Problèmes de satisfaction de contraintes (CSP)

- Cours 1: Introduction
  - Description du domaine d'applications
  - Aperçus des modèles et algorithmes de résolutions
- **Cours 2 : Modelisation**
  - Concept de bases : variables, domaines, contraintes
  - Exemples
- Cours 3: Résolution
  - Concept de base : recherche et propagation
  - exemples

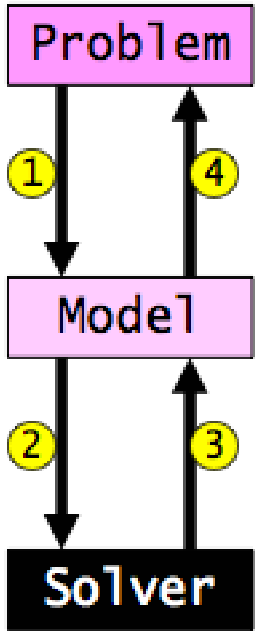
Modèle?

C’est quoi un modèle?

- Un modèle est une abstarction d’un problème
- Un modèle doit respecter le langage du solveur

(le solveur est une boite noire)

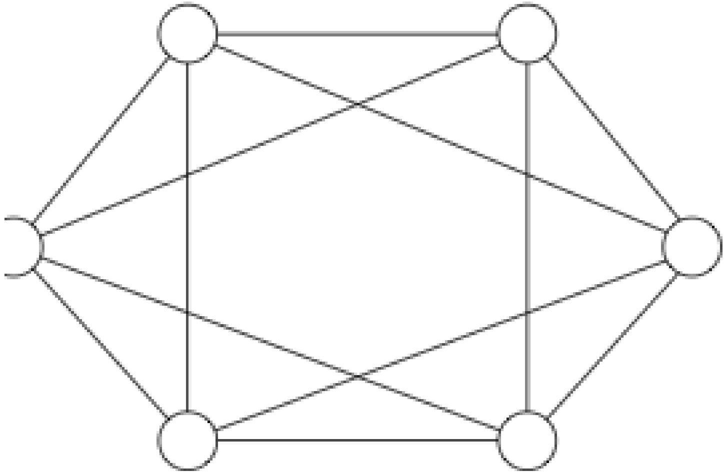
Meilleur est le modèle (et le solveur), meilleur est la solution



Coloriage de graphe

Coloriage des nœuds d'un graphe

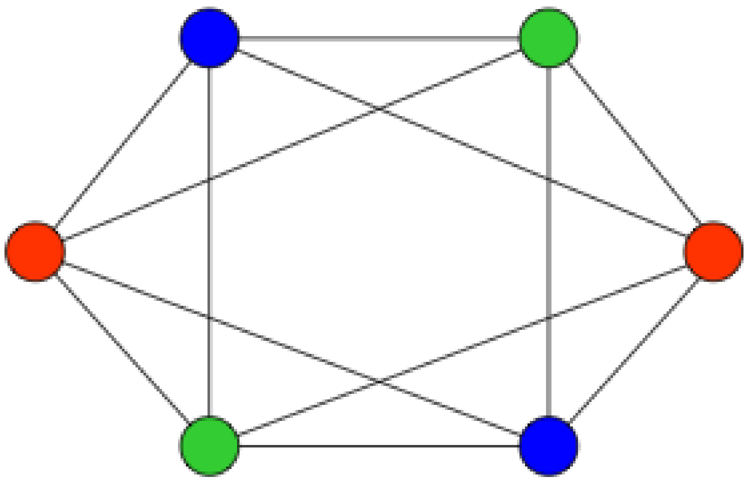
- Quelle est le nombre minimal de couleur tel que deux nœuds adjacents reçoivent des couleurs différentes?



Coloriage de graphe

Coloriage des nœuds d'un graphe

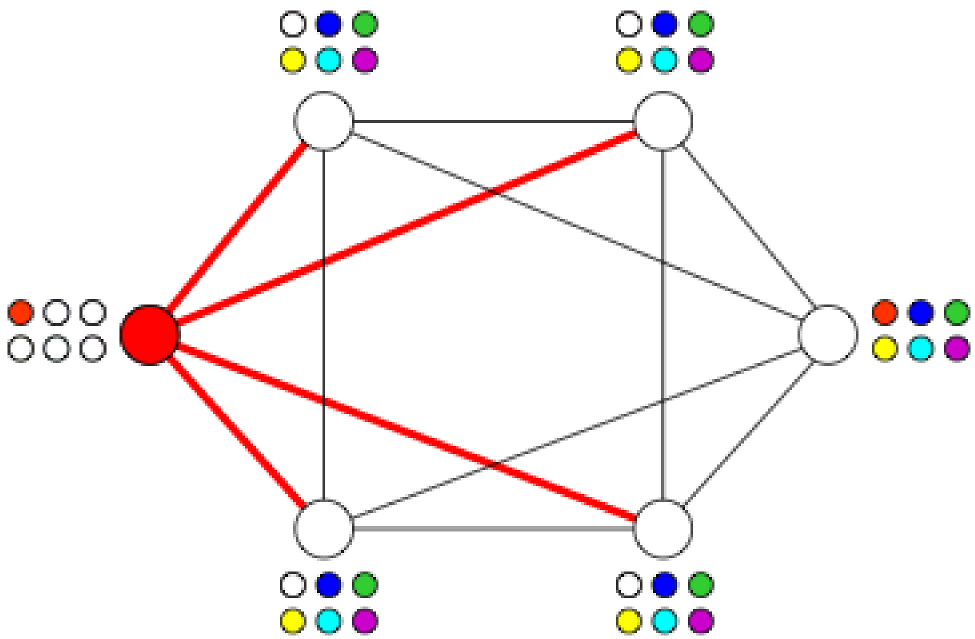
- Quelle est le nombre **minimal** de couleur tel que deux nœuds adjacents reçoivent des couleurs différentes?



