Fusion avec Contraintes d'Intégrité*

Sébastien Konieczny Ramón Pino Pérez
LIFL - CNRS URA 369
Université de Lille I - 59655 Villeneuve d'Ascq - France
{konieczn,pino}@lifl.fr

15 mars 1999

Résumé

Nous nous intéressons dans ce papier au problème de la fusion de bases de connaissances en présence de contraintes d'intégrité. Nous proposons une caractérisation logique de ces opérateurs et nous donnons un théorème de représentation en terme de pré-ordres sur les interprétations. Nous montrons l'étroite connexion entre opérateurs de révision de la connaissances et opérateurs de fusion et nous montrons que ce travail étend le cas de la fusion pure (*i.e.* sans contrainte d'intégrité) que nous avions étudié dans un précédent papier. Enfin nous montrons que les opérateurs de révision commutatifs définis par Liberatore et Schaerf peuvent être vus comme un cas particulier d'opérateurs de fusion.

1 Introduction

Une question importante pour les systèmes à bases de connaissance distribués est d'être capable de déterminer quel est l'état global du système, c'est-à-dire la connaissance globale du système à un moment donné. Prenons par exemple le problème de la combinaison de plusieurs systèmes experts. Supposons que l'on ait un ensemble de systèmes experts, chacun codant les connaissances d'un expert humain. Pour construire un système expert complet il semble raisonnable de combiner ces différentes bases de connaissances de manière à obtenir une base de connaissance représentant la connaissance du groupe d'experts. Ce procédé permet entre autres de découvrir de nouvelles informations distribuées parmi les sources. Par exemple si un expert sait que a est vrai et qu'un autre sait que a entraîne b, alors la base "combinée" sait que b est vrai alors qu'aucun des deux experts ne le sait. Cela a été appelé *connaissance implicite* dans [HM92]. Le problème est que la simple agrégation des différentes bases ne suffit pas puisqu'il y aura certainement des contradictions entre différentes expertises.

Nous proposons dans ce papier une étude logique des opérateurs de fusion lorsque le résultat de la fusion doit se conformer à un ensemble de contraintes d'intégrité. Nous définissons également deux sous-classes d'opérateurs: les opérateurs de fusion majoritaire et les opérateurs d'arbitrage. Les premiers tentent de satisfaire un maximum de protagonistes alors que les seconds tentent de satisfaire au maximum chacun des protagonistes. Autrement dit les opérateurs majoritaires tentent de minimiser l'insatisfaction globale alors que les opérateurs d'arbitrage tentent de minimiser l'insatisfaction individuelle.

Nous donnons également un théorème de représentation pour ces opérateurs et nous montrons l'étroite connexion entre ces opérateurs et les opérateurs de révision de la connaissance [AGM85, Gär88, KM91].

Nous donnons dans la section 2 quelques notations, dans la section 3 nous définissons les opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrités, les opérateurs de fusion majoritaire et les opérateurs d'arbitrage. Nous donnons également un théorème de représentation pour ces opérateurs. Dans la section

*Les preuves ont été ommises pour des questions d'espace mais peuvent être trouvées dans la version longue [KP99]

4, nous illustrons nos définitions en introduisant deux familles d'opérateurs. La section 5 regroupe la comparaison de notre approche avec les travaux existants, nous montrons en particulier les forts liens entre fusion et révision de la connaissance, nous soulignons ensuite que cette approche étend celle proposée dans [KP98]. Nous soulignons également le fait que les opérateurs de révisions commutatifs proposés par Liberatore et Schaerf sont un cas particulier des opérateurs de fusion.

2 Préliminaires

Nous considérons un langage propositionnel $\mathcal{L}$ sur un alphabet fini $\mathcal{P}$. Une interprétation est une fonction de $\mathcal{P}$ dans $\{0,1\}$. L'ensemble des interprétations est noté $\mathcal{W}$. Soit une formule φ, $mod(\varphi)$ dénote l'ensemble des modèles φ, *i.e.* $mod(\varphi) = \{I \in \mathcal{W}\ I \models \varphi\}$.
Une *base de connaissance* K est un ensemble fini de formules propositionnelles et peut être vu comme la formule φ qui est la conjonction des formules de K.
Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ n bases de connaissance (non nécessairement différentes). On appelle *ensemble de connaissance* le multi-ensemble Ψ composé de ces n bases de connaissance : $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. On notera $\bigwedge \Psi$ la conjonction des bases de connaissance de Ψ, i.e. $\bigwedge \Psi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. L'union sur les multi-ensembles sera noté $\sqcup$. Les bases de connaissance seront représentées par des lettres grecques minuscules et les ensembles de connaissance par des lettres grecques majuscules.
Comme une base de connaissance inconsistante n'apporte aucune information en ce qui concerne la fusion, nous supposerons dans le reste du papier que toutes les bases de connaissance sont consistantes.

