Des fonctions de transformation pour restaurer l'intercomparabilité en fusion de croyances

Using transformation functions to restore intercomparability in belief merging

Julien Rossit

Université Lille-Nord de France, Artois, F-62307 Lens

CRIL, F-62307 Lens

CNRS UMR 8188, F-62307 Lens

France

rossit@cril.univ-artois.fr

Résumé :

La plupart des opérateurs utilisés pour la fusion de bases de croyances pondérées se reposent sur des opérateurs d'agrégation : ceux-ci combinent les degrés de cohérence des interprétations possibles vis-à-vis des sources à fusionner, eux-même fortement dépendants des poids que ces sources accordent elles-même à leurs propres croyances. Cet article se concentre sur la notion d'intercomparabilité des poids associés aux croyances issues de différentes sources. Nous rappellerons comment restaurer l'intercomparabilité au moyen d'*échelles compatibles*, puis montrerons comment traiter ce problème au moyen de *fonctions de transformation* appliquées aux échelles de poids des sources. Après avoir présenté plusieurs classes de transformations, nous étudierons l'une d'elle en détails.

Mots-clés :

Intercomparabilité, fusion de croyances, bases de croyances pondérées.

Abstract:

Most of existing merging operators, applied to fuse weighted belief bases, rely on aggregation operators : those operators combine consistency degrees, associated to possible worlds by sources to merge. However, consistency degrees strongly rely on weights that sources associate themselves to their own beliefs. This paper focuses on the intercomparability notion between weights associated to beliefs by different sources. We first recall how to restore intercomparability by the means of *compatible scales*, and then show how to handle this problem with the notion of *transformation functions* applied to weight scales used by sources. We introduce several classes of transformation functions, and then study one of them in details.

Keywords:

Intercomparability, belief merging, weighted belief bases

Introduction

De nombreuses applications récentes nécessitent la confrontation de différents fragments d'information, souvent contradictoires, pour obtenir un point de vue global cohérent. Ces situations mènent à un problème de *fusion de données*. Différentes approches ont été proposées afin de fusionner des bases de croyances potentiellement contradictoires [4–7]. La plupart de ces méthodes se reposent sur l'hypothèse suivante : les poids associés aux croyances par les sources, puis manipulés, comparés ou combinés par les opérateurs de fusion, sont comparables d'une source à l'autre. Cette *hypothèse d'intercomparabilité* peut paraître trop forte pour certaines applications, par exemple lorsque les croyances sont issues de sources de qualité inconnues, par exemple le web.

La notion d'échelle compatible, proposée dans [1], permet de construire des opérateurs explorant simplement les différentes correspondances possibles entre les poids exprimés par les différentes sources. Cette notion ne permet cependant pas de tenir compte de certaines relations quantitatives, exprimées entre les poids associés aux croyances d'une même source. Cet article propose une autre stratégie pour restaurer

rer l'intercomparabilité entre les sources, basée sur la notion de *fonction de transformation*. Une fonction de transformation consiste en l'application d'une fonction positive strictement monotone sur l'échelle de poids d'une source.

Après avoir présenté plusieurs classes particulières de fonctions de transformation, nous montrons, dans cet article, que l'une d'entre elles permet de construire des opérateurs de fusion équivalents à ceux basés sur la notion d'échelle compatible. Nous étudions ensuite en détails la classe des fonctions de transformation translatives et proposons la caractérisation d'un opérateur construit sur cette classe. Nous montrons finalement que cet opérateur constitue un compromis entre l'utilisation d'opérateurs de fusion classiques et ceux basés sur la notion d'échelles compatibles.

1 Sur la fusion de bases de croyances pondérées

Soit $\mathcal{L}$ un langage propositionnel fini. Ω représente l'ensemble des interprétations de $\mathcal{L}$ et ω un élément de Ω . Les lettres grecques φ et ψ représentent des formules propositionnelles. $Mod(\varphi)$ représente l'ensemble des modèles de φ , et $\top$ représente la tautologie.

