Une (courte) introduction à la Théorie du Choix Social

Sébastien Konieczny

konieczny@cril.fr

CRIL – CNRS

Théorie du Choix Social

- ▷ Comment définir les préférences collectives d'un groupe (société) à partir des préférences individuelles de chacun de ses individus ?
- ▷ Economie, Politique, Théorie de la décision, Intelligence Artificielle
- ▷ Borda (1781), Condorcet (1785)
- ▷ K. J. Arrow (1963), A. K. Sen (1976)

Notations

- ▷ Soit un ensemble $X = \{a, b, c, \ldots\}$ de *candidats* (alternatives). Un sous-ensemble de X est appelé un *agenda*.
- ▷ Chaque *individu* i possède une relation de préférence notée R_i sur l'ensemble des candidats : aR_ib signifie que l'individu i préfère le candidat a au candidat b. On supposera que R_i est une relation réflexive, transitive et totale. P_i dénote la partie stricte de la relation R_i (ie aP_ib ssi aR_ib et non(bR_ia)), et I_i dénote la relation d'équivalence (*d'indifférence*) associée.
- ▷ Un ensemble d'individus $N = \{1, \ldots, n\}$ est appelé un *profil*. La relation de préférence pour le profil N est notée R, P et I représentent respectivement la partie stricte et la relation d'équivalence associée.

2 problèmes :

- ▷ Déterminer quel est le candidat choisi par un profil donné, noté $C_N(X)$.
- ▷ Déterminer la relation de préférence R d'un profil donné.

Hypothèse simplificatrice pour la suite :

- ▷ Il n'y a pas d'égalité dans les préférences des individus (ie la relation R_i est réflexive, transitive, antisymétrique et totale)

2 candidats

- ▷ *Majorité*. On choisit le candidat qui est majoritairement préféré :

$$a \in C_N(\{a, b\}) \text{ ssi } |\{i|aP_ib\}| \geq |\{i|bP_ia\}|$$

Pas de problème, de bonnes propriétés.

- ▷ Problème : comment généraliser cela à plus de 2 candidats ?

Gagnant de Condorcet

- ▷ Un candidat a est un *gagnant de Condorcet* pour un profil N si pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
aP_2cP_2b	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 2, c = 1$
cP_3bP_3a	a est un gagnant de Condorcet

- ▷ Pour tout profil, il ne peut y avoir qu'un gagnant de Condorcet.
- ▷ Problème : il se peut qu'il n'y en ait aucun !

aP_1bP_1c	Pour $X = \{a, b\}$ $a = 2, b = 1$
bP_2cP_2a	Pour $X = \{a, c\}$ $a = 1, c = 2$
cP_3aP_3b	Pour $X = \{b, c\}$ $b = 2, c = 1$

- ▷ Que fait-on quand il n'y a pas de gagnant de Condorcet ?
- ▷ Une méthode qui choisit le gagnant de Condorcet quand il existe est appelée *Condorcet cohérente*.

Scrutin majoritaire simple

- ▷ Système utilisé en Grande-Bretagne
- ▷ Bulletin uninominal. Le candidat avec le plus de votes est le candidat choisi.

21 votants.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Résultat : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Le candidat a est élu.

- ▷ Mais une majorité d'individus (11/21) préfère tous les autres candidats au candidat élu !
- ▷ Le scrutin majoritaire simple permet d'élire un perdant de Condorcet !
- ▷ Peut-on alors espérer des votants qu'ils soient sincères ?

Scrutin majoritaire à deux tours

- Système utilisé en France
- Bulletin uninominal. Premier tour : le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu, sinon les deux candidats ayant reçu le plus de voix vont au second tour. Second tour : le candidat avec le plus de voix est élu.

10: $aPbPc$
6: $bPcPa$
5: $cPbPa$

Premier tour : $a : 10$, $b : 6$, $c : 5$
Les candidats a et b vont au second tour.
Second tour : $a : 10$, $b : 11$
Le candidat b est élu.

- Le scrutin majoritaire à deux tours ne peut pas élire un perdant de Condorcet.
- Mais il est tout de même possible que tous les autres candidats sauf un soient préférés au candidat élu par une majorité des votants !

Scrutin majoritaire à deux tours : manipulabilité

10: $bPaPcPd$
6: $cPaPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a:5$, $b:10$, $c:6$
Les candidats b et c vont au second tour.
Second tour : $b:15$, $c:6$
Le candidat b est élu.

Les 6 individus avec les préférences $cPaPdPb$ décident de voter comme si leurs préférences étaient $aPcPdPb$.

10: $bPaPcPd$
6: $aPcPdPb$
5: $aPdPbPc$

Premier tour : $a:11$, $b:10$
Le candidat a est élu.

- ▷ Le scrutin majoritaire à deux tours est manipulable : il peut être profitable à un individu de mentir sur ses préférences.

Scrutin majoritaire à deux tours : monotonie

6: $aPbPc$	Premier tour : $a:6$, $b:6$, $c:5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et b vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a:11$, $b:6$
2: $bPaPc$	Le candidat a est élu.

Le candidat a fait une campagne de presse contre le candidat b. La campagne fonctionne, 2 individus qui avaient les préférences $bPaPc$ ont à présent les préférences $aPbPc$.

8: $aPbPc$	Premier tour : $a:8$, $b:4$, $c:5$
5: $cPaPb$	Les candidats a et c vont au second tour.
4: $bPcPa$	Second tour : $a:8$, $c:9$
	Le candidat c est élu !

- ▷ La campagne de presse réussie de a lui fait perdre l'élection !
- ▷ Le scrutin majoritaire à deux tours est non-monotone.

Scrutin majoritaire à deux tours : participation

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 4$
4: $cPbPa$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $a : 4$, $c : 7$
	Le candidat c est élu.

2 individus dont les préférences sont $aPbPc$ n'ont pas le courage d'aller voter.

2: $aPbPc$	Premier tour : $a : 2$, $b : 3$, $c : 4$
4: $cPbPa$	Les candidats b et c vont au second tour.
3: $bPcPa$	Second tour : $b : 5$, $c : 4$
	Le candidat b est élu.

- ▷ Il est préférable pour les 2 individus de s'abstenir de voter.
- ▷ Le scrutin majoritaire à deux tours n'incite pas à la participation.

Scrutin majoritaire à deux tours : séparabilité

- ▷ Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 3$, $c : 6$
3: $bPaPc$	Les candidats a et c vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a : 7$, $c : 6$
3: $cPbPa$	Le candidat a est élu.

Circonscription 2 :

4: $aPbPc$	Premier tour : $a : 4$, $b : 6$, $c : 3$
3: $bPaPc$	Les candidats a et b vont au second tour.
3: $cPaPb$	Second tour : $a : 7$, $b : 6$
3: $bPcPa$	Le candidat a est élu.

- ▷ Le candidat a est élu dans les 2 circonscriptions, il doit donc être élu.

Circonscription 1 + Circonscription 2 :

8: $aPbPc$	Premier tour : $a : 8$, $b : 9$, $c : 9$
6: $bPaPc$	Les candidats b et c vont au second tour.
6: $cPaPb$	Second tour : $b : 17$, $c : 9$
3: $cPbPa$	Le candidat b est élu.
3: $bPcPa$	Le candidat a ne passe même pas le premier tour !

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours n'est pas séparable.
- ▷ Problème des décisions décentralisées.
- ▷ Problème de découpage des circonscriptions.

Scrutin majoritaire à 2 tours : dictature de la majorité

Supposons que nous ayons 26 candidats $X = \{a, b, \ldots, z\}$ et 100 votants avec les préférences suivantes :

51: $aPbPcP \ldots PyPz$	Premier tour : $a : 51$, $b : 49$
49: $zPbPcP \ldots PyPa$	Le candidat a est élu au premier tour.

- ▷ Pourtant c'est le plus mauvais candidat pour une partie importante de la société.
- ▷ Alors que le candidat b est unanimement considéré comme un très bon candidat.
- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours permet la dictature de la majorité.

Scrutin majoritaire à 2 tours

Pour résumer :

- ▷ Le scrutin majoritaire à 2 tours est (légèrement) meilleur que le scrutin majoritaire simple puisqu'il ne peut pas choisir de perdant de Condorcet (mais on n'a pas beaucoup mieux).
- ▷ Il n'est pas monotone
- ▷ Il n'incite pas à la participation
- ▷ Il est manipulable
- ▷ Il est non séparable
- ▷ Il permet la dictature de la majorité

La question est donc de savoir :

- ▷ Pourquoi continuons-nous à utiliser ce système ?
- ▷ Quelles sont les alternatives ?
- ▷ Quels sont les systèmes de votes ayant de bonnes propriétés ?