Coloriage de graphe

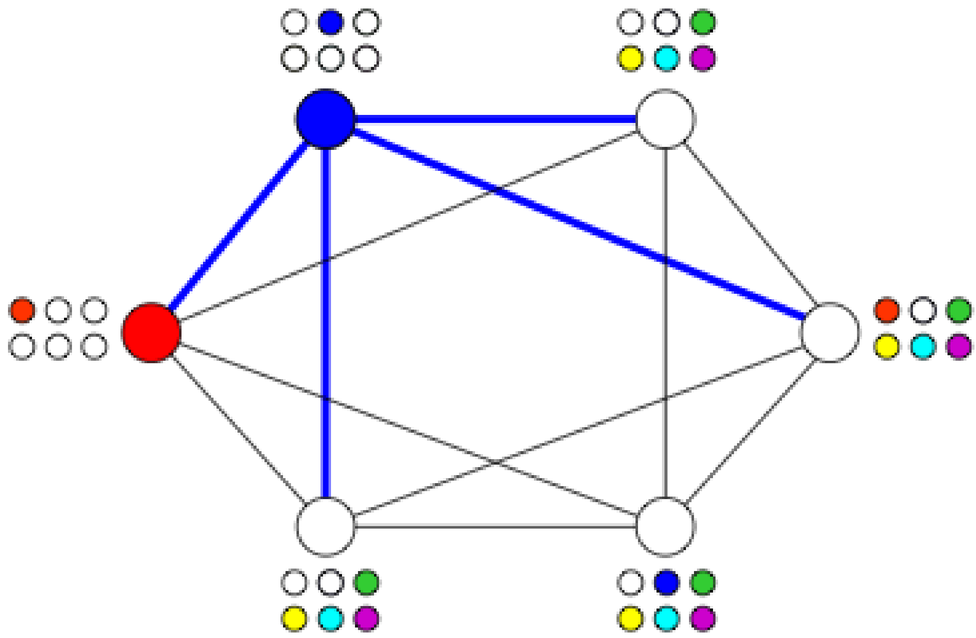
Comment colorier le graphe?

- Il y a 6 nœuds, donc un maximum de 6 couleurs :



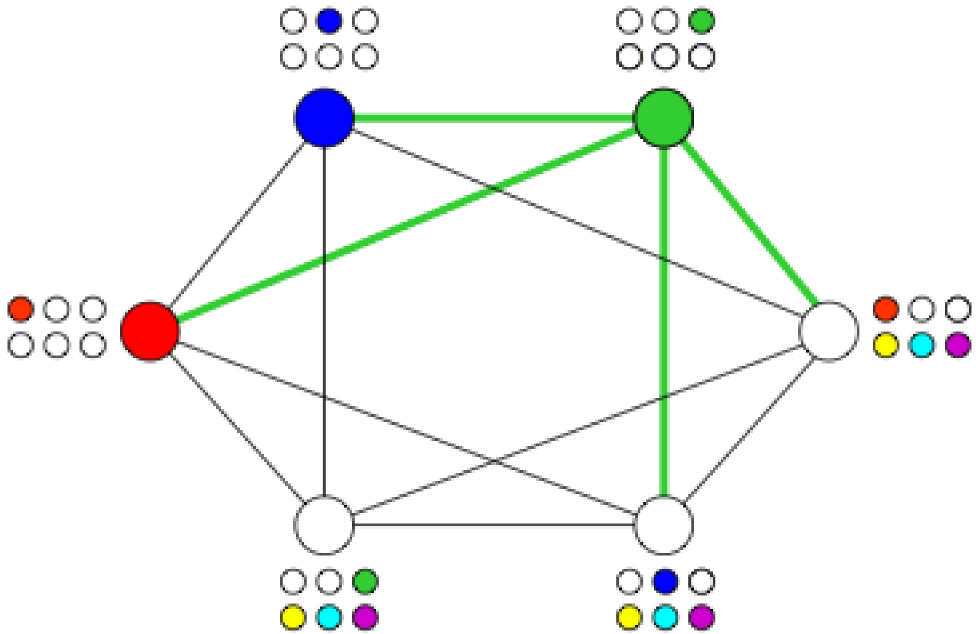
Coloriage de graphe

Comment colorier le graphe?



