Fusion égalitariste de bases de croyances ordonnées incommensurables

Salem Benferhat¹

Sylvain Lagrue¹

Julien Rossit¹

¹ CRIL - Université d'Artois - Faculté des Sciences Jean Perrin - Rue Jean Souvraz, SP 18, 62307 Lens Cedex

[benferhat,lagrue,rossit]@cril.univ-artois.fr

Résumé :

Plusieurs approches ont été proposées récemment afin de fusionner un ensemble de bases de croyances potentiellement contradictoires. Cet article se concentre sur une fusion égalitariste appliquée à des bases de croyances ordonnées incommensurables. Nous proposons tout d'abord une caractérisation du résultat de la fusion basée sur la notion d'ordre compatibles définis au moyen d'échelles finies. Nous proposons ensuite une manière équivalente d'obtenir le résultat de la fusion, basée sur un ordre de type Pareto sur l'ensemble des solutions possibles.

Mots-clés :

Recently, several approaches have been proposed to merge possibly contradictory belief bases. This paper focuses on max-based merging operators applied to incommensurable ranked belief bases. We first propose a characterisation of a result of merging using the notion of compatible rankings defined on finite scales. Then we propose an equivalent way to recover the result of merging, based on a Pareto-like ordering on a set of possible solutions.

Abstract:

merging belief bases, ranked bases, incommensurability.

1 Introduction

La fusion d'informations multi-sources est un problème important dans beaucoup d'applications. Plusieurs approches ont été proposées récemment pour la fusion de bases de croyances potentiellement contradictoires [1–5]. Les bases de croyances peuvent être plates (aucune relation de préférence n'est fournie entre les différentes formules des bases de croyances) ou ordonnées. Une base de croyance ordonnée (ou base de croyance stratifiée, ou encore base de croyance pondérée) est un ensemble de formules bien formées, chacune étant associée à un rang (ici un entier). Plus le rang associé à une formule est élevé, plus cette formule est importante. En fait, les bases de croyances or-

données sont une représentation compacte de ce qui est habituellement connu sous le nom d'état épistémique [6]. En effet, chaque base de croyance ordonnée induit un ordre sur l'ensemble des interprétations (ou solutions) possibles. Les interprétations qui ont les rangs les plus bas sont considérées comme les plus plausibles. En particulier, les interprétations avec le rang "0" sont celles qui sont les plus préférées et représentent les croyances actuelles d'un agent.

Il existe deux approches majeures de fusion de bases de croyances ordonnées : l'approche utilitariste (ou approche majoritaire) et l'approche égalitariste. Les approches basées sur l'opérateur "somme" sont des exemples d'approches majoritaires [1], tandis que celles basées sur l'opérateur "maximum" (et son extension Gmax) sont des exemples d'approches égalitaires [1]. Etant donné un ensemble de n bases de croyance cohérentes fournies par n sources (ou agents), une approche majoritaire tente de minimiser l'insatisfaction globale. En particulier, si une base de croyances donnée est soutenue par un grand nombre d'agents (ou sources) impliqués dans la fusion, alors cette base de croyance sera contenue dans le résultat de la fusion. Les opérateurs de fusion majoritaire sont appropriés si toutes les sources sont considérées indépendantes. Les modes de fusion égalitaristes à l'inverse tentent de minimiser l'insatisfaction individuelle de chaque agent. Pour les approches égalitaristes, qui sont des opérateurs de fusion indépendants de la majorité, une répétition d'une même partie d'information n'a pas d'impact sur le résultat de la fusion.

Les modes de fusion utilitaristes et égalitaristes sont basés sur l’hypothèse que les bases de croyances à fusionner sont commensurables. C’est à dire que toutes les sources partagent une même échelle commune pour ordonner leurs informations. Cette hypothèse de commensurabilité prend peut être un sens pour certaines applications, mais peut apparaître trop forte pour d’autres applications.