Règles de choix social

- Une *règle de choix social* est une fonction f qui associe une fonction de choix C_N à tout profil N. Quel que soit l'agenda X, la fonction de choix $C_N(X)$ retourne alors les candidats choisis.
- Question : Quelles sont les “bonnes” règles de choix social ?

On ne peut pas étudier individuellement toutes ces règles :

- Avec 5 votants et 4 alternatives. Il y a 75 relations de préférences définissables à partir de 4 alternatives. Cela donne donc $75^5 \simeq 10^9$ profils différents possibles. Avec 4 alternatives, il y a $15 * 7^4 * 3^6 = 26254935$ fonctions de choix possibles. Le nombre de règles de choix social définissables est donc de :

$$(15 * 7^4 * 3^6)^{75^5} > 10^{10^{10}}$$

Règles de choix social

- Mais ce chiffre ne représente que le nombre de fonctions *mathématiquement définissables*, beaucoup d'entre elles ne seront jamais satisfaisantes comme fonctions de choix social. Par exemple la fonction qui choisit toujours le candidat a et la fonction qui choisit toujours le candidat préféré de l'individu i font parties des fonctions définissables.
- On peut donc réduire notre champ d'étude pour n'étudier que les fonctions qui vérifient un minimum de propriétés de rationalité. Nous en avons déjà vu quelques unes (Condorcet cohérence, monotonie, incitation à la participation, etc...)

Propriétés

- ▷ *Universalité.* La règle de choix social doit avoir comme domaine l'ensemble des profils possibles. Les fonctions de choix définies par la règle de choix social doivent avoir comme domaine l'ensemble des agendas possibles.
- ▷ *Unanimité.* Si tous les individus du profil N préfèrent un candidat a à un candidat b, alors la règle de choix social doit préférer le candidat a au candidat b: Si $\forall i\ aP_ib$ et $a \in X$, alors $b \notin C_N(X)$.
- ▷ *Indépendance des Alternatives Non-Disponibles.* Si la restriction de deux profils N et N' à un agenda X sont identiques, alors les choix faits pour cet agenda par la règle de choix social doivent être les mêmes: Si $\forall a, b \in X, \forall i aR_ib \Leftrightarrow aR'_ib$, alors $C_N(X) = C_{N'}(X)$.
- ▷ *Transitivité.* Les préférences induites par la règle de choix social doivent être transitives: $\exists R$ relation réflexive, transitive et totale t.q. $C_N(X) = \{a \in X | aRb\ \forall b \in X\}$.
- ▷ *Absence de Dictateur.* La règle de choix social n'obéit pas à un individu (dictateur) : $\nexists i \in N$ t.q. $\forall a, b \in X$ si aP_ib alors $b \notin C_N(X)$.

Théorème d'Arrow

- Avec les 5 propriétés que nous venons d'énoncer, nous pouvons nous attendre à avoir réduit de manière conséquente le nombre de règles de choix social satisfaisantes.
- Nous avons largement dépassé nos objectifs puisqu'il n'en reste aucune !

Théorème d'impossibilité d'Arrow [Arrow, 1951]. Aucune règle de choix social ne satisfait l'Universalité, l'Unanimité, l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, la Transitivité et l'Absence de Dictateur.

Echapper au Théorème d'Arrow?

- Possibilité d'affaiblir une des conditions
  - Universalité : La règle de choix social n'est définie que pour certains profils (exemple: single-peaked preferences).
  - Transitivité : On peut ne demander la transitivité que pour la partie stricte de la relation de préférence. Voire ne demander que l'absence de cycles.
    - Oligarchies, Droit de veto
  - Indépendance des Alternatives Non-Disponibles :
    - Pourquoi le résultat dépendrait-il des absents ?
    - Intensité des préférences
    - Comparaison Interpersonnelle des utilités
- Toute règle de choix social viole au moins une de ces propriétés.
- Nécessité d'une analyse de la méthode choisie.

Méthodes de vote non rangées

- Soient m candidats. Une *méthode de vote non rangée* (nonranking voting rule) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.
- Le candidat ayant le plus de voix est élus.
- Exemples:
  - $\{1\}$: scrutin majoritaire simple
  - $\{2\}$: Chaque individu doit voter pour deux candidats
  - $\{1, 2\}$: Chaque individu doit voter pour un ou deux candidats
  - $\{m-1\}$: Chaque individu doit voter contre un candidat (i.e. pour tous les candidats sauf un): “vote par véto”
  - $\{1, m-1\}$: Chaque individu doit voter pour un candidat ou contre un candidat
  - $\{1, 2, \ldots, m-1\}$: Chaque individu doit voter pour autant de candidats qu’il veut: vote par assentiment ou vote par approbation (Approval voting)

Le vote par assentiment est la méthode de vote non rangée la moins manipulable [Fishburn, 81].

Méthodes de vote par scorage

- Soient m candidats. Une *méthode de vote par scorage* (scoring voting rule) est définie par :
  - Soit une séquence non-décroissante d'entiers : $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m-1}$ t.q. $s_0 < s_{m-1}$
  - Chaque individu donne s_0 points au candidat qu'il classe dernier, s_1 points à l'avant dernier, etc.
  - Le candidat ayant reçu le plus de points est élu.
- $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-2} < s_{m-1}$ est le scrutin majoritaire simple.
- $s_0 = 0, s_1 = 1, \ldots, s_{m-1} = m - 1$ est la règle de Borda.

Méthodes de vote par scorage

Toute méthode de vote par scorage satisfait :

- ▷ *Monotonie.* Si le candidat a est élu, étant donné un profil N. Si on change le profil N de façon à ce que seules les préférences sur a peuvent s'améliorer, alors a doit être élu avec ce profil modifié.
- ▷ *Séparabilité.* Si deux profils N_1 et N_2 choisissent un même candidat a dans un agenda X, alors a doit être choisi parmi X pour le profil $N_1 \cup N_2$.
- ▷ *Continuité.* Si pour un profil N_1 un candidat a est élu pour un agenda X, et que pour un profil (disjoint) N_2 un autre candidat b est élu pour le même agenda, alors il est possible de dupliquer le profil N_1 un certain nombre m de fois pour que a soit élu pour le profil $m.N_1 \cup N_2$.
- ▷ *Participation.* Si un candidat a est élu pour l'agenda X et le profil N. Alors pour le profil $N \cup \{i\}$ et pour le même agenda, soit le candidat a est élu, soit c'est un candidat b tel que bP_ia.

Aucune méthode de vote par scorage n'est Condorcet cohérente.

Règle de Borda

2: $bPaPcPd$	Scores de Borda : $a:7$, $b:6$, $c:4$, $d:1$
1: $aPcPdPb$	Le candidat a est élu

- Le gagnant de Condorcet est b.
- Si c et d se retirent de l'élection :

2: bPa	Scores de Borda : $a:1$, $b:2$
1: aPb	Le candidat b est élu

- La règle de Borda ne satisfait pas l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles.

Méthodes Condorcet cohérentes

- Méthodes qui élisent le gagnant de Condorcet si il existe.
- Généralisation de la méthode de Condorcet :
  - *Règle de Copeland.* Associer à chaque candidat a le score suivant : pour chaque autre candidat $b \neq a$, +1 si une majorité préfère a à b, -1 si une majorité préfère b à a et 0 sinon. Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Copeland.
  - *Règle de Kramer-Simpson.* Associer à chaque candidat a le score suivant : pour chaque autre candidat $b \neq a$, calculer $N(a, b)$ le nombre d'individus préférant a à b. Le score de Simpson est le minimum des $N(a, b)$. Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Simpson.

Règle de Copeland - Règle de Kramer-Simpson

5: $aPbPcPd$
4: $bPcPdPa$
3: $dPcPaPb$

▷ *Copeland*

$$
\begin{array}{lccccccc}
cop(a) = & +1 & -1 & -1 & & & & = -1 \\
cop(b) = & -1 & & & +1 & +1 & & = +1 \\
cop(c) = & & +1 & & -1 & & +1 & = +1 \\
cop(d) = & & & +1 & & -1 & -1 & = -1
\end{array}
$$

Les candidats b et c sont *“élus”*.

▷ *Kramer-Simpson*

$$
\begin{array}{lccccccc}
sim(a) = & 8 & 5 & 5 & & & & = 5 \\
sim(b) = & 4 & & & 9 & 9 & & = 4 \\
sim(c) = & & 7 & & 3 & & 9 & = 3 \\
sim(d) = & & & 7 & & 3 & 3 & = 3
\end{array}
$$

Le candidat a est élu.

Méthodes Condorcet cohérentes

- ▷ Les règles de Copeland et de Kramer-Simpson sont monotones.
- ▷ Aucune règle Condorcet cohérente ne peut satisfaire Séparabilité.
- ▷ Aucune règle Condorcet cohérente ne peut satisfaire Participation.

