Introduction à la Théorie des Jeux

Sébastien Konieczny

konieczny@cril.univ-artois.fr

CRIL-CNRS

Université d'Artois - Lens

Théorie des Jeux

“Définition” **La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l’interaction stratégique d’un groupe d’agents rationnels poursuivant des buts qui leur sont propres.**

Théorie des Jeux

“Définition” **La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l’interaction stratégique d’un groupe d’agents rationnels poursuivant des buts qui leur sont propres.**

- ▷ groupe
- ▷ interaction
- ▷ stratégique
- ▷ rationnels

Théorie des Jeux

“Définition” **La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l’interaction stratégique d’un groupe d’agents rationnels poursuivant des buts qui leur sont propres.**

- ▷ groupe
- ▷ interaction
- ▷ stratégique
- ▷ rationnels

Normatif vs Descriptif

A quoi sert la théorie des jeux ?

- Jeux de société (échecs, dames, go, ...), Jeux de cartes (bridge, poker, ...)
- Dois-je travailler ou faire semblant ?
- Est-ce que j'écoute de la musique ce soir ?
- Enchères, vote
- Comportement animal
- Stratégies militaires/économiques
- Partages de ressource (marchandage)
- Est-ce qu'une entreprise doit exploiter ses salariés ?
- Est-ce qu'une entreprise doit entrer sur un marché ou pas ?
- Faut-il contrôler les déclarations d'impots sur le revenu ?
- ...

Un peu d'histoire...

- Cournot (1838), Borel (1921)
- Zermelo (1913)
- Von Neumann (1928)
- **"Theory of Games and Economic Behaviour"**, Von Neumann et Morgenstern (1944)
- Nash (1950)
- Selten (1965), Harsanyi (1967)

Bibliographie

- ▷ M. Yildizoglu. **“Introduction à la théorie des jeux”**. Dunod. 2003.
- ▷ D. Kreps. **“Théorie des jeux et modélisation économique”**. Dunod. 1990.
- ▷ D. Luce, H. Raiffa. **“Games and Decision”**. Wiley. 1957.
- ▷ P. K. Dutta. **“Strategies and Games”**. MIT Press. 1999.
- ▷ D. Fudenberg, J. Tirole. **“Game Theory”**. MIT Press. 1991.
- ▷ J. Von Neumann, O. Morgenstern. **“Theory of Game and Economic Behavior”**. Princeton University Press. 1944.

Terminologie - Une petite taxonomie...

- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à information complète / Jeux à information incomplète
- Jeux à information parfaite / Jeux à information imparfaite
- Jeux coopératifs / Jeux non-coopératifs
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs

Plan du cours

- ▷ Introduction - Formalisation d’un jeu - Jeu sous forme normale - Jeu sous forme extensive - Stratégie
- ▷ Concepts de solution - Stratégies dominantes
- ▷ Equilibre de Nash - Critère de Pareto - Niveau de sécurité - Stratégies mixtes
- ▷ Résolution par chainage arrière - Menaces crédibles - Equilibres parfaits en sous-jeux
- ▷ Jeux à somme nulle
- ▷ Jeux répétés - Dilemme itéré du prisonnier
- ▷ Jeux à information incomplète
- ▷ Jeux coopératifs - Marchandage

Formalisation d'un Jeu

Qu'est-ce qu'un jeu ?

- **Qui?** Joueurs
- **Quoi?** Coups (actions/choix) - Stratégies
- **Quand?** Déroulement du jeu
- **Combien?** Que rapporte chaque issue aux différents joueurs ?

Autres informations importantes:

- Information
- Répétition

Jeux sous forme stratégique - Exemple

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

Utilité

- Une hypothèse de base de la théorie des jeux est de considérer que les agents sont rationnels, c'est-à-dire qu'ils tentent d'arriver à la situation la **meilleure** pour eux.
- On appelle **Utilité** la mesure de chaque situation aux yeux de l'agent.
- L' **Utilité** n'est ni une mesure du gain matériel, monétaire, etc. mais une mesure subjective du contentement de l'agent.

Utilité

- Une hypothèse de base de la théorie des jeux est de considérer que les agents sont rationnels, c'est-à-dire qu'ils tentent d'arriver à la situation la **meilleure** pour eux.
- On appelle **Utilité** la mesure de chaque situation aux yeux de l'agent.
- L' **Utilité** n'est ni une mesure du gain matériel, monétaire, etc. mais une mesure subjective du contentement de l'agent.
- Utiliser une fonction d'utilité pour définir les préférences de l'agent ne suppose pas que l'agent utilise cette fonction, mais qu'il raisonne conformément à un ensemble de conditions de rationalité. Von Neuman et Morgenstern (1944), Savage (1954).

Jeux sous forme stratégique

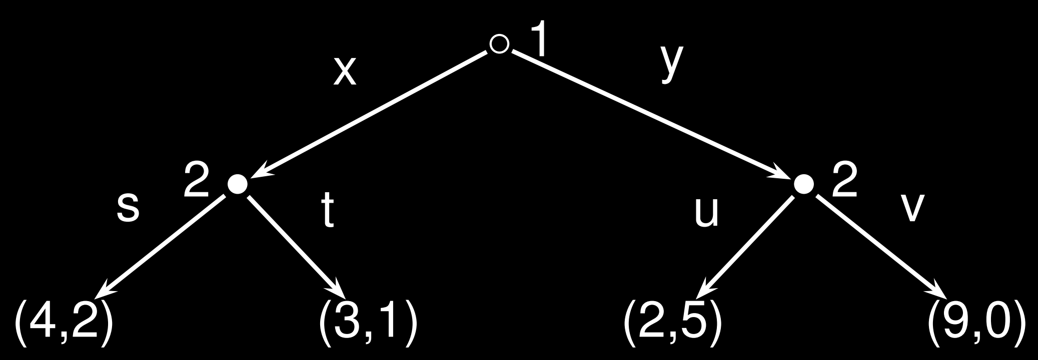
Un jeu sous forme stratégique est défini par :

- ▷ un ensemble $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ de joueurs
- ▷ pour chaque joueur i un ensemble de stratégies $S_i = \{s_1, \ldots, s_{n_i}\}$
- ▷ pour chaque joueur i une fonction de valuation $\mu_i : S_1 \times \ldots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à chaque ensemble de stratégies associe les gains du joueur i.

Notations :

- ▷ On notera s un profil de stratégies $\{s_1, \ldots, s_n\}$ où $\forall i \; s_i \in S_i$.
- ▷ On note s_{-i} le profil s des stratégies autres que celles du joueur i : $s_{-i} = \{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}$.
- ▷ On note S l'espace des stratégies, ie : $S = \times_{i=1}^{n} S_i$

Jeux sous forme extensive - Exemple

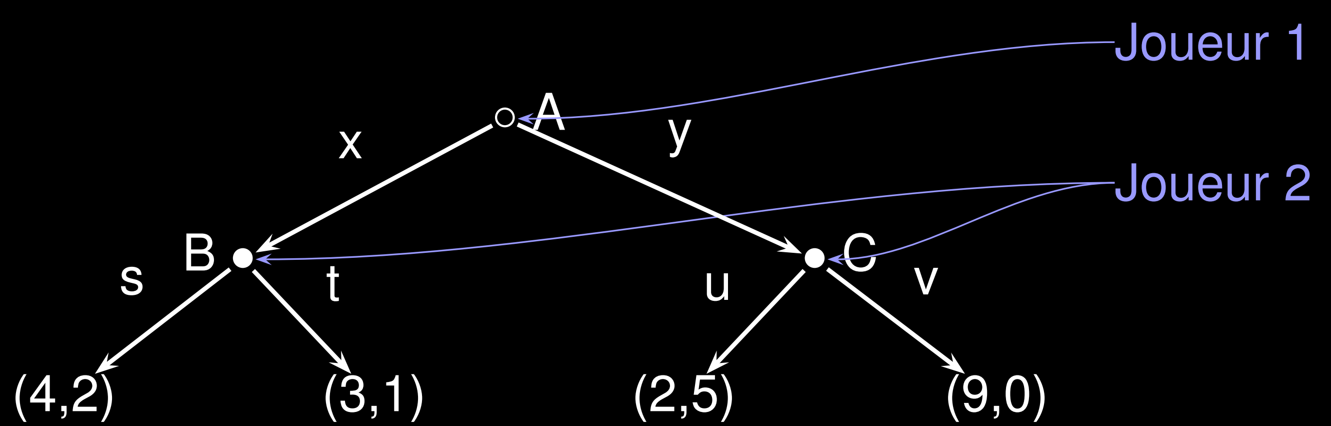


Jeux sous forme extensive

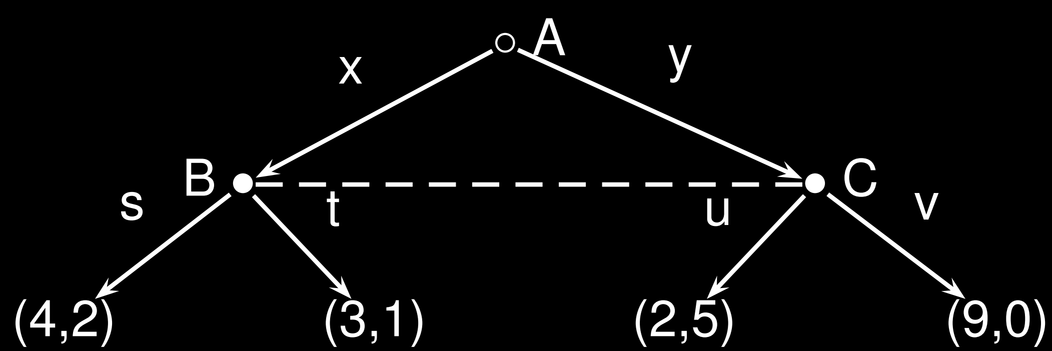
Un jeu sous forme extensive est défini par :

- ▷ un ensemble $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ de joueurs
- ▷ un arbre fini composé de :
  - ▷ un ensemble de noeuds $\{A, B, C, \ldots\}$ représentant les coups
  - ▷ un ensemble de branches $\{x, y, z, \ldots\}$ représentant les alternatives à chaque coup
- ▷ une fonction de nommage qui indique à chaque noeud quel est le joueur qui doit jouer
- ▷ une fonction de valuation qui associe à chaque noeud terminal un vecteur de nombres représentant les gains de chacun des joueurs
- ▷ une partition des noeuds en un ensemble d'**ensembles d'informations** représentant les croyances (imparfaites) des joueurs

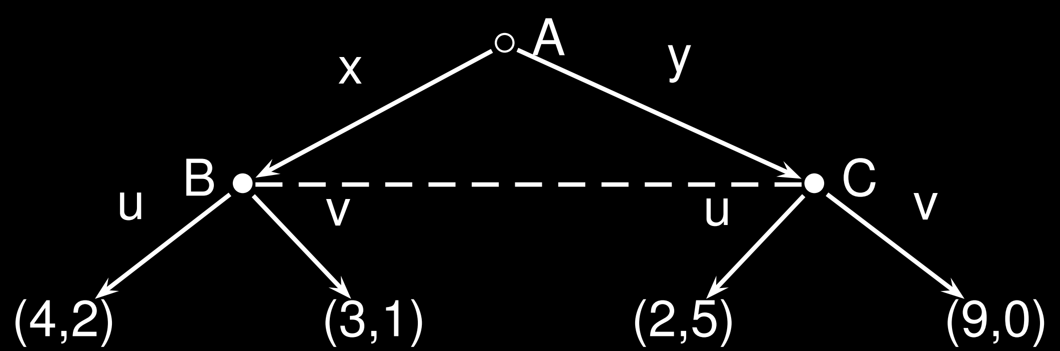
Jeux sous forme extensive - Ensemble d’informations



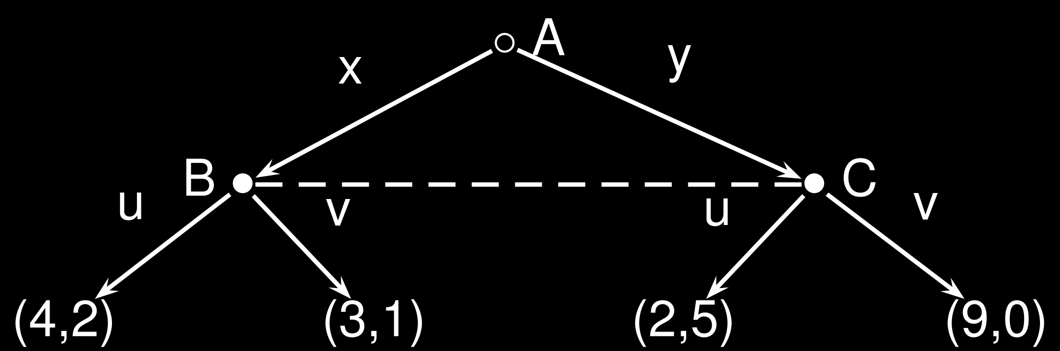
Jeux sous forme extensive - Ensemble d'informations



Jeux sous forme extensive - Ensemble d'informations



Jeux sous forme extensive - Ensemble d'informations



- Ensembles d'information : $\{A\}$ et $\{B, C\}$
- Coups simultanés
- Incertitude (croyances)

Relation entre formes stratégique et extensive

- A chaque jeu sous forme extensive correspond un jeu sous forme stratégique dans lequel les joueurs choisissent simultanément les stratégies qu'ils mettront en oeuvre.
- En revanche, un jeu sous forme stratégique peut correspondre à plusieurs jeux sous forme extensive différents.