Cet article présente un mode de fusion égalitariste de bases ordonnées incommensurables. Nous utiliserons un opérateur de fusion basé sur le maximum comme un exemple de fusion d’informations égalitariste.

Une façon de traiter le problème de l’incommensurabilité est d’utiliser une variante de l’ordre de Pareto [7]. Les interprétations (ou solutions) sont comparées par rapport à leur compatibilité individuelle vis-à-vis de chaque base. C’est à dire, étant donné un multi-ensemble de bases ordonnées cohérentes E , une solution s est strictement préférée à une autre solution s' , si i) s' n’est pas modèle de chaque base de E , et ii) pour chaque base $B_i \in E$, soit s est strictement préférée à s' (par rapport à B_i), soit s et s' sont toutes les deux modèles de B_i .

Dans [8], une autre manière naturelle de définir un opérateur de fusion consiste à considérer toutes les échelles compatibles. Une échelle compatible est simplement une réaffectation des rangs associés aux croyances de la base, tel que l’ordre relatif original entre les croyances est préservé. Une solution s est dite strictement préférée à une autre solution s' , si s est préférée à s' dans chaque échelle compatible.

Dans [8], nous avons montré qu’utiliser toutes les échelles compatibles est équivalent à considérer un ordre de type Pareto décrit plus haut. Cet article montre qu’il n’y a pas besoin de définir toutes les échelles compatibles sur l’ensemble des entiers $\mathbb{N}$. En fait, nous montrons qu’il est suffisant d’utiliser des échelles finies pour retrouver le résultat de la fusion.

Le reste de l’article est défini comme suit.

Nous présentons d’abord le concept de base de croyance ordonnée, et la fusion égalitariste de bases commensurables. Ensuite nous présentons une première manière de traiter l’hypothèse de commensurabilité, en utilisant les échelles compatibles finies. Nous montrons ensuite comment obtenir le résultat de la fusion en utilisant une variante d’un ordre de Pareto.

2 Avant-propos

Soit $\mathcal{L}$ un langage propositionnel fini. Nous notons Ω l’ensemble des interprétations de $\mathcal{L}$ et par ω un élément de Ω . Les lettres grecques ϕ, ψ désignent des formules propositionnelles. $Mod(\phi)$ représente l’ensemble des modèles de ϕ , à savoir $Mod(\phi) = \{\omega \in \Omega : \omega \models \phi\}$.

2.1 Bases ordonnées

Les bases de croyances ordonnées offrent un cadre adapté pour la représentation des informations incertaines (ou prioritaires). Elles sont utilisées dans différents cadres, tels que la théorie des possibilités [9, 10] ou les fonctions ordinales conditionnelles (OCF) [11–13].

Le terme croyance est utilisé quand les informations (ou sources) sont incertaines. Nous réservons le terme contrainte d’intégrité pour les informations totalement certaines et cohérentes. Les contraintes d’intégrité doivent être présentes dans le résultat du processus de fusion, alors que les croyances peuvent être acceptées, affaiblies, ou si nécessaire ignorées dans le processus de fusion.

Les bases de croyance ordonnées sont simplement des multi-ensembles de formules propositionnelles ordonnées. C’est à dire :

Définition 1 (Base ordonnée) Une base ordonnée B_i est un multi-ensemble de formules

propositionnelles ordonnées,

$$B_i = \{(\phi_{ij}, R_{B_i}(\phi_{ij})), j \in \{1, \dots, m_i\}\},$$

où $\phi_{ij} \in \mathcal{L}$, et $R_{B_i}(\phi_{ij}) \in \mathbb{N}^*$.

Intuitivement, $(\phi_{ij}, R_{B_i}(\phi_{ij}))$ signifie que ϕ_{ij} à un rang de priorité d'au moins égal à $R_{B_i}(\phi_{ij})$ (les formules de rangs plus élevés sont préférées). Seuls les rangs strictement positifs sont représentés. De plus, nous réservons le symbole de l'infini $+\infty$ aux contraintes d'intégrité. Nous noterons B_i^* la base de formules propositionnelle obtenue à partir de B_i en ignorant les poids.

