Preuve Dialectique dans les Systèmes d'Argumentation à Contrainte

Caroline Devred[1], Sylvie Doutre[2]

[1] LERIA - Université d'Angers - devred@info.univ-angers.fr
[2] IRIT - Université Toulouse 1 - doutre@irit.fr

Résumé : Le système d'argumentation à contrainte généralise le cadre du système d'argumentation classique de Dung, et permet de capturer les sémantiques d'acceptabilité existantes dans ce cadre et dans ses extensions. Nous cherchons dans cet article à déterminer si un argument donné appartient à au moins un ensemble d'arguments acceptable sous la sémantique dite préférée, étendue au cadre du système d'argumentation à contrainte. La réponse que nous apportons prend la forme d'un dialogue qui explique pourquoi l'argument est ou n'est pas acceptable. Ce dialogue, pour les systèmes d'argumentation à contrainte, s'inscrit dans une généralisation d'un cadre dialectique défini pour les systèmes d'argumentation classique.
Mots-clés : Raisonnement, argumentation, dialogue

1 Introduction

L'argumentation est une approche générale pour le raisonnement non monotone, dont la caractéristique principale est l'utilisation d'arguments pour dériver des conclusions basées sur la façon dont les arguments interagissent. De nombreuses théories de l'argumentation ont été proposées (voir Besnard & Hunter (2008) pour une synthèse), parmi lesquelles le système d'argumentation de Dung (1995). Ce système est basé sur une définition abstraite des arguments et sur une relation binaire qui exprime une notion de contrariété entre arguments. Ce niveau d'abstraction permet au système de Dung de capturer de nombreuses approches pour l'inférence non-monotone et la programmation logique (Bondarenko *et al.* (1997)). Plusieurs travaux ont étendu le cadre de Dung, par exemple par l'ajout d'une relation de support entre arguments, ou de relations de préférences (voir par exemple Cayrol & Lagasquie-Schiex (2005); Baroni *et al.* (2000)).

L'une des questions les plus importantes en argumentation concerne la définition de l'acceptabilité d'ensembles d'arguments, appelés extensions. Dans le cadre de Dung, toutes les définitions des extensions sont basées uniquement sur les interactions entre arguments. Coste-Marquis *et al.* (2006) et Devred (2006) ont proposé une variante du système de Dung qui prend en compte une information supplémentaire : une contrainte. Cette contrainte permet d'exprimer, par exemple, le fait que si un argument appartient à une extension, alors un autre argument donné ne doit pas lui appartenir, alors même que la relation de contrariété n'exprime aucun conflit entre ces deux arguments. La contrainte est exprimée par une formule propositionnelle sur l'alphabet des arguments. Coste-Marquis *et al.* (2006) et Devred (2006) ont montré que l'ajout de cette contrainte permet à leur système de capturer non seulement le système de Dung, mais également de nombreux systèmes dérivés de celui-ci. Ce nouveau formalisme s'avère donc très puissant. Il a par ailleurs récemment été appliqué dans le cadre du *practical reasoning* par Amgoud *et al.* (2008).

Une question fréquemment posée en complément de la définition des extensions, est celle de l'appartenance d'un argument donné, ou plus généralement de l'inclusion d'un ensemble d'arguments donné, dans une extension (on parle alors d'acceptabilité crédule), voire dans toute extension d'un système d'argumentation (on parle d'acceptabilité sceptique). Une réponse au problème qui concerne l'appartenance d'un argument à au moins une extension préférée a été proposée dans le cadre de Dung par Cayrol *et al.* (2003). Cette réponse prend la forme d'un dialogue entre deux participants, l'un cherchant à montrer l'existence d'une extension qui contient l'argument, l'autre cherchant à montrer que l'ensemble que tente de construire le premier ne peut être une extension. Le cadre dialectique dans lequel sont définis ces types de dialogues a été étendu par Doutre & Mengin (2004) et Devred & Doutre (2007) à l'acceptabilité d'un ensemble d'arguments. C'est une généralisation de ce cadre dialectique aux systèmes d'argumentation à contrainte, et à la notion d'extension préférée étendue à ces systèmes, que nous proposons dans cet article. A noter que d'autres travaux se sont attachés à définir une réponse sous forme d'un dialogue, tels que Dunne & Bench-Capon (2003) ; cependant, les dialogues de ces travaux cherchent à résoudre un conflit d'opinion entre participants, alors que le cadre dialectique de Cayrol *et al.* (2003) ne cherche qu'à prouver l'acceptabilité d'arguments.

