

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Modèles graphiques</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Syntaxe d'un graphe . . . . .	6
1.3 Réseaux Bayésiens . . . . .	6
1.3.1 Graphe vs Table de probabilités . . . . .	7
1.3.2 Règles et contraintes . . . . .	8
1.3.3 Inférence . . . . .	10
1.4 Réseaux possibilistes . . . . .	12
1.4.1 La théorie des possibilités . . . . .	12
1.4.2 Conditionnement possibiliste . . . . .	13
1.4.3 Réseaux possibilistes . . . . .	14
1.4.4 Les réseaux possibilistes quantitatifs . . . . .	15
1.4.5 Les réseaux possibilistes qualitatifs . . . . .	16
1.4.6 Inférence . . . . .	17
<b>2 Réseaux possibilistes tri-valués</b>	<b>19</b>
2.1 Croyances et logiques tri-valuées . . . . .	19
2.1.1 Les différentes sémantiques . . . . .	20
2.1.2 Les différents opérateurs . . . . .	21
2.2 Syntaxe des réseaux possibilistes tri-valués . . . . .	23
2.3 Réseaux tri-valués et distributions compatibles . . . . .	24
2.4 Sémantique des réseaux tri-valués . . . . .	25
2.5 Règle de chaînage basée sur le <i>min</i> tri-valué . . . . .	26
2.5.1 Règle de chaînage basée sur la conjonction de Lukasiewicz/Kleene . . . . .	27
2.5.2 Règle de chaînage basée sur la conjonction de Bochvar externe . . . . .	28
2.5.3 Règle de chaînage basée sur la conjonction de Bochvar interne . . . . .	31
2.6 Conclusion . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Inférence</b>	<b>34</b>
3.1	Algorithme de l'arbre de jonction . . . . .	34
3.1.1	Construction de l'arbre de jonction . . . . .	34
3.1.2	Initialisation . . . . .	36
3.1.3	Propagation . . . . .	37
3.1.4	Réponse aux requêtes . . . . .	38
3.2	Réseaux possibilistes tri-valués . . . . .	38
3.2.1	Initialisation . . . . .	39
3.2.2	Propagation . . . . .	40
3.3	Utilisation des différents opérateurs pour l'algorithme de l'arbre de jonction . . . . .	40
3.3.1	Opérateurs de Lukasiewicz/Kleene . . . . .	41
3.3.2	Opérateurs de Bochvar externes . . . . .	43
3.3.3	Opérateurs de Bochvar internes . . . . .	45
	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

# Introduction générale

Les modèles graphiques pour l'incertitude sont des outils puissants pour la représentation et le raisonnement avec des informations complexes et incertaines. Ils se caractérisent par une composante graphique qui représente les variables du problème et leurs relations d'(in)dépendances et une composante numérique ou ordinale pour ordonner les croyances d'un agent sur le problème considéré. Ils offrent l'avantage d'être plus simples à interpréter, plus visuels et surtout compacts. En inférence, ils sont efficaces et permettent de multiples usages comme la classification, le diagnostic, l'explication, la planification, etc. Les réseaux Bayésiens et possibilistes sont les plus connus des modèles graphiques.

Les réseaux standards ne permettent pas de représenter l'incomparabilité, l'imprécision ou encore le conflit entre plusieurs agents. C'est pourquoi les réseaux possibilistes tri-valués ont été introduits avec une valeur spéciale  $\{0,1\}$  qui s'ajoute aux deux autres valeurs 0 et 1. Si l'on combine les sémantiques tri-valuées avec les modèles graphiques, on obtient un type particulier de réseaux possibilistes appelés réseaux possibilistes tri-valués [2]. Ces derniers permettent de coder et de raisonner avec certains types d'informations incertaines et imprécises. Ces modèles combinent donc l'expressivité et la modularité des modèles graphiques possibilistes avec l'expressivité des sémantiques des logiques tri-valuées.

Il existe, cependant, plusieurs sémantiques tri-valuées (Kleene, Lukasiewicz, Bochvar, ...) et donc plusieurs opérateurs tri-valués qui permettent de passer du réseau possibiliste tri-valué à la distribution jointe associée à ce même réseau. L'objectif est donc d'explorer ces sémantiques ainsi que ces opérateurs tri-valués afin d'étudier les propriétés des réseaux tri-valués ainsi obtenus.

Dans ce rapport, nous commencerons par présenter les modèles graphiques en général (syntaxe, utilité, ...), puis nous nous intéresserons plus particulièrement aux réseaux Bayésiens et aux réseaux possibilistes. Dans une seconde partie, nous étudierons les différentes sémantiques des logiques tri-valuées ainsi que la syntaxe et sémantique des réseaux possibilistes tri-valués. Nous définirons une nouvelle règle de chaînage qui utilise les différents opérateurs et nous analyserons les résultats obtenus. Enfin, dans la dernière partie, nous déterminerons si un réseau possibiliste tri-valué peut être factorisé grâce à l'algorithme de l'arbre de

jonction [8].

# Chapitre 1

## Modèles graphiques

Les modèles graphiques pour l'incertitude servent principalement à représenter et à raisonner avec des connaissances et informations incertaines ou incomplètes. Généralement, un modèle graphique englobe une composante graphique qui est, selon le type du modèle, un graphe orienté ou non orienté, et une composante numérique ou ordinale afin d'ordonner les croyances d'un agent sur le problème considéré. La partie graphique permet d'une part de visualiser toutes les variables utilisées et d'autre part de mettre en évidence les liens et les relations entre ces mêmes variables. La composante quantitative sert, quant à elle, à quantifier les relations dans le modèle.

### 1.1 Introduction

Les modèles graphiques sont des outils de plus en plus importants pour le raisonnement et la décision dans l'incertain. Il existe plusieurs modèles graphiques dont les plus connus sont les réseaux bayésiens, les arbres de décision, les réseaux possibilistes, etc. Ils sont utilisés principalement pour le diagnostic médical (par exemple il peut exister des relations entre les maladies et les symptômes et donc compte tenu des symptômes, le réseau peut évaluer la présence de telle ou telle maladie), l'analyse de risque ou encore la détection de spams.

La majorité des modèles graphiques font clairement référence à la théorie des probabilités. Les réseaux probabilistes sont des modèles graphiques très utilisés. Ils sont représentés par des graphes orientés acycliques (*DAG* : Directed Acyclic Graphs), où chaque noeud du graphe correspond à une variable et chaque arc représente une relation entre deux variables. L'incertitude est exprimée par des probabilités conditionnelles pour chaque noeud dans le contexte de ses parents. À la place de la théorie des probabilités, on peut retrouver d'autres théories de l'incertain comme la théorie des possibilités.

Les applications des réseaux bayésiens utilisent tous les mécanismes d'inférence, c'est à dire la propagation des informations dans le réseau (quand il y a une nouvelle donnée par exemple), afin d'évaluer les influences entre les différents

éléments du système.

## 1.2 Syntaxe d'un graphe

Soient  $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un ensemble fini de variables et  $E$  un sous-ensemble du produit cartésien  $V \times V$ .

Un modèle graphique de dépendances est une représentation composée d'une paire d'ensembles  $G = (V, E)$ , où  $V$  représente un ensemble fini de noeuds et  $E$  l'ensemble des arcs est un sous-ensemble de  $V \times V$  de noeuds distincts. Un réseau bayésien est un graphe orienté donc un *arc* est une arête orientée. Un arc d'une variable  $A_i$  vers  $A_j$  sera une flèche dont l'*origine* est  $A_i$  et l'*extrémité*  $A_j$ .

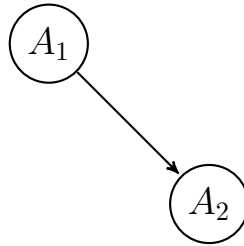


FIGURE 1 : Graphe avec deux variables et un arc de  $A_1$  vers  $A_2$

Un graphe constitué d'arcs est appelé *graphe orienté*. Pour ces graphes, il existe la notion de parents et d'enfants. S'il existe un arc entre  $A_i$  et  $A_j$ ,  $A_i$  est appelé *parent* de  $A_j$  et  $A_j$  l'*enfant* de  $A_i$ . L'ensemble des parents de  $A_i$  est noté par  $U_i$  alors que l'ensemble des enfants de  $A_i$  est noté par  $Y_i$ . Une *racine* est un noeud qui n'a pas de parents. Une *feuille* est un noeud qui n'a pas d'enfants.

Un graphe est alors une structure simple ne contenant pas d'arcs multiples ni de cycles. Un tel modèle graphique est alors un modèle de dépendances défini par la définition 1.

**Définition 1 (Graphe de dépendance)** *Un graphe de dépendance  $G = (V, E)$ , orienté ou non, est composé d'un ensemble de noeuds  $V$ , représentant des variables et un ensemble d'arêtes  $E$  tel que s'il existe un arc entre  $A_i$  et  $A_j$  alors il existe une dépendance directe entre  $A_i$  et  $A_j$ . Un DAG code donc un ensemble de relations de dépendances.*

## 1.3 Réseaux Bayésiens

Les réseaux bayésiens [8, 3] sont des cas particuliers des modèles graphiques. Ces modèles se basent sur la théorie des graphes et la théorie des probabilités. Un réseau bayésien est défini par :

- **Une composante graphique** : Les variables aléatoires et les arcs, représentant une relation de dépendance entre deux variables, forment un graphe orienté acyclique (DAG).

- **Une composante numérique** : Chaque lien dans le DAG est quantifié par une distribution de probabilité conditionnelle  $p(A_i|U_i)$  de tout noeud  $A_i$  dans le contexte de ses parents  $U_i$ .

### 1.3.1 Graphe vs Table de probabilités

On peut se demander pourquoi avoir choisi un graphe au lieu de garder une table contenant l'ensemble des probabilités. Nous allons voir ici les avantages et les inconvénients de chacun en utilisant un exemple simple.

Soient 3 variables binaires A,B,C pouvant valoir Vrai ou Faux. On peut écrire une table listant toutes les combinaisons de ces 3 variables. Il y aura donc  $2^3$  combinaisons possibles. Pour chacune des ces combinaisons, on peut donner la probabilité jointe de la combinaison. La table constitue donc la distribution de probabilité jointe des variables A,B,C. De plus, la somme des probabilités dans la table vaut 1.

A	B	C	P(A,B,C)
$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	0,15
$\neg a$	$\neg b$	c	0,05
$\neg a$	b	$\neg c$	0,25
$\neg a$	b	c	0,03
a	$\neg b$	$\neg c$	0,02
a	$\neg b$	c	0,12
a	b	$\neg c$	0,08
a	b	c	0,3

FIGURE 2 : Table de probabilités jointe avec 3 variables

L'avantage d'une telle table est que l'on peut déduire n'importe quelle probabilité (marginale, conditionnelle, ...).

**Définition 2 (Règle de marginalisation)** Soit  $A \subseteq V$ ,

$$P(A) = \sum_{V/A} P(A_1, \dots, A_n). \quad (1.1)$$

Si l'on veut calculer  $p(b)$  par exemple, on applique la règle de marginalisation comme ceci :  $p(b) = \sum_{a_i \in D_A, c_j \in D_C} (p(a_i, b, c_j))$ .

Par exemple, si l'on cherche la probabilité que A soit vrai, il suffit de sommer les probabilités des combinaisons de la table pour lesquelles A est vrai (ie. "a").

Si on cherche la probabilité que A soit vrai et B vrai, il suffit de sommer les probabilités des combinaisons de la table pour lesquelles A et B sont vrai (ie "a" et "b").

**Définition 3 (Indépendance conditionnelle)** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles de variables aléatoires.  $A$  et  $B$  sont indépendants conditionnellement à  $C$  si et seulement si :

$$P(A, B | C) = P(A | C) \times P(B | C) \quad (1.2)$$

et on note  $A \perp B | C$ .

L'inconvénient de cette méthode est que dès que le nombre de variables augmente, la table devient vite impossible à construire car sa taille est exponentielle par rapport au nombre de variables (pour 10 variables, le tableau aurait une taille de  $2^{10} = 1024$ ). Mais en utilisant l'indépendance entre certaines variables, il est possible de remplacer la table de probabilités jointes par un réseau bayésien dont la taille est largement inférieure à celle de la table. On préférera donc les modèles graphiques afin d'obtenir une économie en mémoire et surtout pour le traitement de problèmes de tailles importantes.

Mais il y a d'autres avantages concernant les modèles graphiques qui ne sont pas négligeables. Un modèle graphique est plus "visuel" car on peut voir, en jetant un simple coup d'oeil au graphe, toutes les variables aléatoires présentes ainsi que leurs dépendances (grâce aux flèches). Grâce à cela, une personne voyant un graphe peut très vite interpréter les relations entre telles ou telles variables et accéder à l'information plus rapidement. Ce qui est plus difficile avec une table de probabilité. Cet aspect "visuel" permet donc aux modèles graphiques d'être plus simple à éliciter qu'une simple table. De plus, un graphe est plus modulaire qu'une table de probabilité, s'il n'y a qu'une partie du graphe qui nous intéresse, il suffit juste de trouver cette partie et de mettre les autres variables "de côté".