Relation entre formes stratégique et extensive

- A chaque jeu sous forme extensive correspond un jeu sous forme stratégique dans lequel les joueurs choisissent simultanément les stratégies qu'ils mettront en oeuvre.
- En revanche, un jeu sous forme stratégique peut correspondre à plusieurs jeux sous forme extensive différents.
- Une stratégie est la spécification complète du comportement d'un joueur dans n'importe quelle situation (dans un jeu sous forme extensive cela signifie donc pour chaque ensemble d'information où c'est à ce joueur de jouer).
  - Algorithme

Stratégie

▷ Une **stratégie pure** du joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par s_i une stratégie pure de ce joueur.

Relation entre formes stratégique et extensive

Forme stratégique :

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

Relation entre formes stratégique et extensive

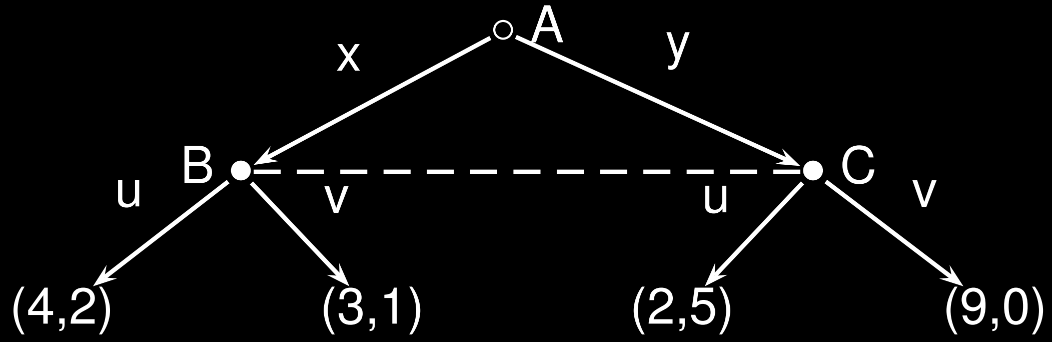
Forme stratégique :

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

Forme extensive :



Relation entre formes stratégique et extensive

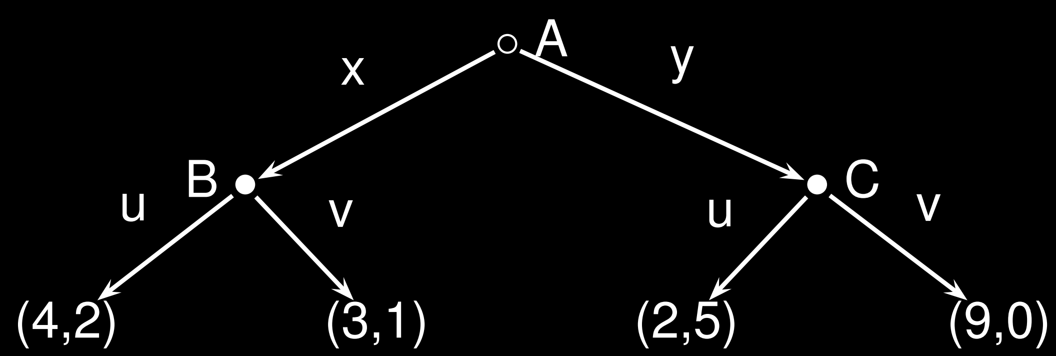
Joueur 2

Forme stratégique :

Joueur 1

	s1	s2	s3	s4
x	4,2	4,2	3,1	3,1
y	2,5	9,0	2,5	9,0

Forme extensive :



s1: u si x, u si y   s2: u si x, v si y

s3: v si x, u si y   s4: v si x, v si y

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

- Une stratégie s_i est (strictement) dominée pour le joueur i si il existe une stratégie ${s_i}'$ telle que pour tous les profils s_{-i}

$$\mu_i({s_i}', s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i})$$

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

- Une stratégie s_i est faiblement dominée pour le joueur i si il existe une stratégie ${s_i}'$ telle que pour tous les profils s_{-i}

$$\mu_i({s_i}', s_{-i}) \geq \mu_i(s_i, s_{-i})$$

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Elimination de stratégies dominées

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,3

Elimination de stratégies dominées

- ▷ Un jeu est dit résolvable par élimination itérative des stratégies dominées, si on obtient un unique profil en éliminant successivement des stratégies (strictement) dominées.
- ▷ Les profils obtenus aprés élimination itérative des stratégies (*strictement*) dominées (EISD) ne dépendent pas de l'ordre choisi pour l'élimination des stratégies.
- ▷ Par contre, on peut obtenir des profils différents lorsque l'on choisit des ordres différents pour l'élimination itérative de stratégies *faiblement* dominées (EISfD).
- ▷ Les résultats obtenus par EISD sont donc plus robustes que ceux obtenus par EISfD.
- ▷ Problème majeur de cette méthode: tous les jeux ne sont pas résolvable par EISD !

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Equilibre de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

- ▷ La notion d'**équilibre de Nash** est une situation telle qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier (seul) de la situation obtenue.
- ▷ Un **équilibre de Nash** est un profil de stratégies $s^* = \{s_1^*, \ldots, s_n^*\}$ tel que pour tout joueur i, pour toute stratégie $s' \in \mathcal{S}_i$:

$$\mu_i(s_1^*, s_{-i}^*) \geq \mu_i(s', s_{-i}^*)$$

Equilibre de Nash et fonction de meilleure réponse

- La fonction de meilleure réponse du joueur i est la fonction B_i qui associe à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs s_{-i} les stratégies du joueur i qui maximise son utilité:

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \text{ t.q. } \mu_i(s_i, s_{-i}) \geq \mu_i(s'_i, s_{-i}) \text{ pour tout } s'_i \in S_i\}$$

Equilibre de Nash et fonction de meilleure réponse

- La fonction de meilleure réponse du joueur i est la fonction B_i qui associe à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs s_{-i} les stratégies du joueur i qui maximise son utilité:

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \text{ t.q. } \mu_i(s_i, s_{-i}) \geq \mu_i(s'_i, s_{-i}) \text{ pour tout } s'_i \in S_i\}$$

- Un équilibre de Nash est un profil s^* tel que la stratégie du joueur i est une meilleure réponse:

$$s^*_i \in B_i(s^*_{-i}) \text{ pour tout } i \in N$$

Equilibre de Nash: Propriétés

- Un profil (unique) obtenu par élimination itérative de stratégies (strictement) dominées (EISD) est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).

Equilibre de Nash: Propriétés

- Un profil (unique) obtenu par élimination itérative de stratégies (strictement) dominées (EISD) est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).
- Un jeu (en stratégies pures) peut avoir plusieurs équilibres de Nash, mais il peut aussi n'en avoir aucun !

Equilibre de Nash: Propriétés

- Un profil (unique) obtenu par élimination itérative de stratégies (strictement) dominées (EISD) est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).
- Un jeu (en stratégies pures) peut avoir plusieurs équilibres de Nash, mais il peut aussi n'en avoir aucun !
- Question: comment choisir un équilibre particulier lorsqu'il y en a plusieurs ?

Equilibre de Nash: Propriétés

- Un profil (unique) obtenu par élimination itérative de stratégies (strictement) dominées (EISD) est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).
- Un jeu (en stratégies pures) peut avoir plusieurs équilibres de Nash, mais il peut aussi n'en avoir aucun !
- Question: comment choisir un équilibre particulier lorsqu'il y en a plusieurs ?
- Deux équilibres de Nash $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ et $s'^* = (s_i'^*, s_{-i}'^*)$ sont *interchangeables* si pour tout i $(s_i^*, s_{-i}'^*)$ et $(s_i'^*, s_{-i}^*)$ sont aussi des équilibres de Nash.

Equilibre de Nash: Propriétés

- Un profil (unique) obtenu par élimination itérative de stratégies (strictement) dominées (EISD) est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).
- Un jeu (en stratégies pures) peut avoir plusieurs équilibres de Nash, mais il peut aussi n'en avoir aucun !
- Question: comment choisir un équilibre particulier lorsqu'il y en a plusieurs ?
- Deux équilibres de Nash $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ et $s'^* = (s_i'^*, s_{-i}'^*)$ sont *interchangeables* si pour tout i $(s_i^*, s_{-i}'^*)$ et $(s_i'^*, s_{-i}^*)$ sont aussi des équilibres de Nash.
- Deux équilibres de Nash s^* et s'^* sont *équivalents* si ils donnent la même utilité à tous les joueurs, i.e. pour tout $i \in N$ $\mu_i(s^*) = \mu_i(s'^*)$.

Critère de Pareto

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,4	3,1
y	2,3	7,5

Critère de Pareto

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,4	3,1
y	2,3	7,5

- Un profil s **domine** un profil s' **au sens de Pareto** si il est au moins aussi bon pour tous les joueurs et si s est strictement meilleur pour au moins l'un d'entre eux, i.e. pour tout $s_i \in s$ et $s'_i \in s'$ on a $s_i \geq s'_i$ et il existe $s_j \in s$ et $s'_j \in s'$ tel que $s_j > s'_j$.

Critère de Pareto

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	4,4	3,1
y	2,3	7,5

- Un profil s **domine** un profil s' **au sens de Pareto** si il est au moins aussi bon pour tous les joueurs et si s est strictement meilleur pour au moins l'un d'entre eux, i.e. pour tout $s_i \in s$ et $s'_i \in s'$ on a $s_i \geq s'_i$ et il existe $s_j \in s$ et $s'_j \in s'$ tel que $s_j > s'_j$.
- Un profil s **domine strictement** un profil s' **au sens de Pareto** si s est strictement meilleur pour tous les joueurs, i.e. pour tout $s_i \in s$ et $s'_i \in s'$ on a $s_i > s'_i$.

Critère de Pareto vs niveau de sécurité

Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	9,9	0,8
y	8,0	7,7

Critère de Pareto vs niveau de sécurité

		Joueur 2	
		u	v
Joueur 1	x	9,9	0,8
	y	8,0	7,7

- On définit le **niveau de sécurité d'une stratégie** s_i pour le joueur i comme le gain minimum que peut apporter cette stratégie quel que soit le choix des autres joueurs, soit

$$\min_{s_{-i}} \mu_i(s_i, s_{-i})$$

- On définit le **niveau de sécurité d'un joueur** i comme le niveau de sécurité maximal des stratégies de i.

Points focaux

- Le problème posé par la multiplicité d'équilibres de Nash est un problème de coordination.
- Pour certains jeux, certains équilibres semblent plus évidents que d'autres aux joueurs. Cela est du à certaines conventions sociales. Ces équilibres de Nash obtenus à partir de ces conventions sont appelés points focaux.

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

▷ Sur cet exemple le niveau de sécurité des deux joueurs est 0.

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

- ▷ Sur cet exemple le niveau de sécurité des deux joueurs est 0.
- ▷ Supposons que le joueur 1 joue aléatoirement f et c avec une probabilité de $1/2$

$$\mu_1(< (f, 1/2), (c, 1/2) >, f) = 1/2 * 2 + 1/2 * 0 = 1$$

$$\mu_1(< (f, 1/2), (c, 1/2) >, c) = 1/2 * 0 + 1/2 * 1 = 1/2$$

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

- Sur cet exemple le niveau de sécurité des deux joueurs est 0.
- Supposons que le joueur 1 joue aléatoirement f et c avec une probabilité de $1/2$

$$\mu_1(< (f, 1/2), (c, 1/2) >, f) = 1/2 * 2 + 1/2 * 0 = 1$$

$$\mu_1(< (f, 1/2), (c, 1/2) >, c) = 1/2 * 0 + 1/2 * 1 = 1/2$$

- Avec cette stratégie le niveau de sécurité du joueur 1 est 1/2

Stratégies pures - Stratégies mixtes

- Les stratégies que nous avons définies et utilisées pour le moment sont des **stratégies pures**, c'est-à-dire les options qui se présentent aux joueurs.
- Une **stratégie mixte** σ_i est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
- L'ensemble des stratégies mixtes d'un joueur i se note Σ_i.
- L'ensemble des stratégies pures utilisées (i.e. dont la probabilité n'est pas nulle) par une stratégie mixte σ_i est appelé le **support** de la stratégie mixte.
- Notons $p_i(s_k)$ la probabilité associée à s_k par σ_i, l'utilité d'un profil de stratégies mixtes σ est définie par :

$$\mu_i(\sigma) = \sum_{s \in S} (\prod_{j=1}^{n} p_j(s_j))\mu_i(s)$$

Stratégie

- Une **stratégie pure** du joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par s_i une stratégie pure de ce joueur.

Stratégie

- Une **stratégie pure** du joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par s_i une stratégie pure de ce joueur.
- Une **stratégie mixte** du joueur i est une distribution de probabilités p_i définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i. On note Σ_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i et par σ_i une stratégie mixte de ce joueur.

Stratégie

- Une **stratégie pure** du joueur i est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par s_i une stratégie pure de ce joueur.
- Une **stratégie mixte** du joueur i est une distribution de probabilités p_i définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i. On note Σ_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i et par σ_i une stratégie mixte de ce joueur.
- Une **stratégie locale** du joueur i en un ensemble d'information A est une distribution de probabilités sur l'ensemble des actions disponibles en cet ensemble d'information. On note Π_{iA} l'ensemble des stratégies locales du joueur i pour l'ensemble d'information A et π_{iA} une stratégie locale de ce joueur en A.
- Une **stratégie comportementale** du joueur i est un vecteur de stratégies locales de ce joueur, contenant une stratégie locale par ensemble d'information de ce joueur. On note Π_i l'ensemble des stratégies comportementales du joueur i, et π_i une stratégie comportementale de ce joueur.