Méthodes de vote à plusieurs tours

- Scrutin majoritaire à deux tours
- On peut augmenter le nombre de tours (exemple: proposition de scrutin majoritaire à trois tours pour la présidentielle (4 candidats pour le second tour, puis 2 candidats pour le troisième tour)
- Vote Simple Transférable (Single Transferable Vote (STV) - Instant Runoff - vote alternatif)
  - Chaque individu indique donne son ordre de préférence P_i
  - Pour n candidats, on fait $n-1$ tours (à moins d'avoir avant une majorité stricte pour un candidat).
  - On suppose qu'à chaque tour chaque individu "vote" pour son candidat préféré (parmi ceux encore en course).
  - A chaque tour on élimine le plus mauvais candidat (celui qui a le moins de voix).

Vote Simple Transférable: Présidentielles 2007

TAB. 3 – Le dépouillement selon la méthode de Hare

Candidat	Itération (voix en % des suffrages exprimés)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
O. Besancenot	6,49	6,61	6,72	7,17	7,17	7,74	8,98	10,59	**12,42**	-	-
M.G. Buffet	2,13	2,13	2,24	2,24	2,24	2,81	**3,37**	-	-	-	-
G. Schivardi	**0,11**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
F. Bayrou	21,16	21,16	21,28	21,64	21,97	22,45	22,78	22,86	23,25	**27,45**	
J. Bové	1,68	1,68	**1,68**	-	-	-	-	-	-	-	-
D. Voynet	2,02	2,02	2,02	2,24	**2,24**	-	-	-	-	-	-
P. de Villiers	1,90	1,90	1,90	**2,02**	-	-	-	-	-	-	-
S. Royal	22,28	22,28	22,28	22,53	22,53	23,12	23,23	24,44	25,17	32	**45,85**
F. Nihous	0,45	**0,45**	-	-	-	-	-	-	-	-	-
J.M. Le Pen	6,72	6,72	6,83	6,84	7,51	7,52	7,52	**7,77**	-	-	-
A. Laguiller	2,24	2,24	2,24	2,47	2,58	**2,58**	-	-	-	-	-
N. Sarkozy	32,81	32,81	32,81	32,85	33,74	33,78	34,12	34,35	39,16	40,55	**54,15**

▷ Données issues de [Farvaque etal. 2007] sur 2 bureaux de vote de Faches-Thumesnil - soit 960 votants.

Vote Simple Transférable: méthode de Coombs

- Idée du vote simple transférable:
  - Chaque individu indique donne son ordre de préférence P_i
  - Pour n candidats, on fait $n - 1$ tours (à moins d'avoir avant une majorité stricte pour un candidat).
  - A chaque tour on élimine le plus mauvais candidat
- Interprétation usuelle du “plus mauvais”: celui qui a le moins de voix
- Autre intreprétation possible: celui qui est le plus mal classé (qui a le plus grand nombre de rejets)
  - méthode de Coombs

Vote Simple Transférable - Coombs : Présidentielles 2007

TAB. 6 – Le dépouillement selon la méthode de Coombs

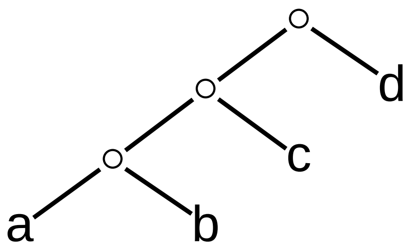
Candidat	Itération										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Nombre de bulletins où le candiddat n'a pas été classé ou classé en dernier										
O. Besancenot	345	347	351	354	357	373	403	439	**517**	-	-
M.G. Buffet	390	395	400	401	407	425	**454**	-	-	-	-
G. Schivardi	507	**522**	-	-	-	-	-	-	-	-	-
F. Bayrou	151	151	151	152	153	154	154	156	164	215	
J. Bové	430	441	455	468	**490**	-	-	-	-	-	-
D. Voynet	385	385	388	394	407	423	446	**474**	-	-	-
P. de Villiers	416	471	479	**486**	-	-	-	-	-	-	-
S. Royal	232	235	235	237	242	245	252	260	279	**452**	
F. Nihous	471	482	**490**	-	-	-	-	-	-	-	-
J.M. Le Pen	**549**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A. Laguiller	430	445	448	454	468	**494**	-	-	-	-	-
N. Sarkozy	221	265	266	268	303	309	311	314	337	395	

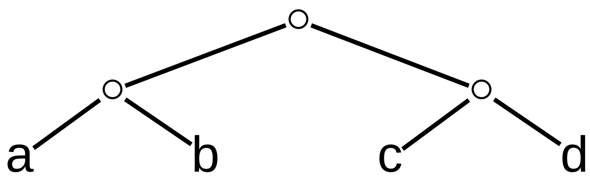
- ▷ Données issues de [Farvaque etal. 2007] sur 2 bureaux de vote de Faches-Thumesnil - soit 960 votants.

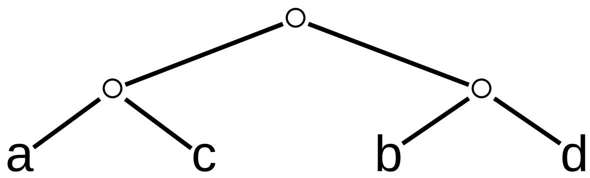
Votes par comparaisons successives

- Autre généralisation possible de Condorcet
- On sait que la comparaison de deux alternatives par la majorité est une méthode avec de bonnes propriétés
- On fait rencontrer les candidats deux à deux (suivant un ordre pré-défini: arbre)
- Chaque gagnant rencontre un autre candidat
- Le candidat élu est celui qui gagne la rencontre au sommet de l'arbre
- Si il y a un vainqueur de Condorcet, il sera élu avec cette méthode

Vote par comparisons successives







Vote par comparaisons successives

- Problème: Le résultat dépend de l'ordre des comparaisons
- Pouvoir de l'autorité qui determine l'arbre
- Manipulations possibles
- Méthode de vote des lois à l'assemblée nationale (lois + amendements successifs)

Le choix d'une méthode de vote est-il important ?

5: $aPbPcPd$
4: $aPcPbPd$
2: $dPbPaPc$
6: $dPbPcPa$
8: $cPbPaPd$
2: $dPcPbPa$

scrutin majoritaire simple : d
scrutin majoritaire à deux tours : a
règle de Borda : b
gagnant de Condorcet : c

▷ Avec un ensemble de préférences individuelles donné, la personne qui choisit la méthode de vote peut décider du résultat.

Vote par approbation: Présidentielles 2002

▷ Expérience sur 5 bureaux de vote à Orsay et sur le bureau de Gy-les-Nomains (Loiret) - soit 2597 votant (sur 3346 officiels, soit 77,6%)

▷ [Laslier et Van Der Straeten, 2002], [Laslier, le vote et la règle majoritaire 2004]

Bulletin de vote

Bruno Mégret	
Corinne Lepage	
Daniel Gluckstein	
François Bayrou	
Jacques Chirac	
Jean-Marie Le Pen	
Christiane Taubira	
Jean Saint-Josse	
Noël Mamère	
Lionel Jospin	
Christine Boutin	
Robert Hue	
Jean-Pierre Chevènement	
Alain Madelin	
Arlette Laguiller	
Olivier Besancenot	

Vote par approbation: Présidentielles 2002

- Expérience sur 5 bureaux de vote à Orsay et sur le bureau de Gy-les-Nomains (Loiret) - soit 2597 votant (sur 3346 officiels, soit 77,6%)
- [Laslier et Van Der Straeten, 2002], [Laslier, le vote et la règle majoritaire 2004]

Tableau 2 : Nombres d'assentiments par bulletin

assentiments	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
bulletins	36	287	569	783	492	258	94	40	16	6	1	1	0	1	1	0	2

Vote par approbation: Présidentielles 2002

- [Laslier et Van Der Straeten, 2002], [Laslier, le vote et la règle majoritaire 2004]

Tableau 3. Scores des candidats au scrutin expérimental et au premier tour du scrutin officiel à Gy et à Orsay