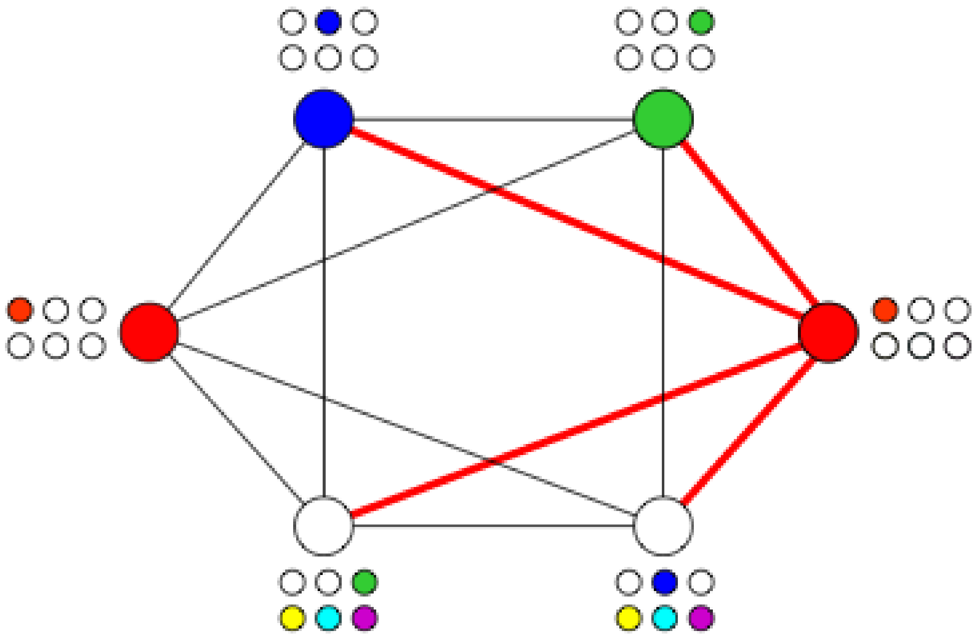
Coloriage de graphe

Comment colorier le graphe?



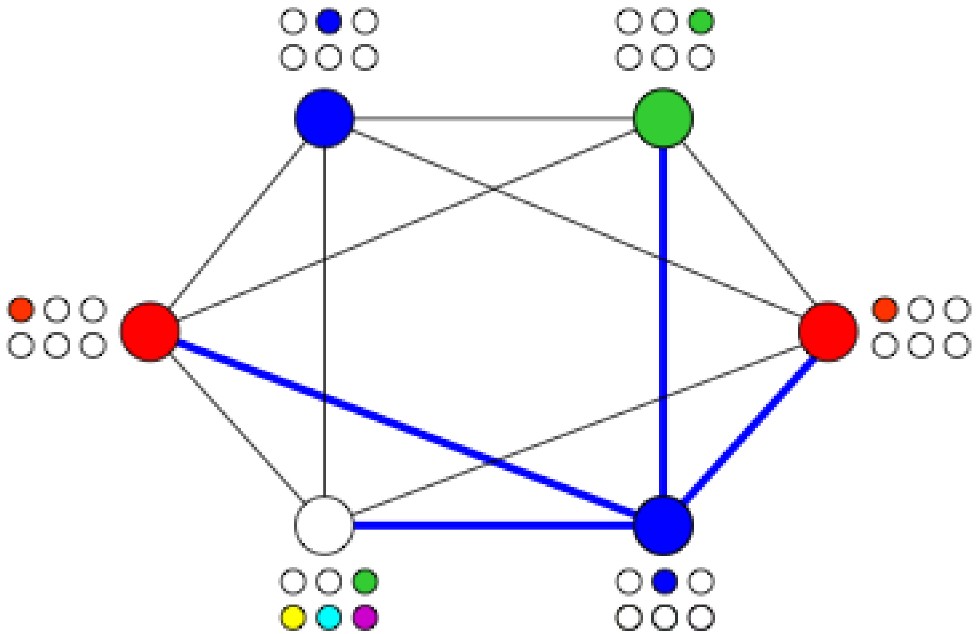
Coloriage de graphe

Comment colorier le graphe?