Equilibres de Nash en stratégies mixtes

Définition Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes $\sigma^* \in \Sigma$ tel que pour tout i et tout $\sigma_i \in \Sigma_i$

$$\mu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Equilibres de Nash en stratégies mixtes

Définition Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes $\sigma^* \in \Sigma$ tel que pour tout i et tout $\sigma_i \in \Sigma_i$

$$\mu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Théorème. σ^* est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout i et tout $s_i \in S_i$

$$\mu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mu_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

Equilibres de Nash en stratégies mixtes

Définition Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes $\sigma^* \in \Sigma$ tel que pour tout i et tout $\sigma_i \in \Sigma_i$

$$\mu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Théorème. σ^* est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout i et tout $s_i \in S_i$

$$\mu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mu_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

Théorème.[Nash, 1950] **Tout jeu sous forme stratégique a un équilibre de Nash en stratégies mixtes.**

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	$1-x$

- ▷ Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, pour quel x maximise-t-il son niveau de sécurité ?

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	$1-x$

- Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, pour quel x maximise-t-il son niveau de sécurité ?

$$\begin{array}{rclcl} \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,f) & = & x*2+(1-x)*0 & = & 2x \\ \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,c) & = & x*0+(1-x)*1 & = & 1-x \end{array}$$

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	$1-x$

- Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, pour quel x maximise-t-il son niveau de sécurité ?

$$\begin{aligned} \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,f) &= x*2+(1-x)*0 &= 2x \\ \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,c) &= x*0+(1-x)*1 &= 1-x \end{aligned}$$

$$\max_x \min(2x, 1-x) = 1/3$$

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	$1-x$

- Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, pour quel x maximise-t-il son niveau de sécurité ?

$$\begin{array}{rclcl} \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,f) & = & x*2+(1-x)*0 & = & 2x \\ \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,c) & = & x*0+(1-x)*1 & = & 1-x \end{array}$$

$$\max_x \min(2x, 1-x) = 1/3$$

- Le niveau de sécurité du joueur 1 est donc de $2/3$.

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1		f	c	
	f	2,1	0,0	x
	c	0,0	1,2	$1-x$

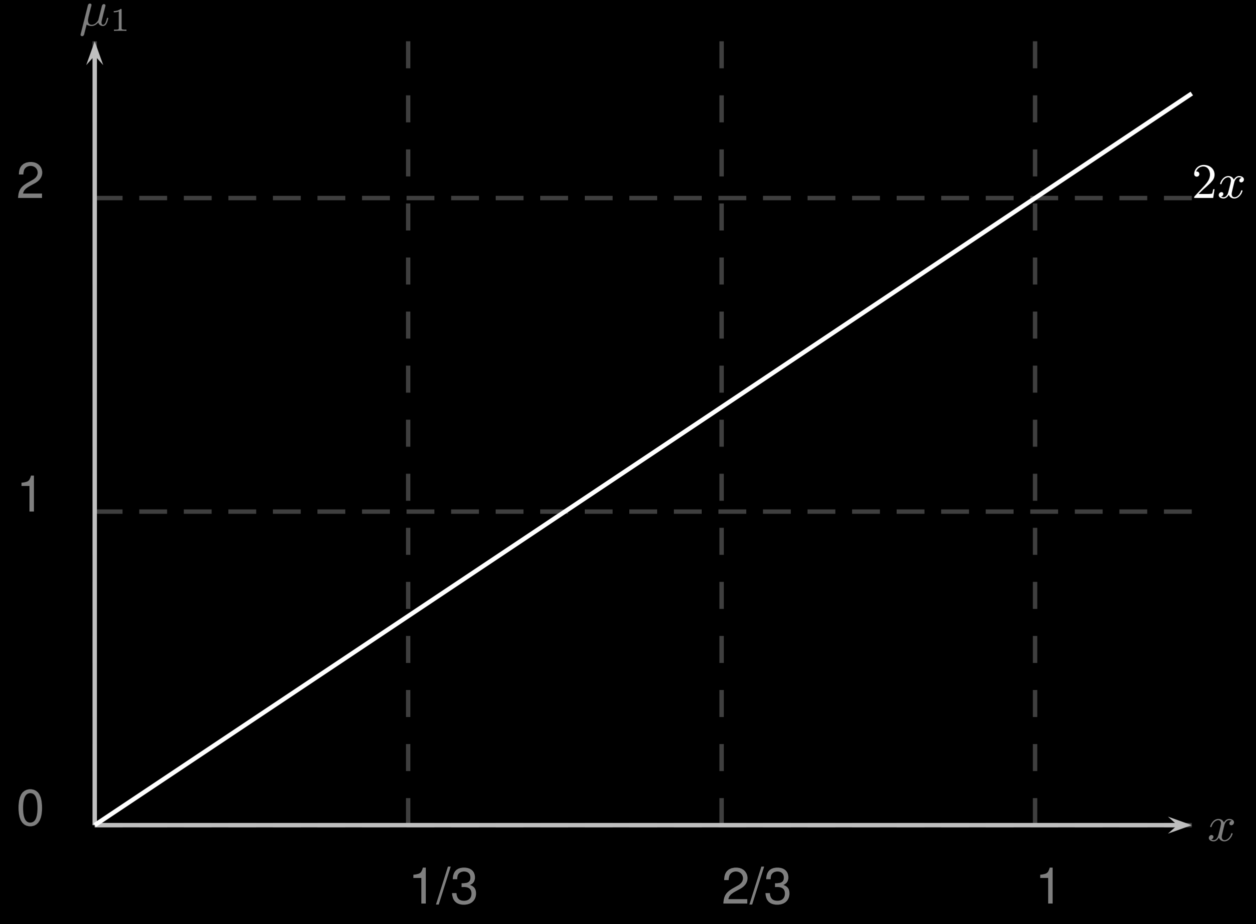
- ▷ Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, pour quel x maximise-t-il son niveau de sécurité ?

$$\begin{array}{rclcl} \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,f) & = & x*2+(1-x)*0 & = & 2x \\ \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,c) & = & x*0+(1-x)*1 & = & 1-x \end{array}$$

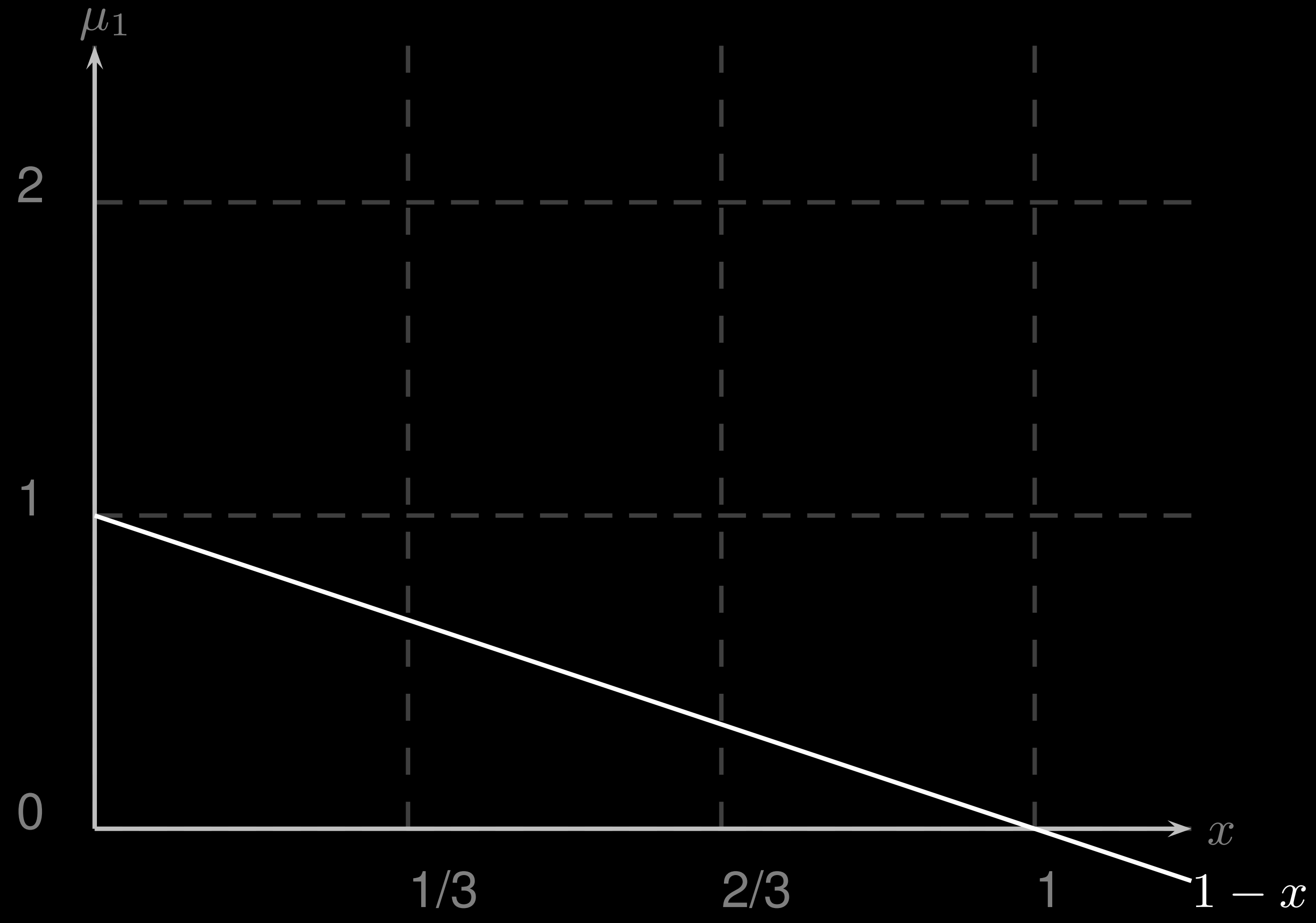
$$\max_x \min(2x, 1-x) = 1/3$$

- ▷ Le niveau de sécurité du joueur 1 est donc de $2/3$.
- ▷ Que se passe-t-il si le joueur 2 est averti que le joueur 1 va jouer cette stratégie ?

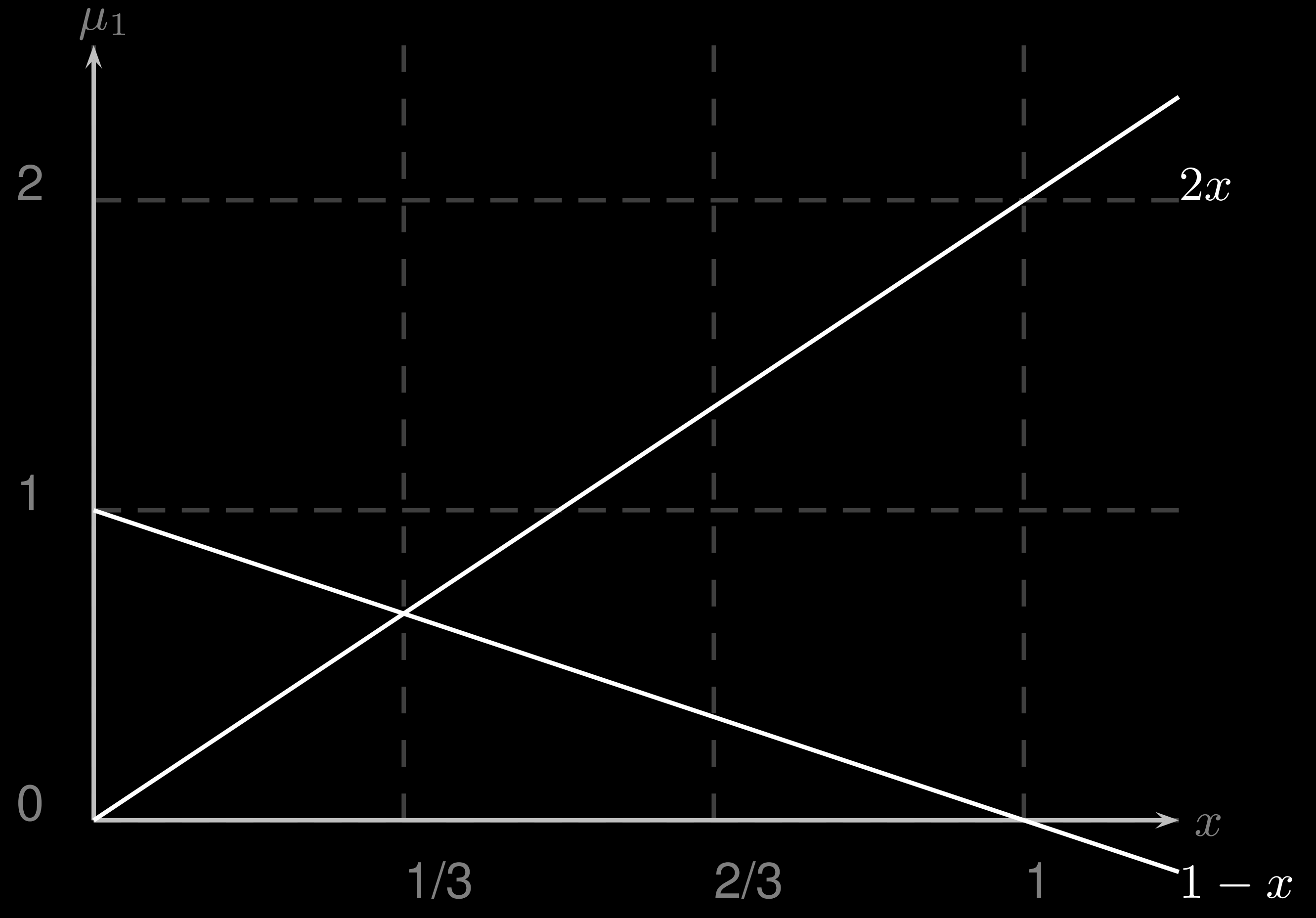
Représentation graphique du jeu



Représentation graphique du jeu



Représentation graphique du jeu



La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	y	$1-y$
	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

Soit y la probabilité avec laquelle le joueur 2 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 1 ?