1.1 Représentation des croyances individuelles

Une *croyance pondérée* est une information incertaine que possède une source (ou agent) sur le monde, représentée par une formule propositionnelle, et associée à un poids (également appelé rang, ou valuation) : ce poids représente un doute (ou importance) relatif associé à cette croyance. Un multi-ensemble (un ensemble pouvant contenir plusieurs occurrences d'un même objet) de croyances pondérées est appelé *base de croyance pondérées*. Les bases de croyances pondérées offrent un cadre approprié à la représentation des informations incertaines (ou prioritaires), utilisé dans différents contextes tels que la théorie des pos-

sibilités [2] ou les fonctions ordinales conditionnelles (OCF) [8–10]. Une base de croyances pondérées est une représentation compacte des croyances d'un agent :

Définition 1 (Base de croyances pondérées)

Une base de croyances pondérées B_i est un multi-ensemble de formules propositionnelles pondérées,

$$B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})), j \in \{1, \dots, m_i\}\},$$

avec $\varphi_{ij} \in \mathcal{L}$, et $R_{B_i}(\varphi_{ij}) \in \mathbb{N}^*$.

$(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$ signifie que φ_{ij} possède un rang de priorité d'au moins $R_{B_i}(\varphi_{ij})$. Intuitivement, les formules associées aux rangs les plus élevés sont les croyances préférées d'une source.

Dans cet article, nous utiliserons l'opérateur *Max* pour agréger les préférences individuelles d'une source : une interprétation ω est préférée à une autre interprétation ω' si et seulement si la croyance la plus forte falsifiée par ω' est moins importante que la croyance la plus forte falsifiée par ω . Plus formellement :

Définition 2 (κ -fonction basée sur le *Max*)

Une κ -fonction κ_{B_i} est une fonction qui associe chaque interprétation $\omega \in \Omega$ à un entier $\kappa_{B_i}(\omega)$ tel que :

$$\kappa_{B_i}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \omega \models \varphi_{ij} \\ \text{Max}\{R_{B_i}(\varphi_{ij}) : \\ \omega \not\models \varphi_{ij}, (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\kappa_{B_i}(\omega)$ est également appelé *degré de cohérence* (ou inutilité) de ω respectivement à B_i . L'ordre sur les mondes possibles, induit par leur degré de cohérence respectif, est une représentation commune de l'*état épistémique* d'une source. Cet ordre est la base de la sémantique de la logique possibiliste [2].

1.2 Un exemple de fusion de croyances : un opérateur basé sur la somme

A l'inverse des croyances, les *contraintes* sont des informations sur le monde totalement sûres et cohérentes. Alors que les

croiances peuvent être acceptées, affaiblies ou ignorées, les contraintes doivent être déduites du résultat de la fusion. Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de n bases de croiances pondérées, représentant les croiances issues de n sources, et soit μ une formule propositionnelle représentant les contraintes d'intégrité à satisfaire. Le but de la fusion de croiances est, étant donné μ , d'ordonner les modèles de μ , respectivement aux croiances fournies par les différentes sources. Cet ordre est obtenu en utilisant un opérateur de fusion noté Δ^μ . Nous notons $\triangleleft^E$ l'ordre sur Ω , représentant le résultat de la fusion de E , noté $\Delta^\mu(E)$. Nous notons $Bel(\Delta^\mu(E))$ l'ensemble des croiances collectives préférées, représentant les croiances réelles de l'ensemble de sources après fusion de E . Les modèles de $Bel(\Delta^\mu(E))$ sont ceux minimaux pour $\triangleleft^E$.

Afin d'ordonner les mondes possibles, nous utilisons la notion de *profil* associé à une interprétation ω , noté $\nu_E(\omega)$ et défini par

$$\nu_E(\omega) = \langle \kappa_{B_1}(\omega), \dots, \kappa_{B_n}(\omega) \rangle.$$

Ce profil représente le degré de cohérence d'une interprétation ω vis-à-vis de chaque source.