L'article est organisé comme suit : en section 2, nous présentons le cadre de Dung et les systèmes d'argumentation à contrainte. En section 3, nous présentons une extension du cadre dialectique de Cayrol *et al.* (2003) aux systèmes d'argumentation à contrainte. Cette extension est utilisée dans la section 4 pour répondre au problème d'acceptabilité crédule d'un argument sous la sémantique $\mathcal{C}$-préférée. Nous concluons en section 5.

2 Les systèmes d'argumentation

2.1 Le cadre de Dung (1995)

Nous présentons ici brièvement le cadre de Dung pour l'argumentation.

Définition 1
Dung (1995) Un **système d'argumentation fini** *est une paire* $AF = \langle A, R \rangle$ *où :*
– A *est un ensemble fini d'objets, les* **arguments**,
– $R \subseteq A \times A$ *est une relation binaire sur* A*, la* **relation d'attaque**.

Pour deux arguments b et c, b attaque c suivant la relation R s'écrit bRc ou encore $(b, c) \in R$. On dit qu'un ensemble S d'arguments attaque un argument a suivant la relation R, s'il existe un élément de S qui attaque a suivant la relation R. Un argument

a est dit attaqué s'il existe un argument qui l'attaque suivant la relation R. Un ensemble d'arguments est attaqué s'il existe un argument de cet ensemble qui est attaqué.

Un système d'argumentation $AF = \langle A, R \rangle$ peut se représenter sous la forme d'un graphe orienté. Les sommets représentent les arguments et les arcs figurent les attaques.
Exemple : $AF = \langle A, R \rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ et $R = \{(a, b), (b, d), (d, i), (i, h), (a, c), (c, e), (e, f), (f, e), (f, g), (g, h)\}$. Le graphe de AF est représenté figure 1.

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r] & d \arrow[r] & i \arrow[r] & h \\
a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
& c \arrow[r] & e \arrow[r, leftrightarrow] & f \arrow[r] & g \arrow[uu]
\end{tikzcd}
$$

FIG. 1 – Représentation graphique de AF

Définition 2
Dung (1995) Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. $S \subseteq A$ est un **ensemble sans conflit** *si et seulement s'il n'existe pas $a \in S$ et $b \in S$ tels que $(a, b) \in R$; $a \in A$ est* **acceptable par rapport à** *$S \subseteq A$ si et seulement si $\forall b \in A$: si $(b, a) \in R$ alors il existe $c \in S$ tel que $(c, b) \in R$; $S \subseteq A$ est* **admissible** *si et seulement si S est sans conflit et $\forall a \in S$, a est acceptable par rapport à S*

Exemple : (suite) $\{a, b\}$ n'est pas sans conflit, $\{a, d\}$ l'est. d est acceptable par rapport à $\{a\}$. $\{a, d, e\}$ est admissible.

2.2 Les systèmes d'argumentation à contrainte

Devred (2006) et Coste-Marquis *et al.* (2006) ont introduit les systèmes d'argumentation à contrainte, i.e. des systèmes d'argumentation « à la Dung » dans lesquels on introduit une contrainte que les ensembles acceptables d'arguments (les extensions) doivent respecter.

Définition 3
Coste-Marquis et al. *(2006) Soit $PROP_{PS}$ un langage propositionnel défini de la manière inductive habituelle sur un ensemble PS de symboles propositionnels, les constantes booléennes $\top$, $\bot$, et les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.*

Un **système d'argumentation à contrainte** *est un triplet $CAF = \langle A, R, \mathcal{C} \rangle$ où :*
- *A est un ensemble fini d'objets, les* **arguments** *;*
- *$R \subseteq A \times A$ est une relation binaire sur A, la* **relation d'attaque** *;*
- *$\mathcal{C}$ est une formule propositionnelle de $PROP_A$, la* **contrainte**[1].

[1]Par abus de langage, A, l'ensemble des arguments, est considéré comme un ensemble de symboles propositionnels dans $PROP_A$.

Nous faisons l'hypothèse que la contrainte $\mathcal{C}$ est sous forme normale conjonctive (CNF). Etant donné qu'il est établi que toute formule admet une formule sous forme CNF qui lui est logiquement équivalente, cette hypothèse est non réductrice.