	Gy les Nonains			Orsay		
	Expérience		Officiel	Expérience		Officiel
	% des bulletins exprimés	% des assentiments	% des bulletins exprimés	% des bulletins exprimés	% des assentiments	% des bulletins exprimés
Chirac	38,2	13,2	19,6	36,2	11,4	18,8
Le Pen	32,7	11,3	19,64	11,6	3,7	8,7
Jospin	23,9	8,2	11,1	43,2	13,6	20,7
Bayrou	23,35	8,0	6,7	35,2	11,0	10,3
Laguiller	17,6	6,1	4,1	15,1	4,7	3,7
Chevènement	18,4	6,3	4,6	32,3	10,1	8,6
Mamère	18,4	6,3	4,6	30,6	9,6	8,3
Besancenot	17,0	5,9	2,8	17,7	5,5	3,1
Saint-Josse	20,3	7,0	9,6	5,8	1,8	0,7
Madelin	21,2	7,3	5,2	21,3	6,7	4,9
Hue	10,2	3,5	3,1	11,7	3,7	2,6
Mégret	17,0	5,9	2,8	6,1	1,9	1,1
Taubira	9,1	3,1	0,	20,6	6,4	3,6
Lepage	9,9	3,4	2,8	19,2	6,0	2,8
Boutin	5,8	2,0	0,8	8,1	2,5	1,4
Gluckstein	7,1	2,5	1,8	3,8	1,2	0,7
Total	290,1	100	100	318,6	100	100

Vote par approbation: Présidentielles 2002

- [Laslier et Van Der Straeten, 2002], [Laslier, le vote et la règle majoritaire 2004]

Tableau 4 : Matrice des associations de Gy les Nonains

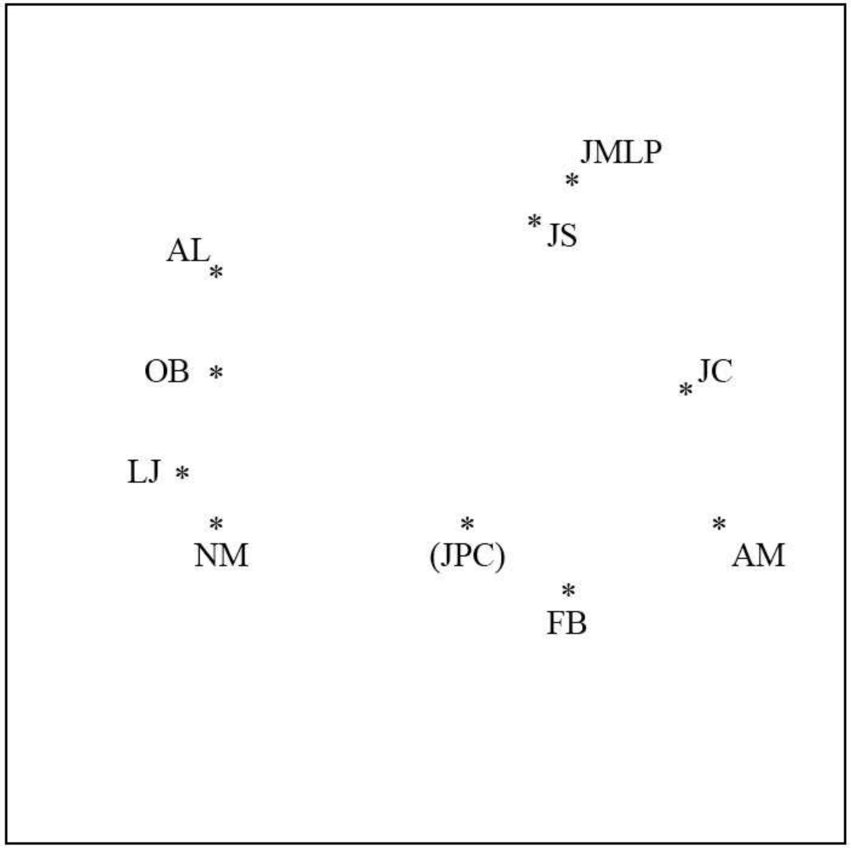
	J. C.	J.M. L P	L. J.	F. B.	A. L.	J.-P. C.	N. M.	O. B.	J. S.-J.	A. M.	R. H.	B. M.	C. T.	C. L.	C. B.	D. G.
J. C.	*139*	51	15	47	10	28	11	10	36	48	3	31	5	9	6	3
JM L P	51	*119*	10	22	18	17	9	13	21	22	5	44	3	5	4	4
L. J.	15	10	*87*	14	21	17	40	24	11	5	26	0	23	9	5	4
F. B.	47	22	14	*85*	10	25	13	9	10	33	3	13	8	14	7	2
A. L.	10	18	21	10	*64*	13	19	24	10	3	18	6	11	11	7	12
J.P. C.	28	17	17	25	13	*67*	10	11	10	19	2	7	8	11	4	3
N. M.	11	9	40	13	19	10	*67*	32	7	9	15	3	15	10	4	12
O. B.	10	13	24	9	24	11	32	*62*	10	8	16	9	16	13	3	15
J. S.J.	36	21	11	10	10	10	7	10	*74*	18	5	13	5	6	6	4
A. M.	48	22	5	33	3	19	9	8	18	*77*	2	15	4	10	6	3
R. H.	3	5	26	3	18	2	15	16	5	2	*37*	0	5	4	3	7
B. M.	31	44	0	13	6	7	3	9	13	15	0	*62*	1	2	4	4
C. T.	5	3	23	8	11	8	15	16	5	4	5	1	*33*	7	4	3
C. L.	9	5	9	14	11	11	10	13	6	10	4	2	7	*36*	5	4
C. B.	6	4	5	7	7	4	4	3	6	6	3	4	4	5	*21*	1
D. G.	3	4	4	2	12	3	12	15	4	3	7	4	3	4	1	*26*

Note : Ce tableau se lit de la manière suivante : le nombre 51 à l'intersection de la ligne Jacques Chirac et de la colonne Jean-Marie Le Pen indique que 51 participants ont donné leur assentiment simultanément à Jacques Chirac et à Jean-Marie Le Pen. Les nombres de la diagonale rappellent le nombre total d'assentiments reçus par chacun des candidats.

Vote par approbation: Présidentielles 2002

- ▷ [Laslier et Van Der Straeten, 2002], [Laslier, le vote et la règle majoritaire 2004]

Figure 3 : Représentation spatiale de 10 candidats à Gy les Nonains.



- ▷ La politique française ne se réduit pas à un axe gauche-droite
- ▷ Impossible d'utiliser l'hypothèse de préférences à simple pic (single peaked preferences)

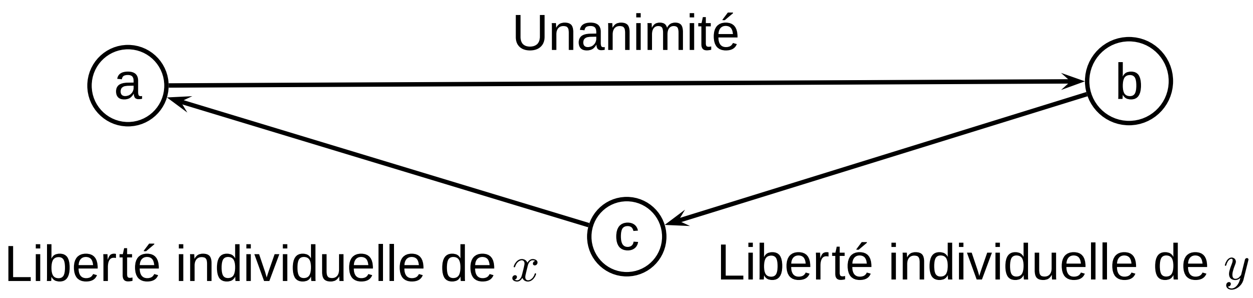
Sen: choix social et liberté individuelle

- ▷ **A. K. Sen** [Sen, 1978]. On ne peut satisfaire à la fois les propriétés d'unanimité et d'universalité et la propriété de liberté individuelle.

Sen: choix social et liberté individuelle

- 2 hommes sont échoués sur une île déserte : Monsieur x le puritain, et monsieur y le libéral. Dans leur peu de bagages il y a une revue érotique. Il y a trois alternatives possibles :
  - a : x lit la revue
  - b : y lit la revue
  - c : personne ne lit la revue

  Les préférences des deux individus sont les suivantes :
  x: $cPaPb$
  y: $aPbPc$



On manipule...

Différents moyens de manipuler une élection:

- ▷ De la part des individus:
  - ▷ Les individus peuvent mentir sur leurs préférences
- ▷ De la part des candidats:
  - ▷ On peut faire concourir des candidats fantomes
- ▷ De la part de l'autorité chargée de l'élection
  - ▷ En choisissant la méthode de vote qui "convient"
  - ▷ En découpant les circonscriptions "convenablement"

Manipulation de la part des individus

- **Théorème d'impossibilité de Gibbard-Satthertwaite**[Gibbard 1973, Satthertwaite 1975]. Toute méthode de vote surjective non dictatoriale est manipulable (ie il est préférable pour au moins un des individus de mentir sur ses préférences).
- Surjective signifie ici que n'importe quel candidat peut-etre a priori élu (i.e. il existe au moins un profil de préférence qui élit ce candidat).
- Résultat négatif très génant pour le choix social
  - Besoin de concevoir des méchanismes (mechanism design) pour faire en sorte que les individus indiquent leurs vraies préférences
  - Prix Nobel d'économie 2007: Leonid Hurwicz, Eric Maskin et Roger Myerson

Manipulation de la part des candidats

- ▷ On peut faire concourir des candidats fantome, pour par exemple enlever des voies à un adversaire.
- ▷ Exemple: scrutin majoritaire à deux tours

6: $aPcPb$	Premier tour : a : 6, b : 6, c : 5
5: $cPbPa$	Les candidats a et b vont au second tour.
6: $bPcPa$	Second tour : a : 6, b : 11
	Le candidat b est élu.