Définition 1 *Un ensemble de connaissance Ψ est consistant si et seulement si $\bigwedge \Psi$ est consistant. Nous noterons $mod(\Psi) = mod(\bigwedge \Psi)$ et écrirons $I \models \Psi$ pour $I \in mod(\Psi)$.*

Définition 2 *Soient deux ensembles de connaissance Ψ_1, Ψ_2. Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalents, noté $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$, ssi il existe une bijection f de $\Psi_1 = \{\varphi_1^1, \ldots, \varphi_n^1\}$ sur $\Psi_2 = \{\varphi_1^2, \ldots, \varphi_m^2\}$ telle que $\vdash f(\varphi) \leftrightarrow \varphi$.*

Un pré-ordre $\leq$ sur $\mathcal{W}$ est une relation reflexive et transitive sur $\mathcal{W}$. Un pré-ordre est total si $\forall I, J \in \mathcal{W}\ I \leq J$ ou $J \leq I$. Soit $\leq$ un pré-ordre sur $\mathcal{W}$, on définit $<$ comme suit : $I < J$ ssi $I \leq J$ et $J \not\leq I$, et $\simeq$ par $I \simeq J$ ssi $I \leq J$ et $J \leq I$. Soit I une interprétation, on notera $I \in min(mod(\varphi), \leq)$ ssi $\forall J \in mod(\varphi)\ I \leq J$.
Par abus si φ est une base de connaissance, et si $\Psi = \{\varphi\}$ est un ensemble de connaissance, alors φ dénotera également l'ensemble de connaissance. De même on écrira $\Psi \sqcup \varphi$ au lieu de $\Psi \sqcup \{\varphi\}$, et $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$ pour $\{\varphi_1\} \sqcup \{\varphi_2\}$. Soit un entier positif n on notera Ψ^n le multi-ensemble $\{\underbrace{\Psi, \ldots, \Psi}_{n}\}$.

L'ensemble des bases de connaissance consistantes est noté $\mathcal{B}$. L'ensemble des ensembles de connaissances est noté $\mathcal{S}$. Un opérateur $\triangle$ est une fonction qui, à un ensemble de connaissance et à une base de connaissance, associe une base de connaissance, *i.e.* $\triangle : \mathcal{S} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$.
Nous supposerons que les contraintes d'intégrités sont un ensemble fini de formules, c'est-à-dire une base de connaissance. Nous appellerons μ cette base de connaissance. Nous allons considérer des opérateurs $\triangle : \mathcal{S} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ où le second argument représente les contraintes d'intégrité. Nous noterons $\triangle_\mu(\Psi)$ au lieu de $\triangle(\Psi, \mu)$.

3 Fusion avec contraintes d'intégrité

Nous donnons dans cette section une caractérisation logique des opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrité, c'est-à-dire que nous donnons un ensemble de propriétés qu'un opérateur doit satisfaire pour avoir un comportement rationnel en ce qui concerne la fusion.

Définition 3 *$\triangle$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité si et seulement si il satisfait les postulats suivants :*

(IC0) $\triangle_\mu(\Psi) \vdash \mu$

(IC1) *Si μ est consistant, alors $\triangle_\mu(\Psi)$ est consistant*
(IC2) *Si Ψ est consistant avec μ, alors $\triangle_\mu(\Psi) = \bigwedge \Psi \wedge \mu$*
(IC3) *Si $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ et $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$, alors $\triangle_{\mu_1}(\Psi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\Psi_2)$*
(IC4) *Si $\varphi \vdash \mu$ et $\varphi' \vdash \mu$, alors $\triangle_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \bot \Rightarrow \triangle_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$*
(IC5) $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$
(IC6) *Si $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$ est consistant, alors $\triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$*
(IC7) $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$
(IC8) *Si $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ est consistant, alors $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \triangle_{\mu_1}(\Psi)$*