Etant donné une contrainte $\mathcal{C}$ définie sur $PROP_A$, $\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}^-$) dénote l'ensemble des littéraux positifs (resp. négatifs) de $\mathcal{C}$. Il est possible que $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- \neq \emptyset$.

Dans toute la suite, par abus de langage, nous dirons que la conjonction d'une contrainte $\mathcal{C}$ et d'autres littéraux **ne conduit pas à l'inconsistance**, si la propagation unitaire des autres littéraux sur $\mathcal{C}$ n'amène pas la clause vide.

Exemple : (suite) Nous étendons le système d'argumentation AF de la figure 1 avec une contrainte, $\mathcal{C} = \neg a \vee \neg d \vee \neg e$.

Chaque sous-ensemble S de A correspond à une interprétation sur A donnée par la complétion de S.

Définition 4
Coste-Marquis et al. *(2006) Soit $CAF = \langle A, R, \mathcal{C}\rangle$ un système d'argumentation à contrainte et $S \subseteq A$. S* **satisfait** *$\mathcal{C}$ si et seulement si la* **complétion**

$$\widehat{S} = \{a \mid a \in S\} \cup \{\neg a \mid a \in A \setminus S\}$$

de S est un modèle de $\mathcal{C}$ (noté $\widehat{S} \models \mathcal{C}$).

Exemple : (suite) L'ensemble $\{a, d\}$ satisfait $\mathcal{C}$, car $\widehat{\{a, d\}} = \{a, \neg b, \neg c, d, \neg e, \neg f, \neg g, \neg h, \neg i\}$ et $\widehat{\{a, d\}} \models \mathcal{C}$.

L'idée est de restreindre les ensembles d'arguments qui pourraient constituer des ensembles admissibles en ne gardant que ceux qui satisfont la contrainte $\mathcal{C}$.

Définition 5
Coste-Marquis et al. *(2006) Soit $CAF = \langle A, R, \mathcal{C}\rangle$ un système d'argumentation à contrainte. Un sous-ensemble S de A est* **$\mathcal{C}$-admissible** *pour CAF si et seulement si S est admissible pour $\langle A, R\rangle$ et S satisfait $\mathcal{C}$. Un ensemble $\mathcal{C}$-admissible $S \subseteq A$ de CAF est une* **$\mathcal{C}$-extension préférée** *de CAF si et seulement si $\nexists S' \subseteq A$ tel que $S \subset S'$ et S' est $\mathcal{C}$-admissible pour CAF.*

Exemple : (suite) L'ensemble $\{a, d, e\}$ est admissible, mais il n'est pas $\mathcal{C}$-admissible, car il ne satisfait pas la contrainte $\mathcal{C}$. $\{a, e\}$ est $\mathcal{C}$-admissible. $\{a, d, f, h\}$ et $\{a, e, g\}$ sont les $\mathcal{C}$-extensions préférées de CAF.

Un problème important en argumentation consiste à déterminer si un argument (ou un ensemble d'arguments) donné est acceptable étant donnée une certaine définition des extensions (autrement dit, une sémantique). Pour les $\mathcal{C}$-extensions préférées, ce problème est défini de la manière suivante :

Définition 6
Soit $CAF = \langle A, R, \mathcal{C}\rangle$ un système d'argumentation à contrainte. Soit $S \subseteq A$ un ensemble d'arguments.

- S *est* crédulement accepté *sous la sémantique* $\mathcal{C}$*-préférée ssi* S *est inclus dans au moins une* $\mathcal{C}$*-extension préférée de* $\langle A, R, \mathcal{C}\rangle$.
- S *est* sceptiquement accepté *sous la sémantique* $\mathcal{C}$*-préférée ssi* S *est inclus dans toute* $\mathcal{C}$*-extension préférée* $\langle A, R, \mathcal{C}\rangle$.

Un argument $a \in A$ *est dit crédulement (resp. sceptiquement) accepté sous la sémantique* $\mathcal{C}$*-préférée ssi l'ensemble* $\{a\}$ *l'est.*

Coste-Marquis *et al.* (2006) a montré que, comme pour la sémantique préférée dans le cadre classique de Dung, déterminer si un ensemble d'arguments S est crédulement accepté, est un problème NP-complet ; déterminer si S est sceptiquement accepté est un problème Π_2^p-complet.