Il existe différentes façons d'induire une relation d'ordre sur les interprétations possibles à partir d'une base de croyance donnée. Dans cet article, nous utilisons l'ordre appelé "best-out ordering", qui est défini comme suit : une interprétation ω est préférée à une autre interprétation ω' , si et seulement si la croyance la plus certaine falsifiée par ω est moins importante que la croyance la plus certaine falsifiée par ω' . Ainsi, à chaque interprétation est associée le rang de la formule la plus certaine qu'elle falsifie. Les interprétations qui sont modèles de B_i^* ont un rang égal à 0 et sont les préférées. Plus précisément :

Définition 2 (Fonctions de rangement) Une fonction de rangement κ_B associée à une base de croyance ordonnée B est une fonction qui associe à chaque interprétation $\omega \in \Omega$ un entier $\kappa_B(\omega)$ tel que :

$$\kappa_B(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall (\phi_{ij}, R_{B_i}(\phi_{ij})) \in B_i, \omega \models \phi_{ij} \\ \max\{R_{B_i}(\phi_{ij}) : \omega \not\models \phi_{ij}, \\ & (\phi_{ij}, R_{B_i}(\phi_{ij})) \in B_i\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ordre "best-out ordering" est la base de la sémantique de la logique possibiliste [9] et de la révision par ajustement de Williams [11].

Exemple 1 Considerons une base de croyance ordonnée $B = \{(\neg a \vee b, 8), (a \vee b, 5), (a, 2)\}$. Le tableau suivant donne la fonction de rangement κ_B associée à B .

Tableau 1 – Un exemple de fonction de rangement

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\kappa_B(\omega_i)$
ω_0	0	0	5
ω_1	0	1	2
ω_2	1	0	8
ω_3	1	1	0

2.2 Fusion basée sur le maximum

Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de n bases ordonnées issues de n sources, et soit μ une formule propositionnelle représentant les contraintes d'intégrité à satisfaire. Nous supposons dans cette section que toutes les sources partagent la même signification des rangs associés aux formules. Nous supposons également que chaque base de croyances ordonnée est cohérente (mais leur union peut bien sur être incohérente).

Le but de la fusion est, étant données n bases de croyances commensurables, de calculer $\Delta(E)$, une formule propositionnelle représentant le résultat de la fusion de ces bases. Dans la littérature, différentes méthodes pour fusionner E ont été proposées.

Cet article se concentre sur une fusion égalitariste, et utilise l'opérateur maximum pour illustrer le processus de fusion.

Mais d'abord, nous devons introduire la notion de *profil* associé à une interprétation ω , noté par $\nu_E(\omega)$, et défini par

$$\nu_E(\omega) = \langle \kappa_{B_1}(\omega), \dots, \kappa_{B_n}(\omega) \rangle .$$

Il représente le degré d'insatisfaction (ou de compatibilité) d'une interprétation ω par rapport au multi-ensemble de bases ordonnées.

Le calcul du résultat de la fusion $\Delta(E)$ est effectué en deux étapes : nous combinons d'abord les degrés d'insatisfaction $\kappa_{B_i}(\omega)$'s avec un opérateur de fusion (ici l'opérateur de fusion maximum), et nous choisissons ensuite les interprétations avec les rangs les plus bas. Cela mène à définir un ordre stricte, noté par $\triangleleft_{Max}$, entre les interprétations comme suit : une interprétation ω est préférée à une autre interprétation ω' si l'élément maximum du profil de ω est plus petit que l'élément maximum du profil de ω' . Plus formellement :