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	y	$1-y$
	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

Soit y la probabilité avec laquelle le joueur 2 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 1 ?

$$\begin{aligned}
\mu_1(f, <(f,y),(c,1-y)>) &= y*2+(1-y)*0 &= 2y \\
\mu_1(c, <(f,y),(c,1-y)>) &= y*0+(1-y)*1 &= 1-y
\end{aligned}$$

La guerre des sexes

Joueur 2

		y	$1-y$
Joueur 1		f	c
	f	2,1	0,0
	c	0,0	1,2

Soit y la probabilité avec laquelle le joueur 2 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 1 ?

$$\begin{array}{rclcl} \mu_1(f, <(f,y),(c,1-y)>) & = & y*2+(1-y)*0 & = & 2y \\ \mu_1(c, <(f,y),(c,1-y)>) & = & y*0+(1-y)*1 & = & 1-y \end{array}$$

Donc:

- ▷ Si $2y > 1-y$ ($y > 1/3$), la meilleure réponse du joueur 1 est de jouer f
- ▷ Si $2y < 1-y$ ($y < 1/3$), la meilleure réponse du joueur 1 est de jouer c
- ▷ Si $2y = 1-y$ ($y = 1/3$), le joueur 1 est indifférent entre f et c, il peut donc jouer l'une ou l'autre, ou n'importe quelle combinaison des deux.

La guerre des sexes

Joueur 2

		y	$1-y$	
Joueur 1		f	c	
	f	2,1	0,0	x
	c	0,0	1,2	$1-x$

Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 2 ?

La guerre des sexes

Joueur 2

		y	$1-y$	
Joueur 1		f	c	
	f	2,1	0,0	x
	c	0,0	1,2	$1-x$

Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 2 ?

$$\begin{array}{rcccl} \mu_2(<(f,x),(c,1-x)>,f) & = & x*1+(1-x)*0 & = & x \\ \mu_2(<(f,x),(c,1-x)>,c) & = & x*0+(1-x)*2 & = & 2(1-x) \end{array}$$

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	y	$1-y$	
	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	$1-x$

Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 2 ?

$$\begin{aligned}
\mu_2(<(f,x),(c,1-x)>,f) &= x*1+(1-x)*0 &= x \\
\mu_2(<(f,x),(c,1-x)>,c) &= x*0+(1-x)*2 &= 2(1-x)
\end{aligned}$$

Donc:

- ▷ Si $x > 2(1-x)$ ($x > 2/3$), la meilleure réponse du joueur 2 est de jouer f
- ▷ Si $x < 2(1-x)$ ($x < 2/3$), la meilleure réponse du joueur 2 est de jouer c
- ▷ Si $x = 2(1-x)$ ($x = 2/3$), le joueur 2 est indifférent entre f et c, il peut donc jouer l'une ou l'autre, ou n'importe quelle combinaison des deux.

La guerre des sexes

Joueur 2

Joueur 1

	y	$1-y$	
	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	$1-x$

Les gains des deux joueurs avec un profil en stratégie mixte σ sont donc:

$$\begin{aligned}\mu_1(\sigma) &= x*y*2+x*(1-y)*0+(1-x)*y*0+(1-x)*(1-y)*1 \\ &= 3xy-x-y+1 \\ \mu_2(\sigma) &= x*y*1+x*(1-y)*0+(1-x)*y*0+(1-x)*(1-y)*2 \\ &= 3xy-2x-2y+2\end{aligned}$$

La guerre des sexes

Joueur 2

		$1/3$	$2/3$	
Joueur 1		f	c	
	f	2,1	0,0	$2/3$
	c	0,0	1,2	$1/3$

Les gains des deux joueurs avec un profil en stratégie mixte σ sont donc:

$$\mu_1(\sigma) = 3xy - x - y + 1$$
$$\mu_2(\sigma) = 3xy - 2x - 2y + 2$$

Le profil $\sigma^* = (< (f, 2/3), (c, 1/3) >, < (f, 1/3), (c, 2/3) >)$ est donc un équilibre de Nash en stratégie mixte.

La guerre des sexes

Joueur 2

	$1/3$	$2/3$	
	f	c	
f	2,1	0,0	$2/3$
c	0,0	1,2	$1/3$

Joueur 1

Les gains des deux joueurs avec un profil en stratégie mixte σ sont donc:

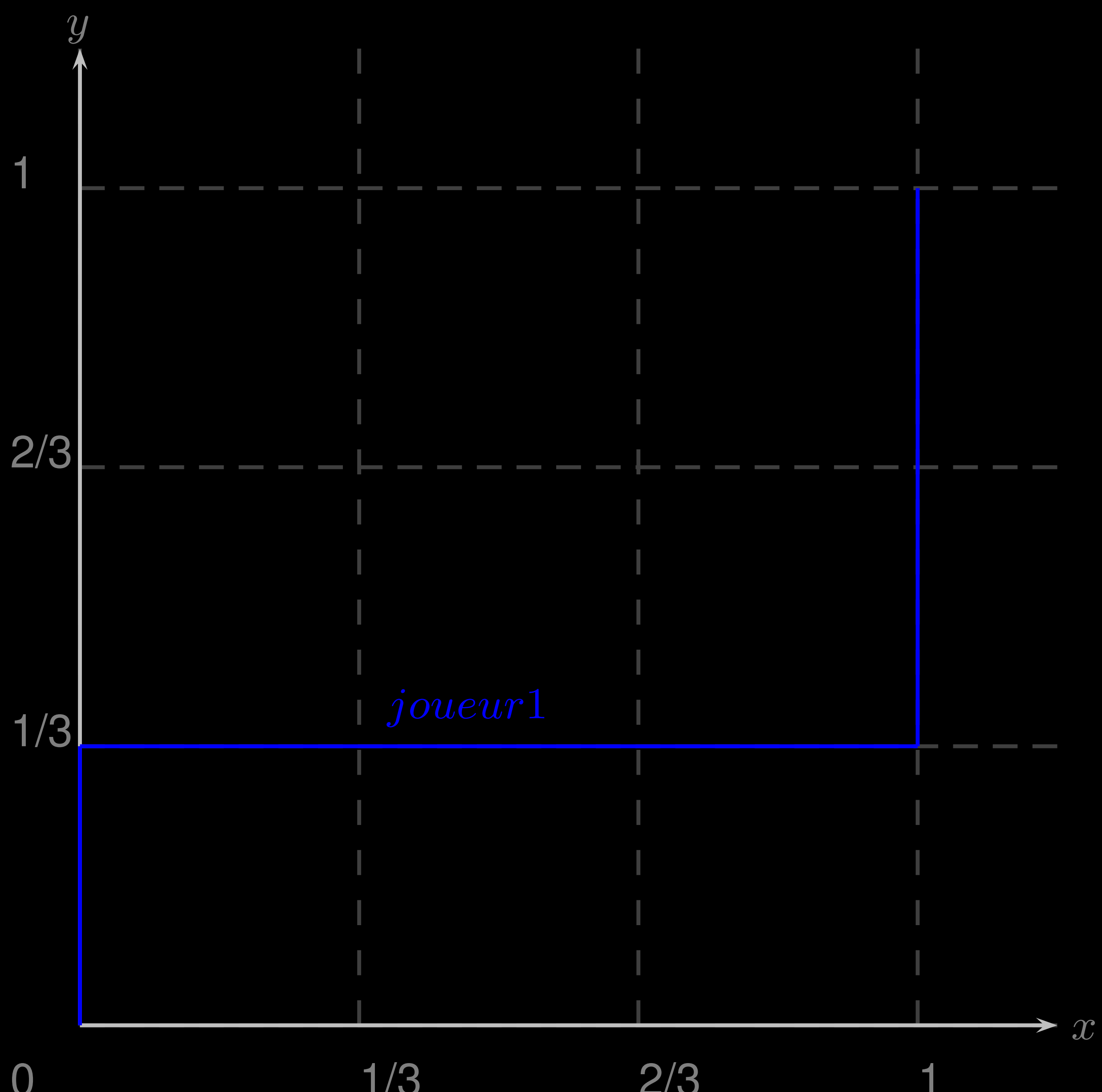
$$\begin{aligned}\mu_1(\sigma) &= 3xy - x - y + 1\\ \mu_2(\sigma) &= 3xy - 2x - 2y + 2\end{aligned}$$

Le profil $\sigma^* = (< (f, 2/3), (c, 1/3) >, < (f, 1/3), (c, 2/3) >)$ est donc un équilibre de Nash en stratégie mixte.

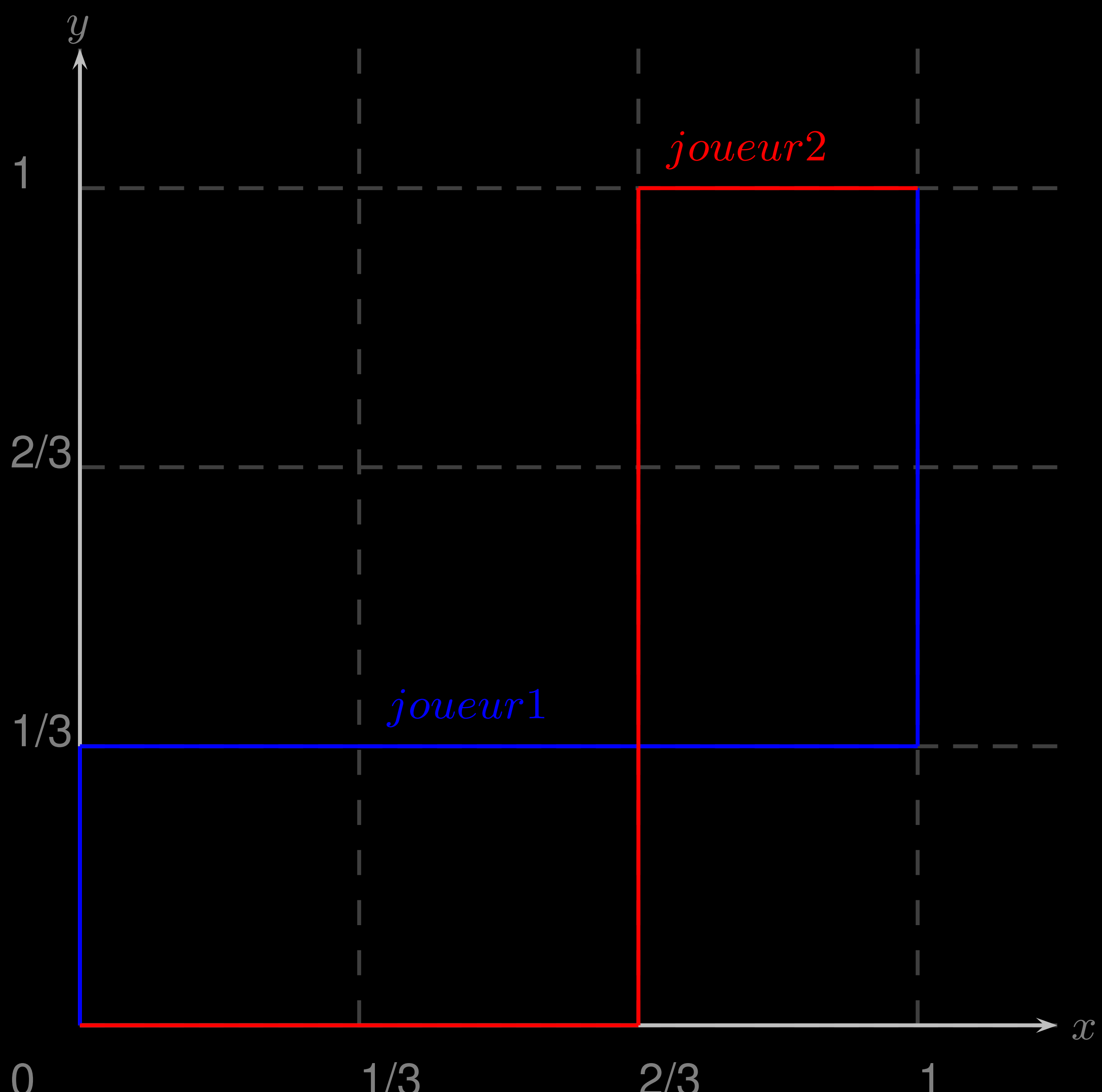
Les gains des deux joueurs avec σ^* sont :

$$\begin{aligned}\mu_1(\sigma^*) &= 3.2/3.1/3 - 2/3 - 1/3 + 1\\ &= 2/3\\ \mu_2(\sigma^*) &= 3.2/3.1/3 - 2.2/3 - 2.1/3 + 2\\ &= 2/3\end{aligned}$$