Nous nous concentrons dans cet article sur le problème qui consiste à déterminer si un argument est crédulement accepté sous la sémantique $\mathcal{C}$-préférée. Nous allons pour cela utiliser le résultat suivant :

Proposition 1
Coste-Marquis et al. *(2006) Soit* $CAF = \langle A, R, \mathcal{C}\rangle$ *un système d'argumentation à contrainte. Pour chaque ensemble* $\mathcal{C}$*-admissible* S *de* CAF*, il existe une* $\mathcal{C}$*-extension préférée* E *de* CAF *telle que* $S \subseteq E$.

Déterminer si un argument appartient à une $\mathcal{C}$-extension préférée revient donc à déterminer s'il appartient à au moins un ensemble $\mathcal{C}$-admissible.

Pour répondre à ce problème, Coste-Marquis *et al.* (2006) suggère de s'appuyer sur une traduction du système d'argumentation à contrainte en logique propositionnelle. Cette méthode a l'avantage de permettre l'utilisation de prouveurs SAT. L'inconvénient majeur est que la réponse retournée par ces prouveurs ne fera pas apparaître les raisons qui font que l'argument est ou n'est pas acceptable. Or c'est là l'essence même du processus d'argumentation : montrer la façon dont l'argument est contrarié, se défend, comment il respecte la contrainte.

Ce dernier aspect a été pris en compte par Cayrol *et al.* (2003); Doutre & Mengin (2004); Devred & Doutre (2007) dans un cadre dialectique pour la sémantique préférée de Dung. Nous allons étendre ce cadre aux systèmes d'argumentation à contrainte et à la sémantique $\mathcal{C}$-préférée.

3 Cadre dialectique

Une généralisation des cadres dialectiques de Cayrol *et al.* (2003); Doutre & Mengin (2004) a été proposée dans Devred & Doutre (2007). C'est une extension de ce dernier cadre dialectique que nous proposons ici.

Une preuve dialectique est formalisée par un dialogue entre deux joueurs, PRO et OPP. Un dialogue se déroule dans un système d'argumentation à contrainte donné, et est régi par des règles exprimées dans une fonction appelée coup-légal.

Etant donné un ensemble A, A^* dénote l'ensemble des séquences finies d'éléments de A. Nous étendons l'ensemble des arguments avec un argument "vide" (qui n'a de valeur que purement syntaxique), que nous dénotons _. Cet argument va pouvoir être utilisé par un joueur pour exprimer le fait qu'il ne peut avancer aucun argument de l'ensemble A pour répondre à l'autre joueur. L'ensemble $A \cup \{\_\}$ est dénoté A^-.

Définition 7
Un type de dialogue à contrainte *est un tuple* $(A, R, \mathcal{C}, \phi)$, *où* $\langle A, R, \mathcal{C}\rangle$ *est un système d'argumentation à contrainte et* $\phi : A^{-*} \rightarrow 2^{A^-}$ *est une fonction appelée* fonction coup-légal. *Un* coup *dans* A *est une paire* $[P, x]$ *où* $P \in \{\mathrm{PRO}, \mathrm{OPP}\}$ *et* $x \in A$. *Pour un coup* $\mu = [P, x]$, *on utilise* $\mathrm{pl}(\mu)$ *pour dénoter* P *et* $\arg(\mu)$ *pour dénoter* x.

Un dialogue d *pour un argument* $x \in A$ *dans* $(A, R, \mathcal{C}, \phi)$ *(ou* ϕ*-dialogue) est une séquence dénombrable* $\mu_0\mu_1 \ldots$ *de coups dans* A *telle que :*

1. *le premier coup est joué par* PRO *pour avancer* x
2. *les coups suivants sont joués alternativement par* OPP *et* PRO
3. $\forall i \geq 0, \arg(\mu_{i+1}) \in \phi(\arg(\mu_0) \ldots \arg(\mu_i))$

On dit que d porte sur x *(i.e.* $\arg(\mu_0)$*).*

Lorsque l'ensemble des arguments retourné par ϕ est vide, le dialogue ne peut être continué.