Définition 3 (Définition de $\triangleleft_{Max}$) Soit E un multi-ensemble de bases ordonnées. Soit ω et ω' deux interprétations et $\nu_E(\omega)$, $\nu_E(\omega')$ leur profils associés. Alors :

$$\omega \triangleleft_{Max}^E \omega' \text{ ssi } Max(\nu_E(\omega)) < Max(\nu_E(\omega')),$$

où

$$Max(\nu_E(\omega)) = Max\{\kappa_{B_i}(\omega) : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Le résultat de la fusion $\Delta_\mu^{max}(E)$ est une formule propositionnelle dont les modèles sont les interprétations qui sont également modèles de μ et qui sont minimales par rapport à $\triangleleft_{Max}$. Plus formellement :

Définition 4 (Fusion basée sur le maximum) Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées et μ une contrainte d'intégrité. Le résultat de la fusion est une formule propositionnelle, notée $\Delta_\mu^{max}(E)$, définie par : $Mod(\Delta_\mu^{max}(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \triangleleft_{Max} \omega\}$

Illustrons ces définitions par un exemple.

Exemple 2 Soit $E = \{B_1, B_2\}$ tel que $B_1 = \{(a, 8), (-b, 4)\}$ et $B_2 = \{(b, 2), (-a, 1)\}$. Le

profil associé à chaque interprétation est donné par le Tableau 2. Le résultat de la fusion Max , en considérant $\mu \equiv a$ est tel que :

$$Mod(\Delta_a^{max}(E)) = \{\omega_2\}$$

Tableau 2 – Profils associés avec les interprétations

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	Max
ω_0	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$	8
ω_1	0	1	8	0	$\langle 8, 0 \rangle$	8
ω_2	1	0	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$	2
ω_3	1	1	4	1	$\langle 4, 1 \rangle$	4

3 Fusion basée sur les échelles compatibles

L'opération de fusion définie ci-dessus présume que les sources, qui fournissent les B_i 's, sont commensurables. Dans l'exemple 6, il est supposé que le rang associé à $\neg b$ dans B_1 (c'est à dire 4) peut être comparé avec le rang associé avec $\neg a$ (c'est à dire 1) dans B_2 . Une telle hypothèse n'est pas toujours vraie. Dans ce qui suit, nous abandonons cette hypothèse de commensurabilité.

Nous présentons dans cette section une stratégie de fusion égalitariste de bases de croyances ordonnées incommensurables. Dans [8], nous avons étudié une façon naturelle de les rendre commensurable, en appliquant une échelle compatible sur les rangs existants. Une échelle est dite compatible si elle préserve l'ordre relatif original défini entre les croyances de chaque base ordonnée.

Une échelle $\mathcal{S}$ affecte de nouveaux rangs aux croyances de chaque base du multi-ensemble E . Dans [8], les nouveaux rangs affectés sont définis sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. Cet article montre qu'il n'est pas nécessaire de considérer l'intégralité de $\mathbb{N}$, et qu'il suffit de considérer

seulement une échelle finie. Plus précisément, cette échelle finie, notée $\mathbb{L}$, est définie comme :

$$\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, |B_1| + \dots + |B_n|\}$$

où $|B_i|$ représente le nombre de degrés différents (ou rangs) dans B_i .

Définition 5 (Echelle compatible) Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ où $B_i = \{(\phi_{ij}, R(\phi_{ij}))\}$. Alors une échelle $\mathcal{S}$, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \quad B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n &\rightarrow \mathbb{L} \\ (\phi_{ij}, R_{B_i}(\phi_{ij})) &\mapsto \mathcal{S}(\phi_{ij}) \end{aligned}$$

(où $\sqcup$ représente l'union des multi-ensembles), est dite compatible avec $R_{B_1}, \dots, R_{B_n}$ si et seulement si :

$$\forall B_i \in E, \forall (\phi, R_{B_i}(\phi)), (\phi', R_{B_i}(\phi')) \in B_i,$$

$$R_{B_i}(\phi) \leq R_{B_i}(\phi') \text{ ssi } \mathcal{S}(\phi) \leq \mathcal{S}(\phi').$$

Clairement, il peut y avoir plusieurs échelles compatibles, comme il est illustré sur l'exemple suivant :

Exemple 3 (continued) Considerons de nouveau $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$ et $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$. Nous avons $|B_1| = |B_2| = 2$ et $\mathbb{L} = \{1, 2, 3, 4\}$. Le tableau 3 donne trois échelles : $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$.