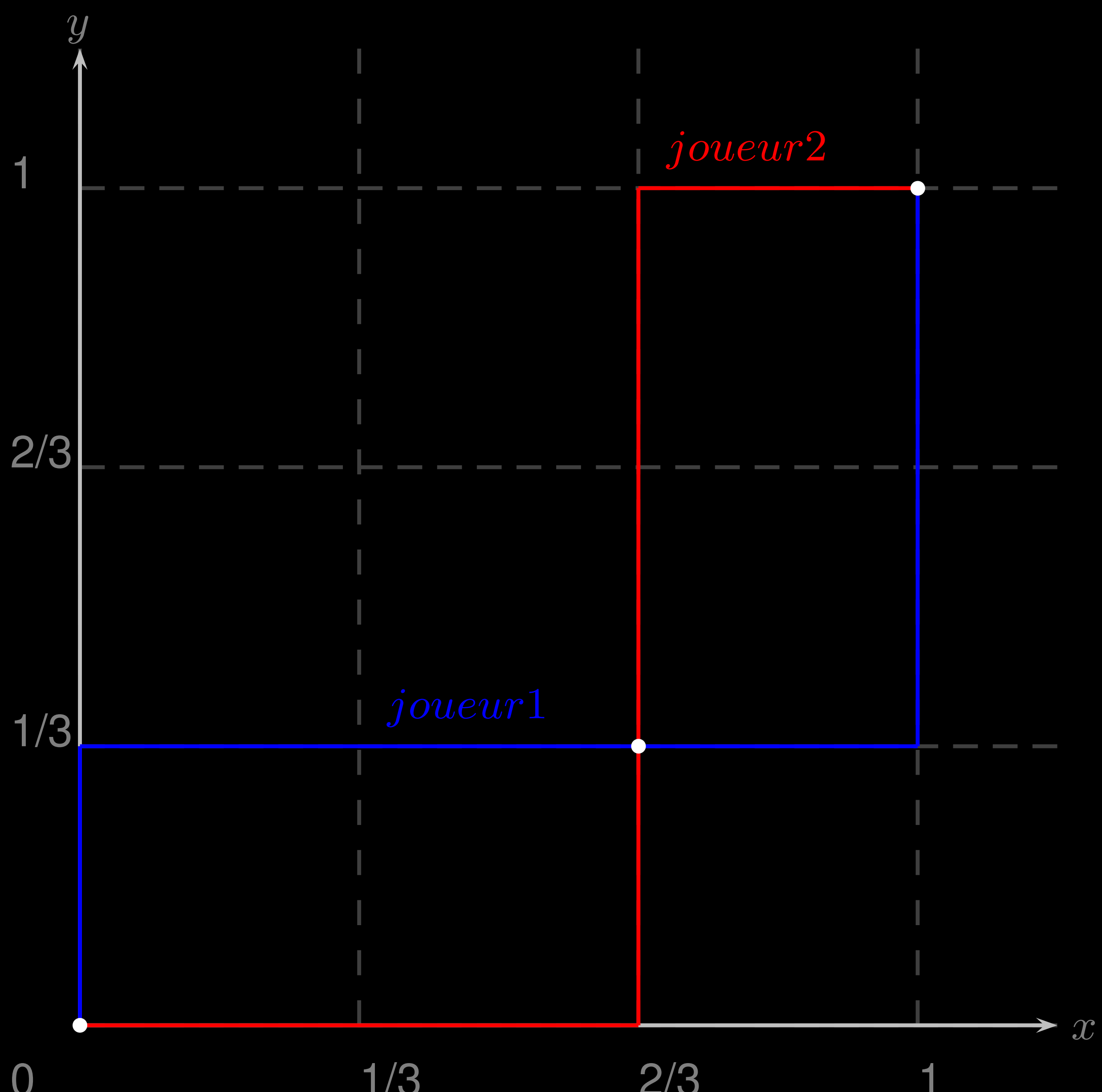
Représentation graphique du jeu



Représentation graphique du jeu



Représentation graphique du jeu



Coopération - Itération - Corrélation

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

▷ Que se passe-t-il si les 2 joueurs peuvent communiquer avant de jouer ?

Coopération - Itération - Corrélation

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

▷ Que se passe-t-il si les 2 joueurs peuvent communiquer avant de jouer ?

$$\mu_1 = \mu_2 = 1/2 * 2 + 1/2 * 1 = 3/2$$

Coopération - Itération - Corrélation

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

- Que se passe-t-il si les 2 joueurs peuvent communiquer avant de jouer ?

$$\mu_1 = \mu_2 = 1/2 * 2 + 1/2 * 1 = 3/2$$

Lorsque tous les joueurs peuvent observer un même événement aléatoire, ils peuvent alors s'accorder sur des *équilibres corrélés*

  - Une stratégie corrélée est une distribution de probabilités sur les profils possibles.

Coopération - Itération - Corrélation

Joueur 2

Joueur 1

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

- Que se passe-t-il si les 2 joueurs peuvent communiquer avant de jouer ?

$$\mu_1 = \mu_2 = 1/2 * 2 + 1/2 * 1 = 3/2$$

Lorsque tous les joueurs peuvent observer un même événement aléatoire, ils peuvent alors s'accorder sur des *équilibres corrélés*

  - Une stratégie corrélée est une distribution de probabilités sur les profils possibles.

- Que se passe-t-il si la partie est jouée plusieurs fois ?

Itération: Le dilemme des prisonniers...

Deux personnes arrêtées ensemble en possession d'armes à feu sont soupçonnés d'un délit fait en commun. Les policiers les séparent et disent à chacun :

- ▷ Si un des deux avoue et que l'autre n'avoue rien, le premier est libéré, et le second emprisonné (5 ans);
- ▷ Si les deux avouent, les deux iront en prison (4 ans);
- ▷ Si aucun des deux n'avoue, les deux seront seront libérés assez vite (2 ans).

  - ▷ Vous êtes un des deux prisonniers, que faites-vous ?

[DIP] Le dilemme des prisonniers

Joueur 2

Joueur 1

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

[DIP] Le dilemme itéré...

Vous n'avez pas vraiment les mêmes goûts que votre voisin en matière de musique. Il lui arrive souvent d'écouter sa musique à fond. De même il vous arrive (en représailles) de mettre votre musique à un volume plus que raisonnable. Ce qui a pour conséquences que le lendemain il recommence à nouveau. En dehors de ces périodes agitées, vous appréciez les périodes où aucun de vous ne gêne l'autre.
Supposons que l'on pondère votre satisfaction :

- ▷ Vous avez une satisfaction de **5** à écouter votre musique à un volume important.
- ▷ La satisfaction est de **0** lorsque votre voisin met sa musique à fond.
- ▷ Une soirée "calme", sans musique vous apporte une satisfaction de **3**.
- ▷ Le fait d'écouter "simultanément" votre musique mêlée à celle du voisin, donne une satisfaction de **1**.

  - ▷ Vous savez ce que votre voisin a eu comme comportement les jours précédents, que faites-vous aujourd'hui?

[DIP] Le dilemme …

- Introduction par FLOOD et DRESHER à la RAND Corp. en 1952
- Jeu à somme non-nulle
- 2 joueurs jouent simultanément
- 2 choix de jeux :
  - COOPÉRER, *i.e.* être gentil, on notera C
  - TRAHIR, *i.e.* être méchant, on notera D
- Les gains des joueurs, notés S, P, R et T, sont fonction de leur choix de jeu avec :

$$S < P < R < T$$

[DIP] Le dilemme itéré ...

- Les joueurs se rencontrent plusieurs fois
- À chaque itération les joueurs ont connaissance des coups précédents
- Ils ne connaissent pas le terme du jeu
- Le gain d'un joueur est le cumul de ses gains dans chaque rencontre
- Pour favoriser la coopération on ajoute la contrainte :

$$S + T < 2R$$

[DIP] Dilemme itéré des prisonniers (résumé)

Dilemme...	$S < P < R < T$
...itéré	$S + T < 2R$

	Cooperate	Defect
Cooperate	$R = 3$ Reward récompense pour coopération mutuelle	$S = 0$ Sucker's payoff salaire de la dupe
Defect	$T = 5$ Temptation tentation à trahir	$P = 1$ Punishment punition pour la trahison mutuelle

Score du joueur de la ligne.

[DIP] Des applications concrètes...

- Deux pays doivent-ils lever des taxes douanières sur les produits importés de l'autre pays.
- Deux entreprises concurrentes doivent-elles essayer de s'entendre pour se partagé un marché ou se faire concurrence ?
- Deux espèces vivant sur un même territoire doivent-elles cohabiter ou se disputer la nourriture disponible ?

[DIP] Les stratégies

Quelques exemples :

- ▷ gentille
- ▷ méchante
- ▷ per_CCD
- ▷ rancunière
- ▷ lunatique
- ▷ majoritaire_gentille
- ▷ majoritaire_méchante
- ▷ donnant_donnant

[DIP] Exemples (rencontres)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
score de gentille	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	0
jeu de gentille	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		
jeu de méchante	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D		
score de méchante	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	=	50

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
score de per_CCD	3	3	5	0	0	1	0	0	1	0	=	13
jeu de per_CCD	C	C	D	C	C	D	C	C	D	C		
jeu de rancunière	C	C	C	D	D	D	D	D	D	D		
score de rancunière	3	3	0	5	5	1	5	5	1	5	=	33

[DIP] Quelle est la *meilleure* stratégie ?

▷ qui batte toutes les autres :

[DIP] Quelle est la *meilleure* stratégie ?

- qui batte toutes les autres :
  méchante, car généralisation du dilemme non itéré

[DIP] Quelle est la *meilleure* stratégie ?

- qui batte toutes les autres :
  méchante, car généralisation du dilemme non itéré
- qui fasse le meilleur score possible face à toutes les autres :

[DIP] Quelle est la *meilleure* stratégie ?

- qui batte toutes les autres :
  méchante, car généralisation du dilemme non itéré
- qui fasse le meilleur score possible face à toutes les autres :
  aucune, car meilleure contre méchante et contre rancunière est impossible

[DIP] Quelle est la *meilleure* stratégie ?

- qui batte toutes les autres :
  méchante, car généralisation du dilemme non itéré
- qui fasse le meilleur score possible face à toutes les autres :
  aucune, car meilleure contre méchante et contre rancunière est impossible

  - Problème de définition du critère d'évaluation des stratégies

[DIP] Quelle est la *meilleure* stratégie ?

Sur des confrontations de 100 parties :

- ▷ Le gain maximal est de 500 points
- ▷ Le gain minimal est de 0 point

C'est ce qu'obtiennent MÉCHANTE et GENTILLE l'une contre l'autre.

[DIP] Quelle est la *meilleure* stratégie ?

Sur des confrontations de 100 parties :

- ▷ Le gain maximal est de 500 points
- ▷ Le gain minimal est de 0 point

C'est ce qu'obtiennent MÉCHANTE et GENTILLE l'une contre l'autre.
Mais...

- ▷ 2 gentilles entre elles obtiennent chacune 300 points
- ▷ 2 méchantes entre elles obtiennent chacune 100 points
- ▷ Chaque stratégie est bonne (au sens du meilleur score) face à certaines et mauvaises face à d'autres car elle ne sait pas à qui elle a affaire.

[DIP] Les tournois

- Plusieurs stratégies se rencontrent 2 à 2, comme pour un tournoi sportif
- Le gain d'une stratégie est le cumul de ses scores face à chaque adversaire
- Toutes les parties ont la même longueur (même nombre d'itérations), mais les stratégies ne la connaissent pas et ne peuvent pas le savoir

[DIP] Exemples (tournoi)

	gentille	méchante	per_CCD	rancunière
gentille	30	50	36	30
méchante	0	10	3	9
per_CCD	21	38	24	33
rancunière	30	14	13	30

Score	81	112	76	102

Classement

1. méchante
2. rancunière
3. gentille
4. per_CCD

[DIP] Un tournoi

Tournois entre 10 stratégies parmi 12 :

- ▷ gentille
- ▷ méchante
- ▷ lunatique
- ▷ donnant_donnant
- ▷ rancunière
- ▷ per_DDC
- ▷ per_CCD
- ▷ majoritaire_gentille
- ▷ majoritaire_méchante
- ▷ méfiante
- ▷ sondeur
- ▷ donnant_donnant_dur

Nombre de tournois joués par chaque stratégie : 55

- ▷ Donnez le classement du tournoi...

[DIP] Un tournoi

- gentille
- méchante
- lunatique
- donnant_donnant
- rancunière
- per_DDC
- per_CCD
- majoritaire_gentille
- majoritaire_méchante
- méfiante
- sondeur
- donnant_donnant_dur

Scores :

donnant_donnant	:	42
majoritaire_gentille	:	19
rancunière	:	4
sondeur	:	1
lunatique	:	0
méchante	:	0

[DIP] donnant-donnant : une bonne stratégie

Au premier coup je coopère (`C`), ensuite si mon adversaire a coopéré (`C`) au coup précédent, je coopère (`C`), s'il a trahi (`D`), je trahis (`D`).

[DIP] donnant-donnant : une bonne stratégie

Au premier coup je coopère (`C`), ensuite si mon adversaire a coopéré (`C`) au coup précédent, je coopère (`C`), s'il a trahi (`D`), je trahis (`D`).

- ▷ donnant-donnant ne gagne jamais contre personne !

[DIP] donnant-donnant : une bonne stratégie

Au premier coup je coopère (`C`), ensuite si mon adversaire a coopéré (`C`) au coup précédent, je coopère (`C`), s'il a trahi (`D`), je trahis (`D`).

- ▷ donnant-donnant ne gagne jamais contre personne !
- ▷ Au mieux elle fait le même score.