L'explication de ces postulats est la suivante : *(IC0)* assure que le résultat de la fusion satisfait les contraintes d'intégrité. *(IC1)* dit que si les contraintes d'intégrité sont consistantes, alors le résultat de la fusion sera consistant. *(IC2)* dit que si c'est possible, le résultat de la fusion est simplement la conjonction des bases de connaissance et des contraintes d'intégrité. *(IC3)* est le principe d'indépendance de la syntaxe, *i.e.* si deux ensembles de connaissance sont équivalents et si les bases de contraintes d'intégrité sont logiquement équivalentes alors les base de connaissance résultats des deux fusions seront logiquement équivalentes. *(IC4)* est le postulat d'équité, il assure que lorsque l'on fusionne deux bases de connaissance, un opérateur de fusion ne doit pas avoir de préférence pour l'une d'elles. *(IC5)* exprime l'idée suivante : si un groupe Ψ_1 s'accorde sur un ensemble d'alternatives dont I fait partie, et un autre groupe Ψ_2 s'accorde sur un autre ensemble d'alternatives qui contient également I, alors I doit être dans les alternatives choisies si l'on joint les deux groupes. *(IC5)* et *(IC6)* ensembles disent que si l'on peut trouver deux sous groupes qui s'accordent sur au moins une alternative, alors le résultat de la fusion globale sera exactement les alternatives sur lesquelles les deux groupes s'accordent. *(IC7)* et *(IC8)* sont une généralisation directe des postulats *(R5-R6)* pour la révision. Ils assurent que la notion de minimalité à un bon comportement (voir [KM91] pour une complète justification de ces deux postulats).

Nous définissons à présent deux sous-classes d'opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrité : les opérateurs de fusion majoritaire et les opérateurs d'arbitrage.
Un opérateur de fusion majoritaire est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité qui satisfait la propriété suivante :

(Maj) $\exists n \ \triangle_\mu \left(\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n\right) \vdash \triangle_\mu(\Psi_2)$ (majorite)

Ce postulat exprime le fait que si une opinion a une large audience, ce sera l'opinion du groupe.
Un opérateur d'arbitrage est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité qui satisfait la propriété suivante :

(Arb) $\left.\begin{array}{l} \triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2) \\ \triangle_{\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2) \\ \mu_1 \nvdash \mu_2 \\ \mu_2 \nvdash \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$ (arbitrage)

Cette propriété est beaucoup plus intuitive lorsqu'elle est exprimée de manière sémantique (*cf* condition 8 de l'assignement syncrétique juste), elle assure que ce sont les choix "medians" qui sont privilégiés.
Nous disposons donc a présent d'une définition logique de nos opérateurs, nous allons maintenant donner un théorème de représentation qui permettra d'avoir une manière plus intuitive de définir des opérateurs de fusion.
Plus precisement nous montrons que chaque opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité correspond à une famille de pré-ordres sur les interprétations.
Nous devons d'abord définir ce qu'est un assignement syncrétique :

Définition 4 *Un assignement syncrétique est une fonction associant à chaque ensemble de connaissance Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ sur les interprétations tel que pour chaque ensembles de connaissance Ψ, Ψ_1, Ψ_2 et pour chaque bases de connaissance φ, φ' :*

1. *Si $I \models \Psi$ et $J \models \Psi$, alors $I \simeq_\Psi J$*
2. *Si $I \models \Psi$ et $J \not\models \Psi$, alors $I <_\Psi J$*
3. *Si $\Psi_1 \equiv \Psi_2$, alors $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$*
4. *$\forall I \models \varphi \; \exists J \models \varphi' \; J \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I$*
5. *Si $I \leq_{\Psi_1} J$ et $I \leq_{\Psi_2} J$, alors $I \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$*
6. *Si $I <_{\Psi_1} J$ et $I \leq_{\Psi_2} J$, alors $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$*

Un assignement syncrétique majoritaire est un assignement syncrétique qui satisfait :

7. *Si $I <_{\Psi_2} J$, alors $\exists n \; I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2{}^n} J$*

Un assignement syncrétique juste est un assignement syncrétique qui satisfait :

8. $\left.\begin{array}{l} I <_{\varphi_1} J \\ I <_{\varphi_2} J' \\ J \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J' \end{array}\right\} \Rightarrow I <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de représentation pour nos opérateurs :

Théorème 1 *Un opérateur est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité (respectivement un opérateur de fusion majoritaire ou un opérateur d'arbitrage) si et seulement si il existe un assignement syncrétique (respectivement un assignement syncrétique majoritaire ou un assignement syncrétique juste) qui, à chaque ensemble de connaissance Ψ associe un pré-ordre total $\leq_\Psi$ tel que*

$$mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi).$$

4 Exemples d'opérateurs

Nous definnissons dans cette section deux familles d'opérateurs de fusion. La première, la famille Σ, donne des opérateurs de fusion majoritaire. La seconde, la famille $Gmax$, est une famille d'opérateurs d'arbitrage.

