\leq_e$ *sur les interprétations tel que :*

1. $\omega <_{\{\omega,\dots,\omega\}} \omega'$ *si* $\omega' \neq \omega$
2. $\omega \simeq_{\{\omega,\omega'\}} \omega'$
3. *Si* $\omega \leq_{e_1} \omega'$ *et* $\omega \leq_{e_2} \omega'$, *alors* $\omega \leq_{e_1 \sqcup e_2} \omega'$
4. *Si* $\omega <_{e_1} \omega'$ *et* $\omega \leq_{e_2} \omega'$, *alors* $\omega <_{e_1 \sqcup e_2} \omega'$

Nous pouvons à présent donner le résultat principal de cet article, le théorème de représentation pour les opérateurs de confluence.

Théorème 7 *Un opérateur $\diamond$ est un opérateur de confluence si et seulement si il existe un assignement distribué qui associe à chaque état e un pré-ordre total $\leq_e$ tel que*

$$mod(\diamond_\mu(\Psi)) \;=\; \bigcup_{e \models \Psi} \min(mod(\mu), \leq_e)$$

On peut noter que ce théorème est également vrai si on retire respectivement le postulat (UC4) et la condition 2 des assignements distribués.

6 Confluence, Mise à jour et Fusion

Montrons à présent que la mise à jour est un cas particulier de confluence, tout comme la révision est un cas particulier de fusion.

Théorème 8 *Si $\diamond$ est un opérateur de confluence (i.e. il satisfait (UC0-UC9)), alors l'opérateur $\diamond$, défini par $\varphi \diamond \mu = \diamond_\mu(\varphi)$, est un opérateur de mise à jour (i.e. il satisfait (U1-U9)).*

En ce qui concerne les opérateurs de fusion, on peut voir facilement que la restriction d'un assignement syncrétique à des profils complets donne un assignement distribué. On peut donc obtenir le résultat suivant (qui correspond au Théorème 5) :

Théorème 9 *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion contrainte (i.e. il satisfait (IC0-IC8)) alors l'opérateur $\diamond$ défini par*

$$\diamond_\mu(\Psi) = \bigvee_{e \models \Psi} \triangle_\mu(\Psi_e)$$

est un opérateur de confluence (i.e. il satisfait (UC0-UC9)).

De plus, pour tout opérateur de confluence $\diamond$, il existe un opérateur de fusion $\triangle$ qui lui correspond via l'équation précédente.

Il est intéressant de noter que ce théorème montre que chaque opérateur de fusion peut être utilisé pour définir un opérateur de confluence, et montre également en quoi on peut considérer les opérateurs de confluence comme des opérateurs de fusion ponctuelle.

A l'inverse du théorème 5, où la seconde partie du théorème est une conséquence directe des théorèmes de représentation, on a besoin ici de construire un assignement syncrétique qui étend l'assignement distribué représentant l'opérateur de confluence. Pour ce faire on peut utiliser la construction suivante : chaque pré-ordre $\leq_e$ définit naturellement une fonction de rang r_e sur les entiers. On définit alors $\omega \leq_\Psi \omega'$si et seulement si $\sum_{e \models \Psi} r_e(\omega) \leq \sum_{e \models \Psi} r_e(\omega')$

Comme corollaire du théorème de représentation on obtient :

Corollaire 2 *Si $\diamond$ est un opérateur de confluence alors la propriété suivante est vérifiée :*

Si $\bigwedge \Psi \vdash \mu$ et Ψ est consistant alors $\bigwedge \Psi \wedge \mu \vdash \diamond_\mu(\Psi)$

Mais, à l'inverse des opérateurs de fusion, on n'a généralement pas $\diamond_\mu(\Psi) \vdash \bigwedge \Psi \wedge \mu$.

Notons que cette “moitié de (IC2)” est similaire à la “moitié de (R2)” satisfaite par les opérateurs de mise à jour.

Ce corollaire est intéressant puisqu'il souligne une importante différence entre les opérateurs de fusion et les opérateurs de confluence. Si toutes les bases sont d'accord (i.e. leur conjonction est consistante), alors un opérateur de fusion donne comme résultat exactement cette conjonction. Alors qu'avec un opérateur de confluence, cette conjonction ne sera qu'une partie du résultat.

Cela est utile lorsque les bases ne représentent pas une information connue et figée, mais une information incertaine/imparfaite à propos des bus courants ou futurs de l'agent.

7 Exemple

Dans cette section nous donnerons des exemples d'opérateurs de confluence et nous illustrerons le comportement de ces sur un exemple.

Il est possible de définir des opérateurs de confluence, comme les opérateurs de fusion, en utilisant une distance et une fonction d'agrégation.