Différentes méthodes de fusion ont été proposées dans la littérature [4–7]. Parmi celles-ci, nous présentons dans cette section un mode de fusion répandu, reposant sur l'agrégation des différentes interprétations possibles : afin de déterminer $\Delta^\mu_\Sigma(E)$, les degrés de cohérence d'une interprétation $\kappa_{B_i}(\omega)$ sont combinés au moyen de l'opérateur d'agrégation Σ , puis les interprétations sont ordonnées respectivement au poids auquel elles sont associées. Celui-ci nous permet de définir un pré-ordre total sur les interprétations, noté $\triangleleft^E_\Sigma$, de la manière suivante :

Définition 3 (Définition de $\triangleleft^E_\Sigma$) Soit E un multi-ensemble de bases de croiances pondérées. Soient ω et ω' deux interprétations de Ω , et $\nu_E(\omega)$, $\nu_E(\omega')$ leur profil respectif.

$$\omega \triangleleft^E_\Sigma \omega' \text{ ssi } \Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega')),$$

$$\text{avec } \Sigma(\nu_E(\omega)) = \sum_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega)$$

Les modèles des croiances préférées selon $\Delta^\mu_\Sigma(E)$ sont les modèles de μ minimaux pour $\triangleleft^E_\Sigma$. Plus formellement :

$$\text{Mod}(Bel(\Delta^\mu_\Sigma(E))) = \{\omega \in \text{Mod}(\mu) : \nexists \omega' \in \text{Mod}(\mu), \omega' \triangleleft^E_\Sigma \omega\}$$

Illustrons cet opérateur par un exemple :

Exemple 4 Soit le multi-ensemble $E = \{B_1, B_2\}$ tel que $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ et $B_2 = \{(a \vee b, 3), (\neg b, 1)\}$. Les profils associés aux interprétations sont donnés par le Tableau 1.

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Σ
ω_0	0	0	6	3	$\langle 6, 3 \rangle$	9
ω_1	0	1	6	1	$\langle 6, 1 \rangle$	7
ω_2	1	0	3	0	$\langle 3, 0 \rangle$	3
ω_3	1	1	0	1	$\langle 0, 1 \rangle$	1

Tableau 1 – profils associés aux interprétations

Les croiances préférées pour la Σ -fusion, considérant $\mu \equiv \neg a \vee \neg b$ sont telles que :

$$\text{Mod}(Bel(\Delta^\mu_\Sigma(E))) = \{\omega_2\}$$

2 Fusion de bases de croiances pondérées et intercomparabilité des sources

L'ensemble des opérateurs de fusion se reposant sur l'agrégation des degrés de cohérence nécessitent l'hypothèse d'intercomparabilité suivante : les poids associés aux croiances par les sources sont comparables d'une source à l'autre. Une telle hypothèse peut se révéler trop forte pour certaines applications, par exemple lorsque les informations sont obtenues à partir de sources de qualité inconnue.

2.1 De l'intercomparabilité à la notion d'échelle compatible

Il a été proposé, dans [1], une stratégie naturelle pour fusionner des sources en l'absence

d'intercomparabilité. Elle repose sur l'utilisation d'échelles de référence possibles entre sources, appelées *échelles compatibles*. Une échelle compatible associe de nouveaux poids aux croyances de telle manière que les ordres stricts relatifs entre les croyances des sources à fusionner sont préservés : celle-ci représente une correspondance possible entre les poids des sources à fusionner. Plus formellement :

Définition 5 (Échelle compatible) Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble ordonné de bases de croyances pondérées, avec $B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))\}$. Une échelle compatible, notée $\mathcal{S}$, et définie par :

$$\mathcal{S} : \begin{array}{l} B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n \rightarrow B_1^{\mathcal{S}} \sqcup \dots \sqcup B_n^{\mathcal{S}} \\ (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \mapsto (\varphi_{ij}, \mathcal{S}(\varphi_{ij})) \end{array}$$