[DIP] donnant-donnant : une bonne stratégie

Au premier coup je coopère (`C`), ensuite si mon adversaire a coopéré (`C`) au coup précédent, je coopère (`C`), s'il a trahi (`D`), je trahis (`D`).

- ▷ donnant-donnant ne gagne jamais contre personne !
- ▷ Au mieux elle fait le même score.
- ▷ Mais, au pire elle ne perd que 5 points quel que soit l'adversaire et la longueur de la partie !

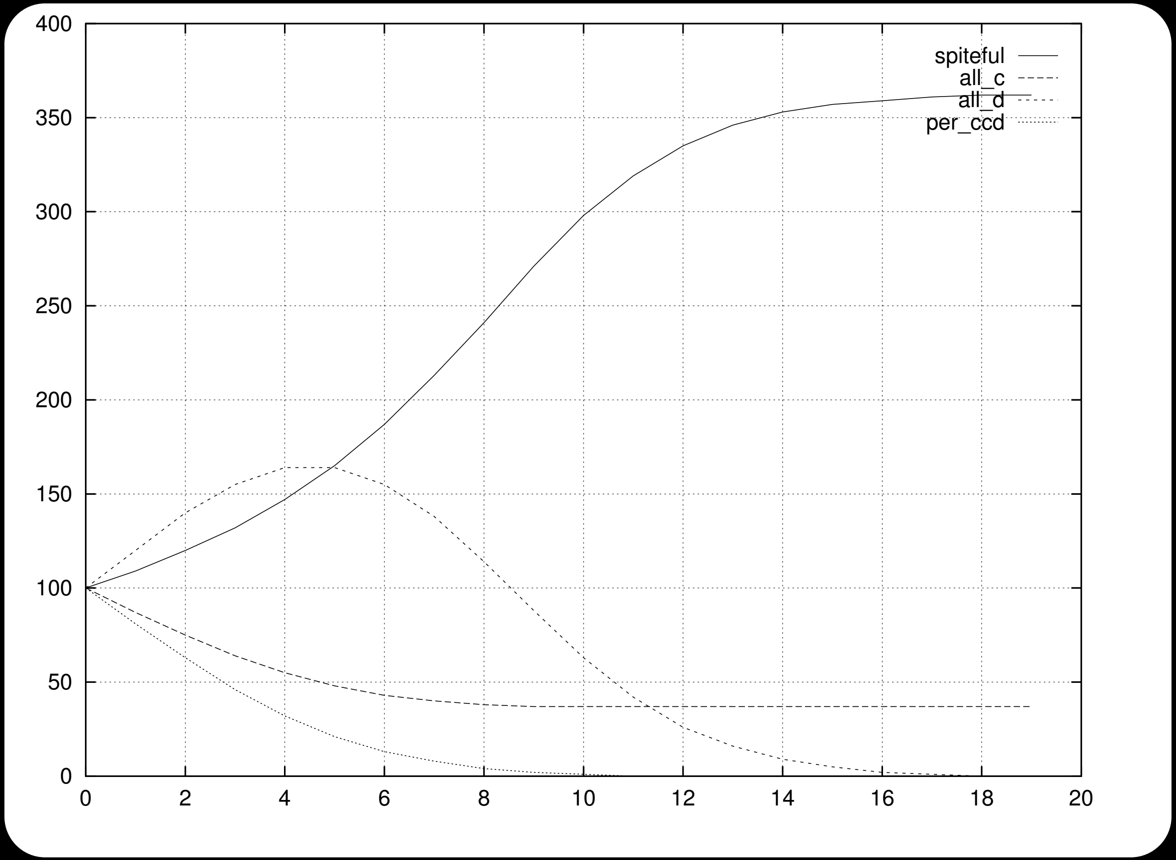
[DIP] Évolution écologique

Simulation de l'évolution naturelle :

- ▷ Chaque stratégie est représentée par une population de N entités
- ▷ On effectue un tournoi entre toutes les entités
- ▷ Les entités de faibles stratégies (au sens du classement dans le tournoi) sont défavorisées, celles à stratégie forte sont favorisées
- ▷ La favorisation est réalisée par une redistribution proportionnelle de la population

Ce cycle est répété jusqu'à stabilisation de la population

[DIP] Exemples (évolution)



[DIP] Une morale très morale...

Critères de qualité pour une stratégie (en évolution) : [Axelrod,81]

- ▷ *Gentillesse*
- ▷ *Réactivité*
- ▷ *Pardon*
- ▷ *Simplicité*

[DIP] Une morale très morale...

Critères de qualité pour une stratégie (en évolution) : [Axelrod,81]

- ▷ *Gentillesse*
- ▷ *Réactivité*
- ▷ *Pardon*
- ▷ *Simplicité*

Les bonnes stratégies au dilemme le sont aussi dans les variantes du dilemme (asynchrone, avec renoncement, bruits, . . .)

[DIP] Une morale très morale...

Critères de qualité pour une stratégie (en évolution) : [Axelrod,81]

- *Gentillesse*
- *Réactivité*
- *Pardon*
- *Simplicité*

Les bonnes stratégies au dilemme le sont aussi dans les variantes du dilemme (asynchrone, avec renoncement, bruits, . . .)

Pour plus de détails sur le dilemme itéré des prisonniers :

`http://www.lifl.fr/IPD`

Jeux répétés

- Soit un jeu $G = \{S, \{\mu_i\}_{i=1,\dots,n}\}$, où S est l'ensemble (fini) des profils de stratégies et μ_i est la fonction d'utilité du joueur i.
- On note (G, T) le jeu répété obtenu en jouant T fois le jeu de base G.
- Lorsque le jeu est répété un nombre infini de fois, on note (G, ∞) le jeu correspondant.

Jeux répétés

- Soit un jeu $G = \{S, \{\mu_i\}_{i=1,\ldots,n}\}$, où S est l'ensemble (fini) des profils de stratégies et μ_i est la fonction d'utilité du joueur i.
- On note (G, T) le jeu répété obtenu en jouant T fois le jeu de base G.
- Lorsque le jeu est répété un nombre infini de fois, on note (G, ∞) le jeu correspondant.
- On peut également distinguer les jeux répétés un nombre fini, mais indéfini de fois: à chaque tour, il y a une probabilité $1 - q$ que le jeu s'arrête.

Jeux répétés

- Soit un jeu $G = \{S, \{\mu_i\}_{i=1,\dots,n}\}$, où S est l'ensemble (fini) des profils de stratégies et μ_i est la fonction d'utilité du joueur i.
- On note (G, T) le jeu répété obtenu en jouant T fois le jeu de base G.
- Lorsque le jeu est répété un nombre infini de fois, on note (G, ∞) le jeu correspondant.
- On peut également distinguer les jeux répétés un nombre fini, mais indéfini de fois: à chaque tour, il y a une probabilité $1 - q$ que le jeu s'arrête.
- Facteur d'actualisation : Lorsqu'un jeu est répété, il se peut que les gains obtenus à l'itération courante μ_t soient plus/moins importants aux yeux de l'agent que les gains à l'itération suivante μ_{t+1}. Pour modéliser cela on peut utiliser un facteur d'actualisation δ.

$$\mu_t = \delta \mu_{t+1}$$

Le facteur d'actualisation $\delta = \mu_t / \mu_{t+1}$ représente donc l'attrait du joueur pour les gains actuels.

Jeux répétés: Théorème Folk

- L'utilité d'un joueur dans un jeu répété est donc:

$$\mu_i(G,T) = \Sigma_{t=0}^{T} \delta^t \mu_i(t)$$

Jeux répétés: Théorème Folk

- L'utilité d'un joueur dans un jeu répété est donc:

$$\mu_i(G,T) = \Sigma_{t=0}^{T} \delta^t \mu_i(t)$$

- Pour pouvoir comparer le gain dans le cas du jeu répété à celui du jeu de base, on utilise la moyenne des gains du joueur: $\mu_i(G,T)/T$

Jeux répétés: Théorème Folk

- L'utilité d'un joueur dans un jeu répété est donc:

$$\mu_i(G,T) = \Sigma_{t=0}^{T} \delta^t \mu_i(t)$$

- Pour pouvoir comparer le gain dans le cas du jeu répété à celui du jeu de base, on utilise la moyenne des gains du joueur: $\mu_i(G,T)/T$
- Si $\forall t \mu_i(t) = \mu$, alors $\mu_i(G,\infty) = \frac{1}{1-\delta}\mu$

Jeux répétés: Théorème Folk

- L'utilité d'un joueur dans un jeu répété est donc:

$$\mu_i(G,T) = \Sigma_{t=0}^{T}\delta^t\mu_i(t)$$

- Pour pouvoir comparer le gain dans le cas du jeu répété à celui du jeu de base, on utilise la moyenne des gains du joueur: $\mu_i(G,T)/T$
- Si $\forall t \mu_i(t) = \mu$, alors $\mu_i(G,\infty) = \frac{1}{1-\delta}\mu$
- *Théorème Folk*: Soit un jeu répété (G,∞) avec un facteur d'actualisation δ suffisamment proche de 1 et $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_2)$ un vecteur de gains réalisable de ce jeu, alors il existe un équilibre de Nash du jeu répété qui donne μ comme vecteur de gains.

Jeux répétés: Théorème Folk

- L'utilité d'un joueur dans un jeu répété est donc:

$$\mu_i(G, T) = \Sigma_{t=0}^{T} \delta^t \mu_i(t)$$

- Pour pouvoir comparer le gain dans le cas du jeu répété à celui du jeu de base, on utilise la moyenne des gains du joueur: $\mu_i(G, T)/T$
- Si $\forall t \mu_i(t) = \mu$, alors $\mu_i(G, \infty) = \frac{1}{1-\delta}\mu$
- *Théorème Folk*: Soit un jeu répété (G, ∞) avec un facteur d'actualisation δ suffisamment proche de 1 et $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_2)$ un vecteur de gains réalisable de ce jeu, alors il existe un équilibre de Nash du jeu répété qui donne μ comme vecteur de gains.
- L'équilibre de Nash en question est un équilibre de Nash parfait en sous-jeux (voir plus loin). Notion de menace crédible.

Jeux répétés: Théorème Folk

- L'utilité d'un joueur dans un jeu répété est donc:

$$\mu_i(G,T) = \Sigma_{t=0}^{T} \delta^t \mu_i(t)$$

- Pour pouvoir comparer le gain dans le cas du jeu répété à celui du jeu de base, on utilise la moyenne des gains du joueur: $\mu_i(G,T)/T$
- Si $\forall t \mu_i(t) = \mu$, alors $\mu_i(G,\infty) = \frac{1}{1-\delta}\mu$
- *Théorème Folk*: Soit un jeu répété (G,∞) avec un facteur d'actualisation δ suffisamment proche de 1 et $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_2)$ un vecteur de gains réalisable de ce jeu, alors il existe un équilibre de Nash du jeu répété qui donne μ comme vecteur de gains.
- L'équilibre de Nash en question est un équilibre de Nash parfait en sous-jeux (voir plus loin). Notion de menace crédible.
- Ce résultat signifie que l'ensemble des équilibres de Nash d'un jeu répété est immense: quasiment toute séquence (finie) de jeu correspond à un équilibre de Nash.

Jeux à deux joueurs à Somme nulle

- Rôle central
  - le plus simple
  - pas de notion de majorité
  - pas de coalition

Jeux à deux joueurs à Somme nulle

- Rôle central
  - le plus simple
  - pas de notion de majorité
  - pas de coalition
- Strictement Compétitif
  - Les joueurs ont des préférences strictement opposées
  - Pour tout profil de stratégies s, on a $\mu_1(s) + \mu_2(s) = a$

Jeux à deux joueurs à Somme nulle

- Rôle central
  - le plus simple
  - pas de notion de majorité
  - pas de coalition
- Strictement Compétitif
  - Les joueurs ont des préférences strictement opposées
  - Pour tout profil de stratégies s, on a $\mu_1(s) + \mu_2(s) = 0$

Jeux à deux joueurs à Somme nulle

- Rôle central
  - le plus simple
  - pas de notion de majorité
  - pas de coalition
- Strictement Compétitif
  - Les joueurs ont des préférences strictement opposées
  - Pour tout profil de stratégies s, on a $\mu_1(s) + \mu_2(s) = 0$
- Exemples :
  - Jeux de plateau (echecs, dames, $\ldots$)
  - Guerre
  - $\ldots$

Jeux à deux joueurs à somme nulle - Exemple

Joueur 2

Joueur 1

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	18,-18	3,-3	0,0	2,-2
x_2	0,0	3,-3	8,-8	20,-20
x_3	5,-5	4,-4	5,-5	5,-5
x_4	9,-9	3,-3	0,0	20,-20

Jeux à deux joueurs à somme nulle - Exemple

Joueur 2

Joueur 1

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	18	3	0	2
x_2	0	3	8	20
x_3	5	4	5	5
x_4	9	3	0	20

Jeux à deux joueurs à somme nulle - Exemple

Joueur 2

Joueur 1

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	18	3	0	2
x_2	0	3	8	20
x_3	5	4	5	5
x_4	9	3	0	20

- Le joueur 1 tente de maximiser son niveau de sécurité
  - $v_x = \max_i(\min_j \mu(x_i, y_j))$
- Le joueur 2 tente de minimiser le niveau de sécurité du joueur 1
  - $v_y = \min_j(\max_i \mu(x_i, y_j))$