Supposons à présent que le candidat c fasse en sorte qu'un nouveau candidat b' se présente, avec des propositions proche de celles du candidat b'. Celui-ci risque donc de prendre quelques voix à b.

6: $aPcPbPb'$	
3: $cPbPb'Pa$	Premier tour : a : 6, b : 4, c : 5, b' : 2
2: $cPb'PbPa$	Les candidats a et c vont au second tour.
4: $bPb'PcPa$	Second tour : a : 6, c : 11
2: $b'PbPcPa$	Le candidat c est élu.

Manipulation de la part de l'autorité

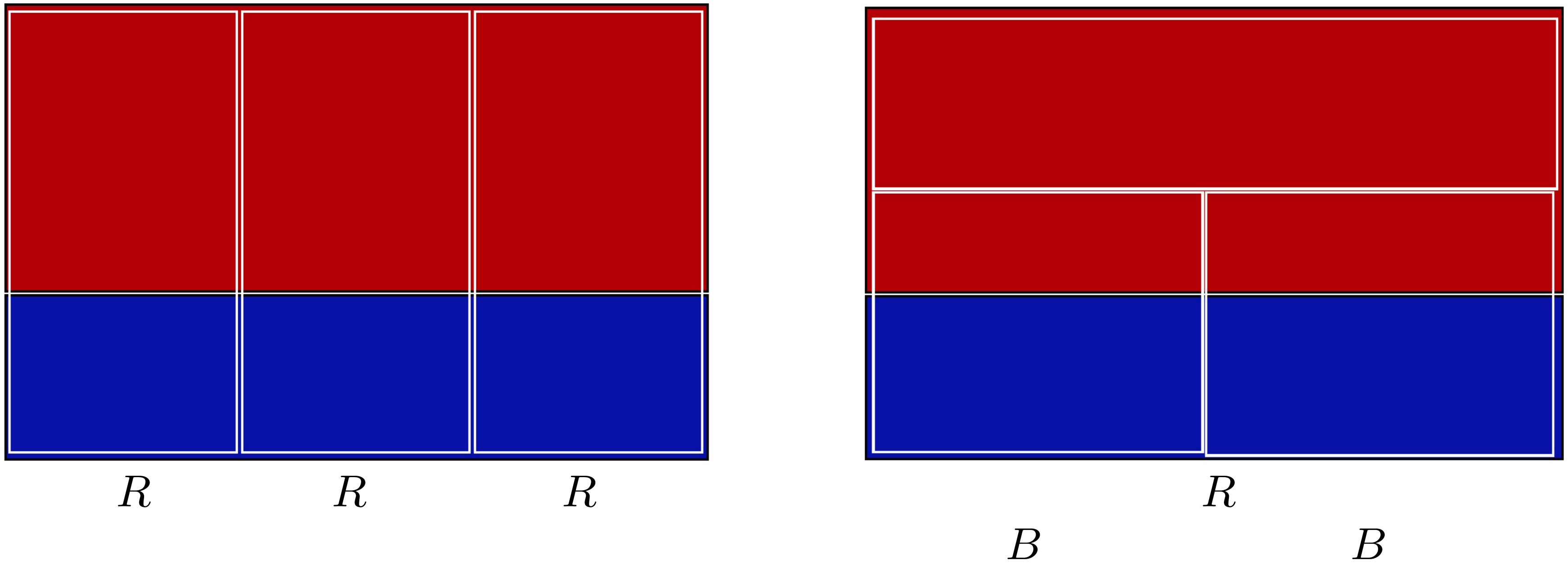
- ▷ En choisissant la méthode de vote

5: $aPbPcPd$	
4: $aPcPbPd$	scrutin majoritaire simple : d
2: $dPbPaPc$	scrutin majoritaire à deux tours : a
6: $dPbPcPa$	règle de Borda : b
8: $cPbPaPd$	gagnant de Condorcet : c
2: $dPcPbPa$	

- ▷ Avec un ensemble de préférences individuelles donné, la personne qui choisit la méthode de vote peut décider du résultat.

Manipulation de la part de l'autorité

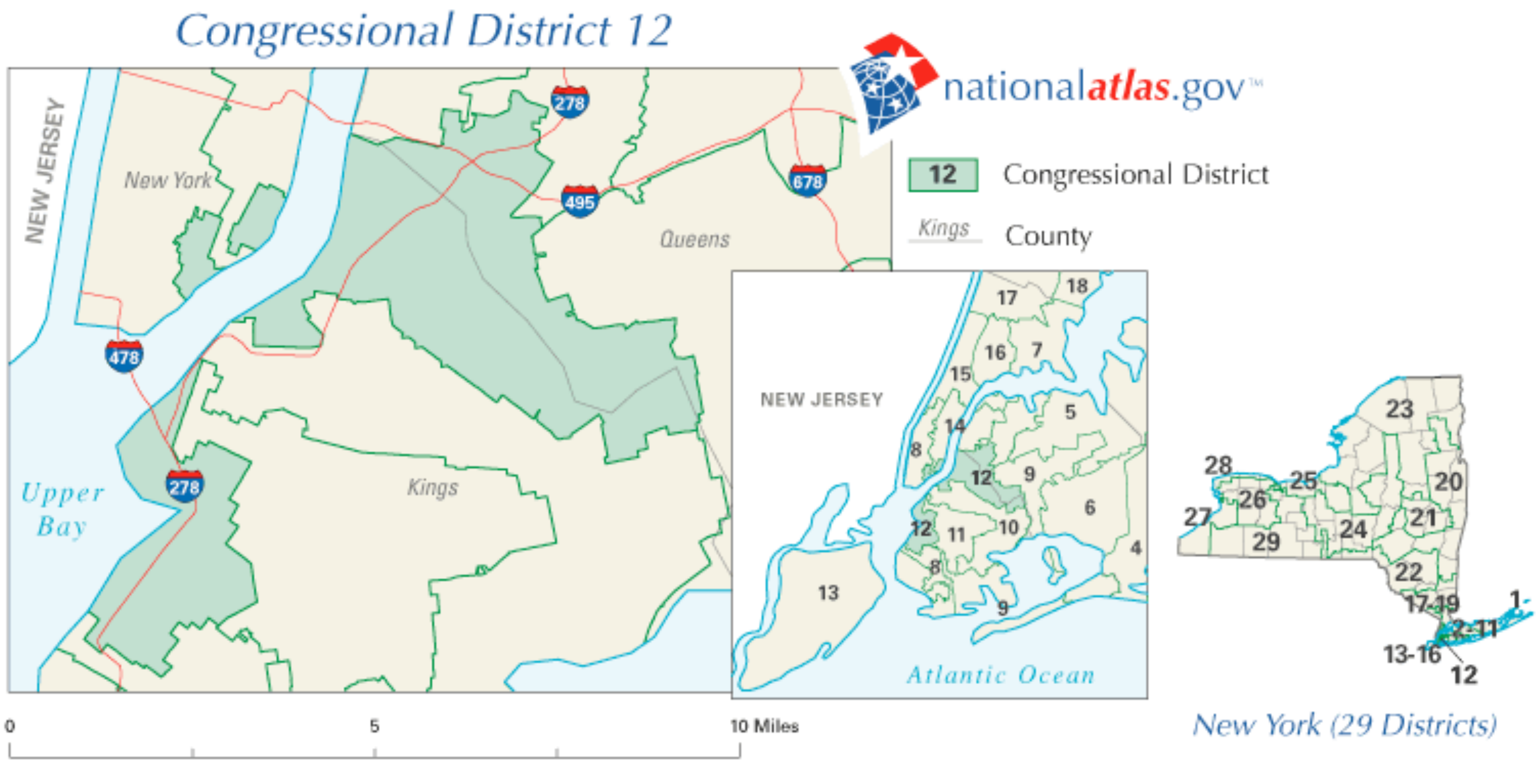
- Découpage des circonscriptions électorales



- Idée pour avantager le parti B: regrouper les electeurs du parti R dans des circonscriptions où le parti aura une très large majorité, et faire en sorte que le parti B ait la majorité (même très faible) dans les autres circonscriptions.