Tableau 3 – exemples d'échelles

	ϕ_{ij}	$R_{B_i}(\phi_{ij})$	$\mathcal{S}_1(\phi_{ij})$	$\mathcal{S}_2(\phi_{ij})$	$\mathcal{S}_3(\phi_{ij})$
B_1	a	8	3	3	5
	$\neg b$	4	2	4	1
B_2	b	2	4	2	7
	$\neg a$	1	1	1	6

Les échelles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_3$ sont compatibles, parce qu'elles préservent l'ordre induit par chaque base ordonnée. A l'inverse, l'échelle $\mathcal{S}_2$ n'est pas une compatible : elle inverse la priorité entre les croyances de B_1 .

L'ensemble des échelles compatibles avec E est noté $\mathbb{S}_E$. Notons que $\mathbb{S}_E$ n'est jamais vide. Une échelle compatible intuitive est simplement obtenue en posant $\mathcal{S}(\phi_{ij}) = R_{B_i}(\phi_{ij})$. Elle est compatible parce qu'elle préserve trivialement l'ordre relatif entre les croyances de chaque base.

Etant donné une échelle compatible $\mathcal{S}$, nous notons $B_i^{\mathcal{S}}$ la base ordonnée obtenue à partir de B_i en remplaçant chaque paire $(\phi_{ij}, R_i(\phi_{ij}))$ by $(\phi_{ij}, \mathcal{S}(\phi_{ij}))$. De la même manière, nous notons $E^{\mathcal{S}}$ le multi-ensemble obtenu à partir de E en remplaçant chaque B_i de E par $B_i^{\mathcal{S}}$.

Une interrogation naturelle est maintenant, étant donné un ensemble d'échelles compatibles $\mathbb{S}_E$, comment définir le résultat de la fusion. Différentes options existent, soit en utilisant une mesure d'incertitude pour sélectionner un sous-ensemble d'échelles compatibles de $\mathbb{S}_E$, soit de considérer toutes les échelles compatibles. Dans cet article, nous optons pour une option sceptique, et considérons toutes les échelles compatibles, de façon à éviter les choix arbitraires. Une interprétation ω est alors dite préférée à une interprétation ω' si, pour chaque échelle compatible $\mathcal{S}$, ω est préféré à ω' au sens de la Définition 3 (c'est à dire $\omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$).

Définition 6 (Ordre entre interprétations)

Soit E un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées, et $\mathbb{S}_E$ l'ensemble de toutes les échelles compatibles associées à E . Soient ω, ω' deux interprétations. Alors :

$$\omega \triangleleft_{\forall}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$$

où $\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}}$ est le résultat de la fusion en appliquant la Définition 3 sur $E^{\mathcal{S}}$.

Les modèles de $\Delta_{\mu}^{\forall}(E)$ sont ceux qui sont modèles de μ et minimaux pour $\triangleleft_{\forall}^{\mathcal{S}}$.

$$Mod(\Delta_{\mu}^{\forall}(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \triangleleft_{\forall} \omega\}$$

Notons que $\langle \overset{E}{\vee} \rangle$ est un ordre partiel. Illustrons la fusion basée sur les échelles compatibles au moyen de l'exemple suivant :

Exemple 4 (suite) Supposons que $\mu \equiv \top$. Considérons de nouveau $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$ et $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$. Considérons de nouveau $\mathcal{S}_1$ où $B_1^{\mathcal{S}_1} = \{(a, 4), (\neg b, 3)\}$ et $B_2^{\mathcal{S}_1} = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ et une échelle $\mathcal{S}_2$, où $B_1^{\mathcal{S}_2} = \{(a, 3), (\neg b, 2)\}$ et $B_2^{\mathcal{S}_2} = \{(b, 3), (\neg a, 2)\}$. Les deux sont compatibles. Le Tableau 4 présente le profil de chaque interprétation pour chaque échelle.