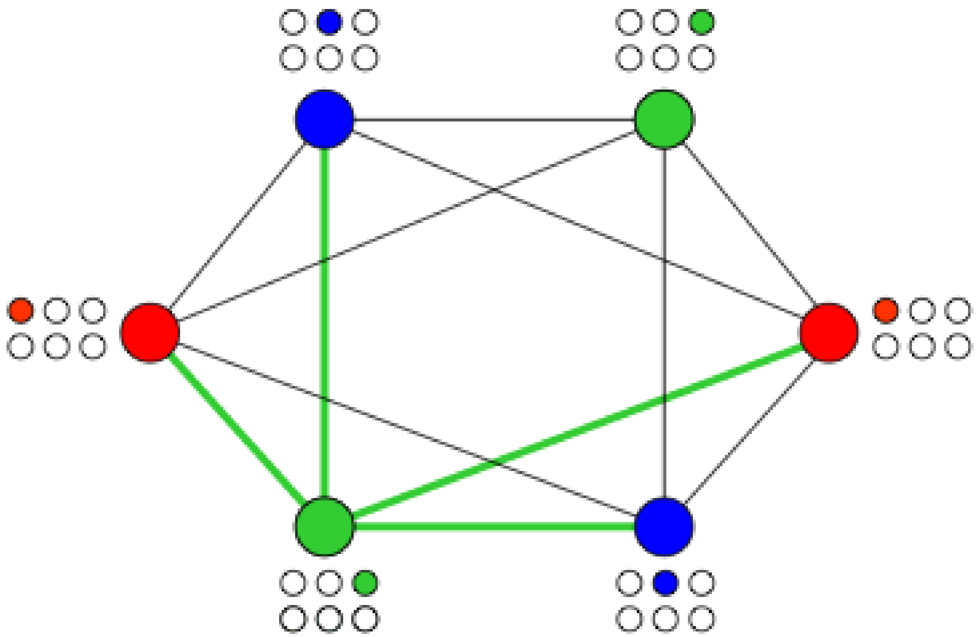
Coloriage de graphe

Comment colorier le graphe?



Coloriage de graphe

Comment colorier le graphe?

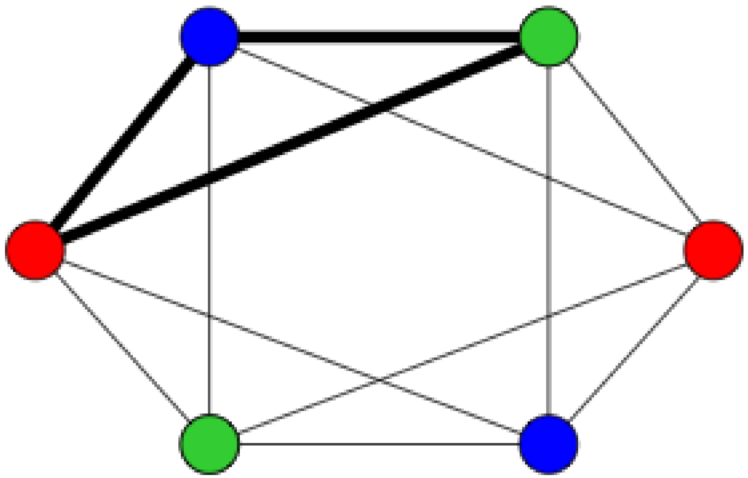


Coloriage de graphe

Comment savoir si la solution est optimale?

La **clique** la plus large contient 3 nœuds :

On a besoins d'au moins 3 couleurs pour cette clique



- Une clique est un (sous)-graphe contenant une arête entre chaque deux noeuds

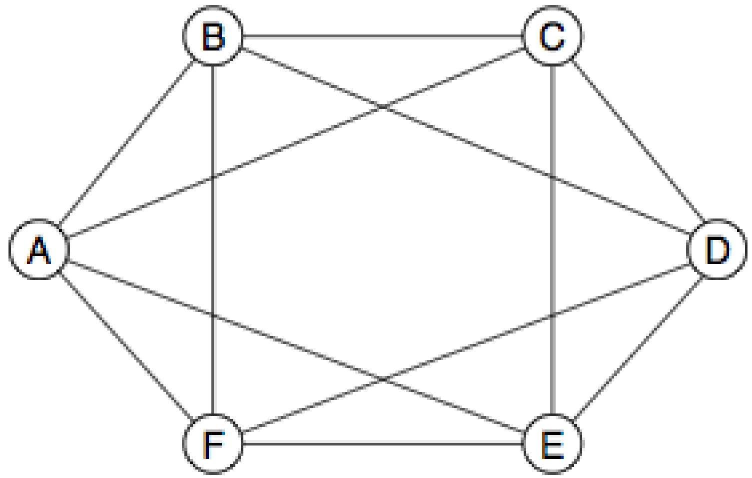
Coloriage de graphe : modèle

Etape 1 :

Donner à chaque nœud un nom : A, B, C, D, E, F.

Elle représente les couleurs à affecter aux nœuds

Par exemple ‘A = rouge’