Soit $d = \mu_0\mu_1 \ldots \mu_i$ un ϕ-dialogue fini :
- μ_i est dénoté par $\mathrm{last}(d)$;
- $\phi(\arg(\mu_0) \ldots \arg(\mu_i))$ est dénoté par $\phi(d)$;
- $\mathrm{PRO}(d)$ (resp. $\mathrm{OPP}(d)$) dénote l'ensemble des arguments avancés par PRO (resp. OPP) dans d ;

Définition 8
Etant donné un type de dialogue à contrainte $(A, R, \mathcal{C}, \phi)$, *un* ϕ*-dialogue fini* d *est* gagné par PRO *ssi le dernier coup est joué par* OPP *et contient l'argument vide, i.e.* $\mathrm{last}(d) = [\mathrm{OPP}, \_]$.

Dans la section suivante, nous allons montrer comment utiliser ce cadre dialectique pour répondre au problème d'acceptabilité crédule sous la sémantique $\mathcal{C}$-préférée.

4 Acceptabilité crédule

Le problème d'acceptabilité crédule auquel nous cherchons à répondre est celui de l'appartenance d'un argument x à au moins une $\mathcal{C}$-extension préférée. Nous avons montré en section 2 que cela revient à trouver un ensemble $\mathcal{C}$-admissible qui contient x.

Tout d'abord, notons que le problème est trivial si x s'attaque lui-même ou si $x \wedge \mathcal{C}$ conduit à l'inconsistance ; un tel argument ne peut appartenir à aucun ensemble $\mathcal{C}$-admissible. Si x n'est pas dans ce cas trivial, nous allons construire une preuve sous forme de dialogue. Si x est crédulement accepté, la preuve va mettre en évidence un ensemble $\mathcal{C}$-admissible qui contient x, ainsi que les attaquants de x et de l'ensemble $\mathcal{C}$-admissible, la façon dont l'ensemble se défend contre ces attaquants, ainsi que la façon dont la contrainte $\mathcal{C}$ est respectée.

Les dialogues que nous avons définis dans la section précédente nous permettent de distinguer les arguments qui défendent l'argument x contre ses attaquants et qui permettent à l'ensemble construit autour de x de satisfaire la contrainte (ces arguments seront joués par PRO), de ceux qui attaquent l'ensemble (ils seront joués par OPP). Dans le dialogue, chaque coup joué par OPP va faire suite à l'un des coups précédemment joué par PRO tel que l'argument de OPP attaque l'argument de PRO. Si un tel argument n'existe pas, OPP va jouer l'argument vide. Les arguments joués par PRO répondent quant à eux au tout dernier argument avancé par OPP. Tant que l'argument de OPP n'est pas l'argument vide, l'argument de PRO l'attaque et doit respecter un certain nombre de contraintes que nous allons définir un peu plus loin dans l'ensemble POSS. Si l'argument de OPP est l'argument vide, l'ensemble des arguments joués par PRO sera, nous le verrons, admissible. Il ne reste alors qu'à vérifier si cet ensemble satisfait la contrainte pour être $\mathcal{C}$-admissible. Si tel n'est pas le cas, PRO joue un des arguments positifs de la contrainte qui satisfait POSS.

Le dialogue s'arrête lorsque le dernier argument de OPP est l'argument vide et l'ensemble des arguments joués par PRO satisfait la contrainte ; l'ensemble des arguments joués par PRO est alors $\mathcal{C}$-admissible.

Pour présenter l'ensemble POSS et la fonction coup-légal, nous introduisons plusieurs notations : étant donné un système d'argumentation à contrainte $\langle A, R, \mathcal{C} \rangle$, soit $x \in A$ et $S \subseteq A$.

- $\mathrm{Refl} = \{x \in A \mid (x, x) \in R\}$
- $R^+(S) = \{y \in A \mid \exists x \in S$ tel que $(x, y) \in R\}$
- $R^-(S) = \{y \in A \mid \exists x \in S$ tel que $(y, x) \in R\}$
- $R^\pm(S) = R^+(S) \cup R^-(S)$

De plus, $R^+(\{\_\}) = R^-(\{\_\}) = \emptyset$.