(avec $\sqcup$ l'union de multi-ensemble, et $\mathcal{S}(\varphi_{ij}) \in \mathbb{L} \subseteq \mathbb{N}$) est dite compatible avec E si et seulement si : $\forall B_i \in E, \forall (\varphi, R_{B_i}(\varphi)), (\psi, R_{B_i}(\psi)) \in B_i,$

$$R_{B_i}(\varphi) \leq R_{B_i}(\psi) \text{ ssi } \mathcal{S}(\varphi) \leq \mathcal{S}(\psi).$$

Clairement, les échelles compatibles ne sont pas uniques pour un groupe de sources donné. L'ensemble des échelles compatibles avec un multi-ensemble de sources E est noté $\mathbb{S}_E$. Etant donnée une échelle compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$, nous notons $B_i^{\mathcal{S}}$ la base de croyances obtenue de B_i en appliquant l'échelle compatible $\mathcal{S} : B_i^{\mathcal{S}}$ est obtenue en remplaçant chaque paire $(\phi_{ij}, R_{B_i}(\phi_{ij}))$ par $(\phi_{ij}, \mathcal{S}(\phi_{ij}))$. De la même manière, nous notons $E^{\mathcal{S}}$ le multi-ensemble de sources obtenu en appliquant $\mathcal{S}$ sur chaque B_i de E .

2.2 Une stratégie sceptique basée sur les échelles compatibles

Une approche sceptique pour la fusion de bases de croyances pondérées sans intercomparabilité consiste à explorer toute correspondance possible entre les poids des différentes sources. Cette approche consiste à prendre en compte toutes les échelles compatibles avec le groupe de sources à fusionner. Ainsi, une interprétation

ω sera préférée à une autre interprétation ω' , si pour chaque échelle compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$, ω est préférée à ω' selon un opérateur de fusion $\Delta_{\circ}^{\mu}$. Dans cet article, nous utiliserons l'opérateur de fusion utilitariste Δ_{Σ}^{μ} , basé sur la Définition 3, pour illustrer cette stratégie de fusion en l'absence d'intercomparabilité :

Définition 6 (Définition de $\blacktriangleleft_{\Sigma}^E$) Soient E un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et $\mathbb{S}_E$ l'ensemble des échelles compatibles avec E . Soient ω, ω' deux interprétations de Ω :

$$\omega \blacktriangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$$

avec $\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}}$ présenté Définition 3.

$\blacktriangleleft_{\Sigma}^E$ induit l'ordre sur les interprétations résultant de la fusion du groupe de sources E , noté $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E)$. Les modèles des croyances préférées par le multi-ensemble de sources sont les interprétations de μ minimales pour $\blacktriangle_{\Sigma}^E$:

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E))) = \{\omega \in \text{Mod}(\mu) : \nexists \omega' \in \text{Mod}(\mu), \omega' \blacktriangleleft_{\Sigma}^E \omega\}.$$

Illustrons cette approche par un exemple :

Exemple 7 Considérons à nouveau $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ et $B_2 = \{(a \vee b, 3), (\neg b, 1)\}$. Le Tableau 2 présente quatre échelles compatibles avec E parmi toutes celles possibles, alors que le Tableau 3 fournit les profils associés aux interprétations pour chacune de ces échelles compatibles.

	φ_{ij}	R_{B_i}	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
B_1	a	6	2	6	3	10
	b	3	1	4	2	4
B_2	$a \vee b$	3	2	3	8	8
	$\neg b$	1	1	2	4	1

Tableau 2 – Quelques échelles compatibles

	$\nu_{E^{\mathcal{S}_1}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_2}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_3}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_4}}(\omega)$
ω_0	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 6, 3 \rangle$	$\langle 3, 8 \rangle$	$\langle 10, 8 \rangle$
ω_1	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 6, 2 \rangle$	$\langle 3, 4 \rangle$	$\langle 10, 1 \rangle$
ω_2	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle$
ω_3	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 4 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$

Tableau 3 – profils associés aux interprétations

Les éléments en gras du Tableau 3 représentent les modèles de $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E^{S_i}))$ pour une échelle compatible S_i donnée. Il peut être montré qu'il n'est pas possible ici de construire une échelle compatible qui rendrait ω_0 ou ω_1 préférables aux autres interprétation.