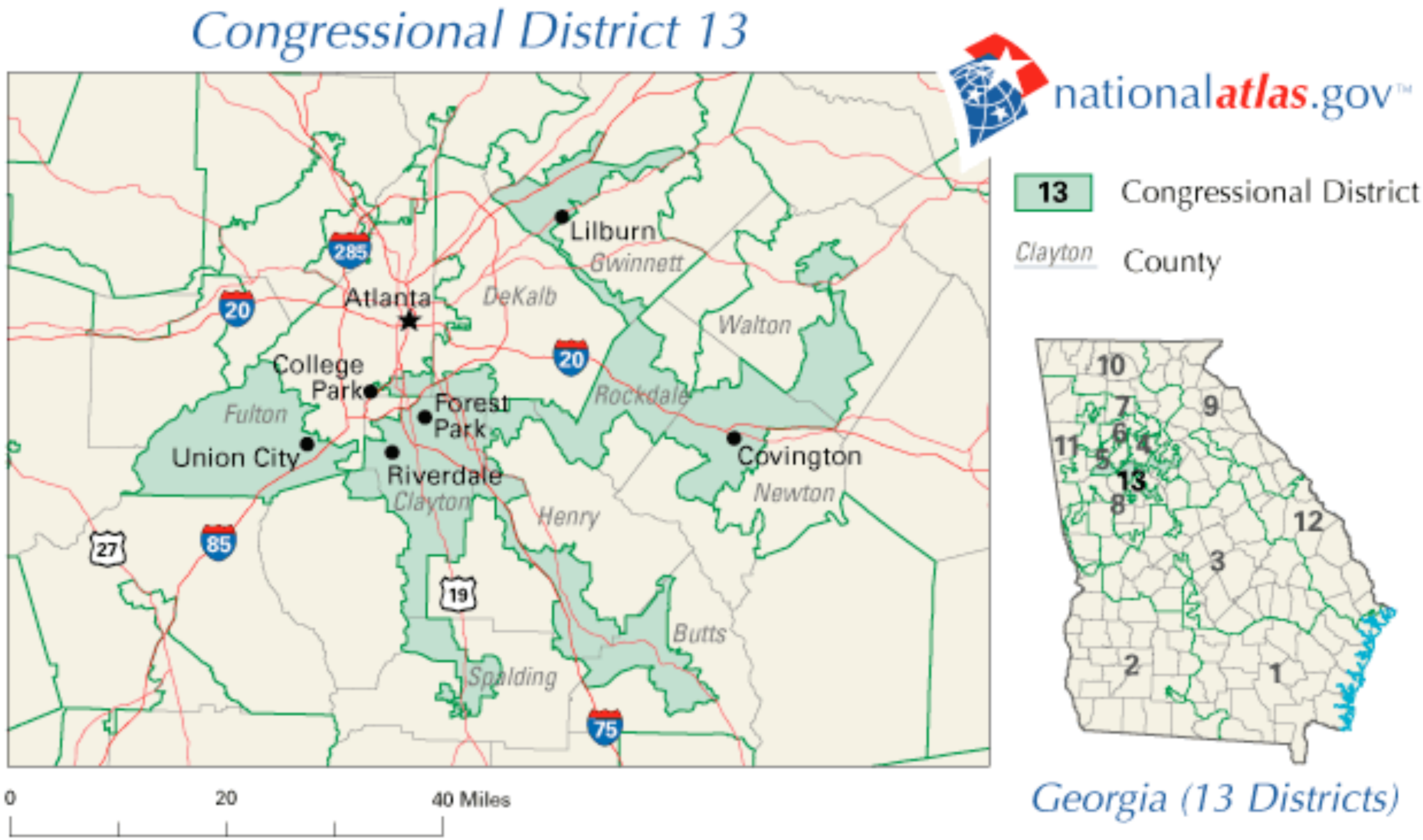
Découpage des circonscriptions electorales

- Circonscriptions pour l'élection des membres du congrès des U.S.A
- `http://www.nationalatlas.gov/printable/congress.html`



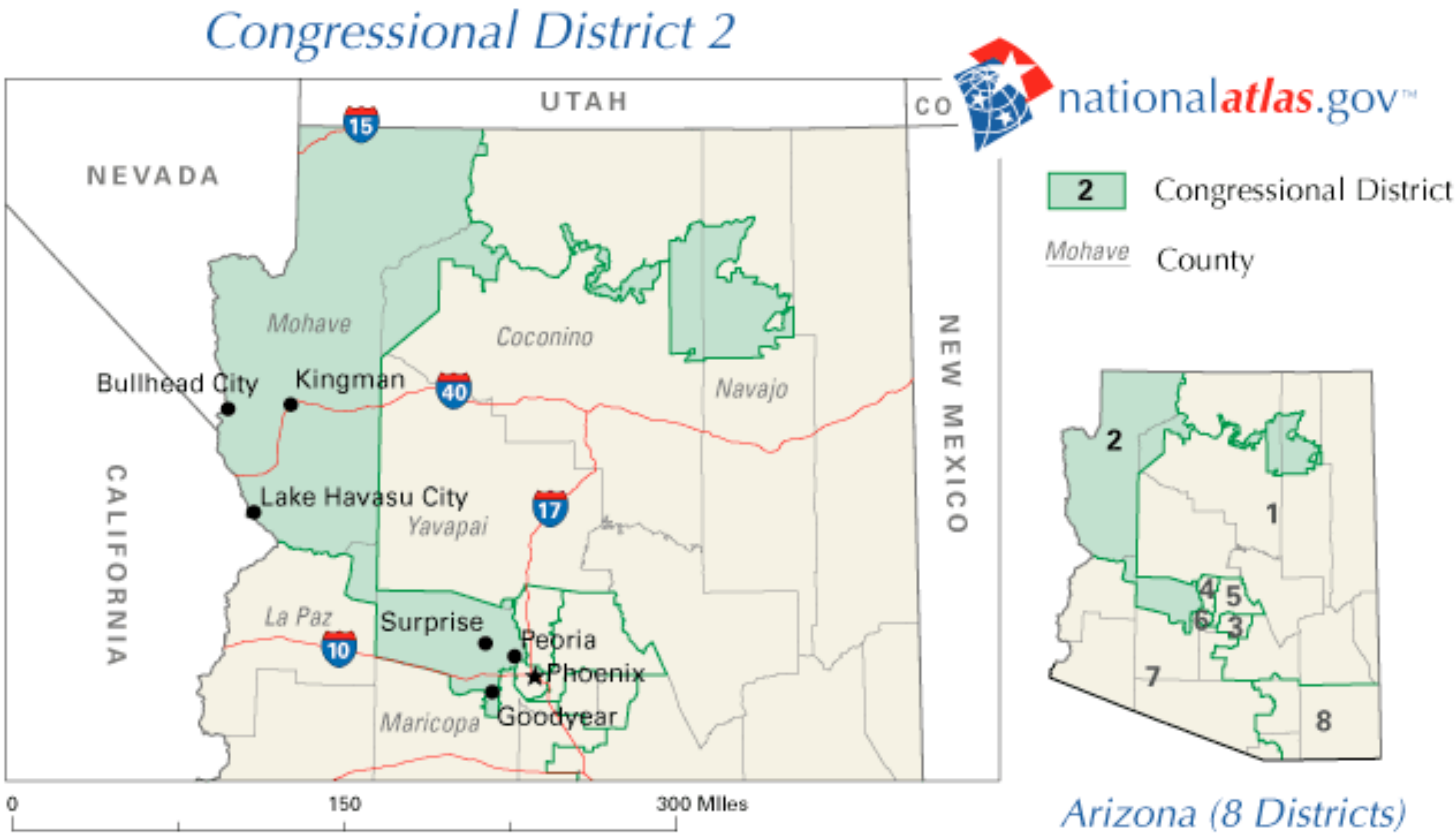
Découpage des circonscriptions electorales

- ▷ Circonscriptions pour l'élection des membres du congrès des U.S.A
- ▷ `http://www.nationalatlas.gov/printable/congress.html`



Découpage des circonscriptions electorales

- Circonscriptions pour l'élection des membres du congrès des U.S.A
- `http://www.nationalatlas.gov/printable/congress.html`