Tableau 4 – Deux échelles compatibles équivalentes

	a	b	$\nu_{E^{\mathcal{S}_1}}(\omega)$	Max	$\nu_{E^{\mathcal{S}_2}}(\omega)$	Max
ω_0	0	0	$\langle 4, 2 \rangle$	4	$\langle 3, 3 \rangle$	3
ω_1	0	1	$\langle 4, 0 \rangle$	4	$\langle 3, 0 \rangle$	3
ω_2	1	0	$\langle 0, 2 \rangle$	2	$\langle 0, 3 \rangle$	3
ω_3	1	1	$\langle 3, 1 \rangle$	3	$\langle 2, 2 \rangle$	2

Notons que dans l'échelle compatible $\mathcal{S}_1$, ω_2 est l'interprétation la plus préférée, alors que dans l'échelle compatible $\mathcal{S}_2$, ω_3 est l'interprétation la plus préférée. Le Tableau 5 montre six autres échelles compatibles, et Tableau 6 et Tableau 7 fournissent leur profils associés.

Tableau 5 – Echelles compatibles représentatives

	ϕ_{ij}	R_{B_i}	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_6$	$\mathcal{S}_7$	$\mathcal{S}_8$
B_1	a	8	4	3	2	2	2	2
	$\neg b$	4	3	2	1	1	1	1
B_2	b	2	2	2	2	3	3	4
	$\neg a$	1	1	1	1	1	2	3

Tableau 6 – Profils des échelles compatibles

	$\nu_{E^{\mathcal{S}_3}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_4}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_5}}(\omega)$
ω_0	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$
ω_1	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$
ω_2	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$
ω_3	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$

Tableau 7 – Profils des échelles compatibles (suite)

	$\nu_{E^{\mathcal{S}_6}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_7}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_8}}(\omega)$
ω_0	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 2, 4 \rangle$
ω_1	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$
ω_2	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 0, 4 \rangle$
ω_3	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$

En fait, il est possible de montrer que ces six échelles compatibles donnée par le Tableau 5 sont suffisantes pour caractériser le résultat de la fusion. C'est à dire que pour chaque échelle compatible $\mathcal{S}$, il existe une échelle compatible $\mathcal{S}_i \in \{3, \dots, 8\}$ donnée dans le Tableau 5, tel que $\omega \langle \overset{\mathcal{S}}{\text{Max}} \omega' \text{ ssi } \omega \langle \overset{\mathcal{S}_i}{\text{Max}} \omega' \rangle$, pour tout ω et ω' .

Les éléments mis en gras dans les Tableaux 6 et 7 représentent les modèles de $\Delta_\mu^{\text{max}}(E^{\mathcal{S}_i})$ pour une échelle $\mathcal{S}_i$ donnée. Par exemple, les interprétations ω_1 et ω_3 sont modèles de $\Delta_\mu^{\text{max}}(E^{\mathcal{S}_5})$ pour l'échelle compatible $\mathcal{S}_5$ du Tableau 5.

Finallement, l'ordre partiel stricte entre les interprétations est seulement défini par $\omega_3 \langle \overset{E}{\vee} \omega_1$. Ainsi, les modèles de $\Delta_\mu^\vee(E)$ sont $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, et $\Delta_\mu^\vee(E) \equiv a \vee b$.