3 Des fonctions de transformation pour restaurer l'intercomparabilité des sources

La notion d'échelle compatible, tout en restant prudente en terme de correspondance entre les poids exprimés par les différentes sources, ne permet pas de tenir compte des relations quantitatives existantes entre les poids associés aux croyances issues d'une même source.

3.1 Intercomparabilité et fonctions de transformation

Nous détaillons dans cette section la notion de *fonction de transformation* : celle-ci permet de maintenir ces relations tout au long du processus de fusion. Cette notion repose sur l'application d'une fonction particulière sur l'échelle de poids d'une source donnée, dans le but de la rendre comparable aux autres. Afin de conserver l'ordre induit individuellement sur les croyances par chaque source, ces fonctions doivent être positives, strictement monotones. Plus formellement :

Définition 8 (Fonction de transformation)

Soit B une base de croyances pondérées, telle que $B = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))\}$. Une fonction de transformation, notée $\mathcal{T}$, est définie par une fonction positive, strictement monotone, notée f , de la manière suivante :

$$\mathcal{T} : \begin{array}{ccc} B & \rightarrow & B^{\mathcal{T}} \\ (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) & \mapsto & (\varphi_{ij}, \mathcal{T}(\varphi_{ij})) \end{array}$$

with $\mathcal{T}(\varphi_{ij}) = f(R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in \mathbb{N}$

Soit E un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Nous no-

tons $\mathbb{T}_i$ un ensemble de fonctions de transformation applicables à la source B_i , puis $\mathbb{T}_E = \{\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_n\}$ le multi-ensemble de $\mathbb{T}_i$ associés respectivement à chaque source B_i de E . $\mathbb{T}_i$ peut être, par exemple, une classe de fonctions de transformation particulière ou un ensemble de fonctions de transformation spécifié par un expert, etc. Nous optons pour la stratégie sceptique suivante : une interprétation ω sera préférée à une autre interprétation ω' , si quelques soient les fonctions de transformation $\mathcal{T}_i \in \mathbb{T}_{B_i}$ respectivement appliquées aux sources B_i de E , ω est préféré à ω' selon un opérateur de fusion $\Delta_{\circ}^{\mu}$:

Définition 9 Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner, et $\mathbb{T}_E = \{\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_n\}$ les ensembles de fonctions de transformation associés aux sources de E . Soient ω, ω' deux interprétations de Ω :

$$\omega \triangleleft_{\circ, \mathbb{T}_E}^E \omega' \text{ ssi } \forall (\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n) \in \mathbb{T}_1 \times \dots \times \mathbb{T}_n, \\ \omega \triangleleft_{\circ}^{\{B_1^{\mathcal{T}_1}, \dots, B_n^{\mathcal{T}_n}\}} \omega'$$

avec $\triangleleft_{\circ}^{\{B_1^{\mathcal{T}_1}, \dots, B_n^{\mathcal{T}_n}\}}$ présenté par la Définition 3.

$\triangleleft_{\circ, \mathbb{T}_E}^E$ induit l'ordre sur les interprétations résultant de la fusion du groupe de sources E , noté $\blacktriangle_{\circ, \mathbb{T}_E}^{\mu}(E)$. Les modèles des croyances préférées par le multi-ensemble de sources sont les interprétations de μ minimales pour $\triangleleft_{\circ, \mathbb{T}_E}^E$:

$$\text{Mod}(Bel(\blacktriangle_{\circ, \mathbb{T}_E}^{\mu}(E))) = \\ \{\omega \in \text{Mod}(\mu) : \nexists \omega' \in \text{Mod}(\mu), \omega' \triangleleft_{\circ, \mathbb{T}_E}^E \omega\}.$$