### 1.3.2 Règles et contraintes

Les distributions de probabilités locales doivent satisfaire les contraintes de **normalisation** suivantes :

- Pour une variable aléatoire  $A_i$  avec  $U_i = 0$  ( $A_i$  est une racine) alors la distribution locale associée à  $A_i$  doit satisfaire :

$$\forall a_i \in D_{A_i}, \sum_{a_i} P(a_i) = 1. \quad (1.3)$$

- Sinon si  $U_i \neq 0$  alors la distribution conditionnelle associée à  $A_i$  doit satisfaire :

$$\forall u_i \in D_{U_i}, \sum_{a_i \in D_{A_i}} P(a_i | u_i) = 1. \quad (1.4)$$

Grâce à cette contrainte, si toutes les tables locales sont normalisées, alors la table jointe calculée l'est également et c'est ce que l'on souhaite (pouvoir passer d'un modèle graphique à une table de probabilité sans perte d'information). Un réseau bayésien tel qu'il a été défini possède la propriété que toute variable



est indépendante de ses non descendants dans le contexte de ses parents. Cette propriété permet de factoriser la distribution jointe sous une forme factorisée appelée *règle de chaînage* :

**Définition 4 (Règle de chaînage)** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des variables aléatoires et  $U_{A_i}$  les parents d'une variable aléatoire  $A_i$ , on a :

$$P(A_1, \dots, A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i | U_{A_i}). \quad (1.5)$$

L'exemple suivant permet d'illustrer toutes ces notions concernant les réseaux bayésiens.

**Exemple** Soit le réseau bayésien représenté par le graphe donné par la figure 3.

On remarque dans cet exemple, que toutes les distributions locales sont normalisées.

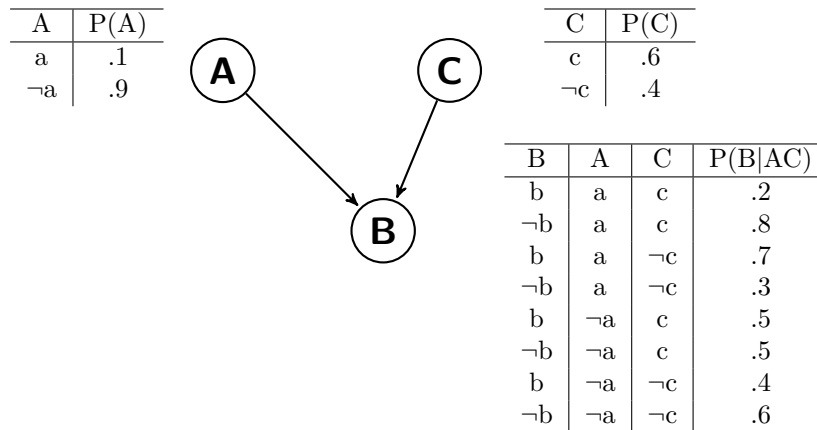


FIGURE 3 : Exemple de réseau Bayésien

En utilisant la règle de chaînage, on peut également faire des calculs du genre :

A	B	C	P(A,B,C)
¬a	¬b	¬c	0,216
¬a	¬b	c	0,27
¬a	b	¬c	0,108
¬a	b	c	0,27
a	¬b	¬c	0,012
a	¬b	c	0,048
a	b	¬c	0,028
a	b	c	0,012

$$\begin{aligned}
P(a, \neg b, \neg c) &= P(a)P(\neg b|a\neg c)P(\neg c) = 0.1 \times 0.3 \times 0.4 = 0,012 \\
P(\neg a, b, c) &= P(\neg a)P(b|\neg ac)P(c) = 0.9 \times 0.5 \times 0.6 = 0,27
\end{aligned}$$

Afin de calculer  $P(b)$  il faut utiliser la *marginalisation* :

$$\begin{aligned}
P(b) &= P(b|ac)P(a)P(c) + P(b|a\neg c)P(a)P(\neg c) + P(b|\neg ac)P(\neg a)P(c) + \\
&\quad P(b|\neg a\neg c)P(\neg a)P(\neg c) = 0,454
\end{aligned}$$

En utilisant la marginalisation et la règle de chaînage, nous pouvons déjà faire une grande partie des calculs, mais il manque encore une règle afin de pouvoir tout calculer. En effet, si l'on veut  $p(ac|b)$  par exemple, on ne peut pas le lire sur la figure 3, ni la calculer en utilisant les deux règles. C'est pourquoi, il faut également utiliser le *théorème de Bayes*.

**Définition 5 (théorème de Bayes)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires, on a :

$$P(X | Y) = \frac{P(Y | X)P(X)}{P(Y)} \tag{1.6}$$

Grâce à ce théorème, on peut donc calculer :

$$P(ac | b) = \frac{P(b | ac) * P(ac)}{P(b)} = \frac{P(b | ac) * P(a) * P(c)}{P(b)} \approx 0,026$$

La principale utilisation des modèles graphiques est le raisonnement et l'inférence. Cela concerne la déduction de certaines informations d'intérêt étant données les informations codées par le réseau et d'autres informations disponibles (des observations par exemple). Les modèles graphiques sont dotés de mécanismes d'inférence pour répondre à des questions d'intérêt afin de réaliser certaines tâches comme l'explication, le diagnostic ou encore la classification, etc.

### 1.3.3 Inférence

De manière générale, l'inférence consiste à propager une ou plusieurs informations certaines (observées) et d'évaluer l'impact dans les croyances représentées par le modèle graphique. Il s'agit par exemple de calculer la probabilité a posteriori des variables non observées (ensemble  $Q$ ) étant donnée un ensemble de variables observées (ensemble  $E$ ). Le résultat donne la probabilité  $P(Q | E)$ . Il existe trois principales catégories de requêtes, et donc d'inférence :

- **Probabilité d'un événement** : Pour ces requêtes, on veut mesurer la probabilité d'un événement donnée  $e$ . Il s'agit de calculer  $P(e)$  depuis le réseau. Les mécanismes utilisés pour ce type de requêtes sont généralement la règle de chaînage et la marginalisation.

- **Explication la plus probable (MPE : Most probable explanation) :** On souhaite ici identifier l’instanciation  $v^*$  (tuple de valeurs) la plus probable de toutes les variables  $V$  du réseau qui soit cohérente avec une instanciation  $e$  d’un sous-ensemble de variables  $E$ . On cherche ici la meilleur explication pour  $E=e$ , calculée comme suit :

$$v^* = \operatorname{argmax}_v(P(v, e)) \quad (1.7)$$

- **Maximum a posteriori (MAP) :** Dans les requêtes de type maximum a posteriori (MAP), il s’agit de calculer l’hypothèse  $h^*$ , instance de  $H$  (variables d’hypothèse ou variable non observées), la plus probable pour une observation donnée  $e$  (instance des variables observées  $E$ ). Dans les problèmes de classifications, par exemple, il s’agit de trouver la classe (variable non observable) la plus probable étant donné les caractéristiques de l’objet à classifier (l’évidence ici concerne les valeurs des variables caractérisant les objets étudiés). L’inférence MAP est basée sur la formule suivante :

$$h^* = \operatorname{argmax}_h(P(h | e)) \quad (1.8)$$

De manière générale, les mécanismes utilisés pour l’inférence dans les réseaux Bayésiens sont le conditionnement, la règle de Bayès, la marginalisation et la règle de chaînage. Les réseaux Bayésiens permettent, grâce à ces mécanismes, de calculer n’importe quelle probabilité d’intérêt à utiliser pour la classification, explication, ...

Notons que les algorithmes d’inférence, de par la nature du résultat qu’ils fournissent, se répartissent en algorithmes d’inférence exacte (qui fournissent des résultats exacts) et des algorithmes d’inférence approchée (car leurs résultats, pour des considérations de complexité de calcul, sont des approximations des probabilités réelles). Les algorithmes d’inférence dans les réseaux Bayésiens peuvent être répartis selon leurs approches en trois catégories :

1. *Inférence par élimination de variables :* Le principe de ces algorithmes est d’éliminer de proche en proche et par marginalisation certaines variables jusqu’à répondre à la requête. L’ordre d’élimination dépend de la requête et de la structure du réseau. La complexité en temps de ce type d’algorithmes est exponentielle dans la largeur (en terme de nombre de variables) des facteurs (tables relatives a des sous ensembles de variables) rencontrés lors de l’élimination.
2. *Inférence par compilation :* On peut mettre dans cette catégorie tous les algorithmes qui passent par des structures ou langages intermédiaires pour répondre (efficacement) aux requêtes posées. Parmi ces algorithmes, certains sont basés sur des structures d’arbres. Le plus connu de ces algorithmes est l’arbre de jonction (Jensen, 1996 [8]) où le réseau Bayésien de départ est compilé en arbre de clusters et séparateurs (dans le chapitre 3 nous détaillerons l’algorithme de l’arbre de jonction pour les versions probabiliste et possibiliste). Après compilation, certains calculs se font de

manière locale aux clusters et séparateurs. La complexité de l'inférence dépend ici de la largeur de l'arbre (consistant en la largeur du plus grand cluster).

3. *Inférence par conditionnement* : L'idée principale dans cette approche est d'exploiter l'évidence sur laquelle porte la requête afin de simplifier le réseau initial en arbre ou polyarbre. À titre d'exemple, les observations sont intégrées en déconnectant les variables observées de leurs descendants directs et en mettant à jour les tables locales de ces derniers. Des algorithmes d'inférence dits par instanciation exploitent également cette idée en instanciant certaines variables et réalisant des inférences sur les réseaux résultants (Pearl, 1988 [13]).

## 1.4 Réseaux possibilistes

Nous avons étudié précédemment les réseaux probabilistes, avec notamment les réseaux bayésiens, car ils se rapprochent fortement des réseaux possibilistes. En effet, la composante graphique a exactement la même syntaxe et sémantique que les réseaux Bayésiens. La composante numérique, quant à elle, est basée sur la théorie des possibilités au lieu des probabilités.

### 1.4.1 La théorie des possibilités

La théorie des possibilités est une théorie de l'incertitude appropriée pour le traitement d'informations incertaines et imprécises. Introduite par Zadeh [18], cette théorie est basée sur deux mesures duales afin de représenter la connaissance, ignorance par rapport aux événements considérés.

Un élément de base de la théorie des possibilités est la notion de *distribution de possibilité*  $\pi$  qui associe à chaque événement élémentaire  $\omega$  de l'univers de discours  $\Omega$  une valeur dans l'intervalle unitaire  $[0,1]$ . Le degré de possibilité  $\pi(\omega)$  représente la compatibilité de  $\omega$  avec l'information disponible. Par convention,  $\pi(\omega) = 1$  signifie que  $\omega$  est totalement possible, et  $\pi(\omega) = 0$  signifie que  $\omega$  est impossible. Lorsque  $\pi(\omega) > \pi(\omega')$ ,  $\omega$  est préférée à  $\omega'$  pour être l'état réel du monde.

Il existe également trois axiomes concernant la théorie des possibilités qu'il ne faut pas négliger :

- $\pi(A \cup B) = \max(\pi(A), \pi(B))$ . Cette formule est l'équivalent de l'axiome de l'additivité en probabilité  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  pour A et B disjoints ( $A \cap B = \emptyset$ ).
- $\pi(\emptyset) = 0$ . L'univers du discours est fermé, il n'y a pas de croyances pour des événements en dehors de  $\Omega$ .
- $\pi(\Omega) = 1$ . C'est la normalisation.

La distribution de possibilité  $\omega$  est dite normalisée s'il existe au moins une interprétation cohérente avec les informations disponibles, c'est à dire :

$\exists \omega \in \Omega, \pi(\omega) = 1$  (c'est l'équivalent de l'axiome de normalisation en théorie des probabilités).

La théorie des possibilités [5] repose sur deux mesures pour évaluer la connaissance/ignorance :

- **mesure de possibilité** : Cette mesure, notée  $\Pi(\varphi)$ , est une fonction qui associe à chaque événement  $\varphi \subseteq \Omega$  un degré de possibilité dans l'intervalle  $[0,1]$ . Il peut être simplement obtenu à partir de  $\pi$  comme suit :

$$\Pi(\varphi) = \max\{\pi(\omega) \mid \omega \in \varphi\}$$

- **mesure de nécessité** : Cette mesure correspond au degré de certitude associé à  $\varphi$  à partir des informations codées par  $\pi : N(\varphi) = 1 - \Pi(\bar{\varphi})$  (où  $\bar{\varphi}$  est le complémentaire de  $\varphi$  dans  $\Omega$ ).

Selon l'interprétation conférée à l'intervalle unitaire  $[0,1]$  dans lequel les distributions de possibilités sont exprimées, il existe deux variantes de théorie des possibilités :

1. **Théorie de possibilités qualitatives** : Dans ce cas, une distribution de possibilités associe à chaque événement de l'univers du discours  $\Omega$  un degré de possibilité "ordinal" où seul l'ordre des valeurs est important.
2. **Théorie des possibilités quantitatives** : Dans ce cas, l'intervalle unitaire  $[0,1]$  est numérique. Ainsi, les degrés de possibilité sont des valeurs numériques qui peuvent être manipulées par les opérateurs arithmétiques.

A cause de ces différences, les cadres possibilistes qualitatif et quantitatif impliquent différentes définitions pour le conditionnement que nous allons voir par la suite.

La théorie des possibilités diffère de la théorie des probabilités car elle est moins restrictive et permet de mieux coder certains types d'incertitudes (comme l'ignorance totale ou partielle).

La théorie des possibilités est utilisée dans des domaines aussi variés que l'automatisme (freins ABS), la robotique (reconnaissance de formes), le contrôle aérien, l'environnement (météorologie, climatologie, sismologie), la médecine (aide au diagnostic), l'assurance (sélection et prévention des risques) et bien d'autres.

### 1.4.2 Conditionnement possibiliste

Le conditionnement est une notion fondamentale pour la mise à jour des connaissances actuelles suite à l'arrivée d'une évidence. Cela concerne la mise à jour des connaissances actuelles (codées par la distribution de possibilités  $\pi$ ) quand une évidence est observée. Il existe plusieurs conditionnements mais le plus utilisé est celui de Hisdal [7].