On suppose que l'on dispose d'une distance entre les interpretations, c'est-à-dire une fonction $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mapsto \mathbb{N}$ telle que :

$d(I, J) = d(J, I)$

$d(I, J) = 0$ iff $I = J$

Et l'on définit la distance entre une interprétation I et une base de connaissance φ de la façon suivante : $d(I, \varphi) = \min_{J \models \varphi} d(I, J)$

Définition 5 *Soient Ψ un ensemble de connaissance et I une interprétation. On définit la distance entre une interprétation et un ensemble de connaissance comme :*

$$d_\Sigma(I, \Psi) = \sum_{\varphi \in \Psi} d(I, \varphi)$$

Ce qui nous donne le pré-ordre suivant : $I \leq_\Psi^\Sigma J$ iff $d_\Sigma(I, \Psi) \leq d_\Sigma(J, \Psi)$
Et l'opérateur $\triangle^\Sigma$ est défini par : $mod(\triangle_\mu^\Sigma(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi^\Sigma)$

Théorème 2 *$\triangle^\Sigma$ est un opérateur de fusion majoritaire, i.e. il satisfait les postulats (IC0 - IC8) et (Maj).*

Définition 6 *Soit un ensemble de connaissance $\Psi = \{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$. Pour chaque interprétation I on construit la liste $(d_1^I \dots d_n^I)$ des distances entre cette interprétation et les n bases de connaissance de Ψ, i.e. $d_j^I = d(I, \varphi_j)$. Soit L_I^Ψ la liste obtenue en triant $(d_1^I \dots d_n^I)$ par ordre décroissant. Soit $\leq_{lex}$ l'ordre lexicographique sur les séquences d'entiers (de même longueur), on définit le pré-ordre suivant : $I \leq_\Psi^{GMax} J$ ssi $L_I^\Psi \leq_{lex} L_J^\Psi$.*
et l'opérateur $\triangle^{GMax}$ est défini par : $mod(\triangle_\mu^{GMax}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi^{GMax})$.

Théorème 3 *$\triangle^{GMax}$ est un opérateur d'arbitrage, i.e. il satisfait les postulats (IC0 - IC8) et (Arb).*

Exemple :
Pour donner un exemple "concret" nous allons fixer la distance entre interpretations utilisée. Nous allons considérer la distance de Dalal [Dal88]. La distance de Dalal entre deux interprétations est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent.

A une réunion de co-propriétaires d'une résidence, le président propose pour l'année à venir la construction d'une piscine, d'un court de tennis et d'un parking privé. On notera respectivement S, T, P la construction de la piscine, du court de tennis et du parking. I denotera l'augmentation du loyer. Le président souligne le fait que si deux des trois items sont construits le loyer augmentera significativement : $\mu = ((S \wedge T) \vee (S \wedge P) \vee (T \wedge P)) \rightarrow I$
Il y a quatre co-propriétaires $\Psi = \{\varphi_1 \sqcup \varphi_2 \sqcup \varphi_3 \sqcup \varphi_4\}$. Deux d'entre eux veulent construire les trois items et ne se soucient pas de l'augmentation de loyer : $\varphi_1 = \varphi_2 = S \wedge T \wedge P$. Le troisième pense que construire la moindre chose se répercutera inexorablement un jour sur les loyers et ne tient absolument pas à voir son loyer augmenter, il est donc opposé à toute construction : $\varphi_3 = \neg S \wedge \neg T \wedge \neg P \wedge \neg I$. Le dernier trouve que la résidence à réellement besoin d'un court de tennis et d'un parking privé mais ne voudrait pas subir une forte augmentation de loyer : $\varphi_4 = T \wedge P \wedge \neg I$.

On considérera les quatre variables propositionnelles S, T, P, I dans cet ordre pour les interprétations :

$mod(\mu) = \mathcal{W} \setminus \{(0,1,1,0), (1,0,1,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0)\}$

$mod(\varphi_1) = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0)\}$
$mod(\varphi_2) = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0)\}$
$mod(\varphi_3) = \{(0,0,0,0)\}$
$mod(\varphi_4) = \{(1,1,1,0), (0,1,1,0)\}$

Les calculs sont résumés dans le tableau 1, pour chaque interpretation on donne la distance entre celle-ci et les quatres bases de connaissance et la distance entre cette interpretation et l'ensemble de connaissance selon les 2 opérateurs que l'on a défini $\triangle^{\Sigma}$ et $\triangle^{GMax}$. Les lignes grisées correspondent aux interprétations rejetées par les contraintes d'intégrité. Le résultat de la fusion doit donc être cherché parmi les interprétations non grisées.