Les conclusions obtenues en utilisant toutes les échelles compatibles sont sûres et saines. Considérer toutes les échelles compatibles ne signifie pas que cette approche est trop prudente, et que par exemple, seules des tautologies pourraient être dérivées du résultat de la fusion. En particulier si l'union des bases est cohérente, alors le résultat de la fusion est simplement la conjonction de ces bases. Plus formellement :

Proposition 1 Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$. Alors si $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ est cohérent, alors

$$\Delta_\mu^\vee(E) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$$

4 Caractérisation de la fusion basée sur les compatibles

Cette section décrit comment identifier les interprétations préférées de Ω (ou de $Mod(\mu)$) pour la fusion de E sans calculer $\mathbb{S}_E$, en utilisant une variante de l'ordre de Pareto stricte. Intuitivement, une interprétation ω est strictement préférée à une interprétation ω' si *i*) ω' n'est pas un modèle de chaque base B_i^* , et *ii*) pour chaque B_j , soit ω et ω' sont modèles B_j^* , soit $\kappa_{B_j}(\omega) < \kappa_{B_j}(\omega')$ (c'est à dire, ω est préférée à ω' par rapport à B_j). Plus formellement :

Définition 7 (Ordre type Pareto) Soit $E = \{B_1, \dots, B_n\}$. ω est Pareto-préférée à ω' , noté $\omega \triangleleft_{Pareto} \omega'$, ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$,
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') = 0$, ou $\kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$.

La première condition signifie simplement que ω ne peut pas être strictement préférée à ω' , si ω' satisfait toutes les bases à fusionner. La seconde condition est une variante de l'ordre de Pareto. Rappelons que la définition habituelle de l'ordre de Pareto est : ω Pareto-domine strictement ω' si pour tout i , $\kappa_{B_i}(\omega) \leq \kappa_{B_i}(\omega')$ et $\exists j$ tel que $\kappa_{B_j}(\omega) < \kappa_{B_j}(\omega')$. Celle-ci diffère de celle donnée par la Définition 7, comme il est illustré par l'exemple suivant :

Exemple 5 Considerons deux bases ordonnées : $B_1 = \{(a, 3), (\neg a \wedge b, 2)\}$ et $B_2 = \{(b, 5), (\neg a \wedge \neg b, 1)\}$. Le Tableau 8 présente le profil de chaque interprétation de Ω .

Tableau 8 – Profils associés aux interprétations

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
ω_0	0	0	3	5	$\langle 3, 5 \rangle$
ω_1	0	1	3	1	$\langle 3, 1 \rangle$
ω_2	1	0	2	5	$\langle 2, 5 \rangle$
ω_3	1	1	2	1	$\langle 2, 1 \rangle$

D'après le Tableau 8, ω_3 est strictement préféré à ω_2 au sens de l'ordre de Pareto classique, mais pas au sens de l'ordre de type Pareto défini ci-dessus.

Illustrons la Définition 7 par l'exemple suivant :

Exemple 6 (suite) Considerons à nouveau $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$ et $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$. Le Tableau 9 présente le profil de chaque interprétation de Ω .

Tableau 9 – Profils associés aux interprétations

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
ω_0	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$
ω_1	0	1	8	0	$\langle 8, 0 \rangle$
ω_2	1	0	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$
ω_3	1	1	4	1	$\langle 4, 1 \rangle$

D'après le Tableau 9 nous avons ω_3 strictement préféré à ω_0 en utilisant $\triangleleft_{Pareto}$, puisque pour chaque base de croyance, le rang associé avec ω_3 est strictement inférieur au rang associé avec ω_0 .

De même que nous l'avons montré dans le cas des échelles compatibles, lorsque les bases sont cohérentes, le résultat de la fusion est simplement la conjonction des bases en utilisant l'ordre de type Pareto.

Proposition 2 Soit μ une contrainte d'intégrité. Soit E un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées. Si $\bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu$ est cohérent, alors $\omega \in Mod(\bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu)$ ssi $\nexists \omega' \in Mod(\mu) : \omega' \triangleleft_{Pareto} \omega$.