Dans le cadre qualitatif, le degré de possibilité conditionnel de  $\omega$  étant donné un événement  $\varphi \subseteq \Omega$  est calculé comme suit (nous supposons que  $\Pi(\varphi) \neq 0$ ) :

$$\pi_m(\omega \mid \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \in \varphi \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \in \varphi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cadre quantitatif, le conditionnement est défini comme suit :

$$\pi_p(\omega \mid \varphi) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\varphi)} & \text{si } \omega \in \varphi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 1.4.3 Réseaux possibilistes

Comme les réseaux Bayésiens, un réseau possibiliste se compose de deux éléments :

- **une composante graphique** qui correspond à un DAG où chaque noeud correspond à une variable et chaque arc représente une relation de dépendance entre deux variables. On remarque que la syntaxe est exactement la même que pour les réseaux Bayésiens.
- **une composante quantitative** composée d'un ensemble de distributions de possibilités locales quantifiant l'influence exercée sur chaque variable  $A_i$  par ses parents directs, notés  $U_{A_i}$ .

Les distributions de possibilités locales doivent satisfaire les contraintes de **normalisation** suivantes :

- Pour une variable  $A_i$  avec  $U_i = 0$  ( $A_i$  est une racine) alors la distribution marginale associée à  $A_i$  doit satisfaire :

$$\forall a_i \in D_{A_i}, \max_{a_i} (\pi(a_i)) = 1$$

- Sinon si  $U_i \neq 0$  alors la distribution conditionnelle associée à  $A_i$  doit satisfaire :

$$\forall u_i \in D_{U_i}, \max_{a_i \in D_{A_i}} (\pi(a_i \mid u_i)) = 1$$

**Exemple** Soit le réseau possibiliste représenté par le graphe donné par la Figure 4.

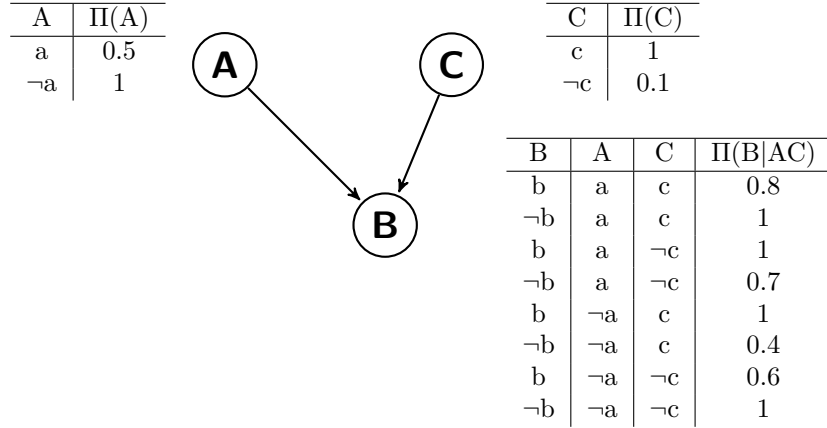


FIGURE 4 : Exemple de réseau possibiliste avec les distributions de possibilités locales

Selon les différentes définitions de la conjonction, on différencie deux types de réseaux possibilistes :

- Les réseaux possibilistes quantitatifs (ou basés sur le produit) lorsque les informations disponibles sont de nature numérique et prennent leur sens dans l'intervalle unitaire.
- Les réseaux possibilistes qualitatifs (ou basés sur le minimum) lorsque les informations détenues sont de nature ordinale ou qualitative.

#### 1.4.4 Les réseaux possibilistes quantitatifs

Les réseaux possibilistes quantitatifs (basés sur le produit) sont très proches en termes de conditionnement et d'indépendance des réseaux Bayésiens.

La distribution de possibilité  $\pi_{G_p}$  associée à un réseau possibiliste quantitatif est calculée sur un ensemble de variables  $V = \{A_1, \dots, A_n\}$  de la même manière que les réseaux bayésiens en utilisant la **règle de chaînage** suivante :

$$\pi_{G_p}(A_1, \dots, A_n) = \prod_{i=1}^n \pi(A_i | U_{A_i}) \quad (1.9)$$

où  $\pi(A_i | U_{A_i})$  correspond à la distribution de possibilité locale associée à la variable  $A_i$  dans le contexte de ses parents.

Les réseaux possibilistes quantitatifs et les réseaux bayésiens probabilistes se différencient au niveau de la marginalisation. Dans le cas des réseaux possibilistes, la marginalisation est réalisée en utilisant l'opérateur *maximum* au lieu de l'opérateur *somme*.

L'exemple suivant permet d'illustrer la représentation de la distribution jointe dans les réseaux possibilistes quantitatifs.

**Exemple :** Soit le réseau possibiliste représenté par le graphe donné par la figure 4. La distribution de possibilité jointe définie par :  $\pi_{G_p}(A, B, C) = \Pi(A).\Pi(B|AC).\Pi(C)$  est donnée dans la table suivante :

A	B	C	$\pi_{G_p}(A, B, C)$	A	B	C	$\pi_{G_p}(A, B, C)$
a	b	c	0.4	$\neg a$	b	c	1
a	b	$\neg c$	0.05	$\neg a$	b	$\neg c$	0.06
a	$\neg b$	c	0.5	$\neg a$	$\neg b$	c	0.4
a	$\neg b$	$\neg c$	0.035	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	0.1

A	B	C	$\pi_{G_p}(A, B, C)$
$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	0,1
$\neg a$	$\neg b$	c	0,4
$\neg a$	b	$\neg c$	0,06
$\neg a$	b	c	1
a	$\neg b$	$\neg c$	0,035
a	$\neg b$	c	0,5
a	b	$\neg c$	0,05
a	b	c	0,4

#### 1.4.5 Les réseaux possibilistes qualitatifs

Si une distribution de possibilités est considérée comme un ordre total sur l'ensemble  $\Omega$ , on utilise le conditionnement qualitatif. Une distribution de possibilité dans un raisonnement qualitatif admet une décomposition qui se base sur l'opérateur minimum au lieu du produit et le maximum au lieu de la somme. Ces réseaux sont appelés **réseaux possibilistes qualitatifs**.

La distribution de possibilité  $\pi_{G_m}$  associée à un réseau possibiliste quantitatif est calculée sur un ensemble de variables  $V = \{A_1, \dots, A_n\}$  d'une manière similaire que les réseaux bayésiens en utilisant la **règle de chaînage** basée sur le minimum :

$$\pi_{G_m}(A_1, \dots, A_n) = \min_{i=1, \dots, n} \pi(A_i | U_{A_i}) \quad (1.10)$$

où  $\pi(A_i | U_{A_i})$  correspond à la distribution de possibilités locale associée à la variable  $A_i$  dans le contexte de ses parents.

L'exemple suivant permet d'illustrer la représentation de la distribution jointe dans les réseaux possibilistes qualitatifs.

**Exemple** Soit le réseau possibiliste représenté par le graphe donné par la figure 4. La distribution de possibilité jointe définie par :  $\pi_{G_m}(A, B, C) = \min(\Pi(A), \Pi(B|AC), \Pi(C))$  est donnée dans la table suivante :



A	B	C	$\pi_{G_m}(A, B, C)$	A	B	C	$\pi_{G_m}(A, B, C)$
a	b	c	0.5	$\neg$ a	b	c	1
a	b	$\neg$ c	0.1	$\neg$ a	b	$\neg$ c	0.1
a	$\neg$ b	c	0.5	$\neg$ a	$\neg$ b	c	0.4
a	$\neg$ b	$\neg$ c	0.1	$\neg$ a	$\neg$ b	$\neg$ c	0.1

A	B	C	$\pi_{G_p}(A, B, C)$
$\neg$ a	$\neg$ b	$\neg$ c	0,1
$\neg$ a	$\neg$ b	c	0,4
$\neg$ a	b	$\neg$ c	0,1
$\neg$ a	b	c	1
a	$\neg$ b	$\neg$ c	0,1
a	$\neg$ b	c	0,5
a	b	$\neg$ c	0,1
a	b	c	0,5

#### 1.4.6 Inférence

Tout comme les réseaux bayésiens, l'inférence dans les réseaux possibilistes est très importante. Nous verrons dans le Chapitre 3 que l'algorithme de propagation dans les arbres de jonction [8] est basé sur 4 étapes. L'avantage des arbres de jonction est que ces étapes s'appliquent aussi bien aux réseaux bayésiens probabilistes qu'aux réseaux possibilistes.



## Chapitre 2

# Réseaux possibilistes tri-valués

Ce chapitre propose un autre type de modèles graphiques : les réseaux possibilistes tri-valués initialement proposés dans [2]. Ce formalisme est particulièrement efficace pour le raisonnement avec des croyances imprécises ainsi que pour le traitement d'informations provenant de sources multiples. En particulier, dans le cas où les sources fournissent des informations contradictoires et qu'il n'y a aucune information sur leur fiabilité ou sur leur priorité.

De la même manière que la logique tri-valuée, qui étend la logique propositionnelle (booléenne) en introduisant une troisième valeur de vérité afin de représenter les connaissances incomplètes, les réseaux possibilistes tri-valués possèdent uniquement trois valeurs dans leurs tables de possibilités locales. Rappelons que 0 représente l'impossibilité qu'un événement puisse arriver, 1 représente quant à lui le fait qu'un événement arrive est totalement possible (mais pas certain !!) et enfin la valeur  $\{0,1\}$  (ou  $\frac{1}{2}$ ) est utilisée lorsque la valeur ne peut être ni 0 ni 1. Une des interprétations (la plus courante) de  $\{0,1\}$  est que dans le contexte de  $u_i$  (qui correspond aux parents de la variable  $A_i$ ), la valeur  $a_i$  est soit totalement possible soit totalement impossible.

### 2.1 Croyances et logiques tri-valuées

Afin de généraliser la logique booléenne où on ne compte que deux valeurs de vérité, plusieurs systèmes de logiques tri-valuées ont été proposés, concernant le vrai (1, T ou  $\top$ ), le faux (0, F ou  $\perp$ ), et une troisième valeur généralement interprétée comme "indéterminé" ou "possible" ( $\frac{1}{2}$ , I ou  $\{0,1\}$ ).

Dans ce chapitre, nous étudierons les différentes interprétations possibles de cette nouvelle valeur de vérité. Puis nous passerons en revue les logiques tri-valuées les plus connues en nous intéressant uniquement à l'interprétation de la 3<sup>e</sup> valeur et aux opérateurs conjonctifs et disjonctifs de ces logiques.

### 2.1.1 Les différentes sémantiques

La logique classique booléenne possède un énorme avantage par rapport à beaucoup d'autres : elle est unique et non ambiguë, même si les valeurs de vérité *vrai* (1, T ou  $\top$ ) et *faux* (0, F ou  $\perp$ ) peuvent s'interpréter de façon diverses en pratique (ouvert/fermé, allumé/éteint par exemple).

Ce n'est pas le cas pour les logiques multivaluées appelées ainsi parce qu'on remplace les deux valeurs de vérité par un ensemble généralement "ordonné" de valeurs comprises entre 0 et 1. Le cas le plus simple est celui des logiques tri-valuées où l'on rajoute une seule variable intermédiaire (notée généralement  $\frac{1}{2}$ , I, U ou encore  $\{0,1\}$ ). D'une part, il y a de nombreuses logiques tri-valuées, car l'extension à trois valeurs des connecteurs logiques n'est pas unique. D'autre part, il n'y a pas de consensus sur l'interprétation de la valeur de vérité intermédiaire. Plusieurs interprétations de la troisième valeur de vérité ont été proposées afin de capturer les différents types d'informations incomplètes.

En voici une liste non-exhaustive :

- *Possible* : C'est l'interprétation la plus ancienne due à Lukasiewicz [12].
- *A moitié vrai* : C'est une vision naturelle : s'il est vrai qu'une boule de bowling pesant 16kg est lourde et qu'il est faux qu'une boule de bowling pesant 8 kg est lourde, on peut penser qu'il est à moitié vrai qu'une boule de 12 kg est lourde.
- *Non-défini* : Cette vision vient de l'étude des fonctions récursives comme formules logiques et se trouve documentée dans les travaux de Kleene [11]. Une formule est non-définie si certains de ses arguments sont hors de leurs ensembles de définitions.
- *Inconnu* : Kleene [11] suggère aussi cette interprétation de la valeur intermédiaire. C'est également la façon de voir la valeur la plus usuelle.
- *Non-Pertinent* : Cette vision est similaire à "non-défini" mais possède un effet opposé : l'abstention. Si une composante d'une formule a pour valeur de vérité  $\{0,1\}$ , la valeur de vérité de la formule globale est celle de la composante restante.

Si l'on rapproche cela avec les croyances d'un agent, la troisième valeur prend tout son sens. En effet, avec la logique classique booléenne, un individu doit choisir entre "je suis sûr que c'est vrai" et "je suis sûr que c'est faux". Ce qui pose problème, car il existe des cas où l'agent ne peut pas savoir, ne peut pas choisir pour diverses raisons (absence d'information, impossible à prouver, ...). Il ne faut donc pas confondre l'idée de vérité en soi et celle de l'affirmation de la vérité, laquelle découle des informations possédées par le locuteur (une état *épistémique*). C'est à ce moment qu'intervient la troisième valeur de vérité afin de représenter cette incertitude.

Mais pour représenter cette incertitude, il existe d'autres logiques connues et également utilisées. C'est le cas de la logique de Belnap, qui utilise quatre valeurs (les deux valeurs booléennes 1 (true) et 0 (false) accompagnées de deux autres valeurs Z et R). Z désigne une valeur qui est vraie et fausse à la fois et R désigne qu'une valeur ne peut ni être vraie ni être fausse. Cette logique

est surtout utilisée lorsque l'on a beaucoup de sources d'informations (plusieurs agents), si tous les agents disent vrais alors on assigne vrai, de même pour faux, si certains agents disent vrai et d'autres faux alors les deux sont assignées (Z) sinon, dans le cas où il n'y a pas d'informations, on assigne aucune des deux (R). On retrouve également des logiques tout aussi connues telles que la logique modale, la logique floue (qui permet d'intégrer la capacité de l'être humain à accepter des données imprécises et pouvoir néanmoins être en mesure de raisonner dessus), la logique probabiliste et également la logique possibiliste [18].