$\mathcal{W}$	1111	1110	0000	0110	e_1		e_2		e_3		e_4		e_5		e_6		$\diamond_\mu^{d,\Sigma}$	$\diamond_\mu^{d,\mathsf{Gmax}}$
					Σ	Gmax	Σ	Gmax	Σ	Gmax	Σ	Gmax	Σ	Gmax	Σ	Gmax		
0000	4	3	0	2	11	4430	10	4420	10	4330	9	4320	9	3330	8	3320		
0001	3	4	1	3	11	4331	10	3331	12	4431	11	4331	13	4441	12	4431		
0010	3	2	1	1	9	3321	8	3311	8	3221	7	**3211**	**7**	**2221**	**6**	**2211**	×	×
0011	2	3	2	2	9	3222	8	**2222**	10	3322	9	3222	11	3332	10	3322		×
0100	3	2	1	1	9	3321	8	3311	8	**3221**	**7**	**3211**	**7**	**2221**	**6**	**2211**	×	×
0101	2	3	2	2	9	3222	8	**2222**	10	3322	9	3222	11	3332	10	3322		×
0110	2	1	2	0	7	2221	6	2220	6	2211	5	2210	5	2111	4	2110		
0111	1	2	3	1	7	**3211**	**6**	3111	8	**3221**	**7**	**3211**	9	3222	8	3221	×	×
1000	3	2	1	3	9	3321	10	3331	8	**3221**	9	3321	**7**	**2221**	8	3221	×	×
1001	2	3	2	4	9	3222	10	4222	10	3322	11	4322	11	3332	12	4332		
1010	2	1	2	2	7	2221	8	2222	6	2211	7	2221	5	2111	6	2211		
1011	1	2	3	3	7	**3211**	8	3311	8	**3221**	9	3321	9	3222	10	3322		×
1100	2	1	2	2	7	2221	8	2222	6	2211	7	2221	5	2111	6	2211		
1101	1	2	3	3	7	**3211**	8	3311	8	**3221**	9	3321	9	3222	10	3322		×
1110	1	0	3	1	5	3110	6	3111	4	3100	5	3110	3	3000	4	3100		
1111	0	1	4	2	**5**	4100	**6**	4200	**6**	4110	**7**	4210	**7**	4111	8	4211	×	

TAB. 1 – Calculs de l'exemple 2

Définition 11 *Une* pseudo-distance *entre interprétations est une fonction* $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^+$ *telle que pour tout* ω, $\omega' \in \mathcal{W}$: $d(\omega, \omega') = d(\omega', \omega)$, *et* $d(\omega, \omega') = 0$ *si et seulement si* $\omega = \omega'$.

Une distance largement utilisée est la distance de Dalal [3], notée d_H, qui est la distance de Hamming entre les interprétations (le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent).

Définition 12 *Une* fonction d'agrégation f *est une fonction qui associe un réel positif à tout tuple fini de réels positifs tel que pour tout* $x_1, \ldots, x_n, x, y \in \mathbb{R}^+$ *:*
- *si* $x \leq y$, *alors* $f(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$ (monotonie)
- $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *si et seulement si* $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (minimalité)
- $f(x) = x$ (identité)

Des fonctions d'agrégation raisonnables sont par exemple le $\max$, la somme, ou le leximax ($Gmax$).

Définition 13 *Soit une pseudo-distance entre interprétations* d *et une fonction d'agrégation* f. *L'opérateur* $\diamond_\mu^{d,f}(\Psi)$ *est défini par :*

$$mod(\diamond_\mu^{d,f}(\Psi)) = \bigcup_{e \models \Psi} \min(mod(\mu), \leq_e)$$

où le pré-ordre $\leq_e$ *sur* $\mathcal{W}$ *induit par* e *est défini par :*
- $\omega \leq_e \omega'$ *si et seulement si* $d(\omega, e) \leq d(\omega', e)$, *où*
- $d(\omega, e) = f(d(\omega, \omega_1) \ldots, d(\omega, \omega_n))$ *avec* $e = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Il est facile de vérifier qu'avec les fonctions d'agrégation usuelles, on obtient bien des opérateurs de confluence.

Proposition 1 *Soit une pseudo-distace* d, $\diamond_\mu^{d,\Sigma}(\Psi)$ *et* $\diamond_\mu^{d,Gmax}(\Psi)$ *sont des opérateurs de confluence (i.e. ils satisfont (UC0)-(UC9)).*

Exemple 2 *Considérons le profil* $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ *et les contraintes d'intégrité* μ *definis sur un langage propositionnel basé sur quatre variables :*
$mod(\mu) = \mathcal{W} \setminus \{0110, 1010, 1100, 1110\}$,
$mod(\varphi_1) = mod(\varphi_2) = \{1111, 1110\}$,
$mod(\varphi_3) = \{0000\}$,
$mod(\varphi_4) = \{1110, 0110\}$.

Les calculs sont résumés dans le tableau 1. Les lignes grisées correspondent aux interprétations rejetées par les contraintes d'intégrité. Le résultat doit donc être trouvé parmi les interprétations non grisées. Les états qui satisfont le profil sont les suivants :

$e_1 = \{1111, 1111, 0000, 1110\}$,
$e_2 = \{1111, 1111, 0000, 0110\}$,
$e_3 = \{1111, 1110, 0000, 1110\}$,
$e_4 = \{1110, 1111, 0000, 0110\}$,
$e_5 = \{1110, 1110, 0000, 1110\}$,
$e_6 = \{1110, 1110, 0000, 0110\}$.