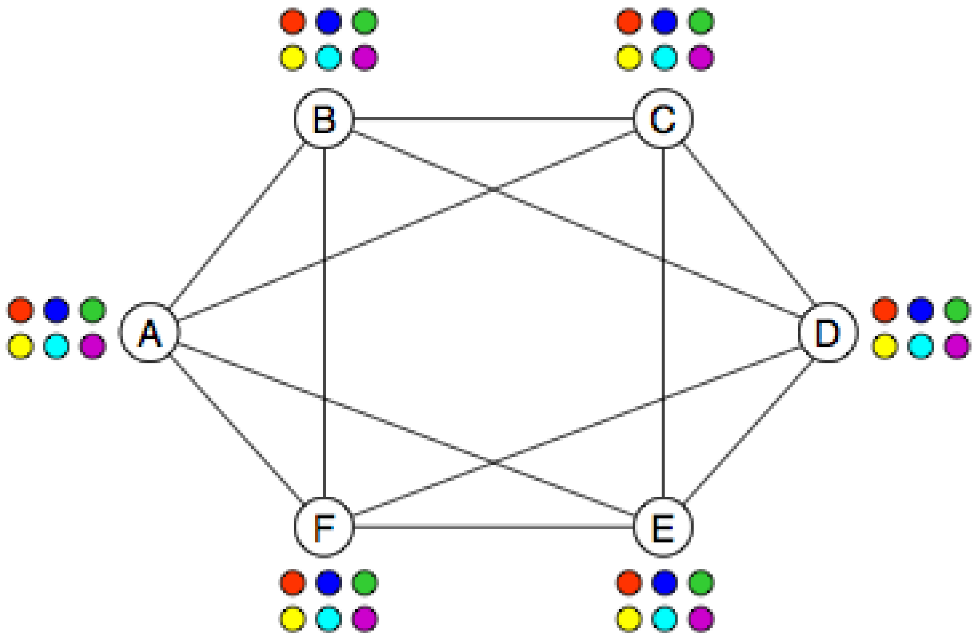
- Elles représentent les variables

Coloriage de graphe : modèle

Etape 2 :

Initialement tous les nœuds peuvent être

{rouge, bleu, vert, jaune, blueciel, violet}

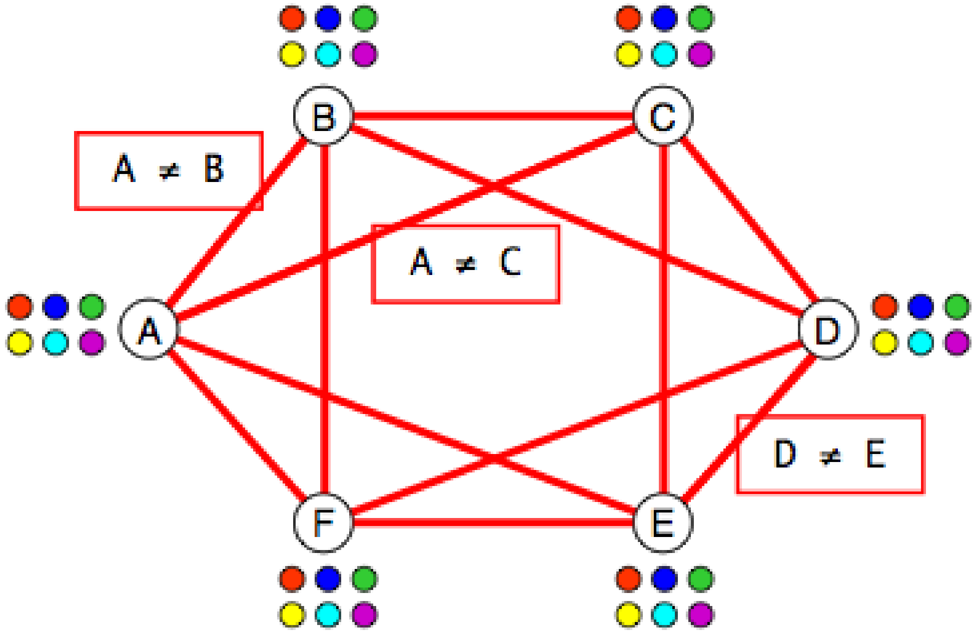


- Elles représentent les domaines des variables

Coloriage de graphe : modèle

Etape 3 :

Déclarer que deux nœuds adjacents ne peuvent prendre la même couleur

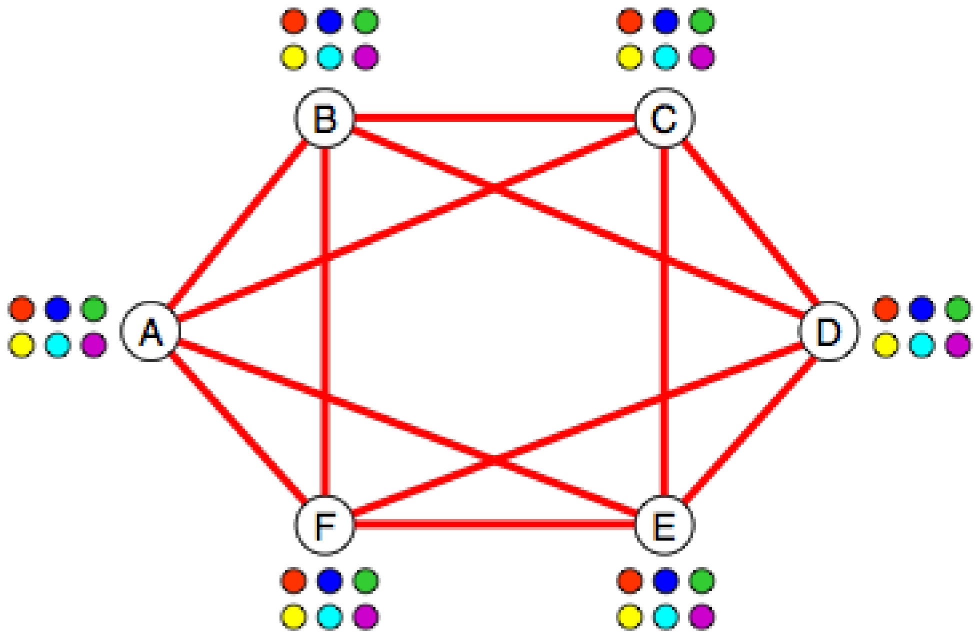


- Elles représentent les contraintes

Coloriage de graphe : modèle

Etape 4 :