### 2.1.2 Les différents opérateurs

Plusieurs mathématiciens et philosophes, tels que Kleene, Gödel, Bochvar ou encore Lukasiewicz, ont proposé des logiques tri-valuées différentes. Cette différence est due à l'ajout d'une troisième valeur de vérité. En effet, tout comme la logique binaire, les logiques tri-valuées possèdent des opérateurs ( $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ , ...). Mais l'ajout de cette valeur demande un remaniement des tables de vérité (par exemple on sait que  $1 \vee 0 = 1$  mais que donne  $\frac{1}{2} \vee 0$ ?). Nous nous intéresserons principalement à la conjonction ( $\wedge$ ) et à la disjonction ( $\vee$ ) car ce sont les deux opérateurs qui nous serviront par la suite, principalement pour la règle de chaînage et la marginalisation.

#### Les connecteurs conjonctifs et disjonctifs de Lukasiewicz

Jan Lukasiewicz [12] (1878-1956) est une des premières personnes à parler de logique tri-valuée. Pour la conjonction et la disjonction, il a proposé les tables de vérité suivantes :

		$\mathbf{p \wedge_L q}$		
$\mathbf{p/q}$		1	1/2	0
1		1	1/2	0
1/2		1/2	1/2	0
0		0	0	0

		$\mathbf{p \vee_L q}$		
$\mathbf{p/q}$		1	1/2	0
1		1	1	1
1/2		1	1/2	1/2
0		1	1/2	0

Pour Lukasiewicz, cette troisième valeur est une valeur intermédiaire comprise entre 0 et 1, on a donc  $0 < \frac{1}{2} < 1$ . Et si on regarde attentivement ces deux tables de vérité, on se rend compte qu'il y a un lien entre conjonction et minimum mais également entre disjonction et maximum. On a donc :

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \wedge \beta) &= \min(\pi(\alpha), \pi(\beta)) \\ \pi(\alpha \vee \beta) &= \max(\pi(\alpha), \pi(\beta)) \end{aligned}$$

Par exemple, en regardant les tables de vérité, on voit que  $\frac{1}{2} \wedge_L 1 = \frac{1}{2}$  ce qui revient à faire  $\min(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$ . De même pour la disjonction,  $\frac{1}{2} \vee_L 1 = 1$  donne le même résultat que  $\max(\frac{1}{2}, 1) = 1$ .

### Les connecteurs conjonctifs et disjonctifs de Kleene

La logique de Stephen Cole Kleene [11] (1909-1994) est très similaire à celle de Lukasiewicz concernant la conjonction et la disjonction.  $\frac{1}{2}$  a exactement la même signification dans les deux logiques. La différence se situe au niveau de l'implication ( $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = 1$  pour Lukasiewicz alors que cela fait  $\frac{1}{2}$  pour Kleene).

### Les connecteurs conjonctifs et disjonctifs de Bochvar

Dmitri Bochvar (1909-1994) fut inspiré par le paradoxe du menteur (Liar Paradox) qui, dans sa forme la plus simple, est "Cette phrase est fausse". Pour lui cette phrase n'a pas de sens et donc ne peut être ni vraie ni fausse, puisque seules les phrases qui ont du sens peuvent rendre les choses vraies ou fausses. Contrairement à Lukasiewicz et Kleene qui pensaient que  $\frac{1}{2}$  est une valeur intermédiaire (comprise entre 0 et 1), pour Bochvar,  $\frac{1}{2}$  est une valeur à part représentant l'insignifiance. Il existe deux catégories d'opérateurs de Bochvar : Les opérateurs internes et les opérateurs externes.

#### Les connecteurs conjonctifs et disjonctifs interne

p/q	$\mathbf{p} \wedge_{BI} \mathbf{q}$		
	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

p/q	$\mathbf{p} \vee_{BI} \mathbf{q}$		
	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	0

On remarque ici, que se soit pour la conjonction ou la disjonction, que si un des deux facteurs vaut  $\frac{1}{2}$  alors le résultat vaut forcément  $\frac{1}{2}$ . On dit que l'ignorance est contagieuse.

#### Les connecteurs conjonctifs et disjonctifs externe

p/q	$\mathbf{p} \wedge_{BE} \mathbf{q}$		
	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	0	0
0	0	0	0

p/q	$\mathbf{p} \vee_{BE} \mathbf{q}$		
	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	0	0
0	1	0	0

Dans cette logique, Bochvar traite la troisième valeur de vérité comme si celle-ci était fausse. On a par exemple  $\frac{1}{2} \wedge_{BE} 1 = 0$  : si un des deux facteurs n'est pas vrai alors la conjonction ne peut pas être vraie. Le résultat intéressant est que, avec cette logique externe, on obtient un calcul compatible avec le calcul classique bivalent. En effet cela se vérifie en regardant les deux tables de vérité car quelque soit les deux propositions que l'on choisit, le résultat sera toujours 0 ou 1 (et jamais  $\frac{1}{2}$ ).

## 2.2 Syntaxe des réseaux possibilistes tri-valués

On retrouve exactement la même syntaxe que les réseaux bayésiens et possibilistes. On définit un réseau possibiliste tri-valué (3VG) comme suit :

**Définition 6** *Un réseau possibiliste tri-valué  $3VG = \langle G, \Theta^{3V} \rangle$  est un modèle graphique avec :*

1.  $G = \langle V, E \rangle$  est un DAG contenant les variables  $V = \{A_1, \dots, A_n\}$  et l'ensemble des arcs  $E$  entre chaque variable.
2.  $\Theta^{3V} = \{\theta_1^{3V}, \dots, \theta_n^{3V}\}$  où chaque  $\theta_i^{3V}$  correspond à une distribution de possibilités locale tri-valuée associée à la variable  $A_i$  dans le contexte de ses parents  $U_i$ .  $\theta_{a_i|u_i}^{3V}$  prend les valeurs 0, 1 ou  $\{0, 1\}$ .

**Exemple** *La figure suivante donne un exemple d'un réseau possibiliste tri-valué avec quatre variables A, B, C et D.*

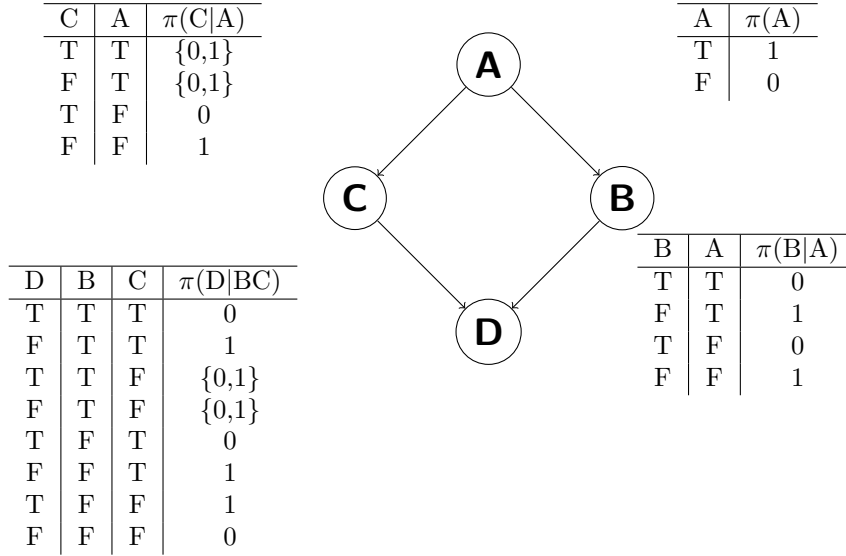


FIGURE 5 : Exemple d'un réseau possibiliste tri-valué

Dans le réseau possibiliste tri-valué de la Figure 5, on remarque que l'état  $A=T$  ( $A$  est vrai) est certain. Dans le contexte où  $A=F$ , l'état  $B=T$  est par contre totalement impossible. Cependant dans le contexte où  $A=T$ , l'état  $C=F$  est inconnu.

Concernant la normalisation des tables locales, celle-ci est globalement la même que celle utilisée avec les réseaux possibilistes. La seule différence réside, dans le fait, qu'il est possible d'avoir des  $\{0, 1\}$ .

## 2.3 Réseaux tri-valués et distributions compatibles

Une distribution booléenne possibiliste  $\pi$  est une table qui comporte toutes les interprétations possibles. Pour chacune de ces interprétations  $\omega$ ,  $\pi(\omega)$  vaut soit 0 soit 1.

On dit qu'une distribution booléenne possibiliste  $\pi$  sur l'univers du discours  $\Omega$  est compatible avec une distribution 3V  $\pi^{3V}$  si elle respecte la définition suivante :

**Définition 7** Soit  $\pi$  une distribution booléenne possibiliste sur  $\Omega$ .  $\pi$  est compatible avec une distribution 3V si et seulement si :

1.  $\forall \omega \in \Omega, \pi(\omega) \in \pi^{3V}(\omega)$ .
2.  $\max_{\omega \in \Omega}(\pi(\omega)) = 1$ .

Ces deux conditions sont à la fois simples et nécessaires. La Condition 1 assure que chaque interprétation  $\omega$  possible, elles sont également présentes dans la distribution 3V  $\pi^{3V}$ . La Condition 2, quant à elle, assure que la distribution compatible  $\pi$  est normalisée.

Un réseau possibiliste  $G$  est compatible avec un réseau 3VG s'il respecte la définition suivante :

**Définition 8** Soit  $3VG = \langle G, \Theta^{3V} \rangle$  un réseau possibiliste tri-valué. Un réseau booléen  $\Pi G = \langle G, \Theta \rangle$  est compatible avec 3VG si et seulement si :

1. 3VG et  $\Pi G$  ont exactement le même graphe
2.  $\forall \theta_{a_i|u_i} \in \Theta, \theta_{a_i|u_i} \in \theta_{a_i|u_i}^{3V}$  avec  $\theta_{a_i|u_i}^{3V} \in \Theta^{3V}$ .

D'après la Définition 14, un réseau possibiliste  $\Pi G$  est compatible avec un réseau 3VG s'ils ont la même structure et que chaque distribution locale  $\theta_{a_i|u_i}$  de  $\Pi G$  est compatible avec les distributions locales 3V  $\theta_{a_i|u_i}^{3V}$  dans 3VG.

### Exemple

Soit le réseau possibiliste tri-valué 3VG de la figure 6 avec  $A$  et  $B$  deux variables binaires.

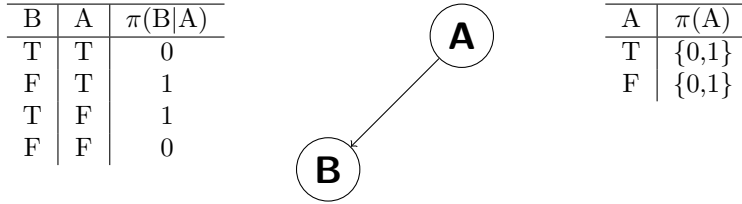
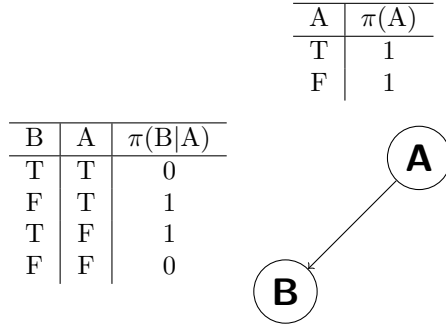


FIGURE 6 : Exemple 2 d'un réseau possibiliste tri-valué.

On peut facilement vérifier que le réseau de la Figure 10 est normalisé et compatible avec le réseau 3VG de la Figure 6.





A	B	$\pi(AB)$
T	T	0
T	F	{0,1}
F	T	{0,1}
F	F	0

FIGURE 7 : Exemple d'un réseau compatible avec le réseau 3VG de la Figure 6.

Pour le réseau de la Figure 6, il existe exactement 3 réseaux compatibles où, exactement comme dans la Figure 7, on associe à la variable A (0, 1), (1, 0) ou (1, 1). Il n'y a pas (0, 0) sinon la table ne sera pas normalisée.

## 2.4 Sémantique des réseaux tri-valués

On a vu précédemment qu'à partir d'un réseau 3VG, il est possible d'obtenir un ensemble de réseaux possibilistes booléens compatibles avec ce réseau. Mais comment faut-il raisonner avec ces réseaux (et distributions jointes) compatibles? Selon l'interprétation adoptée, on peut définir plusieurs manières de combiner ces réseaux/distributions compatibles. En effet, une distribution possibiliste 3V peut être déduite à partir de ces réseaux compatibles comme suit :

**Définition 9** Soit un réseau possibiliste tri-valué 3VG et  $\mathbb{F}^G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  l'ensemble des réseaux compatibles avec le réseau 3VG. Alors  $\forall \omega \in \Omega$  :

$$\pi_{3VG}(\omega) = \begin{cases} \pi^{G_i}(\omega) & \text{si } \forall G_i, G_j \in \mathbb{F}^G, \pi^{G_i}(\omega) = \pi^{G_j}(\omega); \\ \{0, 1\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $G_i, G_j$  sont deux réseaux possibilistes booléens compatibles avec le réseau 3VG.

Cette définition veut que dans le cas où tous les réseaux compatibles ont le même degré de possibilité, pour une interprétation donnée  $\omega$ , alors il n'y a pas de raison que le degré de possibilité soit différent pour  $\pi_{3VG}$ . Par contre,

en cas de "conflit" (si dans un réseau compatible le degré de possibilité d'une interprétation est de 1 et dans un autre réseau il est de 0) alors c'est la valeur  $\{0,1\}$  qui est associée à  $\omega$  dans la distribution jointe  $\pi_{3VG}$ .