Différentes classes de fonctions de transformation existent, et permettent de maintenir différents types de relations quantitatives entre les poids issus d'une même source tout au long du processus de fusion. Certaines ont été proposées et discutées dans [3]. Parmi celles-ci nous pouvons distinguer les classes de fonctions suivantes :

- positives strictement monotones $\mathbb{T}^m$: considérer cette classe de fonctions, englobant toutes les autres, permet d'ignorer les re-

lations quantitatives existantes entre les poids issus d'une même base ;

- *affines* $\mathbb{T}^a : f(.) = a.(.) + b$ avec $a > 0$, ne considérer que cette classe de fonctions permet de maintenir l'homogénéité entre les poids issus d'une même base ;
- *linéaires* $\mathbb{T}^l : f(.) = a.(.)$ avec $a > 0$, ne considérer que cette classe de fonctions permet de maintenir les rapports de proportionnalité existants entre les poids issus d'une même base ;
- *translatives* $\mathbb{T}^t : f(.) = (.)+ b$, ne considérer que cette classe de fonctions permet de maintenir les rapport de distances existants entre les poids issus d'une même base.
- etc.

Clairement, construire un opérateur de fusion basé sur la classe des fonctions positives monotones équivaut à employer la notion d'échelle compatible. Un opérateur de fusion, construit sur cette classe de fonctions, fournit un résultat équivalent à l'opérateur de fusion rappelé par la définition 6, pour tout opérateur d'agrégation $\circ$:

Proposition 10 *Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner, et $\mathbb{T}_E^m = \{\mathbb{T}_1^m, \dots, \mathbb{T}_n^m\}$ les ensembles de fonctions de transformation associés aux sources de E . Alors $\forall \omega, \omega' \in \Omega$:*

$$\omega \triangleleft_{\circ}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{\circ, \mathbb{T}_E^m}^E \omega'$$

Preuve 1 (Éléments de preuve) *La preuve de cette proposition est obtenue de la façon suivante : pour toute échelle compatible, appliquée à un multi-ensemble de sources, il est possible de construire un multi-ensemble de fonctions de transformation positives monotones associant exactement les mêmes poids aux croyances de chaque source, et réciproquement.*

La section suivante présente une méthode de fusion basé sur la somme, ne considérant que la classe des fonctions translatives appliquée à chaque source.

3.2 Fonctions de transformation de classe translatives

La classe des fonctions de transformation translatives se repose sur des fonction de la forme $f(.) = (.)+ b$ pour modifier les poids associés aux croyances de chaque source. Ce type de transformation permet de maintenir les relation de distance entre les poids associés aux croyances d'une même source. En effet :

Proposition 11 *Quelques soient $(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$ et $(\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'}))$ issues d'une même source $B_i, \forall \mathcal{T}_i \in \mathbb{T}_{B_i}^t$:*

$$\mathcal{T}_i(\varphi_{ij}) - \mathcal{T}_i(\varphi_{ij'}) = R_{B_i}(\varphi_{ij}) - R_{B_i}(\varphi_{ij'}).$$

Dans cet article, b est supposé être un entier naturel. Cela signifie que les poids issus d'une source ne peuvent être affaiblis par ce type de transformation (en revanche, les poids issus des autres sources peuvent tout à fait être renforcés).