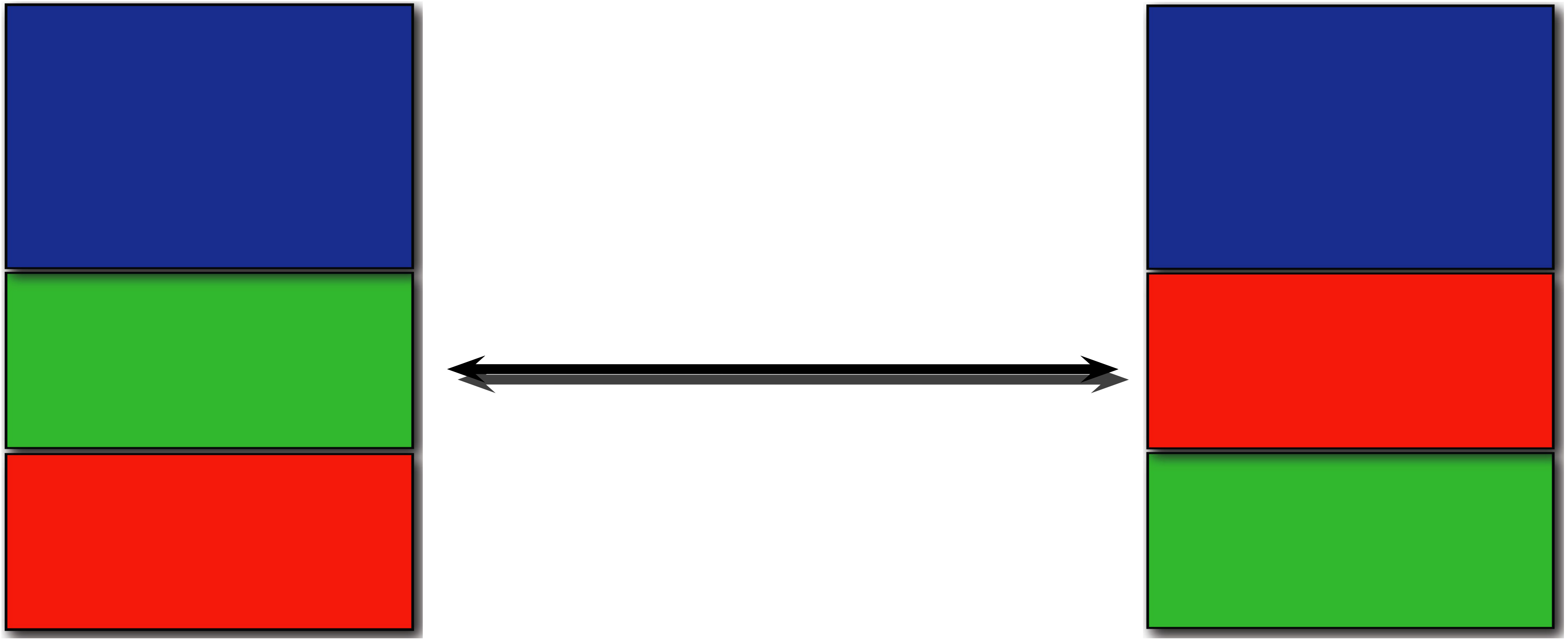
Découpage des circonscriptions electorales

- Comment des individus peuvent manipuler dans le cadre de circonscriptions électorales ?
  - En déménageant !
    - difficile de déménager pour une élection...
  - Solution:
    - Déménager virtuellement !
    - Campagne 2005 au Royaume-Uni (Chambre des communes (MP))
      - `www.tacticalvoter.net`
      - `www.votedorset.net`
      - ...

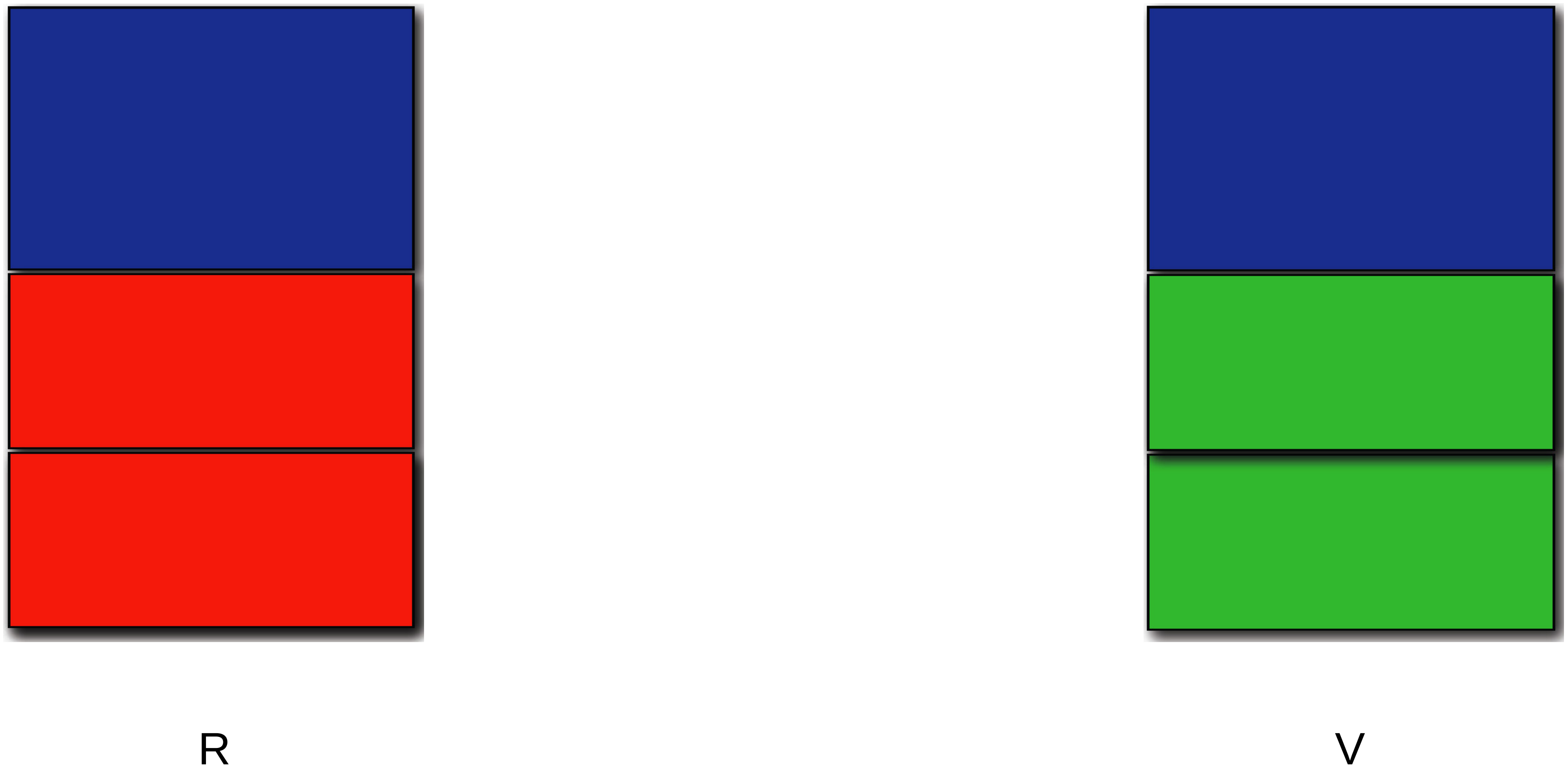
Echange de vote

B B

Echange de vote



Echange de vote



Paradoxes des élections

- ▷ Paradoxe des élections multiples
- ▷ Paradoxe d’Ostrogorski
- ▷ Paradoxe doctrinal (doctrinal paradox)

Paradoxe des élections multiples

Supposons que l'on doit voter à propos de 3 décisions.
Par exemple disons que l'on doit voter pour savoir si on doit construire

1. un court de tennis
2. un parking
3. une piscine

On notera OON le choix Oui pour 1, Oui pour 2, et Non pour 3.
Considérons à présent les préférences suivantes:

ONN **P** OON **P** ONO **P** OOO **P** NNN **P** NON **P** NNO **P** NOO
NON **P** OON **P** NOO **P** OOO **P** NNN **P** ONN **P** NNO **P** ONO
NNO **P** NOO **P** ONO **P** OOO **P** NNN **P** NON **P** ONN **P** OON

- ▷ Si on effectue un vote majoritaire sur chaque décision, on obtient NNN comme résultat
  - ▷ On a toujours deux individus qui préfèrent N à O
- ▷ Mais il y a unanimité sur OOO **P** NNN !

Paradoxe d'Ostrogorski

Supposons que l'on doit voter à propos de 3 décisions.
Supposons qu'il y ait 2 partis politiques avec qui proposent des réponses différentes à propos des 3 décisions.

	1	2	3	$vote$
20%	D	D	G	D
20%	D	G	D	D
20%	G	D	D	D
40%	G	G	G	G

Supposons également que chaque électeur vote pour le parti avec lequel il est d'accord sur le plus grand nombre de questions.

- ▷ Il existe une majorité (60%) pour le parti D.
- ▷ Mais pour chaque question une majorité (60%) préfère la solution du parti G !