**Exemple :** Continuons avec l'exemple de la Figure 6. On a vu qu'il y avait trois réseaux booléens  $G_1, G_2$  et  $G_3$  compatibles avec le réseau 3VG de la Figure 6. Ces trois réseaux diffèrent uniquement dans la distribution booléenne associée à la variable  $A$  (où il y a les  $\{0,1\}$ ). En effet, on a  $(\pi(A=T), \pi(A=F))=(1,1)$ ,  $(\pi(A=T), \pi(A=F))=(1,0)$  et  $(\pi(A=T), \pi(A=F))=(0,1)$ . On remarque que parmi ces trois réseaux compatibles, il n'y a pas trois fois la même valeur concernant la variable  $A$ . Quelque soit l'événement, on a donc  $\pi_{3VG}(AB) = \{0,1\}$ .

## 2.5 Règle de chaînage basée sur le *min* tri-valué

Dans les réseaux Bayésiens et possibilistes, il existe une règle de chaînage (Equation 1.5, 1.8 et 1.9) qui permet de passer d'un modèle graphique à une distribution jointe. La règle de chaînage basée sur le min de l'Equation 1.9 peut être étendue directement au cadre 3V en utilisant un opérateur 3V basé sur le minimum (noté  $\min^{3V}$ ). Maintenant en utilisant l'opérateur  $\min^{3V}$ , la règle de chaînage de l'Equation 1.9 devient, dans le cadre des réseaux 3V, la règle de chaînage 3V suivante :

**Définition 10** Soit  $\omega = a_1, a_2, \dots, a_n$ , on a :

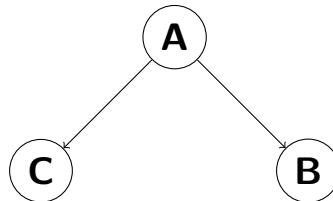
$$\pi^{3V}(a_1, \dots, a_n) = \min_{i=1, \dots, n}^{3V} \theta_i^{3V}(a_i | u_i) \quad (2.1)$$

Mais, nous avons vu, au début de ce chapitre, qu'il existe plusieurs logiques tri-valuées et donc autant de sémantiques et d'opérateurs différents. Nous allons donc dans cette partie étudier ces différents opérateurs. Notre but étant de répondre à cette question :

Est-ce que l'ensemble des distributions booléennes compatibles à un réseau 3VG est équivalent à l'ensemble des distributions compatibles avec la distribution jointe  $\pi_{3V}$ , de ce même réseau 3VG, obtenue en utilisant la règle de chaînage de l'Equation 3.1 ?

**Exemple :** Nous utiliserons ce réseau 3VG tout au long de cette partie afin d'illustrer les différents opérateurs.

C	A	$\pi(C A)$
T	T	1
F	T	0
T	F	1
F	F	0



A	$\pi(A)$
T	1
F	$\{0,1\}$

B	A	$\pi(B A)$
T	T	0
F	T	1
T	F	1
F	F	{0,1}

FIGURE 8 : Exemple d'un réseau possibiliste tri-valué 3VG

Pour la Figure 8, il existe 4 réseaux compatibles où quand  $A=F$  on obtient soit 0 soit 1 et dans le contexte de  $A=F$ ,  $B=F$  on obtient également 0 ou 1. On a donc bien 4 réseaux compatibles différents  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,1)$ .

### 2.5.1 Règle de chaînage basée sur la conjonction de Lukasiewicz/Kleene

On retrouve ci-dessous la table de vérité du  $\min_K^{3V}$  qui correspond à la conjonction dans la logique de Lukasiewicz :

$\min_K^{3V}$	1	{0,1}	0
1	1	{0,1}	0
{0,1}	{0,1}	{0,1}	0
0	0	0	0

#### Exemple

En utilisant la règle de chaînage 3V de l'Equation 3.1, on obtient la distribution jointe  $\pi^{3V}$  correspondant à la Figure 8.

A	B	C	$\pi^{3V}(ABC)$
T	T	T	0
T	T	F	0
T	F	T	1
T	F	F	0
F	T	T	{0,1}
F	T	F	0
F	F	T	{0,1}
F	F	F	0

TABLE 2.1 : Distribution jointe  $\pi^{3V}$  calculée à partir de la Figure 8

Afin de répondre à la question posée, nous allons introduire la proposition suivante :

**Proposition 1** Appellons  $\mathbb{F}^G$  la famille des distributions jointes qui correspondent aux réseaux booléens compatibles avec le réseau 3VG. Et appelons aussi  $\mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$  la famille des distributions jointes booléenne  $\pi$  compatible avec la distribution jointe  $\pi^{3V}$  obtenu en utilisant la règle de chaînage 3V (Equation 3.1) basée sur l'opérateur de la logique de Kleene. En comparant ces deux familles, on arrive au résultat suivant :

$$\mathbb{F}^G \subseteq \mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$$

Il est facile de montrer que chaque distribution jointe  $\pi$  dans  $\mathbb{F}^G$  est aussi dans  $\mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$ . À l'inverse, le contraire est faux comme le prouve le contre-exemple suivant :

### Contre-exemple

Afin de démontrer la Proposition 1, nous allons utiliser le contre-exemple suivant. Considérons le réseau 3VG de la Figure 8 avec les trois variables  $A$ ,  $B$  et  $C$ . La distribution jointe  $\pi^{3V}$  correspondante est également donnée ci-dessus. Considérons maintenant, la distribution jointe suivante :

A	B	C	$\pi^{3V}(ABC)$
T	T	T	0
T	T	F	0
T	F	T	1
T	F	F	0
F	T	T	0
F	T	F	0
F	F	T	1
F	F	F	0

TABLE 2.2 : Distribution jointe compatible avec la distribution de la Table 2.1

On peut facilement montrer que la distribution de la Table 2.2 est compatible avec la distribution jointe  $\pi^{3V}$  de la Table 2.1. Cependant, il n'y a aucun réseau booléen compatible avec le réseau 3VG (Figure 8) qui permet de coder cette distribution jointe. En effet, avec les réseaux booléens compatibles, on ne peut jamais obtenir  $\pi(A = F, B = F, C = T) = 1$  et  $\pi(A = F, B = T, C = T) = 0$  à la fois. On a donc bien  $\mathbb{F}_K^{\pi^{3V}} \not\subseteq \mathbb{F}^G$ .

### 2.5.2 Règle de chaînage basée sur la conjonction de Bochvar externe

On retrouve ci-dessous la table de vérité du  $\min_{BE}^{3V}$  qui correspond à la conjonction dans la logique de Bochvar externe :

$\min_{BE}^{3V}$	1	{0,1}	0
1	1	0	0
{0,1}	0	0	0
0	0	0	0

**Exemple**

En utilisant la règle de chaînage 3V de l'Equation 3.1, on obtient la distribution jointe  $\pi^{3V}$  correspondant à la Figure 8.

A	B	C	$\pi^{3V}(ABC)$
T	T	T	0
T	T	F	0
T	F	T	1
T	F	F	0
F	T	T	0
F	T	F	0
F	F	T	0
F	F	F	0

TABLE 2.3 : Distribution jointe  $\pi^{3V}$  calculée à partir de la Figure 8

On remarque dans la distribution jointe  $\pi^{3V}$  qu'il n'y a plus aucun {0,1}. Cela s'explique par le fait que dans la table de vérité de l'opérateur  $\min_{BE}^{3V}$ , on obtient jamais {0,1}. Il n'y aura donc qu'une seule et unique distribution jointe compatible (qui est la même que la distribution  $\pi^{3V}$ ) quelque soit le réseau 3VG de départ.

**Proposition 2** Appelons  $\mathbb{F}^G$  la famille des distributions jointes qui correspondent aux réseaux booléens compatibles avec le réseau 3VG. Et appelons aussi  $F_{BE}^{\pi^{3V}}$  l'unique distribution jointe booléenne  $\pi$  compatible avec la distribution jointe  $\pi^{3V}$  obtenu en utilisant la règle de chaînage 3V (Equation 3.1) basée sur l'opérateur de la logique de Bochvar externe. En comparant les deux ensembles, on arrive au résultat suivant :

$$F_{BE}^{\pi^{3V}} \in \mathbb{F}^G$$

De plus, il est facile d'identifier à quelle distribution jointe (appartenant à la famille  $\mathbb{F}^G$ ), la distribution jointe  $F_{BE}^{\pi^{3V}}$  correspond. En effet, si l'on prend le réseau 3VG et que l'on remplace tous les {0,1} par 0 (tout en respectant la normalisation), on obtient alors un réseau booléen compatible dont la distribution jointe est équivalente à la distribution jointe  $F_{BE}^{\pi^{3V}}$ . En utilisant le contre-exemple qui suit, on démontre qu'il existe bien des réseaux compatibles au réseau 3VG qui ne correspondent pas à la distribution jointe  $\pi^{3V}$  :

### Contre-exemple

Afin de démontrer la Proposition 2, nous allons utiliser le contre-exemple suivant. Considérons le réseau 3VG de la Figure 8. Dans ce réseau, nous avons  $\pi(A = F) = \{0, 1\}$  et  $\pi(B = F \mid A = F) = \{0, 1\}$ . Prenons le réseau booléen compatible avec le réseau 3VG où  $\pi(A = F) = 1$  et  $\pi(B = F \mid A = F) = 1$ , on obtient donc le réseau suivant :

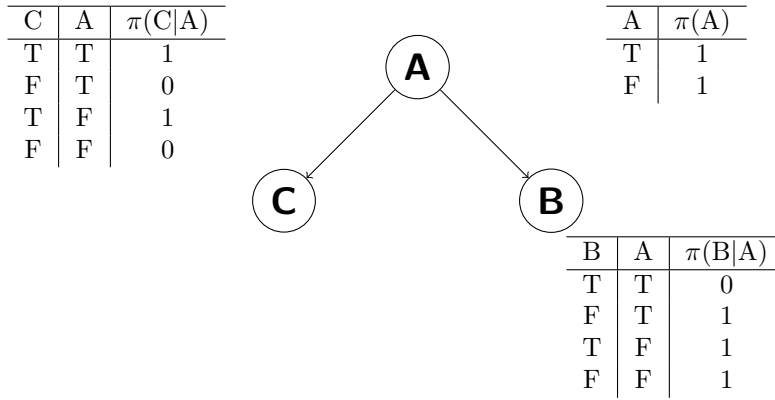


FIGURE 9 : Exemple d'un réseau booléen compatible au réseau 3VG de la Figure 8

Grâce à la règle de chaînage 3V, nous allons calculer la distribution jointe du réseau de la Figure 9 et la comparer à l'unique distribution jointe  $\pi^{3V}$ .

A	B	C	$\pi(ABC)$
T	T	T	0
T	T	F	0
T	F	T	1
T	F	F	0
F	T	T	1
F	T	F	1
F	F	T	1
F	F	F	0

Distribution jointe  $\pi$  associée au réseau de la Figure 9

A	B	C	$\pi^{3V}(ABC)$
T	T	T	0
T	T	F	0
T	F	T	1
T	F	F	0
F	T	T	0
F	T	F	0
F	F	T	0
F	F	F	0

Distribution jointe  $\pi^{3V}$  associée au réseau 3VG de la Figure 8

On remarque que les deux tables sont différentes. Il existe donc bien une distribution jointe associée à un réseau compatible au réseau 3VG qui ne correspond pas à l'unique distribution jointe  $\pi^{3V}$ .

On a donc vérifié, grâce à la Proposition 2, que  $F_{BE}^{\pi^{3V}} \in \mathbb{F}^G$ . De plus, avec la logique de Lukasiewicz/Kleene (Proposition 1), le résultat suivant a été démontré :  $\mathbb{F}^G \subseteq \mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$ . On peut donc en déduire que :

$$F_{BE}^{\pi^{3V}} \in \mathbb{F}^G \subseteq \mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$$

### 2.5.3 Règle de chaînage basée sur la conjonction de Bochvar interne

On retrouve ci-dessous la table de vérité du  $\min_{BI}^{3V}$  qui correspond à la conjonction dans la logique de Bochvar interne :

$\min_{BI}^{3V}$	1	{0,1}	0
1	1	{0,1}	0
{0,1}	{0,1}	{0,1}	{0,1}
0	0	{0,1}	0

#### Exemple

En utilisant la règle de chaînage 3V de l'Equation 3.1, on obtient la distribution jointe  $\pi^{3V}$  correspondant à la Figure 8.

A	B	C	$\pi^{3V}(ABC)$
T	T	T	0
T	T	F	0
T	F	T	1
T	F	F	0
F	T	T	{0,1}
F	T	F	{0,1}
F	F	T	{0,1}
F	F	F	{0,1}

TABLE 2.4 : Distribution jointe  $\pi^{3V}$  calculée à partir de la Figure 8

On remarque ici que cette distribution jointe comporte un nombre assez important de {0,1}. Cela est dû au fait que, rappelons le, dans le logique de Bochvar interne l'ignorance est contagieuse. Dès qu' une des possibilités vaut {0,1} alors le résultat sera forcément {0,1}.

Tout comme les opérateurs précédents, nous allons introduire la proposition suivante afin de répondre à la question posée :

**Proposition 3** *Appelons  $\mathbb{F}^G$  l'ensemble des distributions jointes qui correspondent aux réseaux booléens compatibles avec le réseau 3VG. Et appelons aussi  $\mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$  l'ensemble des distributions jointes booléenne  $\pi$  compatible avec la distribution jointe  $\pi^{3V}$  obtenu en utilisant la règle de chaînage 3V (Equation 3.1) basée sur l'opérateur de la logique de Bochvar interne. En comparant les deux ensembles, on arrive au résultat suivant :*

$$\mathbb{F}^G \subseteq \mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$$

Afin de démontrer que la double inclusion n'est pas possible ( $\mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}} \not\subseteq \mathbb{F}^G$ ), il suffit de reprendre exactement le même contre-exemple que celui utilisé en utilisant le  $\min^{3V}$  basé sur la logique de Kleene (2.5.1).