Minimiser le nombre de couleurs



- Elle représente la fonction objectif

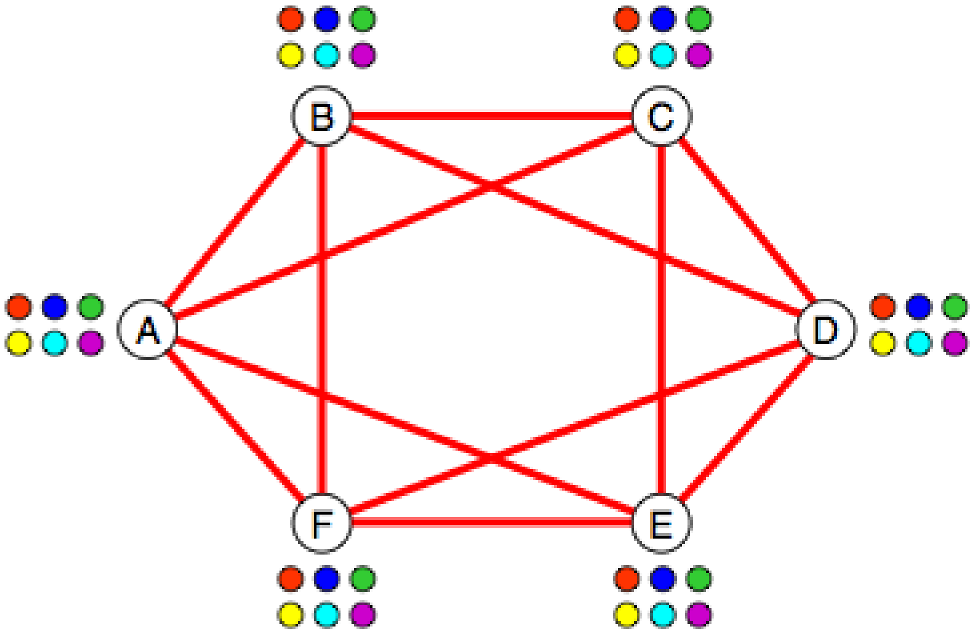
Coloriage de graphe : modèle

Modèle complet :

Variables : A, B, C, D, E, F

Domaines : {rouge, bleu, vert, jaune, blueciel, violet}

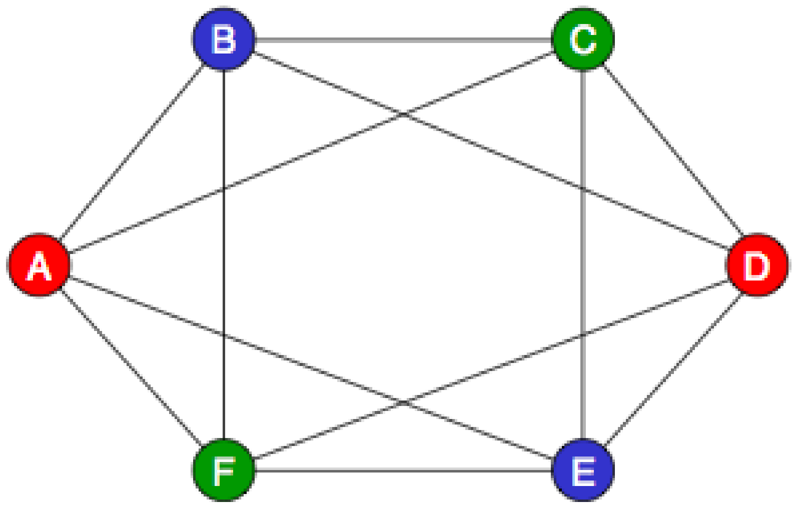
Contraintes : A≠B, A≠C, A≠E, A≠F, B≠C, B≠D, B≠F,
C≠D, C≠E, E≠E, D≠F, E≠F



Coloriage de graphe : modèle

Solution est :

Affecter pour chaque variable une couleur de manière à satisfaire toutes les Contraintes



pas nécessairement optimale

Modélisation par des contraintes

En raisonnement par contraintes, un modèle est construit en utilisant

- des **variables**
- des **domaines** des variables
- des **contraintes** entre les variables

Un tel modèle est appelé **Problème de Satisfaction de Contraintes (CSP)**

Une **solution** à un CSP est :

  – Affecter à chaque variable une valeur de son domaine de manière à satisfaire toutes les contraintes

- Un **solveur de contraintes** permet de
  – Trouver une solution au CSP,
  – Ou de prouver qu'aucune solution n'existe.