La proposition suivante généralise le résultat précédent et montre l'équivalence entre l'ordre de type Pareto et l'ordre basé sur les échelles compatibles :

Proposition 3 (Équivalence entre $\triangleleft_{\forall}$ et $\triangleleft_{Pareto}$)

Soit E un multi ensemble de bases de croyances ordonnées, $\triangleleft_{\forall}^E$ et $\triangleleft_{Pareto}$ deux ordres partiels définis respectivement par la Définition 6 et la Définition 7. Alors :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \triangleleft_{\forall}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{Pareto} \omega'$$

Ainsi, cet ordre de type Pareto nous permet de fusionner des bases ordonnées incommensurables, sans calculer l'ensemble des échelles compatibles :

$$Mod(\Delta_{\mu}^{Pareto}(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \triangleleft_{Pareto} \omega\}$$

Exemple 7 (suite) Considerons à nouveau $B_1 = \{(a, 8), (-b, 4)\}$ et $B_2 = \{(b, 2), (-a, 1)\}$. D'après le Tableau 9, ω_1, ω_2 et ω_3 sont modèles de $\Delta_{\mu}^{Pareto}(E)$ parce qu'ils sont minimaux pour l'ordre $\triangleleft_{Pareto}$ donné par la Définition 7.

Ainsi, $\Delta_{\mu}^{Pareto}(E) = a \vee b$ pour $\mu = \top$. Ce résultat est exactement le même que celui donné dans l'Exemple 4.

5 Conclusion

Cet article a proposé un résultat qui concerne le problème de la fusion de bases de croyances ordonnées incommensurables. Nous avons proposé une définition naturelle basé sur l'idée des ordres compatibles utilisant des échelles finies. Nous avons également proposé une autre caractérisation équivalente du résultat de la fusion, en ordonnant les interprétations selon une variante du critère de Pareto. La fusion proposée dans cet article permet de retrouver la conjonction des bases lorsque l'union de ces dernières est cohérente, et plus généralement

nous avons montré dans [8] qu'elle satisfait les postulats de rationalité définis dans [1].

Références

- [1] S. Konieczny and R. Pino Pérez, "Merging information under constraints : a logical framework." *Journal of Logic and Computation*, vol. 12, no. 5, pp. 773–808, 2002.
- [2] J. Lin, "Integration of weighted knowledge bases," *Artificial Intelligence*, vol. 1996, no. 363-378, 1995.
- [3] P. Liberatore and M. Schaerf, "Arbitration : A commutative operator for belief revision," in *Proceedings of the Second World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, 1995, pp. 217–228.
- [4] P. Revesz, "On the semantics of theory change : arbitration between old and new information," in *Proceedings of the 12th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of Databases*, 1993, pp. 71–92.
- [5] —, "On the semantics of arbitration," *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 7, no. 2, pp. 133–160, 1997.
- [6] A. Darwiche and J. Pearl, "On the logic of iterated belief revision," *Artificial intelligence*, vol. 89, pp. 1–29, 1997.
- [7] H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, 1988.
- [8] S. Benferhat, S. Lagrue, and J. Rossit, "Maximum-based merging of incommensurable ranked belief bases," Centre de Recherche en Informatique de Lens, Tech. Rep., 2007, À paraître dans 22th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'07).
- [9] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade, "Possibilistic logic," in *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, vol. 3. Oxford University Press, 1994, pp. 439–513.
- [10] Q. Guilin, W. Liu, and D. A. Bell, "Merging stratified knowledge bases under constraints," in *Proceedings of 21th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, july 2006, pp. 348–356.
- [11] M.-A. Williams, "Iterated theory base change : A computational model," in *Proceedings of 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, 1995, pp. 1541–1547.
- [12] T. Meyer, "On the semantics of combination operations," *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 11, no. 1-2, pp. 59–84, 2001.
- [13] W. Spohn, "Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state," *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pp. 105–134, 1988.