Avec $\triangle^{GMax}$ comme opérateur de fusion on a comme résultat $mod(\triangle_{\mu}^{GMax}(\Psi)) = \{(0,0,1,0), (0,1,0,0)\}$, la décision prise dans ce cas sera donc de construire soit le court de tennis, soit le parking et de ne pas augmenter le loyer.
Par contre si on choisit $\triangle^{\Sigma}$ pour résoudre le conflit en se rangeant au voeux de la majorité le résultat est alors $mod(\triangle_{\mu}^{\Sigma}(\Psi)) = \{(1,1,1,1)\}$, et la solution adoptée et de construire les trois items et d'augmenter le loyer.

Le "vote" majoritaire semble plus démocratique que l'autre méthode mais par exemple dans ce cas cela ne marche que si φ_3 accepte de se conformer à cette décision qui va complétement à l'encontre de ses voeux. Il se pourrait trés bien que faché de cette décision il décide de ne pas payer son augmentation de loyer et aucun des trois items ne pourrait être construit.
Donc si une décision, comme ici ou comme lors d'un accord commercial ou d'un accord de paix, nécessite l'adhésion de tous les participants, un opérateur d'arbitrage semble plus adéquat qu'un opérateur majoritaire.

TAB. 1 – *Distances*

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	$\mathbf{dist}_{\Sigma}$	$\mathbf{dist}_{\mathbf{GMax}}$
$(0,0,0,0)$	3	3	0	2	8	(3,3,2,0)
$(0,0,0,1)$	3	3	1	3	10	(3,3,3,1)
$(0,0,1,0)$	2	2	1	1	6	(2,2,1,1)
$(0,0,1,1)$	2	2	2	2	8	(2,2,2,2)
$(0,1,0,0)$	2	2	1	1	6	(2,2,1,1)
$(0,1,0,1)$	2	2	2	2	8	(2,2,2,2)
$(0,1,1,0)$	1	1	2	0	4	(2,1,1,0)
$(0,1,1,1)$	1	1	3	1	6	(3,1,1,1)
$(1,0,0,0)$	2	2	1	2	7	(2,2,2,1)
$(1,0,0,1)$	2	2	2	3	9	(3,2,2,2)
$(1,0,1,0)$	1	1	2	1	5	(2,1,1,1)
$(1,0,1,1)$	1	1	3	2	7	(3,2,1,1)
$(1,1,0,0)$	1	1	2	1	5	(2,1,1,1)
$(1,1,0,1)$	1	1	3	2	7	(3,2,1,1)
$(1,1,1,0)$	0	0	3	0	3	(3,0,0,0)
$(1,1,1,1)$	0	0	4	1	5	(4,1,0,0)

5 Connections avec d'autres travaux

5.1 Révision AGM

Nous montrons dans cette section que les opérateurs de fusion sont très proches des opérateurs de révision AGM [AGM85, Gär88, KM91], le premier résultat est immédiat :

Théorème 4 *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité, alors l'opérateur $\circ$, définit par $\varphi \circ \mu = \triangle_\mu(\varphi)$, est un opérateur de révision AGM.*

Inversement, on peut se demander si on peut construire un opérateur de fusion à partir d'un opérateur de révision.
Nous proposons la définition suivante d'un opérateur de fusion à partir d'un opérateur de révision $\circ$ donné.

Définition 7

- *On considère l'assignement fidèle correspondant à l'opérateur de révision $\circ$ (cf [KM91]).*
- *On définit $f^\circ_\varphi(I) = n$ où n est le niveau où l'interprétation I apparaît dans le pré-ordre $\leq_\varphi$. Plus formellement n est la longueur de la plus longue chaîne d'inégalités strictes $I_0 <_\varphi \ldots <_\varphi I_n$ avec $I_0 \models \varphi$ et $I_n = I$.*
- *On définit $f^\circ_\Psi(I)$ avec la méthode de fusion choisie (par exemple $f^\circ_\Psi(I) = \sum_{\varphi \in \Psi} (f^\circ_\varphi(I))$ si $\triangle^\Sigma$ est la méthode choisie).*
- *On définit $I \leq_\Psi J$ ssi $f^\circ_\Psi(I) \leq f^\circ_\Psi(J)$.*
- *Finalement $mod(\triangle^\circ_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.*