Variables et domaines

Les variables peuvent avoir différents types de noms :

A, B, C, D, E, F

x1, x2, x3, x4, x5, x6

startT1, startT2, startT3, startT4

Le domaine des variables peut être fini ou infini :

{rouge, vert, bleu}	tout type d'éléments
{0, 1, 2, 3, 4, 5}	des entiers naturels
{ {a,b}, {a,c}, {b, c}, {a, b, c} }	des ensembles
[0, 100]	des nombres réels

Les contraintes

Une contrainte peut être toute relation sur un ensemble de variables,

par exemple :

Sur 1 variable A : $A \neq blue$

Sur une variable x : $x \leq 5$

Entre deux variables A et B : $A \neq B$

Entre deux variables x et y : $x \leq y$

Entre n variables : x1, x2, …, xn :

alldifferent(x1,x2,…,xn) toutes les variables doivent être deux à deux différentes

Les contraintes

D'autres types de contraintes :

$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 18$$

$$y = \max(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$(a \text{ OR NOT } b \text{ OR NOT } c) \Rightarrow ((b \text{ OR NOT } c) \text{ AND } (a \text{ OR } c))$$

Chaque librairie du langage a ses contraintes prédéfinies.

Votre modèle doit utiliser les contraintes du langage

Modélisation de problèmes combinatoires

Exemples :

- Puzzles crypto-arithmétique
- Carrés latin « Latin squares »

Puzzles Crypto-Arithmétique

Remplacer chaque lettre par par un chiffre distinct tel que :

$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ +\ \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$	$\begin{array}{r} 9567 \\ +1085 \\ \hline 10652 \end{array}$

est correcte

variables: D, E, M, N, O, R, S, Y

domains: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

constraints: $D \neq 0$, $M \neq 0$,

$$\begin{array}{r} 1000 \cdot S + 100 \cdot E + 10 \cdot N + D\ + \\ 1000 \cdot M + 100 \cdot O + 10 \cdot R + E\ = \\ 10000 \cdot M + 1000 \cdot O + 100 \cdot N + 10 \cdot E + Y \end{array}$$

$D \neq E, D \neq M, D \neq N, D \neq O, D \neq R, D \neq S, D \neq Y, E \neq M, E \neq N, E \neq O, E \neq R,$
$E \neq S, E \neq Y, M \neq N, M \neq O, M \neq R, M \neq S, M \neq Y, N \neq O, N \neq R, N \neq S, N \neq Y,$
$O \neq R, O \neq S, O \neq Y, R \neq S, R \neq Y, S \neq Y$

Puzzles Crypto-Arithmétique

Remplacer chaque lettre par par un chiffre distinct tel que :

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ +\ \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9567 \\ +1085 \\ \hline 10652 \end{array}$$

est correcte

variables: D, E, M, N, O, R, S, Y
domains: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
constraints: $D \neq 0$, $M \neq 0$,

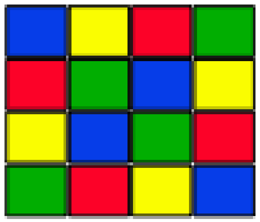
$$\begin{array}{r} 1000 \cdot S + 100 \cdot E + 10 \cdot N + D + \\ 1000 \cdot M + 100 \cdot O + 10 \cdot R + E = \\ 10000 \cdot M + 1000 \cdot O + 100 \cdot N + 10 \cdot E + Y \end{array}$$

alldifferent(D, E, M, N, O, R, S, Y)

Carrés latin « Latin squares »

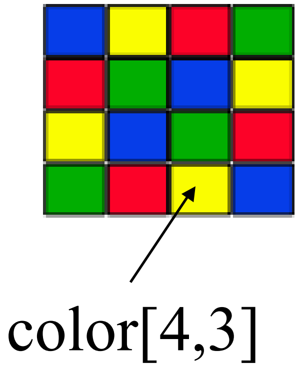
Etant donnée n couleurs, un carré latin (ou quasigroup) d'ordre n est un carré n x n colorié tel que :

- Toutes cellule est coloriée
- Chaque couleur apparaît exactement une fois sur chaque ligne
- Chaque couleur apparaît exactement une fois sur chaque colonne



Carré latin d'ordre 4

Carrés latin « Latin squares »



Variables :

For row i in {1..n}

column j in {1..n}:

color[i,j]

Domaines : {1,2,…,n} « les couleurs »

Contraintes :

For each row i in {1..n}:

alldifferent(color[i,1], color[i,2],.., color[i,n])

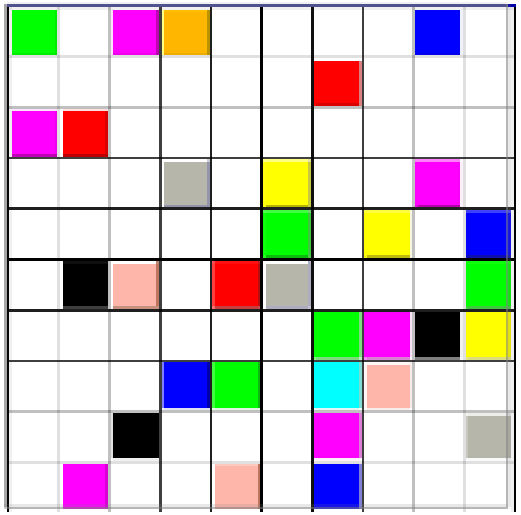
For each column j in {1..n}:

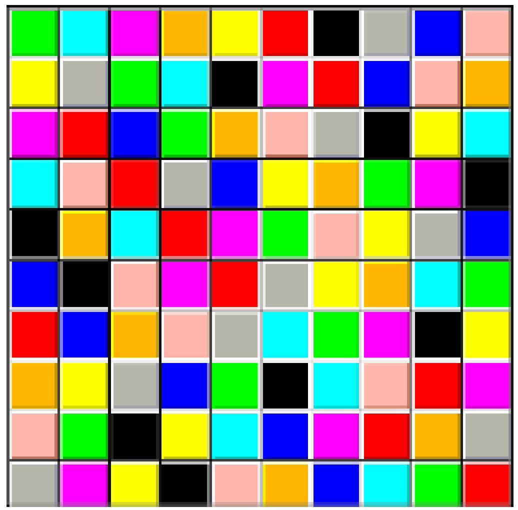
alldifferent(color[1,j], color[2,j],.., color[n,j])

Complétion d’un carré latin

Etant donnée une affectation partiel de couleurs (10 couleurs), est -ce que le carré latin partiel peut être complété en un carré latin complet ?

Exemple:



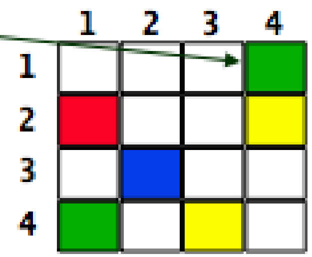


32% de cellule colorées

Complétion d’un carré latin

Ajouter à la précédent modèle les contraintes suivantes :

```
constraints:
  color[1,4] = 4
  color[2,1] = 3
  color[2,4] = 2
  color[3,2] = 1
  color[4,1] = 4
  color[4,3] = 2
```



(ici bleu = 1, jaune = 2, rouge = 3, vert = 4)

Problème d'investissements

Budget : 14000$

investment	1	2	3	4	5	6
cash required	$5k	$7k	$4k	$3k	$4k	$6k
NPV	$16k	$22k	$12k	$8k	$11k	$19k

variables: use_1, use_2, use_3, use_4, use_5, use_6

domains: {0,1} (0=no, 1=yes)

constraints:

$$5 \cdot use_1 + 7 \cdot use_2 + 4 \cdot use_3 + 3 \cdot use_4 + 4 \cdot use_5 + 6 \cdot use_6 \leq 14$$

$$\text{maximize}(\ 16 \cdot use_1 + 22 \cdot use_2 + 12 \cdot use_3 + 8 \cdot use_4 + 11 \cdot use_5 + 19 \cdot use_6\ )$$

Problème d'investissements

Budget : 14000$

investment	1	2	3	4	5	6
cash required	$5k	$7k	$4k	$3k	$4k	$6k
NPV	$16k	$22k	$12k	$8k	$11k	$19k

variables: use_1, use_2, use_3, use_4, use_5, use_6

domains: {0,1}   (0=no, 1=yes)

constraints:

$$\sum_{i=1..6} \mathrm{cash}[i] \cdot use_i \le 14{,}000$$

$$\mathrm{maximize}\left(\sum_{i=1..6} \mathrm{NPV}[i] \cdot use_i \right)$$

Problème d'investissements

Un autre modèle

investment	1	2	3	4	5	6
cash required	$5k	$7k	$4k	$3k	$4k	$6k
NPV	$16k	$22k	$12k	$8k	$11k	$19k

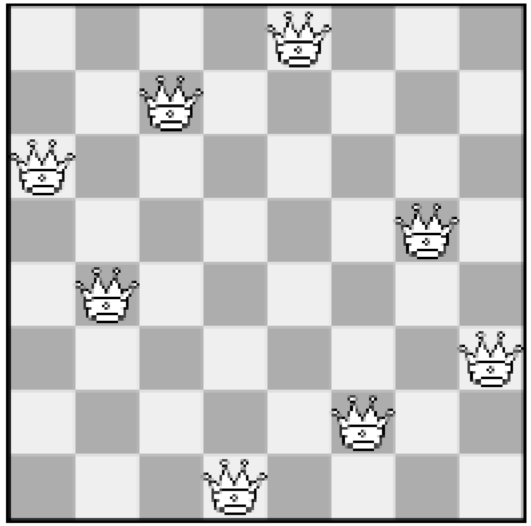
```
set variable: plan

domain: Ø ⊆ plan ⊆ {1,2,3,4,5,6}

constraints:
```

$$\sum_{i \text{ in plan}} \text{cash}[i] \leq 14{,}000$$

$$\text{maximize}\left(\sum_{i \text{ in plan}} \text{NPV}[i] \right)$$

n-Reines

Placer n reines sur un échiquier n x n tel que deux reines ne soient pas en prises



$n = 8$

Comment modéliser ce problème?

Sudoku

Un **sudoku** partiellement complété, trouvez la solution?

Comment modéliser ce problème ?

	3						1	
				4			6	
4		8		1	5			3
							8	4
1			5		4			2
5	9							
9			2	6		1		7
	1			5				
	2						3	