Grâce à la Proposition 1 et à la Proposition 3, on sait que  $\mathbb{F}^G \subseteq \mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$  et que  $\mathbb{F}^G \subseteq \mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$ . On veut maintenant savoir si ces deux ensembles sont égaux ou si l'un est plus grand (ou inclus) dans l'autre.

Supposons que  $\mathbb{F}_K^{\pi^{3V}} \subseteq \mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$  et montrons, en utilisant un contre-exemple, que  $\mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$  ne peut pas être inclus dans  $\mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$ .

### Contre-exemple

Reprenons le réseau 3VG de la Figure 8 et plus particulièrement les deux distributions jointes  $\pi^{3V}$ .

On remarque que pour la dernière ligne,  $\pi^{3V}(A = F, B = F, C = F)$ , le résultat diffère (cela donne 0 en utilisant les opérateurs de Kleene et  $\{0,1\}$  en utilisant ceux de Bochvar interne). Le reste étant parfaitement identique.

On a donc quatre  $\{0,1\}$  si l'on utilise les opérateurs de Bochvar interne et trois  $\{0,1\}$  si c'est ceux de Kleene. Si l'on fait le calcul, on obtient plus de distributions jointes booléennes compatibles avec la distribution jointe  $\pi^{3V}$  pour Bochvar interne que pour Kleene. Le reste étant parfaitement identique, on peut en conclure que  $\mathbb{F}_K^{\pi^{3V}} \subseteq \mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$  et que la double inclusion est fautive. Il suffit de prendre la distribution jointe suivante :

A	B	C	$\pi^{3V}(ABC)$
T	T	T	0
T	T	F	0
T	F	T	1
T	F	F	0
F	T	T	0
F	T	F	1
F	F	T	0
F	F	F	1

Il est clair que cette distribution appartient à  $\mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$  mais pas à  $\mathbb{F}_K^{\pi^{3V}}$ . À ce stade, on obtient donc le résultat suivant :

$$F_{BE}^{\pi^{3V}} \in \mathbb{F}^G \subseteq \mathbb{F}_K^{\pi^{3V}} \subseteq \mathbb{F}_{BI}^{\pi^{3V}}$$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les trois sémantiques associées à la troisième valeur de vérité  $\{0,1\}$ . En utilisant les opérateurs conjonctifs de ces



logiques, nous avons étendu la définition de la règle de chaînage standard et nous avons analysé les résultats obtenus avec les différentes règles de chaînage 3V en terme de distribution compatible. Nous sommes parvenus à établir une relation entre ces différentes sémantiques associées.

# Chapitre 3

## Inférence

L'inférence consiste à propager une ou plusieurs informations certaines (observées) et d'évaluer l'impact dans les croyances représentées par le modèle graphique. Il existe deux principales catégories d'algorithmes d'inférence : les méthodes utilisant des structures secondaires comme celle de Jensen [8] et les méthodes travaillant sur le réseau bayésien d'origine comme celle de Pearl [13]. Nous détaillerons ici l'algorithme de propagation appelé arbre de jonction (Jensen, 1996) qui est le plus utilisé dans la pratique.

### 3.1 Algorithme de l'arbre de jonction

#### 3.1.1 Construction de l'arbre de jonction

La génération de l'arbre de jonction passe par les 3 étapes communes suivantes :

- La *moralisation* du graphe initial
- La *triangulation* du graphe moral
- La construction de l'*arbre de jonction*

Ces étapes resteront toujours les mêmes quelque soit le modèle graphique choisi (probabiliste, possibiliste, ..).

*La moralisation :*

**Définition 11 (Graphe moral)** *Un graphe moral est un graphe où tous les parents d'un noeud sont connectés par un lien.*

Pour cette étape, il suffit juste de créer un graphe non orienté en écartant les orientations des arcs après avoir "marié" les parents de chaque noeud dans le graphe.

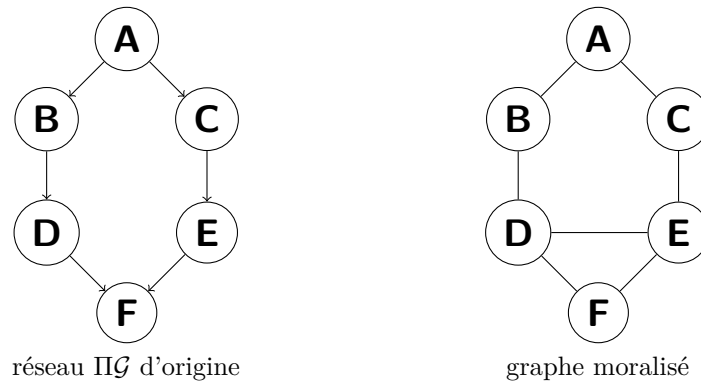


FIGURE 10 : La phase de moralisation

La triangulation :

**Définition 12 (Graphe triangulé)** *Un graphe non orienté est triangulé si et seulement si, pour tout cycle de longueur 4 ou plus, il existe une corde, c'est à dire une arête reliant deux noeuds non consécutifs du cycle.*

La triangulation consiste à ajouter des liens jusqu'à ce que le graphe soit triangulé.

Un graphe peut avoir différentes triangulations qui donne lieu à des ensembles différents de cliques.

**Définition 13 (Clique)** *Une clique d'un graphe non-orienté est un sous-ensemble de sommets de ce graphe dont le sous-graphe induit est complet, c'est à dire que deux sommets quelconques de la clique sont toujours adjacents.*

De plus, le graphe triangulé peut avoir, à son tour, plusieurs arbres de jonctions différents. Le problème d'optimalité pour la triangulation est NP-complet [17]. Cependant, il existe plusieurs heuristiques qui ont été proposées comme Kjærulff [10] ou encore Shoikhet [14].

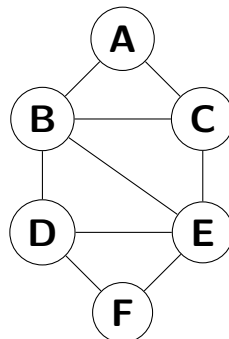


FIGURE 11 : La phase de triangulation (suite de la figure 10) avec les cliques  $C_{ABC}, C_{BCE}, C_{BDE}, C_{DEF}$ .

La construction de l'arbre de jonction :

Cette étape consiste à transformer le graphe triangulé en un arbre de jonction. Suite à la triangulation, le graphe est constitué de *cliques* notées  $C_i$ . Notons qu'en général, l'arbre de jonction construit à partir d'un graphe n'est pas unique. Pour cette étape, il suffit de connecter les cliques identifiées, lors de l'étape précédente, avec la condition que toutes les cliques se trouvant dans un chemin entre les cliques  $C_i$  et  $C_j$  doivent contenir  $C_i \cap C_j$ . Une fois les cliques adjacentes identifiées, on insère un séparateur, noté  $S_{ij}$ , entre chaque paire de cliques  $C_i$  et  $C_j$ , contenant les variables communes.

**Définition 14 (Intersection courante)** Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux cliques quelconques de l'arbre de jonction et soit  $S_{12} = C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ . Alors sur toute chaîne reliant  $C_1$  et  $C_2$ , les cliques et séparateurs contiennent  $S_{12}$ .

**Exemple :** La figure 12 représente un arbre de jonction associé au DAG de la figure 10 (réseau d'origine) contenant quatre cliques ( $ABC$ ,  $BCE$ ,  $BDE$ ,  $DEF$ ) ainsi que trois séparateurs ( $BC, BE, DE$ ).

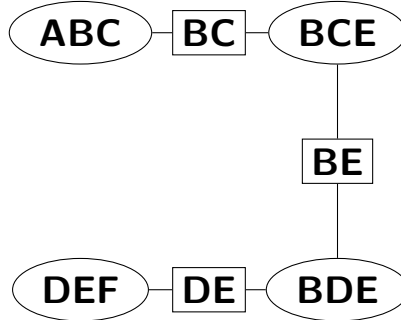


FIGURE 12 : Arbre de jonction associé au graphe  $\mathcal{G}$  de la figure 10

### 3.1.2 Initialisation

Une fois l'arbre de jonction construit, cette étape consiste à le quantifier en transformant les distributions de possibilité locales initiales en des distributions jointes locales rattachées aux cliques et aux séparateurs. Nous présenterons ici l'étape d'initialisation dans le cadre de la théorie des possibilité (la partie probabiliste étant pratiquement la même).

On affecte toujours, pour chaque clique  $C_i$  (resp. séparateur  $S_{ij}$ ), un potentiel  $\pi_{C_i}^t$  (resp.  $\pi_{S_{ij}}^t$ ), où  $t$  est relatif à l'étape de propagation. Ces potentiels permettent d'associer à l'arbre de jonction une distribution de possibilité jointe unique notée  $\pi_{AJ}^t$  définie par :

$$\pi_{AJ}^t(A_1, \dots, A_n) = \min_{i=1..m} \pi_{C_i}^t$$

où  $m$  est le nombre de cliques dans  $AJ$ .

Les grandes lignes de la procédure d'initialisation peuvent être résumées comme suit :

- Pour chaque clique  $C_i$ , affecter une distribution uniforme :  $\pi_{C_i}^I = 1$ .
- Pour chaque séparateur,  $S_{ij}$  affecter une distribution uniforme :  $\pi_{S_{ij}}^I = 1$ .
- Pour chaque variable  $A_k \in V$ , choisir une clique  $C_i$  contenant  $\{ A_k \} \cup U_{A_k}$  et mettre à jour les potentiels :

$$\pi_{C_i}^I = \min(\pi_{C_i}^I, \Pi(A_k | U_{A_k})).$$

On peut noter aussi que si une clique contient un nombre trop important de noeuds alors le calcul de sa distribution jointe peut devenir très coûteux à cause de sa taille.

Dans notre exemple, on obtient :

Variable choisie	Clique choisie	Potentiel associé
A	ABC	$\pi_{ABC} = \min(\pi(A))$
B	ABC	$\pi_{ABC} = \min(\pi(A), \pi(B   A))$
C	ABC	$\pi_{ABC} = \min(\pi(A), \pi(B   A), \pi(C   A))$
D	BDE	$\pi_{BDE} = \min(\pi(D   B))$
E	BCE	$\pi_{BCE} = \min(\pi(E   C))$
F	DEF	$\pi_{DEF} = \min(\pi(F   DE))$

### 3.1.3 Propagation

Avant de présenter l'étape de propagation globale, nous introduisons la notion de cohérence globale dans les arbres de jonctions.

**Définition 15** Soient deux cliques adjacentes  $C_i$  et  $C_j$  dans un arbre de jonction  $AJ$  et  $S_{ij}$  leur séparateur. Le lien entre  $C_i$  et  $C_j$  est dit **stable** ou **cohérent** si :

$$\max_{C_i \setminus S_{ij}} \pi_{C_i} = \pi_{S_{ij}} = \max_{C_j \setminus S_{ij}} \pi_{C_j}, \quad (3.1)$$

où  $\max_{C_i \setminus S_{ij}} \pi_{C_i}$  est la distribution marginale de  $S_{ij}$  définie à partir de  $\pi_{C_i}$ .

Si tous les liens dans un arbre de jonction sont cohérents alors l'arbre de jonction est dit *globalement cohérent*.

Une fois l'arbre de jonction initialisé, le processus de propagation globale permet d'assurer sa cohérence globale à travers le passage d'un message entre les cliques. La première étape consiste à choisir arbitrairement une clique *pivot* qui va démarrer ce processus caractérisé par deux phases :

- La phase de *collecte*, dans laquelle chaque clique envoie un message à sa clique adjacente dans la direction du pivot.

- La phase de *distribution*, dans laquelle chaque clique envoie un message à ses cliques adjacentes dans le sens contraire du pivot en démarrant par le pivot lui-même jusqu'à atteindre les feuilles du graphe.

Si une clique  $C_i$  envoie un message à sa clique adjacente  $C_j$ , alors les potentiels de  $C_i, C_j$  et de leur séparateur  $S_{ij}$  sont mis à jour comme suit :

1. Garder le même potentiel pour  $C_i$  :

$$\pi_{C_i}^{t+1} = \pi_{C_i}^t.$$

2. Mettre à jour le potentiel de  $S_{ij}$  :

$$\pi_{S_{ij}}^{t+1} = \max_{C_i \setminus S_{ij}} \pi_{C_i}^t.$$

3. Mettre à jour le potentiel de  $C_j$  :

$$\pi_{C_j}^{t+1} = \min(\pi_{C_j}^t, \pi_{S_{ij}}^{t+1}).$$

La définition suivante montre que lorsque l'arbre de jonction est globalement cohérent, alors le potentiel de chaque clique correspond à sa distribution locale calculée à partir du réseau initial.

**Définition 16** *Soit  $AJ$  un arbre de jonction globalement cohérent. Le potentiel  $\pi_{C_i}^C$  de chaque clique  $C_i$  satisfait :*

$$\pi_{C_i}^C = \Pi_{\Pi G}(C_i). \quad (3.2)$$

Et c'est justement là, où l'on veut en venir, que se soit avec un arbre de jonction ou une table de probabilités, on peut toujours accéder aux mêmes données (sans perte). La différence majeure est que l'arbre de jonction est une méthode qui est utilisée afin que dès qu'une personne effectue une requête, il y est un minimum de changement à faire pour pouvoir effectuer cette requête.