La question à présent est de trouver les propriétés minimales de la méthode de fusion utilisée pour définir $f^\circ_\Psi(I)$ de sorte à avoir de bonnes propriétés pour la fusion.
Par exemple si on choisit $f^\circ_\Psi(I) = \sum_{\varphi \in \Psi} (f^\circ_\varphi(I))$ comme méthode de fusion on a le résultat suivant, sans aucune propriété supplémentaire sur $\circ$:

Théorème 5 *Si un opérateur $\triangle_\mu^\circ$ est défini à partir d'un opérateur de révision $\circ$ et de la méthode de fusion $f_\Psi^\circ(I) = \sum_{\varphi \in \Psi}(f_\varphi^\circ(I))$, d'aprés la définition 7, alors l'opérateur $\triangle_\mu^\circ$ satisfait (IC0-IC3), (IC5-IC8) et (Maj).*

Définition 8 *On définit $f_\varphi^\circ(\varphi')$ comme $f_\varphi^\circ(\varphi') = \min_{I \models \varphi'}(f_\varphi^\circ(I))$*

Théorème 6 *Si un opérateur $\triangle_\mu^\circ$ est défini à partir d'un opérateur de révision $\circ$ et de la méthode de fusion $f_\Psi^\circ(I) = \sum_{\varphi \in \Psi}(f_\varphi^\circ(I))$, d'aprés la définition 7, alors l'opérateur $\triangle_\mu^\circ$ est un opérateur de fusion majoritaire si et seulement si l'assignement fidèle satisfait la propriété suivante : $f_\varphi^\circ(\varphi') = f_{\varphi'}^\circ(\varphi)$.*

Si l'on utilise la méthode de fusion $Gmax$ on obtient des résultats semblables. La méthode $Gmax$ est défini en utilisant la definition 7 avec les changements suivants :

- On définit $f_\Psi^\circ(I)$ comme la liste des $f_\varphi^\circ(I)$ classés par ordre décroissant, *i.e.* $f_\Psi^\circ(I) = (f_{\varphi_1}^\circ(I), \ldots, f_{\varphi_n}^\circ(I))$ avec $\forall i\ \varphi_i \in \Psi$ et $\forall i\ f_{\varphi_i}^\circ(I) \leq f_{\varphi_{i+1}}^\circ(I)$.
- On définit $I \leq_\Psi J$ ssi $f_\Psi^\circ(I) \leq_{lex} f_\Psi^\circ(J)$.

Les opérateurs de révision définis à partir d'une distance vérifient la propriété nécéssaire au théorème 6.
Nous disons qu'un opérateur de révision $\circ$ est défini à partir d'une distance d si

- d est une distance, c'est-à-dire d est une fonction $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mapsto \mathbb{N}$ qui vérifie :
  $d(I,J) = d(J,I)$
  $d(I,I) = 0$ iff $I = J$
- Soient φ une base de connaissance et I une interprétation : $d(I,\varphi) = \min_{J \in Mod(\varphi)} d(I,J)$
- $I \leq_\varphi J$ ssi $d(I,\varphi) \leq d(J,\varphi)$
- $mod(\varphi \circ \mu) = \min(mod(\mu), \leq_\varphi)$

Et en fait ce sont les seuls. Plus exactement nous avons le résultat suivant:

Théorème 7 *Un opérateur $\triangle$ défini à partir d'un opérateur de révision $\circ$ et de la méthode de fusion Σ ou $Gmax$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité si et seulement si $\circ$ est défini à partir d'une distance.*

5.2 Fusion pure

Une caractérisation logique des opérateurs de fusion dans le cas où il n'y a pas de contraintes d'intégrité a été proposé dans [KP98]. Nous nommerons ce cas le cas de la fusion pure.

Définition 9 *Soit $\triangle$ une fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$, $\triangle$ sera appelé opérateur de fusion pure si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :*

(A1) $\triangle(\Psi)$ *est consistant*
(A2) *Si* Ψ *est consistant, alors* $\triangle(\Psi) = \bigwedge \Psi$
(A3) *Si* $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$, *alors* $\triangle(\Psi_1) \leftrightarrow \triangle(\Psi_2)$
(A4) *Si* $\varphi \wedge \varphi'$ *est inconsistant, alors* $\triangle(\varphi \sqcup \varphi') \nvdash \varphi$
(A5) $\triangle(\Psi_1) \wedge \triangle(\Psi_2) \vdash \triangle(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$
(A6) *Si* $\triangle(\Psi_1) \wedge \triangle(\Psi_2)$ *est consistant, alors* $\triangle(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle(\Psi_1) \wedge \triangle(\Psi_2)$

Un opérateur de fusion pure est un opérateur de fusion pure majoritaire s'il satisfait $(M7)$.