Soit d un ϕ-dialogue fini. Si ce dialogue doit mener à la construction d'un ensemble $\mathcal{C}$-admissible, et donc à un ensemble admissible, alors, comme dans Cayrol *et al.* (2003), les arguments joués par PRO ne doivent pas contenir les arguments qui s'auto-attaquent (i.e. Refl), ni ceux qui attaquent ou sont attaqués par des arguments joués par PRO (i.e. $R^\pm(\mathrm{PRO}(d))$). De plus, PRO ne doit pas avoir à répéter un argument qu'il a déjà avancé ($\mathrm{PRO}(d)$) puisque cet argument doit déjà avoir été montré acceptable. Pour résumer, les arguments joués par PRO doivent appartenir à l'ensemble $A \setminus (\mathrm{PRO}(d) \cup \mathrm{Refl} \cup R^\pm(\mathrm{PRO}(d)))$ (condition γ).

En outre, parce que l'ensemble des arguments joués par PRO doit satisfaire la contrainte, les arguments joués par PRO ne doivent pas mener à l'inconsistance, c'est-à-dire, étant donné un argument x satisfaisant la condition γ, $\forall x' \in (\mathrm{PRO}(d) \cup \{x\})$, $\forall x'' \in (\mathrm{OPP}(d) \cup R^\pm(\mathrm{PRO}(d) \cup \{x\}))$, $\bigwedge x' \wedge \bigwedge \neg x'' \wedge \mathcal{C}$ ne conduit pas à l'inconsistance.

Tous ces élements sont exprimés dans l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}\mathrm{POSS}(d) = \{x \mid \quad & x \in A \setminus (\mathrm{PRO}(d) \cup \mathrm{Refl} \cup R^\pm(\mathrm{PRO}(d))) \text{ et} \\ & \forall x' \in (\mathrm{PRO}(d) \cup \{x\}), \\ & \forall x'' \in (\mathrm{OPP}(d) \cup R^\pm(\mathrm{PRO}(d) \cup \{x\})), \\ & \bigwedge x' \wedge \bigwedge \neg x'' \wedge \mathcal{C} \text{ ne conduit pas à l'inconsistance}\}\end{aligned}$$

La fonction coup légal ϕ suivante va nous permettre de définir les dialogues de preuve pour répondre au problème d'acceptabilité crédule :

Définition 9
Etant donné un système d'argumentation à contrainte $\langle A, R, \mathcal{C} \rangle$*, soit* $\phi : A^{-*} \to 2^{A^-}$ *défini par :*

– *si* d *est un dialogue de longueur impaire (c'est au tour de OPP de jouer),*

$$\phi(d) = \begin{cases} \{\_\} & \textit{si } R^-(\mathrm{PRO}(d)) \setminus R^+(\mathrm{PRO}(d)) = \emptyset \\ R^-(\mathrm{PRO}(d)) \setminus R^+(\mathrm{PRO}(d)) & \textit{sinon} \end{cases}$$

– *si* d *est un dialogue de longueur paire (c'est au tour de PRO de jouer),*

$$\phi(d) = \begin{cases} \mathrm{POSS}(d) \cap \mathcal{C}^+ & \textit{si } \mathrm{arg}(\mathrm{last}(d)) = \_ \textit{ et } \widehat{\mathrm{PRO}(d)} \not\models \mathcal{C} \\ \mathrm{POSS}(d) \cap R^-(\{\mathrm{arg}(\mathrm{last}(d))\}) & \textit{sinon} \end{cases}$$

A noter qu'un dialogue fini, défini avec cette fonction coup-légal, aura toujours un dernier coup joué par OPP.

Définition 10
Soit un système d'argumentation à contrainte $\langle A, R, \mathcal{C} \rangle$*. Soit* $x \in A$ *un argument tel que* $x \notin \mathrm{Refl}$ *et* $x \wedge \mathcal{C}$ *ne conduit pas à l'inconsistance. Une* ϕ*-preuve pour* x *est un* ϕ*-dialogue pour* x *gagné par* PRO *tel que* $\mathrm{PRO}(d)$ *satisfait la contrainte* $\mathcal{C}$*.*

Les résultats suivants établissent la correction et la complétude des ϕ-preuves. L'ensemble de ces résultats est démontré ; pour des raisons de place, nous ne présentons qu'une ébauche de ces démonstrations.