Paradoxe doctrinal

Supposons que l'on doit voter à propos de 3 décisions, et que ces trois décisions ne soient pas indépendantes. Par exemple disons que l'on doit voter pour savoir si:

A. on augmente le budget pour l'enseignement

B. on augmente le budget pour la santé

C. on augmente les impots

Et supposons que l'on n'a besoin d'augmenter les impots que si on augmente à la fois le budget de l'enseignement et celui de la santé ($C \leftrightarrow A \wedge B$).

	A	B	C
$votant1$	O	N	N
$votant2$	N	O	N
$votant3$	O	O	O
	O	O	N

- ▷ Si on vote séparément à propos des 3 décisions, on obtient:
  - ▷ Oui pour A
  - ▷ Oui pour B
  - ▷ Non pour C
- ▷ Impossible !
- ▷ Importance de la question posée (prémisses/conclusion)
- ▷ Pouvoir de l'autorité qui décide de la formulation des questions (Manipulation)

Représentativité dans les assemblées

- Supposons que l'on ait une union rassemblant trois pays dont les populations sont:
  1. 90 millions
  2. 20 millions
  3. 90 millions
- On doit élire une assemblée de 20 personnes.
- Question: Combien de sièges réserve-t-on aux représentants des différents pays ?
- Si on choisit une représentation proportionnelle aux populations, on aura donc une assemblée avec 9 - 2 - 9 représentants.
- Pouvoir de ces représentants ?
- La majorité simple est de 11 voix
- Aucun pays ne l'a à lui seul
- Toute coalition de deux pays atteint cette majorité
- Les deux représentants du pays 2 ont donc autant de pouvoir que les neufs représentants des pays 1 et 3.
- Indices de pouvoir (Shapley-Shubik - Banzhaf)
  - Calculent le nombre de fois où un représentant est décisif.

Gouvernance par referendum

- ▷ Problèmes avec la démocratie indirecte
- ▷ Solution: démocratie directe
- ▷ Le président propose les lois par referendum. L'ensemble des citoyens votent pour ou contre chaque loi.
- ▷ Question: meilleur système démocratique ?
- ▷ Réponse: Non ! Système quasi-dictatorial.
  - ▷ Le président à (presque) tous les pouvoirs, i.e. étant donnée une situation initiale, il peut trouver une séquence de lois lui permettant d'atteindre quasiment toutes les situations possibles !
  - ▷ Supposons que le pays comporte 9 citoyens (le président étant le citoyen 1), avec les revenus suivants $[30, 50, 20, 20, 20, 10, 10, 10, 10]$
  - ▷ Est-ce que le président peut atteindre la situation $[170, 10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$?
  - ▷ Pas en une seule fois: 1 voix pour, 8 contre
  - ▷ Mais c'est possible si il fait cela progressivement.

Conclusion

- Beaucoup de méthodes de vote différentes
  - Alternatives à la majorité simple
  - Au moins aussi raisonnable
- Théorème d'impossibilité d'Arrow
  - Pas de méthode parfaite
  - Nécessité d'étudier les propriétés de la méthode que l'on choisit
- Beaucoup de propriétés souhaitables
- Beaucoup de possibilités de manipulation
- Démocratie $\neq$ Vote

Beaucoup d'autres questions...

- ▷ Construction de biens publics
- ▷ Problèmes de partage
- ▷ Représentativité dans les institutions (indices de puissance)
- ▷ Problèmes d'équité (justice sociale)
- ▷ ...

Bibliographie

- ▷ K. J. Arrow. **“Social Choice and Individual Values”**. Second Edition. Wiley. 1963.
- ▷ A. K Sen. **“Collective Choice and Social Welfare”**. 1970.
- ▷ H. Moulin. **“Axioms of Cooperative Decision Making”**. Cambridge University Press. 1988
- ▷ J. S. Kelly. **“Arrow’s Impossibility Theorems”**. Academic Press. 1978.
- ▷ J. S. Kelly. **“Social Choice Theory: An Introduction”**. Springer Verlag. 1988.
- ▷ D. Bouyssou, P. Perny. **“Aide multicritère à la décision et théorie du choix social**. Nouvelles de la Science et des Technologie, 15. p 61-72. 1997. (disponible sur le web).
- ▷ J. F. Laslier. **“Le vote et la règle majoritaire”**. CNRS Editions. 2004.
- ▷ S. J. Brams, P. C. Fishburn. **“Approval Voting”**. Springer. (1983) 2007 (2eme édition).

Preuve du théorème d'Arrow

Nous avons d'abord besoin de la définition suivante :

Définition. Un sous-ensemble d'individus V du profil N est dit *décisif pour* (a, b) si lorsque $\forall i \in V\ aP_ib$, alors aPb. C'est-à-dire que si tous les individus de N préfèrent strictement le candidat a au candidat b, alors la société dans son ensemble préférera strictement a à b, quelles que soient les préférences des individus de $N \setminus V$.

Remarque. En utilisant la propriété d'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, il est facile de voir que la définition précédente est équivalente à: N est décisif pour (a, b) si lorsque $\forall i \in V\ aP_ib$ et $\forall j \in N \setminus V bP_j a$, alors aPb. C'est-à-dire que si tous les individus de N préfèrent strictement le candidat a au candidat b et que tous les autres individus préfèrent strictement b à a, alors la société dans son ensemble préférera strictement a à b.

Définition. On appelle ensemble décisif minimal un ensemble $V \subseteq N$ qui est décisif pour une paire (a, b) quelconque et tel que pour toute paire, tout sous-ensemble strict de V n'est pas décisif pour cette paire.

Remarque. Un tel ensemble existe toujours quel que soit le profil N puisque d'après la propriété d'Unanimité l'ensemble N est décisif pour toute paire (a, b).

Remarque. Pour que le théorème d'Arrow s'applique, il faut supposer qu'il y ait au moins 3 candidats (nous avons vu que pour 2 candidats, il n'y avait pas de problème) et qu'il y ait deux individus (ce qui est un minimum lorsque l'on veut agréger). Donc dans les preuves, on peut toujours supposer que l'on a au moins 3 candidats différents.

Preuve du théorème d'Arrow

Lemme. Si V est décisif pour (a,b), alors V est décisif pour toute paire de candidats.

Preuve : Soit le profil suivant (la propriété d'Universalité nous permet de choisir un profil quelconque) :

$$\begin{array}{rcl} V & : & cPaPb \\ N \setminus V & : & bPcPa \end{array}$$

Puisque V est décisif pour (a,b), on a aPb. D'un autre coté, par Unanimité on a cPa. Donc par Transitivité, on a cPb. Et par l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, on a que la préférence globale entre c et b ne dépend pas des autres candidats (en particulier de a). Donc puisque l'on a $\forall i \in V cP_i b$ et $\forall j \in N \setminus V bP_i c$, et que l'on vient de montrer que cPb, cela veut dire que V est décisif pour (c,b) quel que soit c.
De même si on considère le profil :

$$\begin{array}{rcl} V & : & aPbPc \\ N \setminus V & : & bPcPa \end{array}$$

Puisque V est décisif pour (a,b), on a aPb. D'un autre coté, par Unanimité on a bPc. Donc par Transitivité, on a aPc. Donc V est décisif pour (a,c) quel que soit c.
Donc quel que soit la paire de candidats (c,d), l'ensemble V est décisif pour cette paire. $\square$

Preuve du théorème d'Arrow

Lemme. Tout ensemble décisif minimal est un singleton.

Preuve : Soit un ensemble décisif minimal V non singleton. On peut donc partitionner cet ensemble en deux sous-ensembles (non-vides) V_1 et V_2. Soit le profil suivant (la propriété d'Universalité nous permet de choisir un profil quelconque) :

$$\begin{array}{rcl} V_1 & : & aPbPc \\ V_2 & : & bPcPa \\ N \setminus V & : & cPaPb \end{array}$$

Comme V est décisif, on a bPc.
Si aPc, alors V_1 est décisif pour (a, c), donc V_1 est un sous-ensemble décisif de V. Ce qui contredit l'hypothèse que V soit un ensemble décisif minimal.
Donc cRa, mais par Transitivité cela donne bPa, donc V_2 est décisif pour (b, a), donc V_2 est un sous-ensemble décisif de V. Contradiction. □

Théorème d'impossibilité d'Arrow [Arrow, 1951]. Aucune règle de choix social ne satisfait l'Universalité, l'Unanimité, l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles, la Transitivité et l'Absence de Dictateur.

Preuve : Pour tout profil N, ce profil est décisif pour tout couple (a, b). Il existe donc un sous-ensemble de N minimal décisif. D'après le lemme précédent cet ensemble est un singleton (dictateur). □