Pour chaque état le tableau donne la distance entre l'interprétation et cet état pour la fonction d'agrégation Σ*, et pour la fonction d'agrégation* $Gmax$*. On peut alors chercher quelles sont les meilleures interprétations pour chaque état.*

Par exemple pour $\diamond_\mu^{d,\Sigma}(\Psi)$*,* e_1 *sélectionne l'interprétation* 1111*,* e_2 *sélectionne* 0111 *et* 1111*, etc. Donc, en prenant l'union des interprétations sélectionnées par chaque état, le résultat est* $mod(\diamond_\mu^{d,\Sigma}(\Psi)) = \{0010, 0100, 0111, 1000, 1111\}$.

De la même manière on obtient $mod(\diamond_\mu^{d,Gmax}(\Psi)) = \{0100, 0011, 0010, 0101, 0111, 1000, 1011, 1101\}$.

8 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une nouvelle famille d'opérateurs de changement : les opérateurs de confluence, qui sont des opérateurs de fusion ponctuelle, tout comme la mise à jour peut être considérée comme une révision ponctuelle.

Nous avons proposé une définition axiomatique de cette famille, un théorème de représentation en termes de pré-ordres sur les interprétations, et donné des exemples d'opérateurs.

Dans cet article nous avons défini les opérateurs de confluence comme généralisation à plusieurs bases des opérateurs de mise à jour totale (dont la contrepartie sémantique correspond à des pré-ordres totaux). Une perspective de ce travail est de tenter d'étendre ces résultats aux opérateurs de mise à jour partielle (correspondant à des pré-ordres partiels).

Comme le suggère l'exemple 1, ces opérateurs peuvent être utiles pour agréger les buts d'un groupe d'agents. Ils semblent moins adéquats pour agréger des croyances, où la minimisation globale réalisée par les opérateurs de fusion est plus appropriée pour trouver les interprétations les plus plausibles. Cette distinction entre agrégation de croyances et de buts est une intéressante perspective.

Remerciements

L'idée développée dans ce travail provient de discussions lors des séminaires de Dagstuhl de 2005 et 2007 (#5321 and #7351) *"Belief Change in Rational Agents"*. Les auteurs voudraient remercier l'institution "Schoss Dagstuhl", et les participants aux séminaires. En particulier Andreas Herzig pour la question initiale *"Si la fusion peut être vue comme une généralisation de la révision, qu'est-ce que la généralisation de la mise à jour ?"*.

Le premier auteur a bénéficié du support du projet ANR PHAC (ANR-05-BLAN-0384).

Le second auteur a été partiellement financé par une bourse de recherche de la Mairie de Paris et par le projet CDCHT-ULA N° C-1451-07-05-A. Une partie de ce travail a été réalisé alors que le second auteur était professeur invité au CRIL (CNRS UMR 8188), puis chercheur invité au département TSI de Telecom ParisTech (CNRS UMR 5141 LTCI). Il remercie ces institutions pour les excellentes conditions de travail.

Références

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[2] R. Booth. Social contraction and belief negotiation. In *Proceedings of the Eighth Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 374–384, 2002.

[3] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report. In *Proceedings of the American National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 475–479, 1988.

[4] F. Dupin de Saint-Cyr and J. Lang. Belief extrapolation (or how to reason about observations and unpredicted change). *Proceedings of the Eighth Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 497–508, 2002.

[5] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT Press, 1988.

[6] P. Gärdenfors, editor. *Belief Revision*. Cambridge University Press, 1992.

[7] A. Grove. Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17(157-180), 1988.

[8] A. Herzig and O. Rifi. Update operations : a review. In *Proceedings of the Thirteenth*

European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'98), pages 13–17, 1998.

[9] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91)*, pages 387–394, 1991.

[10] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.

[11] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In P. Gärdenfors, editor, *Belief Revision*. Cambridge University Press, 1992.

[12] S. Konieczny. Belief base merging as a game. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 14(3) :275–294, 2004.

[13] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. DA^2 merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1-2) :49–79, 2004.

[14] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[15] J. Lang. Belief update revisited. In *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'07)*, pages 2517–2522, 2007.

[16] J. Lobo and C. Uzcátegui. Abductive change operators. *Fundamenta Informaticae*, 27(4) :385–411, 1996.

[17] T. Meyer, N. Foo, D. Zhang, and R. Kwok. Logical foundations of negotiation : Outcome, concession and adaptation. In *Proceedings of the American National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'04)*, pages 293–298, 2004.

[18] T. Meyer, N. Foo, D. Zhang, and R. Kwok. Logical foundations of negotiation : Strategies and preferences. In *Proceedings of the Ninth Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'04)*, pages 311–318, 2004.

[19] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.

[20] D. Zhang, N. Foo, T. Meyer, and R. Kwok. Negotiation as mutual belief revision. In *Proceedings of the American National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'04)*, pages 317–322, 2004.