Proposition 2 (Correction des ϕ-preuves)
Si d *est une* ϕ*-preuve pour un argument* x*, alors* $\mathrm{PRO}(d)$ *est un ensemble* $\mathcal{C}$*-admissible contenant* x*.*

Lemme 1
Étant donné un type de dialogue $(A, R, \mathcal{C}, \phi)$ *et un* ϕ*-dialogue* d*,* $\mathrm{PRO}(d)$ *est sans conflit et ne conduit pas à l'inconsistance.*

Démonstration (Lemme 1) Il s'agit comme dans Cayrol *et al.* (2003) de faire une preuve par récurrence sur le nombre d'élément de $\mathrm{PRO}(d)$. La partie concernant l'admissibilité est similaire à celle de la preuve initiale, on vérifie juste à chaque fois que l'ensemble ne conduit pas à l'inconsistance. ■

Démonstration (Proposition 2) Le lemme 1 permet de prouver que l'on travaille sur un ensemble admissible et ne conduisant pas à l'inconsistance. De plus on sait que l'on arrête le dialogue lorsque la complétion de $\mathrm{PRO}(d)$ satisfait la contrainte. On peut donc prouver que $\mathrm{PRO}(d)$ est un ensemble $\mathcal{C}$-admissible. ■

Proposition 3 (Complétude des ϕ-preuves)
Si un argument x *appartient à une* $\mathcal{C}$*-extension préférée d'un système d'argumentation à contrainte* $CAF = \langle A, R, C \rangle$ *tel que* A *est fini, alors il existe une* ϕ*-preuve pour* x*.*

Lemme 2
Soit $(A, R, \mathcal{C}, \phi)$ *un type de dialogue et un* ϕ*-dialogue dont le dernier coup est joué par* PRO. *Soit* $S \subseteq A$ *un ensemble minimal tel que* S *est* $\mathcal{C}$*-admissible et contient* $\mathrm{PRO}(d)$. *Si* $S \neq \mathrm{PRO}(d)$ *et* $\mathrm{PRO}(d)$ *non admissible, alors il existe* $x, y \in A$ *tels que le dialogue* $d' = d.[\mathrm{OPP}, x].[\mathrm{PRO}, y]$ *est un* ϕ*-dialogue et* S *est minimal* $\mathcal{C}$*-admissible contenant* $\mathrm{PRO}(d')$.

Démonstration (Lemme 2) Il s'agit d'une adaptation de la preuve proposée dans Cayrol *et al.* (2003) avec, pour chaque ajout d'argument dans le dialogue, la vérification de la contrainte, conformément à la fonction coup-légal. ■

Démonstration (Proposition 3) Le lemme 2 nous permet de construire des dialogues dont l'ensemble des arguments joués par PRO est admissible et ne conduit pas à l'inconsistance à partir d'un ensemble $\mathcal{C}$-admissible. Nous partons comme dans Cayrol *et al.* (2003) d'un ensemble $\mathcal{C}$-admissible S contenant x. Pour chaque élément de l'ensemble, nous pouvons donc construire un dialogue dont l'ensemble des arguments joués par PRO est admissible et ne conduit pas à l'inconsistance. C'est à partir de la réunion de ces dialogues avec l'élimination des redondances et en se basant sur un ordre aléatoire des dialogues (avec comme contrainte que le dialogue pour x est le premier) que nous construisons la ϕ-preuve pour x. ■

Exemple : (suite) Construisons une preuve dialectique pour d (d ne s'auto-attaque pas et ne mène pas à l'inconsistance de $\mathcal{C}$).

$\mu_0 = [\mathrm{PRO}, d], \quad \phi(\mu_0) = \{b\};$
$\mu_1 = [\mathrm{OPP}, b], \quad \phi(\mu_0\mu_1) = \{a\};$
$\mu_2 = [\mathrm{PRO}, a], \quad \phi(\mu_0\mu_1\mu_2) = \{\_\};$
$\mu_3 = [\mathrm{OPP}, \_], \quad \mathrm{PRO}(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3) \models \mathcal{C}, \phi(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3) = \emptyset$

Le dialogue $\delta = \mu_0\mu_1\mu_2\mu_3$ est gagné par PRO, $\mathrm{PRO}(\delta) = \{d, a\}$ est un ensemble $\mathcal{C}$-admissible. L'argument d appartient donc à une $\mathcal{C}$-extension préférée.

Exemple : Nous étendons le système d'argumentation de la figure 1 avec la contrainte $\mathcal{C} = (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (h \vee b)$. Construisons une preuve dialectique pour d (d ne s'auto-attaque pas et ne mène pas à l'inconsistance de $\mathcal{C}$).