Jeux à deux joueurs à somme nulle - Exemple

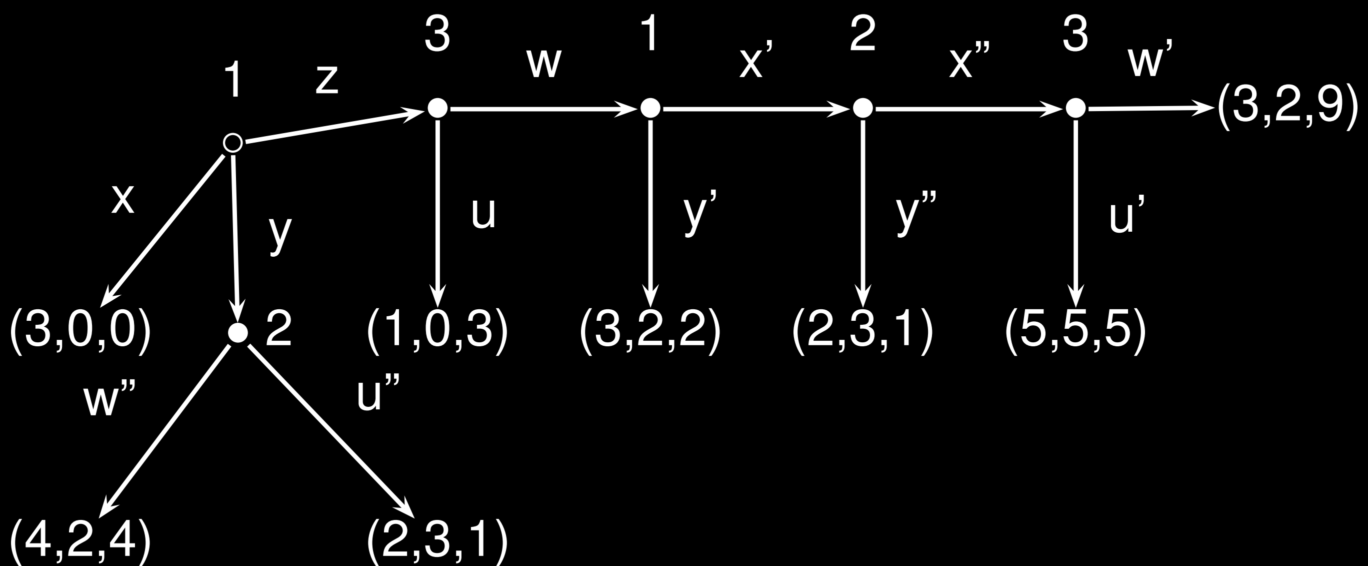
Joueur 2

Joueur 1

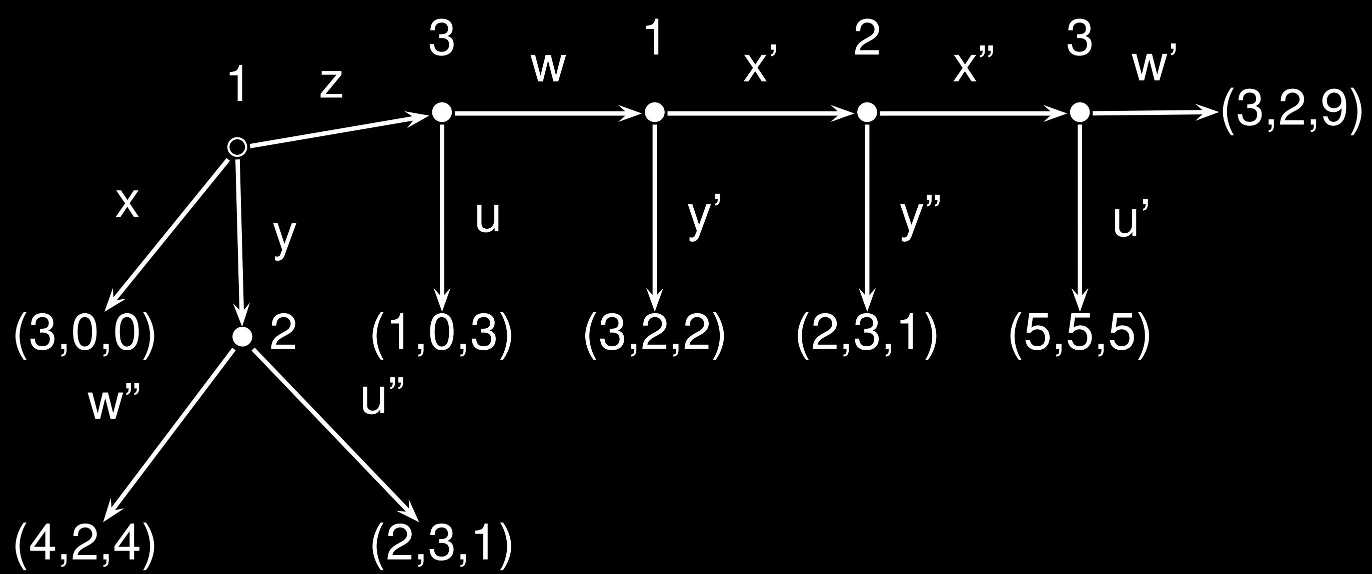
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	18	3	0	2
x_2	0	3	8	20
x_3	5	4	5	5
x_4	9	3	0	20

- Le joueur 1 tente de maximiser son niveau de sécurité
  - $v_x = \max_i(\min_j \mu(x_i, y_j))$
- Le joueur 2 tente de minimiser le niveau de sécurité du joueur 1
  - $v_y = \min_j(\max_i \mu(x_i, y_j))$
- Si $v_x = v_y = v$, alors tout couple de stratégies (x_i, y_i), x_i garantissant v au joueur 1 et y_i garantissant v au joueur 2 forment un équilibre de Nash et sont des stratégies respectivement maximin et minimax pour les joueurs 1 et 2.

Jeux sous forme extensive



Jeux sous forme extensive

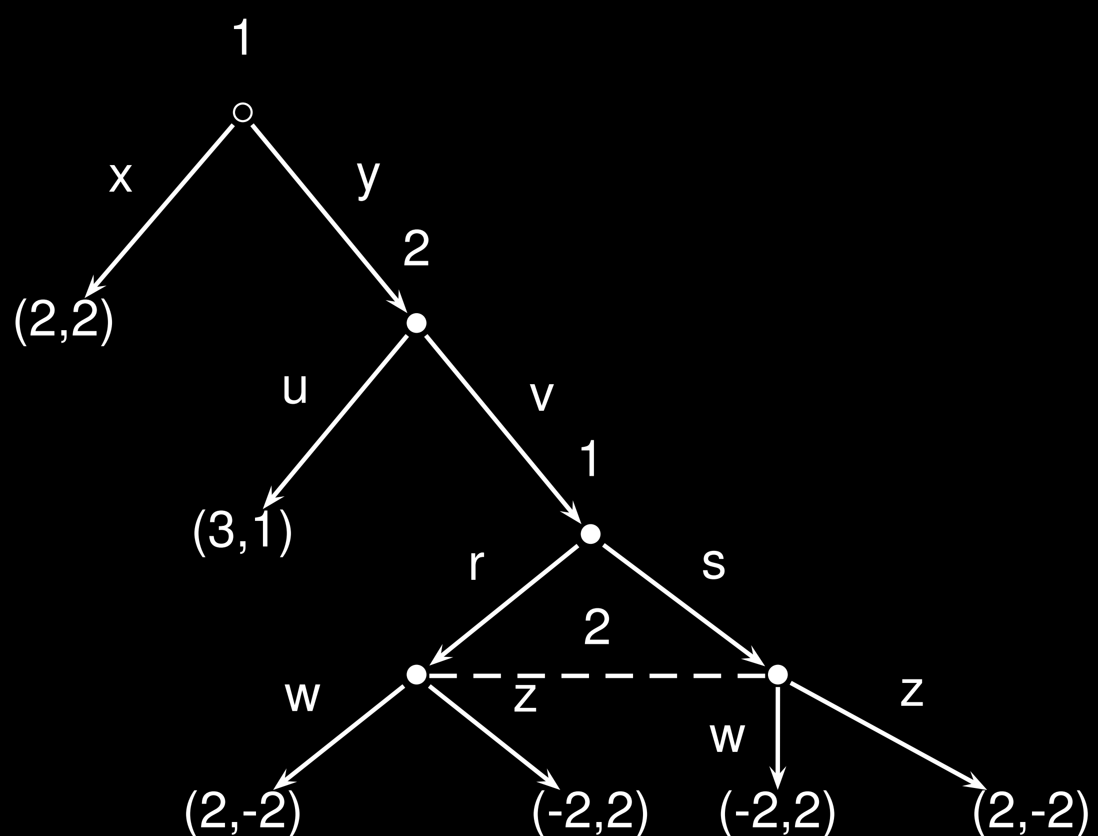


- Récurrence à rebours (**backward induction**)
  - On commence par chercher les choix optimaux à la dernière période (noeuds terminaux).
  - On remonte l'arbre de noeud en noeud, en cherchant à chaque noeud le choix optimal, une fois qu'on a pris en compte les choix optimaux pour chaque noeud fils.

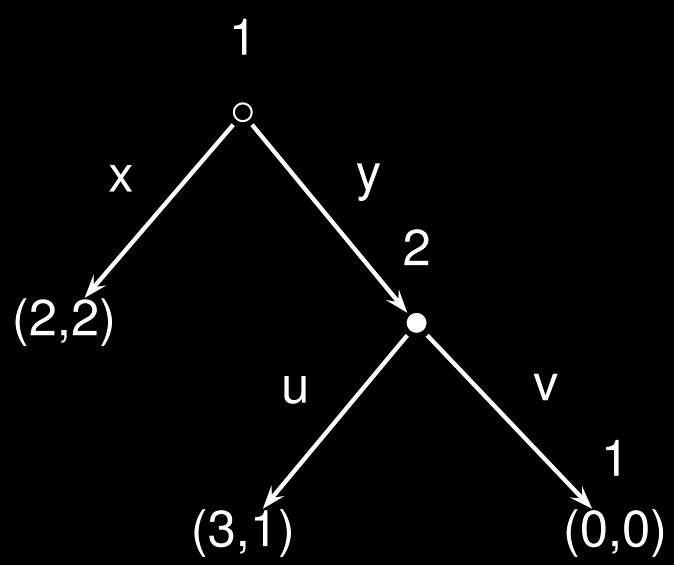
Jeux sous forme extensive

Tout jeu (fini) sous forme extensive à information parfaite a un équilibre de Nash en stratégies pures (équilibre obtenable par récurrence à rebours). (Zermelo (1953), Kuhn (1953))

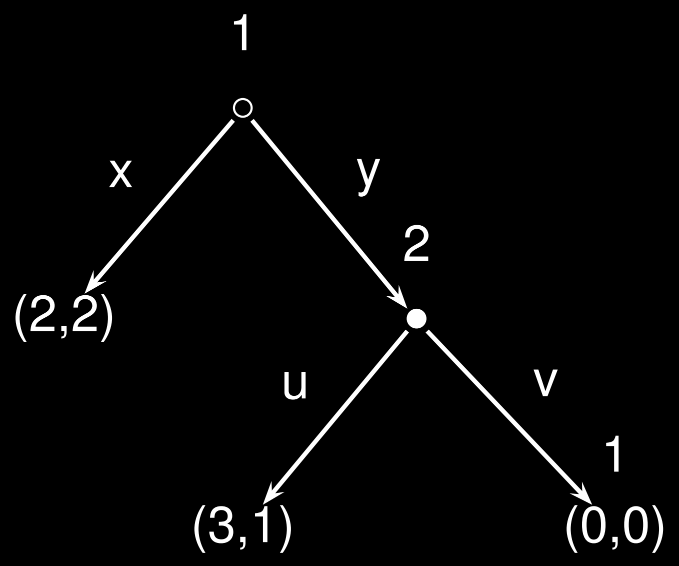
Forme extensive - Sous-jeu



Forme extensive - Sous-jeu

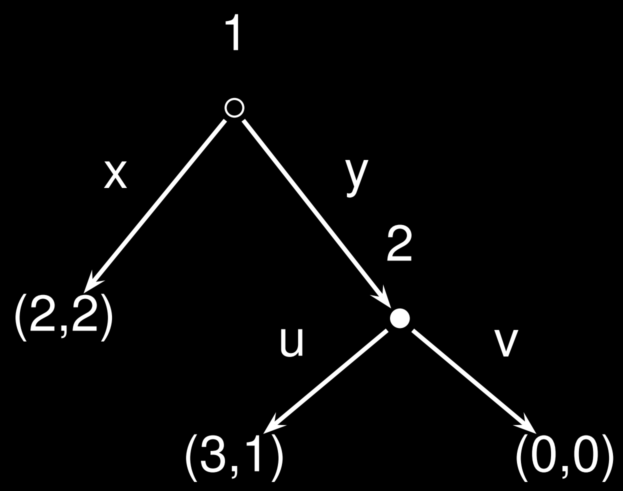


Forme extensive - Sous-jeu



Un *sous-jeu* d'un jeu sous forme extensive est un jeu composé d'un noeud (qui est un ensemble d'information singleton), de tous les noeuds successeurs de ce noeud, de tous les arcs reliant ces noeuds, et des utilités associées à tous les noeuds terminaux successeurs.