(M7) $\forall \varphi\ \exists n\ \ \triangle(\Psi \sqcup \varphi^n) \vdash \varphi$

Un opérateur de fusion pure est un opérateur d'arbitrage pur s'il satisfait$(A7)$.

(A7) $\forall \varphi' \ \exists \varphi \ \varphi' \nvdash \varphi \ \forall n \ \ \triangle(\varphi' \sqcup \varphi^n) = \triangle(\varphi' \sqcup \varphi)$

Tout d'abord il est aisé de voir que les postulats obtenus à partir des postulats (ICi) lorsque $\mu = \top$ sont presque les mêmes que ce donnés dans [KP98]. Les principales différences sont que le postulat (IC4) est plus fort que (A4) et que (Maj) est plus fort que (M7).
Notons également que le postulat (Arb) n'est pas exprimable lorsque $\mu = \top$. Il n'y a donc pas de relation directe entre la définition de l'arbitrage au sens de [KP98] et la définition que nous avons donné à la section 3. Mais il faut remarquer que (A7) n'est qu'une sorte de règle de non-majorité, alors que (Arb) exprime d'une manière beaucoup plus positive le comportement des opérateurs d'arbitrage.
Si $\triangle$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité, on notera $\triangle_\top$ l'opérateur obtenu lorsque l'on considère cet opérateur sans contrante (*i.e.* lorsque $\mu = \top$).

Théorème 8 *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité, alors $\triangle_\top$ est un opérateur de fusion pure (i.e. il satisfait (A1-A6)).*
De plus si $\triangle$ est un opérateur majoritaire, alors $\triangle_\top$ est un opérateur de fusion pure majoritaire.

5.3 Opérateurs de révision commutatifs

Les postulats donnés par Liberatore et Schaerf [LS95, LS98] pour les opérateurs de révision commutatifs sont :
(LS1) $\varphi \diamond \mu \equiv \mu \diamond \varphi$
(LS2) $\varphi \wedge \mu$ implique $\varphi \diamond \mu$
(LS3) Si $\varphi \wedge \mu$ est satisfiable alors $\varphi \diamond \mu$ implique $\varphi \wedge \mu$
(LS4) $\varphi \diamond \mu$ est insatisfiable ssi φ et μ sont insatisfiable
(LS5) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\varphi_1 \diamond \mu_1 \equiv \varphi_2 \diamond \mu_2$
(LS6) $\varphi \diamond (\mu \vee \theta) = \begin{cases} \varphi \diamond \mu & \text{ou} \\ \varphi \diamond \theta & \text{ou} \\ (\varphi \diamond \mu) \vee (\varphi \diamond \theta) & \end{cases}$
(LS7) $\varphi \diamond \mu$ implique $\varphi \vee \mu$
(LS8) Si φ est satisfiable alors $\varphi \wedge (\varphi \diamond \mu)$ est satisfiable
Cette définition des opérateurs de révision commutatifs est très proche de celle des opérateurs de révision AGM. Mais cette définition a deux inconvénients majeurs du point de vue de la fusion. D'abord ces opérateurs ne permettent pas de fusionner plus de deux bases de connaissance, ensuite le résultat de la fusion doit impliquer la disjonction des bases initiales. Nous montrons dans [KP98, KP99] que cela ne doit pas toujours être le cas. Mais il y a des applications où le résultat de la fusion doit effectivement impliquer la disjonction des bases initiales et si l'on veut tout de même définir de tels opérateurs on peut utiliser des opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrité de la façon suivante :

Définition 10 *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité, on définit un opérateur de révision commutatif $\diamond_\triangle$ par $\varphi \diamond_\triangle \mu = \triangle_{\varphi \vee \mu}(\varphi \sqcup \mu)$. Nous dirons que $\diamond_\triangle$ est l'opérateur de révision commutatif associé à $\triangle$.*

Théorème 9 *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité, alors l'opérateur $\diamond_\triangle$ associé satisfait (LS1-LS5),(LS7) et (LS8).*

Nous donnons à présent une propriété intéressante qui montre que les opérateurs que l'on définit sont de vrais opérateurs "commutatifs" de révision (rappelons que $\varphi \circ \mu = \triangle_\mu(\varphi)$ est un opérateur de révision AGM).