### 3.1.4 Réponse aux requêtes

L'arbre de jonction résultant de la phase précédente est globalement cohérent ce qui signifie que le potentiel de chaque clique code  $\Pi_G(C_i)$  (cf Définition 10). Donc, le calcul de la marginale relative à toute variable  $A \in V$ , peut se faire en marginalisant le potentiel de n'importe quelle clique  $C_i$  comme suit :

$$\Pi_G(A) = \max_{C_i \setminus A} (\pi_{C_i}^C)$$

## 3.2 Réseaux possibilistes tri-valués

Nous avons montré, avec les réseaux possibilistes, que l'utilisation de l'algorithme de l'arbre de jonction ne modifie pas la distribution jointe du graphe de départ. Il n'y a donc aucune perte d'information. Mais peut-on arriver à la

même conclusion pour les réseaux possibilistes tri-valués? Nous avons vu plusieurs connecteurs au début du Chapitre 2, nous allons donc détailler, dans cette partie, l'algorithme de l'arbre de jonction pour ces différents opérateurs.

Pour les réseaux possibilistes tri-valués, la transformation graphique (moralisation et triangulation) reste exactement la même que celle des réseaux possibilistes et probabilistes. Nous commencerons donc par l'étape d'initialisation. Une fois cette étape effectuée, nous effectuerons une première comparaison entre la distribution jointe de départ et celle obtenue après l'initialisation de l'arbre de jonction. S'il n'y a aucune différence, nous passerons à l'étape de propagation et de la même manière, nous comparerons les deux distributions jointes.

### 3.2.1 Initialisation

L'algorithme d'initialisation reste globalement le même que celui des réseaux possibilistes standards. On associe toujours, pour chaque clique  $C_i$  (resp.  $S_{ij}$  pour les séparateurs), un potentiel  $\theta_{C_i}^{3V}$  (resp.  $\theta_{S_{ij}}^{3V}$ ). Afin d'initialiser le potentiel de chaque clique et séparateur, on utilise l'algorithme suivant :

Soit  $JT_{3VG}$  l'arbre de jonction obtenu à partir du réseau possibiliste tri-valué 3VG de départ.

- Pour chaque clique  $C_i \in JT_{3VG}$ , on initialise son potentiel  $\theta_{C_i}^{3V}$  à 1 (c'est à dire,  $\forall c_i \in D_{C_i}, \theta_{C_i}^{3V}(c_i) = 1$ ).
- Pour chaque séparateur  $S_{ij} \in JT_{3VG}$ , on initialise son potentiel  $\theta_{S_{ij}}^{3V}$  à 1 (c'est à dire,  $\forall s_{ij} \in D_{S_{ij}}, \theta_{S_{ij}}^{3V}(s_{ij}) = 1$ ).
- Pour chaque variable  $A_i \in V$ , on intègre sa distribution locale  $\theta_{A_i|U_i}$  à la clique  $C_i$  qui contient  $A_i$  et ces parents  $U_i$ . On obtient donc :

$$\forall c_i \in D_{C_i}, \theta_{C_i}^{3V}(c_i) = \min^{3V}(\theta_{C_i}^{3V}(c_i), \theta_{a_i|u_i})$$

Avec le  $\min^{3V}$  qui correspond à la conjonction de chaque opérateur tri-valué décrit dans le Chapitre 2 (exactement comme pour la règle de chaînage).

Notons que contrairement à un réseau possibiliste standard, le potentiel, dans un arbre de jonction  $JT_{3VG}$ , ne peut contenir que les valeurs 0,1 ou  $\{0,1\}$ . L'arbre de jonction obtenu factorise la distribution jointe  $\pi^{3V}$ , qui correspond au réseau 3VG de départ, en un ensemble de potentiels 3V.

Pour illustrer cet algorithme, nous le déroulerons pour chaque opérateur sur l'exemple de la Figure 13. Une fois l'étape d'initialisation effectuée, on peut déjà effectuer une première comparaison entre la distribution jointe d'origine et celle obtenue après initialisation.

### 3.2.2 Propagation

Tout comme pour les réseaux possibilistes, on souhaite que la distribution d'une variable donnée soit cohérente dans deux cliques adjacentes. On effectue donc une opération de stabilisation en propageant les données entre deux cliques adjacentes  $C_i$  et  $C_j$  et leur séparateur commun  $S_{ij}$ . Cette propagation s'effectue en deux étapes détaillée ci-dessous :

1. La phase de *collecte* (mise à jour du séparateur) : Pour cette étape, chaque séparateur  $S_{ij}$  récupère les informations de ces cliques adjacentes  $C_i$  et  $C_j$ . On effectue cette mise à jour en utilisant la formule suivante :

$$\theta_{S_{ij}}^{3V}(s_{ij}) = \min^{3V}(\theta_{C_i}^{3V}(c_i/s_{ij}), \theta_{C_j}^{3V}(c_j/s_{ij})) \quad (3.3)$$

avec  $\theta_{C_i}^{3V}(c_i/s_{ij})$  (resp.  $\theta_{C_j}^{3V}(c_j/s_{ij})$ ) représentant le degré de possibilité de  $c_i$  (resp.  $c_j$ ), une configuration de variables associé à la clique  $C_i$  (resp.  $C_j$ ), sans  $s_{ij}$ , une configuration du séparateur  $S_{ij}$ . Notons que pour choisir la bonne configuration associée aux cliques, on utilise le  $\max^{3V}$  qui correspond (de la même manière que pour  $\min^{3V}$  et la conjonction) à la disjonction pour les différents opérateurs.

2. La phase de *distribution* (mise à jour des cliques) : Une fois que l'évidence est collectée par le séparateur  $S_{ij}$ , on distribue les données aux cliques voisines ( $C_i$  et  $C_j$ ) de la manière suivante :

$$\theta_{C_i}^{3V}(c_i) = \min^{3V}(\theta_{C_i}^{3V}(c_i), \theta_{S_{ij}}^{3V}(s_{ij})) \quad (3.4)$$

$$\theta_{C_j}^{3V}(c_j) = \min^{3V}(\theta_{C_j}^{3V}(c_j), \theta_{S_{ij}}^{3V}(s_{ij})) \quad (3.5)$$

De la même manière que pour l'initialisation, cet algorithme sera illustré par la suite. Et c'est justement après cette étape, que l'on peut savoir si l'opérateur choisi est compatible ou non avec l'algorithme de l'arbre de jonction, comme le dit la proposition suivante :

**Proposition 4** Soit  $\pi^{3V}$  la distribution jointe du réseau possibiliste tri-valué  $3VG$  de départ obtenu grâce à la règle de chaînage (2.1).

Soit  $\pi_{JT}^{3V}$  la distribution jointe associé à l'arbre de jonction  $JT$  avant la mise à jour du séparateur  $S_{ij}$  et des cliques  $C_i$  et  $C_j$  mais après l'étape d'initialisation. Soit  $\pi_{JT'}^{3V}$  la distribution jointe associé à l'arbre de jonction  $JT'$  une fois les étapes d'initialisation et de propagation effectuées. Alors  $\forall \omega \in \Omega$ , on obtient :

$$\pi^{3V} = \pi_{JT}^{3V} = \pi_{JT'}^{3V} \quad (3.6)$$

## 3.3 Utilisation des différents opérateurs pour l'algorithme de l'arbre de jonction

La proposition 5 montre que, grâce aux opérateurs  $\min^{3V}$  et  $\max^{3V}$  ainsi que les mises à jour avec les phases de collecte et de distribution, on peut garantir



que la distribution jointe associé au réseau 3VG de départ et, par la suite à l'arbre de jonction associé, reste inchangée.

Mais est-ce toujours le cas quelque soient les opérateurs  $\min^{3V}$  et  $\max^{3V}$  choisis ? C'est-ce que nous allons déterminer dans la suite de ce chapitre. Tout au long de cette partie, nous utiliserons l'exemple suivant :

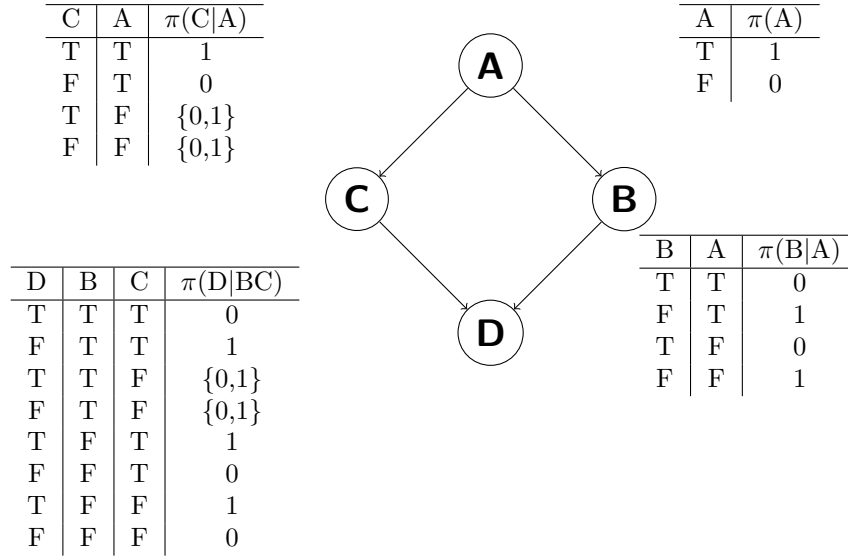


FIGURE 13 : Exemple d'un réseau possibiliste tri-valué 3VG

Pour chaque opérateur, nous allons dans un premier temps calculer la distribution jointe du réseau 3VG de la Figure 13 grâce à la règle de chaînage (2.1). Puis, dans un second temps, nous allons appliquer l'algorithme de l'arbre de jonction à ce réseau, jusqu'à l'étape d'initialisation. Nous calculerons la distribution jointe de l'arbre de jonction obtenu et la comparer à la première distribution jointe. Enfin, si les distributions sont identiques, nous effectuerons l'étape de propagation et comparerons une nouvelle fois les distributions jointes.

### 3.3.1 Opérateurs de Lukasiewicz/Kleene

Les opérateurs de Lukasiewicz/Kleene ont été définis dans le chapitre précédent. On peut donc réutiliser ces opérateurs pour l'algorithme de l'arbre de jonction. Dans un premier temps, calculons la distribution jointe de la Figure 13 :

A	B	C	D	$\pi^{3V}(ABCD)$
T	T	T	T	0
T	T	T	F	0
T	T	F	T	0
T	T	F	F	0
T	F	T	T	1
T	F	T	F	0
T	F	F	T	0
T	F	F	F	0
F	T	T	T	0
F	T	T	F	0
F	T	F	T	0
F	T	F	F	0
F	F	T	T	0
F	F	T	F	0
F	F	F	T	0
F	F	F	F	0

Table 3.1 : Distribution jointe  $\pi^{3V}$  associée au réseau 3VG de la Figure 13 calculée avec les opérateurs de Lukasiewicz/Kleene

On peut maintenant commencer à détailler l'algorithme de l'arbre de jonction. Les étapes de moralisation et triangulation sont détaillées au début de ce chapitre. Appliquons directement la phase d'initialisation :

A	B	C	$\theta(ABC)$	B	C	$\theta(BC)$	B	C	D	$\theta(BCD)$
T	T	T	0	T	T	1	T	T	T	0
T	T	F	0	F	T	1	T	T	F	1
T	F	T	1	T	F	1	T	F	T	{0,1}
T	F	F	0	F	F	1	T	F	F	{0,1}
F	T	T	0				F	T	T	1
F	T	F	0				F	T	F	0
F	F	T	0				F	F	T	1
F	F	F	0				F	F	F	0



FIGURE 14 : Arbre de jonction initialisé JT associé au réseau de la Figure 13

En calculant la distribution jointe de l'arbre de jonction décrit ci-dessus, on remarque qu'il n'y a aucune différence avec la distribution jointe de départ. Cela n'est pas surprenant, car pour construire l'arbre de jonction, on associe chaque variable à une clique en regardant si ces parents sont également dans cette clique. Donc l'information reste inchangée dans la clique. On effectue juste un calcul supplémentaire lors de l'étape d'initialisation (en utilisant le  $\min^{3V}$ , le même que pour la règle de chaînage). N'oublions pas que, pour les opérateurs de Lukasiewicz/Kleene, il existe un ordre entre les trois valeurs de vérité qui n'est pas négligeable. On peut donc écrire la formule suivante :

$$\pi^{3V}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min_{i=1..n}^{3V}(\theta^{3V}(a_i | u_i)) = \min_{N_i \in N}^{3V}(\theta_{N_i}^{3V}(n_i))$$

avec  $n_i$  représentant une configuration de variable  $A_i$  présent dans le noeud  $N_i$  (un noeud peut être soit une clique ou un séparateur dans un arbre de jonction). On a donc  $\pi^{3V} = \pi_{JT}^{3V}$ .