Nous présentons un opérateur de fusion ne tenant compte que des fonctions de transformation translatives applicables à chaque source, dérivé de la Définition 9. Cet opérateur se repose sur l'opérateur de fusion $\triangleleft_{\Sigma}^E$ induit par la définition 3 :

Définition 12 *Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner, et $\mathbb{T}_E^t = \{\mathbb{T}_1^t, \dots, \mathbb{T}_n^t\}$ les ensembles de fonctions de transformation associées aux sources de E . Soient ω, ω' deux interprétations de Ω :*

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, \mathbb{T}_E^t}^E \omega' \text{ ssi } \forall (\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n) \in \mathbb{T}_1^t \times \dots \times \mathbb{T}_n^t, \\ \omega \triangleleft_{\Sigma}^{\{B_1^{\mathcal{T}_1}, \dots, B_n^{\mathcal{T}_n}\}} \omega'$$

avec $\triangleleft_{\Sigma}^{\{B_1^{\mathcal{T}_1}, \dots, B_n^{\mathcal{T}_n}\}}$ présenté par la Définition 3.

La combinaison des degrés de cohérence, porteurs des transformations appliquées à chaque source, permet d'obtenir pour chaque monde

possible une *fonction de cohérence*. L'analyse de ces fonctions de cohérence permet de déterminer si une interprétation peut être préférée à une autre, quelque soit la transformation potentiellement applicable à chaque source.

Les modèles des croyances préférées par le multi-ensemble de sources sont les interprétations de μ minimales pour $\triangleleft_{\Sigma, \mathbb{T}_E}^E$.

Illustrons cet opérateur par un exemple :

Exemple 13 Soit le multi-ensemble $E = \{B_1, B_2\}$ tel que $B_1 = \{(b, 7), (a, 6)\}$ et $B_2 = \{(a \oplus b, 8), (a, 2)\}$. Les profils associés aux interprétations, après application de fonctions de transformation translatives $f_i(\cdot) = (\cdot) + b_i$ sur chaque source, sont donnés par le Tableau 4.

	a	b	$\nu_E(\omega)$	Σ
ω_0	0	0	$\langle 7+b_1, 8+b_2 \rangle$	$15+b_1+b_2$
ω_1	0	1	$\langle 6+b_1, 2+b_2 \rangle$	$8+b_1+b_2$
ω_2	1	0	$\langle 7+b_1, 0 \rangle$	$7+b_1$
ω_3	1	1	$\langle 0, 8+b_2 \rangle$	$8+b_2$

Tableau 4 – profils et fonctions de cohérence associés aux interprétations

Chaque b_i étant ici supposé positif, nous pouvons remarquer sur cet exemple que quelques soient les valeurs de b_1 et b_2 possible, ω_0 ne peut être préféré à ω_2 . A l'inverse, il existe certaines valeurs pour lesquelles ω_2 pourrait être préféré à ω_3 et réciproquement : aucun de ces deux mondes possibles ne peut être privilégié.

3.3 Une caractérisation du résultat de la fusion

Nous fournissons, dans cette section, un critère permettant de caractériser l'ordre entre les mondes possibles $\triangleleft_{\Sigma, \mathbb{T}_E}^E$. Ce critère combine à la fois un opérateur d'agrégation de type somme et une analyse de la cohérence des mondes possibles vis-à-vis des différentes sources. Une interprétation ω sera préférée à une interprétation

ω' si et seulement si la somme des éléments du profil de ω vis-a-vis de E est strictement inférieure à la somme de ceux de ω' , et ω est modèle de toute source dont ω' est modèle. Plus formellement :

Définition 14 (Définition de $\triangleleft_{0\Sigma}^E$) Soit E un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient ω et ω' deux interprétations de Ω , et $\nu_E(\omega)$, $\nu_E(\omega')$ leur profil respectif. Alors ω est préférée à ω' , noté $\omega \triangleleft_{0\Sigma}^E \omega'$, si et seulement si :

- $\Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega'))$,
- $\forall B_i \in \{B_j \in E, \omega' \models B_j\}, \omega \models B_i$

$$\text{avec } \Sigma(\nu_E(\omega)) = \sum_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega)$$

La proposition suivante montre que l'opérateur de fusion, reposant sur la relation d'ordre précédemment définie, caractérise totalement l'ordre sur les mondes possibles $\triangleleft_{\circ, \mathbb{T}_E}^E$:

Proposition 15 Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner, et $\mathbb{T}_E^t = \{\mathbb{T}_1^t, \dots, \mathbb{T}_n^t\}$ les ensembles de fonctions de transformation associés aux sources de E . Soient ω et ω' deux interprétations de Ω . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, \mathbb{T}_E^t}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{0\Sigma}^E \omega'$$

Preuve 2 (Éléments de preuve) La preuve de cette proposition est obtenue de la manière suivante : pour chaque interprétation ω de Ω , la fonction de cohérence associée est, pour cette classe de transformation, de la forme $\sum_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega) + \sum \{b_i : \omega \not\models B_i\}$. Ainsi, considérant chaque b_i possible pour chaque base de croyance B_i , une interprétation ω ne peut être préférée à une autre ω' seulement si la somme des degrés de cohérence initiaux de ω est inférieure à celle de ω' , et si ω est modèle de toute base dont ω' est modèle.

3.4 Discussion sur la prudence des transformations translatives

La notion de fonction de transformation a été introduite afin de restaurer l'intercomparabilité de bases de croyances pondérées à fusionner. La proposition suivante nous montre que l'opérateur de fusion, défini à partir des fonctions de transformation translatives, est plus prudent que l'opérateur de fusion basé sur la somme :

Proposition 16 Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner, et $\mathbb{T}_E^t = \{\mathbb{T}_1^t, \dots, \mathbb{T}_n^t\}$ les ensembles de fonctions de transformation associés aux sources de E . Alors

$$\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E) \models \blacktriangle_{\Sigma, \mathbb{T}_E^t}^{\mu}(E)$$

À la différence de la notion d'échelle compatible, la notion de fonction de transformation permet de conserver les relations quantitatives existantes entre les croyances d'une même base tout au long du processus de fusion. La proposition suivante montre que l'opérateur de fusion, défini à partir des fonctions de transformation translatives, permet d'obtenir plus de conclusions que l'opérateur de fusion basé sur les échelles compatibles :

Proposition 17 Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner, et $\mathbb{T}_E^t = \{\mathbb{T}_1^t, \dots, \mathbb{T}_n^t\}$ les ensembles de fonctions de transformation associés aux sources de E . Alors

$$\blacktriangle_{\Sigma, \mathbb{T}_E^t}^{\mu}(E) \models \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E)$$

Conclusion

Cet article a introduit la notion de fonctions de transformation, appliquée à la fusion de bases de croyances. Ces dernières permettent de traiter le problème d'intercomparabilité des

poids entre les sources à fusionner. Nous avons montré que certaines classes de fonctions de transformation permettent de conserver certaines relations quantitatives, entre les poids associés aux croyances d'une même base, tout au long du processus de fusion. Pour cela, nous avons étudié en détails un opérateur basé sur la classe des fonctions de transformation translatives. Nous avons proposé une caractérisation de l'ordre sur les mondes possibles, induit par cet opérateur de fusion, puis montré que ce dernier constitue un compromis entre les opérateurs basés sur les échelles compatibles et ceux se reposant sur des opérateurs d'agrégation.

Références

- [1] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rosit. Maximum-based merging of incommensurable ranked belief bases. In *Proceedings of the 22th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'07)*, pages 367–372, 2007.
- [2] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.
- [3] Kenneth J. Arrow et Michael D. Intriligator, editor. *Handbook of Mathematical Economics*, volume 3. North-Holland.
- [4] Qi Guilin, Weiru Liu, and David A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proceedings of the 21th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, pages 348–356, July 2006.
- [5] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.
- [6] Paolo Liberatore and Marco Schaerf. Arbitration : A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the 2nd World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, pages 217–228, 1995.
- [7] Jinxin Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83(2) :363–378, 1996.
- [8] Thomas Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2) :59–84, 2001.
- [9] Wolfgang Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1988.
- [10] Mary-Anne Williams. Transmutations of knowledge systems. In J. Doyle et al., editor, *Proceedings of the International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 619–629. Morgan Kaufmann, 1994.