Théorème 10 *Si $\triangle$ est opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité alors il vérifie*

$$\triangle_{\varphi \vee \mu}(\varphi \sqcup \mu) \leftrightarrow \triangle_\varphi(\mu) \vee \triangle_\mu(\varphi)$$

Pour qu'un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité donne systématiquement un opérateur de révision commutatif il doit vérifier une propriété supplémentaire :

$$\triangle_{\varphi}(\mu \vee \theta) = \begin{cases} \triangle_{\varphi}(\mu) & \text{si } \triangle_{\mu\vee\theta}(\varphi) \vdash \neg\theta \\ \triangle_{\varphi}(\theta) & \text{si } \triangle_{\mu\vee\theta}(\varphi) \vdash \neg\mu \\ \triangle_{\varphi}(\mu) \vee \triangle_{\varphi}(\theta) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

Théorème 11 *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité, alors l'opérateur $\diamond$ définit comme $\varphi \diamond \mu = \triangle_{\varphi\vee\mu}(\varphi \sqcup \mu)$ vérifie (LS1-LS8) si et seulement si $\triangle$ vérifie la propriété (1).*

Remarque 1 *La propriété (1) implique $\triangle_A(\varphi) = \triangle_A(\triangle_{\varphi}(A))$*

Cette remarque montre que la propriété (1) est une propriété de caractère topologique puisque réécrit en terme de révision cela donne $\varphi \circ A = (A \circ \varphi) \circ A$. C'est-à-dire qu'elle force le résultat de la révision de φ par A à ne dépendre que des modèles de φ qui sont les plus proches de A.

Nous avons déjà souligné qu'un inconvénient sérieux des opérateurs de révision commutatifs est qu'ils ne permettent pas de fusionner plus de deux bases de connaissance puisqu'ils ne sont pas associatifs (voir [LS95, LS98]), mais le fait que le résultat de la fusion doive impliquer la disjonction des bases de connaissances initiales peut être utile pour certaines applications. Nos opérateurs de fusion permettent de généraliser les opérateurs de Liberatore et Schaerf à n base de connaissances, pour cela on définit la fusion d'un ensemble de connaissance $\{\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n\}$ de la façon suivante :

$$\triangle_{\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_n}(\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n)$$

6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce papier un cadre logique pour la fusion de bases de connaissance en présence de contraintes d'intégrité lorsqu'il n'y a pas de préférence entre les bases de connaissance. Nous avons donné un ensemble de propriétés qu'un opérateur de fusion avec contraintes d'intégrité doit satisfaire pour avoir un comportement rationnel en ce qui concerne la fusion. Cet ensemble de propriétés peut être utilisé, par exemple, pour classer des méthodes de fusion existantes.
Nous avons également fait une distinction entre opérateurs majoritaires et opérateurs d'arbitrage, les premiers tentant de minimiser l'insatisfaction globale, les seconds tentant de minimiser l'insatisfaction individuelle. Une question ouverte est de savoir si ces deux classes sont disjointes. Nous conjecturons que la reponse est positive.
Nous avons donné une caractérisation sémantique des opérateurs de fusion au travers d'un théorème de représentation. Cette caractérisation est beaucoup plus intuitive que celle donnée dans [KP98], cela grâce à la présence de contraintes d'intégrité.
Nous avons également étudié les liens avec d'autres travaux, montrant l'étroite connexion entre fusion et révision de la connaissance. Nous avons également montrés que les opérateurs de révision commutatifs proposés par Liberatore et Schaerf peuvent être vus comme un cas particulier d'opérateurs de fusion.
Notons qu'il est rare que dans un groupe tous les intervenants aient la même importance sur la décision finale, on utilise donc généralement une pondération pour modéliser cela. Intuitivement, plus le poids d'une base est élevé, plus elle aura d'importance sur la décision finale. Si les bases de connaissances représentent l'avis de groupes de personnes les poids peuvent représenter, par exemple, la cardinalité de chacun de ces groupes. Nous voudrions caractériser logiquement l'utilisation de ces pondérations. Les opérateurs majoritaires sont proches de cette notion d'opérateurs pondérés puisqu'ils tiennent compte des cardinalités des bases. Mais la notion d'opérateur pondéré est plus subtile et sa caractérisation reste à trouver.

Références

[AGM85] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[Dal88] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision: preliminary report. In *Proceedings of AAAI-88*, pages 475–479, 1988.

[Gär88] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux.* MIT Press, 1988.

[HM92] J. Halpern and Y. Moses. A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. *Artificial Intelligence*, 54(3):319–379, 1992.

[KM91] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.

[KP98] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[KP99] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. Technical Report 99-01, LIFL, 1999. http://www.lifl.fr/GNOM/articles/it9901.ps.

[LS95] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration: A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the Second World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, pages 217–228, 1995.

[LS98] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1), 1998. To appear.