Passons maintenant à la phase de propagation :

A	B	C	$\theta(ABC)$	B	C	$\theta(BC)$	B	C	D	$\theta(BCD)$
T	T	T	0	T	T	0	T	T	T	0
T	T	F	0	F	T	1	T	T	F	0
T	F	T	1	T	F	0	T	F	T	0
T	F	F	0	F	F	0	T	F	F	0
F	T	T	0				F	T	T	1
F	T	F	0				F	T	F	0
F	F	T	0				F	F	T	0
F	F	F	0				F	F	F	0

**ABC**

**BC**

**BCD**

FIGURE 15 : Arbre de jonction final JT' associé au réseau de la Figure 13

Le calcul de la distribution jointe, associée à l'arbre de jonction ci-dessus, donne le même résultat que les deux premières distributions jointes vues précédemment. À l'aide des opérateurs  $\min^{3V}$  et  $\max^{3V}$ , ainsi qu'aux mises à jour lors des phases d'initialisation et de propagation, la distribution jointe tri-valuée reste inchangée tout au long de l'algorithme de l'arbre de jonction. On peut donc conclure que *les opérateurs de Lukasiewicz/Kleene préservent la distribution jointe globale de départ.*

### 3.3.2 Opérateurs de Bochvar externes

Commençons par calculer la distribution jointe en utilisant la règle de chaînage (2.1) ainsi que les opérateurs de Bochvar externes, on obtient alors :

A	B	C	D	$\pi^{3V}(ABCD)$
T	T	T	T	0
T	T	T	F	0
T	T	F	T	0
T	T	F	F	0
T	F	T	T	1
T	F	T	F	0
T	F	F	T	0
T	F	F	F	0
F	T	T	T	0
F	T	T	F	0
F	T	F	T	0
F	T	F	F	0
F	F	T	T	0
F	F	T	F	0
F	F	F	T	0
F	F	F	F	0

TABLE 3.2 : Distribution jointe  $\pi^{3V}$  associée au réseau 3VG de la Figure 13 calculée avec les opérateurs de Bochvar externes

On applique maintenant l'algorithme de l'arbre de jonction sur ce réseau 3VG. On effectue les étapes de moralisation et de triangulation pour finalement obtenir un arbre de jonction avec deux cliques ( $C_{ABC}$  et  $C_{BCD}$ ) et un séparateur  $S_{BC}$ . On applique, maintenant, la phase d'initialisation pour obtenir l'arbre de jonction suivant :

A	B	C	$\theta(ABC)$	B	C	$\theta(BC)$	B	C	D	$\theta(BCD)$
T	T	T	0	T	T	1	T	T	T	0
T	T	F	0	F	T	1	T	T	F	1
T	F	T	1	T	F	1	T	F	T	0
T	F	F	0	F	F	1	T	F	F	0
F	T	T	0				F	T	T	1
F	T	F	0				F	T	F	0
F	F	T	0				F	F	T	1
F	F	F	0				F	F	F	0



FIGURE 16 : Arbre de jonction initialisé JT associé au réseau de la Figure 13

Le calcul de la distribution jointe  $\pi_{JT}^{3V}$  de l'arbre de jonction de la Figure 16 donne le même résultat que la distribution jointe  $\pi^{3V}$  (pas de perte de données). Continuons d'appliquer l'algorithme de l'arbre de jonction à notre exemple et plus particulièrement la phase de propagation. On obtient donc l'arbre de jonction suivant :

A	B	C	$\theta(ABC)$	B	C	$\theta(BC)$	B	C	D	$\theta(BCD)$
T	T	T	0	T	T	0	T	T	T	0
T	T	F	0	F	T	1	T	T	F	0
T	F	T	1	T	F	0	T	F	T	0
T	F	F	0	F	F	0	T	F	F	0
F	T	T	0				F	T	T	1
F	T	F	0				F	T	F	0
F	F	T	0				F	F	T	0
F	F	F	0				F	F	F	0

FIGURE 17 : Arbre de jonction initialisé JT associé au réseau de la Figure 13

De la même manière, le calcul de la distribution jointe associée à l'arbre de jonction de la Figure 17 sera identique à celle calculée précédemment. L'algorithme de l'arbre de jonction est donc possible avec les opérateurs de Bochvar externes et cela avec n'importe quel réseau. En effet, cela s'explique par le fait que, de manière similaire au calcul de la distribution jointe lors du Chapitre 2, on obtient toujours une unique distribution jointe. Et l'algorithme de l'arbre de jonction ne changera pas cela. Ce résultat est d'autant plus naturel puisque cela revient à travailler avec un réseau classique où les valeurs  $\{0,1\}$  sont remplacées par 0. *Les opérateurs ( $\min^{3V}$  et  $\min^{3V}$ ) de Bochvar externes préservent donc la distribution jointe de départ.*

### 3.3.3 Opérateurs de Bochvar internes

A	B	C	D	$\pi^{3V}(ABCD)$
T	T	T	T	0
T	T	T	F	0
T	T	F	T	$\{0,1\}$
T	T	F	F	$\{0,1\}$
T	F	T	T	1
T	F	T	F	0
T	F	F	T	0
T	F	F	F	0
F	T	T	T	$\{0,1\}$
F	T	T	F	$\{0,1\}$
F	T	F	T	$\{0,1\}$
F	T	F	F	$\{0,1\}$
F	F	T	T	$\{0,1\}$
F	F	T	F	$\{0,1\}$
F	F	F	T	$\{0,1\}$
F	F	F	F	$\{0,1\}$

TABLE 3.3 : Distribution jointe  $\pi^{3V}$  associée au réseau 3VG de la Figure 13 calculée avec les opérateurs de Bochvar internes

Le début de l'algorithme de l'arbre de jonction étant le même quelque soit le réseau de départ et les opérateurs choisis, on obtient un graphe similaire à celui décrit plus haut dans cette partie, avec deux cliques ( $C_{ABC}$  et  $C_{BCD}$ ) et un séparateur  $S_{BC}$ . La phase d'initialisation des potentiels donne par contre des valeurs différentes (à cause du  $\min_{BI}^{3V}$ ). On obtient donc l'arbre de jonction suivant :

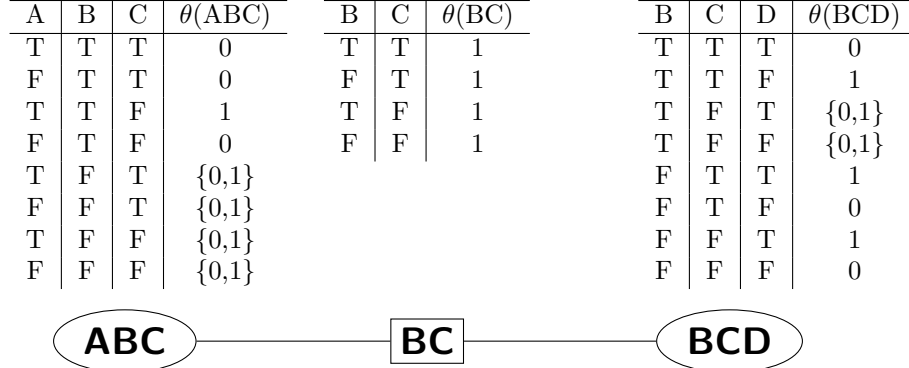


FIGURE 18 : Arbre de jonction initialisé JT associé au réseau de la Figure 13

Calculons maintenant la distribution jointe associée à l'arbre de jonction calculé précédemment :

A	B	C	D	$\pi_{JT}^{3V}(ABCD)$
T	T	T	T	0
T	T	T	F	0
T	T	F	T	{0,1}
T	T	F	F	{0,1}
T	F	T	T	1
T	F	T	F	0
T	F	F	T	0
T	F	F	F	0
F	T	T	T	{0,1}
F	T	T	F	{0,1}
F	T	F	T	{0,1}
F	T	F	F	{0,1}
F	F	T	T	{0,1}
F	F	T	F	{0,1}
F	F	F	T	{0,1}
F	F	F	F	{0,1}

TABLE 3.4 : Distribution jointe  $\pi_{JT}^{3V}$  associée à l'arbre de jonction de la Figure 18

En comparant les deux distributions jointes,  $\pi^{3V}$  et  $\pi_{JT}^{3V}$ , on ne trouve aucune différence. On peut donc passer à la dernière étape : la propagation.

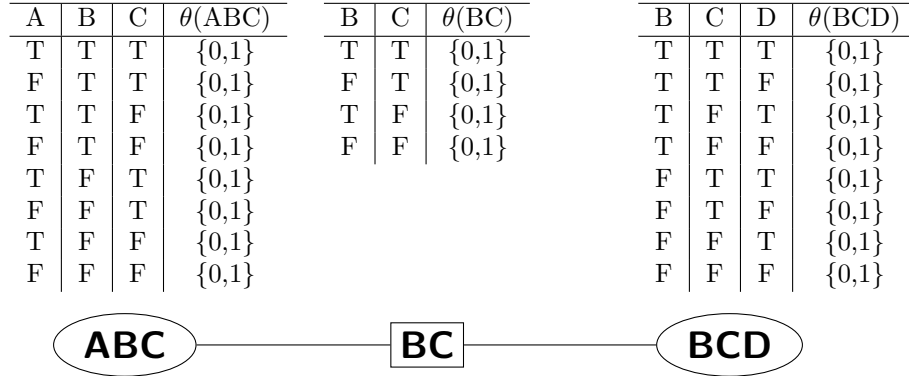


FIGURE 19 : Arbre de jonction final  $JT'$  associé au réseau de la Figure 13

On remarque que pour chaque clique, le potentiel est de  $\{0,1\}$ . Cela s'explique par le fait que, durant la phase de collecte (mise à jour des séparateurs), le potentiel de chaque combinaison pour le séparateur  $S_{BC}$  est de  $\{0,1\}$ . Cela implique que durant la phase de distribution, lors de l'utilisation des formules 3.5 et 3.6, le potentiel de chaque clique deviendra  $\{0,1\}$  quelque soit sa valeur d'origine. Le calcul de la distribution jointe associée à cet arbre de jonction n'est pas difficile puisque  $\forall \omega \in \Omega, \pi_{JT'}^{3V}(\omega) = \{0,1\}$ .

La distribution jointe de départ et celle obtenue en appliquant l'algorithme de l'arbre de jonction étant différentes, on peut en conclure que *les opérateurs de Bochvar internes ne permettent pas de factoriser une distribution jointe trivaluée directement avec un arbre de jonction*. Le contre-exemple, développé tout au long de cet partie, le prouve (on obtient  $\pi^{3V} = \pi_{JT}^{3V} \neq \pi_{JT'}^{3V}$ , contrairement à la formule 3.7 attendue).

# Conclusion et perspectives

Nous avons, dans un premier temps, étudié les sémantiques associées aux réseaux possibilistes tri-valués et montré qu'il est possible de leurs associer un ensemble de réseaux booléens possibilistes compatibles. Une nouvelle règle de chaînage a été introduite ce qui permet de toujours avoir une distribution jointe du réseau possibiliste tri-valué. Pour chaque opérateurs, nous avons donc vérifié si l'ensemble des distributions booléennes compatibles à un réseau 3VG est équivalent à l'ensemble des distributions compatibles à la distribution jointe  $\pi^{3V}$ , de ce même réseau 3VG, obtenue en utilisant la nouvelle règle de chaînage. Nous sommes parvenus à établir une relation entre les différentes sémantiques associées.

Dans un second temps, nous avons adapté l'algorithme de l'arbre de jonction aux réseaux possibilistes tri-valués, en utilisant de nouveau les différents opérateurs. Le but étant, cette fois, de voir si la distribution jointe associée au réseau 3VG a été modifiée (perte d'information) par l'algorithme. Et l'on peut conclure que seuls les opérateurs (parmi les opérateurs étudiés dans ce rapport) de Lukasiewicz/Kleene et de Bochvar externe permettent de factoriser une distribution jointe tri-valorée directement avec un arbre de jonction.

On peut donc conclure que les réseaux possibilistes tri-valués enrichissent les réseaux possibilistes classiques sans, pour autant, augmenter leurs complexités.

Les perspectives sont multiples concernant ce sujet. En effet, dans ce rapport, nous avons choisi les sémantiques tri-valorées les plus connues mais ils en existent d'autres qui peuvent être utilisées.

À partir d'un réseau possibiliste tri-valué, nous avons déterminé un ensemble de réseaux compatibles. La question étant de savoir comment raisonner à partir de cet ensemble? Nous avons choisi de combiner ces réseaux (avec leurs distributions jointes associées) en une distribution jointe commune. Nous sommes partis du principe que le degré de possibilité est de 1 (resp. 0) uniquement dans le cas où tous les agents sont unanimes ( $\{0,1\}$  sinon). Mais il serait également intéressant d'observer ce qui se passe si cette unanimité est remplacée par la majorité, le maximum, le minimum, etc. Ce changement modifiera sûrement la relation qui relie cette nouvelle distribution avec la distribution jointe obtenue grâce à la nouvelle règle de chaînage tri-valorée.





# Bibliographie

- [1] S. BENFERHAT and S. SMAOUI. Réseaux causaux possibilistes pour le traitement des interventions. 2007.
- [2] S. BENFERHAT and K. TABIA. Three-valued possibilistic networks. In *ECAI*, pages 157–162, 2012.
- [3] A. DARWICHE. *Modeling and Reasoning with Bayesian Networks*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] D. DUBOIS. Reasoning about ignorance and contradiction : many-valued logics versus epistemic logic. *Soft Comput.*, 16(11) :1817–1831, 2012.
- [5] D. DUBOIS and H. PRADE. Possibility theory : An approach to computerized, processing of uncertainty. *Plenium Press*, 1988.
- [6] C. GONZALES and O. NACEUR-MOURALI. Une unification des algorithmes d’inférence de pearl et de jensen. 2004.
- [7] E. HISDAL. Conditional possibilities independence and non interaction. *Fuzzy Sets and Systems*, pages 283–297, 1978.
- [8] F. V. JENSEN. *Introduction to Bayesian Networks*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1st edition, 1996.
- [9] I. KATATA and A. GARIBOTTI ARIAS. Théorie des possibilités, 2006-2007. Cours Master Recherche Informatique.
- [10] U. KJAERULFF. Triangulation of graphs - algorithms giving small total state space. 1990.
- [11] S. C. KLEENE. *Introduction to Metamathematics*. Ishi Press International, Mar. 2009.
- [12] J. ŁUKASIEWICZ and L. BORKOWSKI. *Selected works*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Pub. Co., 1970.
- [13] J. PEARL. Probabilistic reasoning in intelligent systems : networks of plausible inference. *Morgan Kaufmman*, 1988.
- [14] K. SHOIKHET and D. GEIGER. Finding optimal triangulations via minimal vertex separators. 1997.
- [15] S. SMAOUI. *Réseaux possibilistes hybrides : Représentation des interventions et algorithmes*. PhD thesis, Université d’Artois, 2007.

- [16] K. TABIA. *Modèles graphiques et approches comportementales pour la détection d'intrusions*. PhD thesis, Université d'Artois, 2008.
- [17] M. YANNAKAKIS. Computing the minimum fill-in is NP-complete. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 2(1) :77–79, 1981.
- [18] L. A. ZADEH. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. 1978.