Forme extensive - Menaces non crédibles

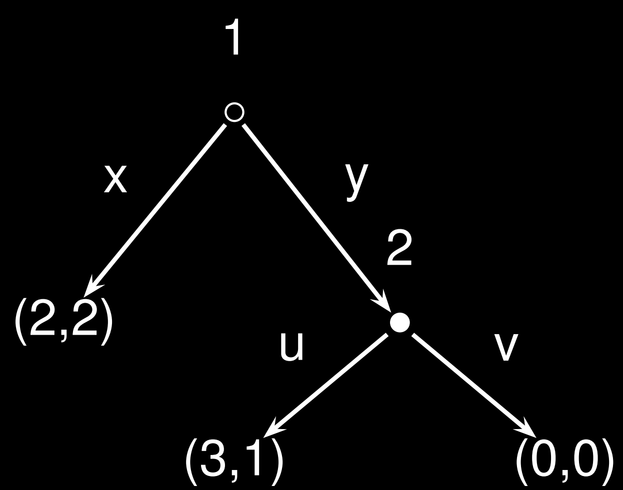


Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	2,2	2,2
y	3,1	0,0

Forme extensive - Menaces non crédibles



Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	2,2	2,2
y	3,1	0,0

▷ l'équilibre de Nash xv n'est pas crédible car il repose sur la menace non-crédible du joueur 2 de jouer v.

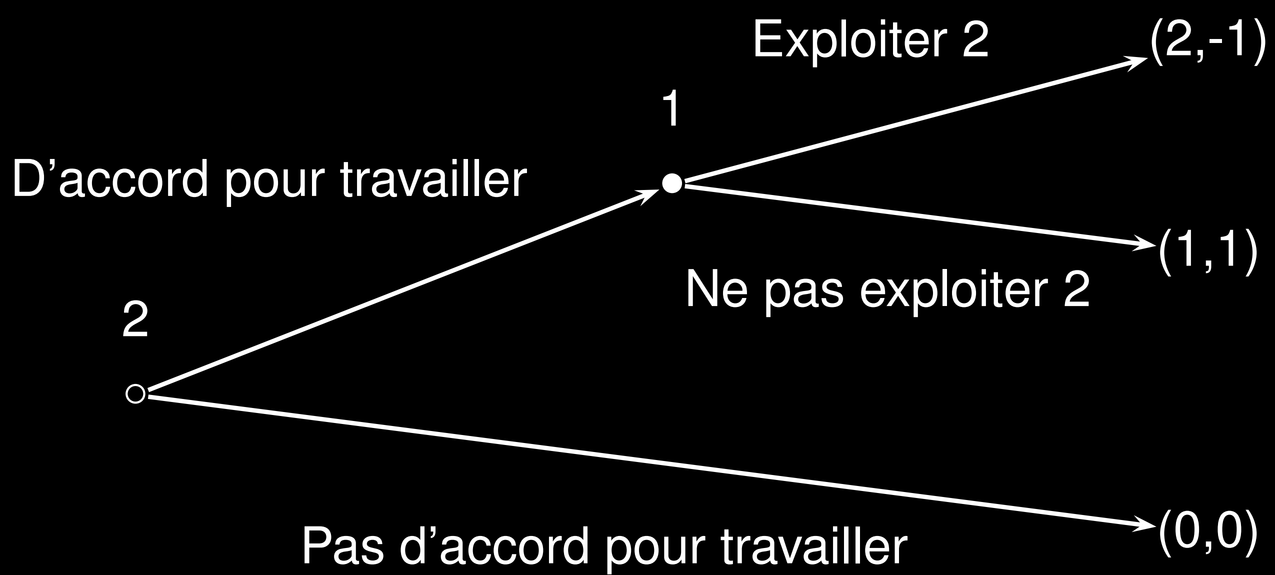
Equilibre parfait en sous-jeux

- Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un **équilibre parfait en sous-jeux** si toute restriction du profil de stratégies à un sous-jeu est un équilibre de Nash pour ce sous-jeu.

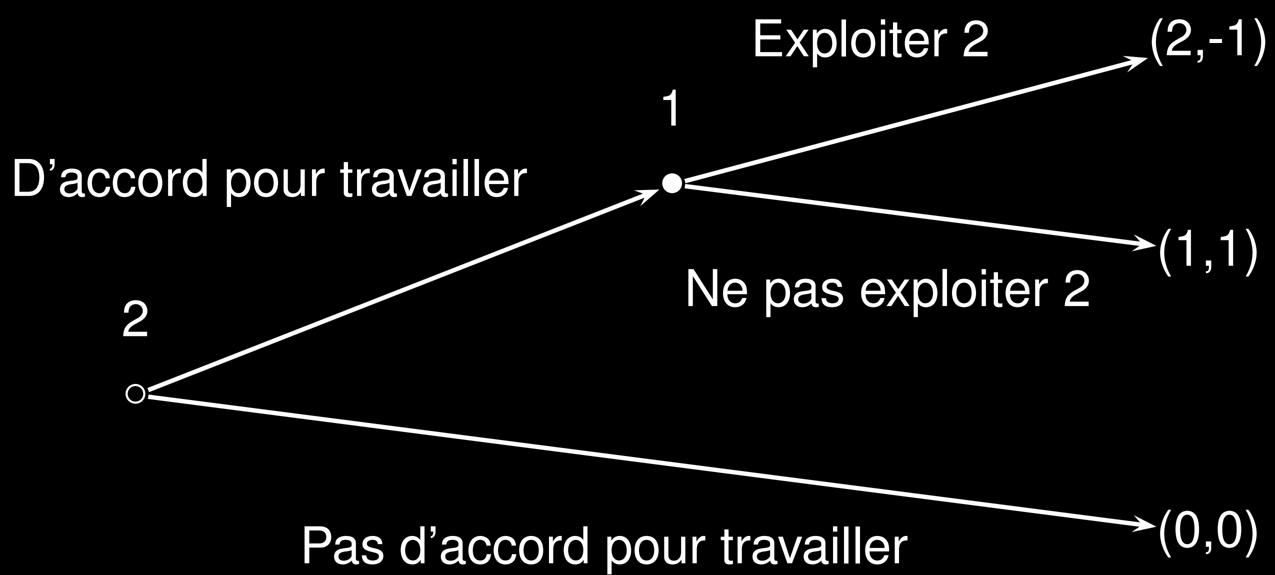
Equilibre parfait en sous-jeux

- ▷ Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un **équilibre parfait en sous-jeux** si toute restriction du profil de stratégies à un sous-jeu est un équilibre de Nash pour ce sous-jeu.
- ▷ Pour les jeux à informations parfaites, la notion d'équilibre parfait en sous-jeux coïncide avec la notion de récurrence à rebours.

Promesse non crédible

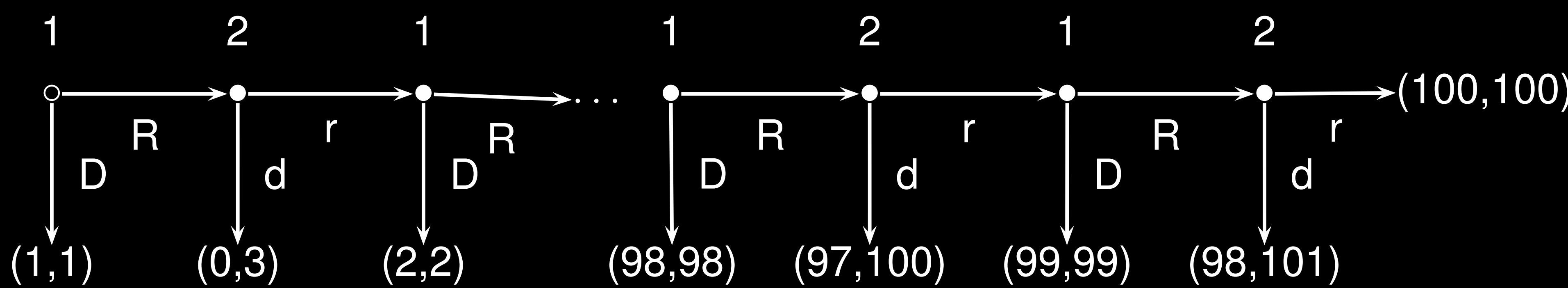


Promesse non crédible



▷ Réputation

Le mille-pattes - Limites de la récurrence à rebours



Limites de la récurrence à rebours

- ▷ Un jeu de partage : Les joueurs 1 et 2 doivent se partager 10 euros. Le joueur 1 choisit d'abord un partage quelconque. Le joueur 2 peut accepter ou refuser. Si le joueur 2 refuse, il fait une proposition pour partager 1 euro. Le joueur 1 peut accepter ou refuser. Si le jouer 1 refuse les deux joueurs ne gagnent rien.

Limites de la récurrence à rebours

- Un jeu de partage : Les joueurs 1 et 2 doivent se partager 10 euros. Le joueur 1 choisit d'abord un partage quelconque. Le joueur 2 peut accepter ou refuser. Si le joueur 2 refuse, il fait une proposition pour partager 1 euro. Le joueur 1 peut accepter ou refuser. Si le jouer 1 refuse les deux joueurs ne gagnent rien.
- Ecrire ce jeu sous forme extensive en ne considérant que les partages (5,5) et (8.5,1.5) pour 1 et le partage (0.5,0.5) pour 2.

Jeux coopératifs à 2 joueurs

- Dans les jeux coopératifs on autorise la communication et les accords entre joueurs avant la partie.
  - Tous les messages formulés par un joueur sont transmis sans modification à l'autre joueur.
  - Tous les accords entre joueurs seront respectés.
  - L'évaluation des situations par un joueur n'est pas perturbée par les négociations préliminaires.
- Guerre des sexes

Jeu de marchandage - Ensemble de négociation

L’ **ensemble de négociation** d’un jeu de marchandage est l’ensemble des issues :

- ▷ réalisables
  - ▷ appartenant à l’espace de marchandage
- ▷ efficientes
  - ▷ telles qu’aucune autre issue ne donne plus à un joueur et autant à l’autre (non pareto-dominée)
- ▷ individuellement rationnelles
  - ▷ chaque joueur gagne au moins autant que le gain qu’il est sur d’obtenir si il n’y a pas d’accord.

Jeu de Marchandage - Solution de Nash

- **Invariance à l'échelle d'utilité**
  Si $[R_1, (u_1^*, v_1^*)]$ et $[R_2, (u_2^*, v_2^*)]$ sont deux versions du même jeu de marchandage, ie si ils ne diffèrent que sur les unités et l'origine des fonctions d'utilités, alors les deux solutions $F([R_1, (u_1^*, v_1^*)])$ et $F([R_2, (u_2^*, v_2^*)])$ doivent être les mêmes au changement d'échelle près.
- **Pareto optimalité**
  La solution du jeu de marchandage (u_0, v_0) doit satisfaire les propriétés suivantes :
  - $u_0 \geq u^*$ et $v_0 \geq v^*$
  - (u_0, v_0) est un point de R
  - il n'y a pas de (u, v) dans R (différent de (u_0, v_0)) tel que $u \geq u_0$ et $v \geq v_0$.

Jeu de Marchandage - Solution de Nash

- **Indépendance des alternatives non disponibles**
  Soient deux jeux de marchandage avec le même point de status quo et tels que les issues du premier sont incluses dans les issues du second. Si la solution du second jeu est réalisable dans le premier jeu, alors ce doit être aussi la solution du premier jeu :
  - Si $R_1 \subseteq R_2$ et $F([R_2, (u^*, v^*)]) \in R_1$, alors $F([R_1, (u^*, v^*)]) = F([R_2, (u^*, v^*)])$
- **Symétrie**
  Si un jeu de marchandage a les propriétés suivantes :
  - $u^* = v^*$
  - $(u, v) \in R$ implique $(v, u) \in R$
  - $(u_0, v_0) = F([R, (u^*, v^*)])$

  Alors

$$u_0 = v_0$$

Jeu de Marchandage - Solution de Nash

Soit un jeu de marchandage $[R, (u^*, v^*)]$, procédons comme suit :

- ▷ Changeons l'origine des utilités des joueurs pour que le point (u^*, v^*) soit transformé en $(0, 0)$. Soit $[R', (0, 0)]$ le jeu correspondant.
- ▷ Dans R' trouver (l'unique) point (u'_0, v'_0) ($u'_0 > 0$ et $v'_0 > 0$) tel que $u'_0 v'_0$ est le maximum de tous les produits uv avec (u, v) dans R' ($u > 0$ et $v > 0$).

Le point (u'_0, v'_0) est la **solution de Nash** du jeu $[R', (0, 0)]$. La solution de Nash de $[R, (u^*, v^*)]$ est obtenu en inversant la transformation d'utilité.

Jeu de Marchandage - Solution de Nash

Soit un jeu de marchandage $[R,(u^*,v^*)]$, procédons comme suit :

- ▷ Changeons l'origine des utilités des joueurs pour que le point (u^*,v^*) soit transformé en $(0,0)$. Soit $[R',(0,0)]$ le jeu correspondant.
- ▷ Dans R' trouver (l'unique) point (u'_0,v'_0) ($u'_0 > 0$ et $v'_0 > 0$) tel que $u'_0 v'_0$ est le maximum de tous les produits uv avec (u,v) dans R' ($u > 0$ et $v > 0$).

Le point (u'_0,v'_0) est la **solution de Nash** du jeu $[R',(0,0)]$. La solution de Nash de $[R,(u^*,v^*)]$ est obtenu en inversant la transformation d'utilité.

Théorème. **L'unique solution qui vérifie les 4 propriétés désirées est la solution de Nash.** (Nash (1950))

Jeux contre la nature

- Si on considère un jeu à deux joueurs dont un des deux joueurs est la nature, on fait de la décision dans le risque ou dans l'incertain.
- En ce sens la théorie de la décision peut être vue comme un cas particulier de la théorie des jeux.

Conclusion

- Jeux coopératifs
- Jeux à information incomplète
- Rationalité limitée