$\mu_0 = [\mathrm{PRO}, d], \quad \phi(\mu_0) = \{b\};$
$\mu_1 = [\mathrm{OPP}, b], \quad \phi(\mu_0\mu_1) = \{a\};$
$\mu_2 = [\mathrm{PRO}, a], \quad \phi(\mu_0\mu_1\mu_2) = \{\_\};$
$\mu_3 = [\mathrm{OPP}, \_], \quad \mathrm{PRO}(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3) \not\models \mathcal{C}, \phi(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3) = \{h\};$
$\mu_4 = [\mathrm{PRO}, h] \quad \phi(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) = \{g\};$
$\mu_5 = [\mathrm{OPP}, g] \quad \phi(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5) = \{f\};$
$\mu_6 = [\mathrm{PRO}, f] \quad \phi(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6) = \{\_\};$
$\mu_7 = [\mathrm{OPP}, \_] \quad \mathrm{PRO}(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6\mu_7) \models \mathcal{C}, \phi(\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6\mu_7) = \emptyset$

Le dialogue $\delta = \mu_0\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6\mu_7$ est gagné par PRO, $\mathrm{PRO}(\delta) = \{d, a, h, f\}$ est un ensemble $\mathcal{C}$-admissible. L'argument d appartient donc à une $\mathcal{C}$-extension préférée.

5 Conclusion et perspectives

Le cadre dialectique et la théorie de la preuve présentés dans cet article pour les systèmes d'argumentation à contrainte généralisent les travaux de Cayrol *et al.* (2003), Doutre & Mengin (2004) et Devred & Doutre (2007).

Comme cela a pu être fait dans Devred & Doutre (2007), la théorie de la preuve peut aisément être étendue au problème qui concerne l'acceptabilité crédule d'un ensemble d'arguments, c'est-à-dire déterminer si un ensemble d'arguments donné est inclus dans au moins une $\mathcal{C}$-extension préférée. En perspective, nous envisageons également d'étendre les algorithmes de Cayrol *et al.* (2003) pour calculer les théories de la preuve pour les systèmes d'argumentation à contrainte.

Dans la continuité des travaux de Amgoud *et al.* (2008), nous comptons étudier comment cette théorie de la preuve peut s'appliquer dans le cadre du *practical reasoning*, en particulier pour le problème de la recherche des intentions.

Références

AMGOUD L., DEVRED C. & LAGASQUIE-SCHIEX M.-C. (2008). A constrained argumentation system for practical reasoning. In *AAMAS 2008*, p. 429–436.

BARONI P., GIACOMIN M. & GUIDA G. (2000). Extending abstract argumentation systems theory. *Artificial Intelligence*, **120**(2), 251–270.

BESNARD P. & HUNTER A. (2008). *Elements of Argumentation*. The MIT Press.

BONDARENKO A., DUNG P. M., KOWALSKI R. A. & TONI F. (1997). An abstract, argumentation-theoretic approach to default reasoning. *Artificial Intelligence*, **93**, 63–101.

CAYROL C., DOUTRE S. & MENGIN J. (2003). On decision problems related to the preferred semantics for argumentation frameworks. *Journal of Logic Computation*, **13**(3), 377–403.

CAYROL C. & LAGASQUIE-SCHIEX M.-C. (2005). On the acceptability of arguments in bipolar argumentation framework. In *Proceedings of 8^{th} European Conference on Symbolic and Quantitative Approache to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2005)*, p. 378–389, Barcelona, Spain.

COSTE-MARQUIS S., DEVRED C. & MARQUIS P. (2006). Constrained argumentation frameworks. In *KR 2006*, p. 112–122.

DEVRED C. (2006). *Étude des inférences argumentatives : spécialisations et généralisations du cadre de Dung*. Thèse de doctorat, Université d'Artois, Lens.

DEVRED C. & DOUTRE S. (2007). Dialectical proof theories for the credulous prudent preferred semantics of argumentation. In *ECSQARU 2007*, p. 271–282.

DOUTRE S. & MENGIN J. (2004). On sceptical vs credulous acceptance for abstract argument systems. In *NMR 2004*, p. 134–139.

DUNG P. (1995). On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, **77**(2), 321–358.

DUNNE P. & BENCH-CAPON T. (2003). Two party immediate response disputes : Properties and efficiency. *Artificial Intelligence*, **149**, 221–250.