Introduction de défauts pour la résolution du problème de trivialisation en logique des défauts

MÉMOIRE

soutenu le 03 juillet 2008

pour l'obtention du

Master Recherche de l'Université d'Artois

Spécialité Informatique – Option Systèmes Intelligents et Applications

par

Sébastien RAMON

Encadrant :	Éric GRÉGOIRE	Professeur des Universités - CRIL
Co-Encadrant :	Philippe BESNARD	Directeur de Recherche CNRS - IRIT (Toulouse)
Resp. formation :	Pierre MARQUIS	Professeur des Universités - CRIL

Centre de Recherche en Informatique de Lens – CNRS UMR 8188
Université d'Artois, rue Jean Souvraz, S.P. 18 F-62307, Lens Cedex France
Secrétariat : Tél.: +33 (0)3 21 79 17 23 – Fax : +33 (0)3 21 79 17 70
`http://www.cril.fr`

Mis en page avec mr-sia-CRIL (B. Mazure, CRIL) et thloria (D. Roegel, LORIA).

"Se demander si un ordinateur peut penser est aussi intéressant que de se demander si un sous-marin peut nager."
Edsger Dijkstra, mathématicien (1930-2002)

Table des matières

Remerciements

À la naissance d'un **processus d'apprentissage**, on distingue souvent un élément déclencheur qui provoque le processus et le guide. C'est le cas, dans l'apprentissage de la marche, du langage et même dans l'apprentissage des sciences.

Ainsi, je tiens à remercier très sincèrement **Éric Grégoire** et **Philippe Besnard** d'avoir su me guider et d'être à l'origine de ce processus d'apprentissage.

Par la même occasion, je remercie les membres du **Centre de Recherche en Informatique de Lens** pour leur présence durant ces quatre mois et pour leurs enseignements durant les années passées. Aussi, je remercie les membres de l'**Institut de Recherche en Informatique de Toulouse** pour leur accueil durant les quelques jours où j'ai pu y travailler.

Et puisque, comme nous l'avons appris en Théorie des jeux, dans une société pour atteindre son but il faut à la fois se préoccuper du sien et de celui des autres ; je remercie mes **camarades de promotion** pour l'aide que nous nous sommes donnée mutuellement.

Introduction générale

Dans la communauté de la Recherche en Intelligence Artificielle, l'un des outils les plus populaires pour manipuler des formes de raisonnement révisable est certainement la logique des défauts de Reiter [REI80]. Elle a été définie pour permettre la modélisation du raisonnement par défaut et donne la possibilité à un système d'inférence d'accéder aux conclusions par défaut et de les rétracter quand l'arrivée d'une nouvelle information montre que ces conclusions mènent à l'inconsistance.

Par exemple, la logique des défauts est un cadre de travail particulièrement intéressant pour l'expression de schémas de raisonnement du genre "Si *l'Éole* est un *avion*, nous pouvons inférer que *l'Éole vole* si rien ne nous indique le contraire. Si une nouvelle information nous indique que *l'Éole* est l'avion de Clément ADER *conservé* au musée de l'air alors nous pouvons rétracter la conclusion que *l'Éole vole*".

Une **théorie logique avec défauts est donc composée de deux parties** : un ensemble de formules de la logique propositionnelle représentant les connaissances *de base* (axiomes) et un ensemble de règles avec défauts, i.e. règles d'inférence modélisant les connaissances *révisables* (exceptions) comme dans l'exemple précédent.

Dans ce mémoire nous étudierons **comment plusieurs théories avec défauts doivent être fusionnées**[1], en supposant que chaque théorie avec défauts représente les connaissances d'un agent ou d'une *communauté d'agents*. Plus précisément, il est vu que le rassemblement de ces théories ne peut être accepté comme tel quand l'union ensembliste des ensembles de formules de la logique classique a fusionner est inconsistante. En effet conserver de telles formules fait de l'ensemble du langage l'ensemble des inférences possibles puisque quand la partie formant la logique classique d'une théorie avec défauts est inconsistante, **la théorie avec défauts** elle-même **trivialise**. Aussi surprenant que cela puisse paraître, pour autant que nous sachions, cette propriété basique de la logique des défauts n'a pas été traitée jusqu'ici dans la littérature. Nous proposons donc que dans certaines circonstances la logique des défauts soit améliorée afin de ne pas trivialiser quand son composant de la logique classique est inconsistant. En particulier, quand beaucoup de sources d'information sont agrégées, une contradiction mineure entre deux sources ne doit pas conduire tout le système à s'effondrer.

Dans le but de répondre à cette exigence, nous étudierons une famille d'approches s'appuyant principalement sur l'étude des **MUSes** (**noyaux minimaux inconsistants**) de la partie de la logique classique. Par conséquent, une série de paradigmes de ce raisonnement sont étudiés et comparés comme le remplacement de chaque formule appartenant aux MUSes par *une règle de défaut* correspondante ou la suppression de tout ou partie des MUSes.

Aussi dans ces différentes approches, aucune distinction n'est faite entre les règles de défaut de la théorie initiale et les défauts introduits pour remplacer les formules des MUSes, comme si tous les défauts sont de la même nature épistémologique. En effet **les nouveaux défauts sont introduits pour *corriger* et *affaiblir* tout ou partie des connaissances présentant quelques déficiences**. Il

[1]Dans les faits, tout ce que nous étudierons concerne aussi une seule et même théorie de la logique des défauts dont le composant de la logique classique est inconsistant.

peut donc être déduit que le rôle des défauts supplémentaires est similaire à celui des défauts de la théorie initiale, lesquels sont normalement supposés représenter un raisonnement par défaut. Au contraire, il peut être intéressant que les nouveaux défauts puissent avoir une priorité plus (resp. moins) haute que les défauts de la théorie initiale. Dans ce cas nous devons avoir recours à une forme de **logique des défauts prioritisée** dont l'idée centrale est d'étendre la théorie avec défauts avec un ordre partiel.

C'est pourquoi nous considérons le cas particulier où un **ordre de préférence entre formules de l'ensemble de connaissances de base** de la théorie fusionnée résultante est donné. Aussi, cette stratification est intéressante quand on veut donner une préférence à certaines théories plutôt qu'à d'autres afin de privilégier certaines connaissances, pour prendre en compte la fiabilité de la source d'information par exemple. D'une autre manière, on peut vouloir établir une échelle de préférence entre les formules d'un même agent, ou encore préférer certaines formules d'une théorie à celles d'une autre théorie, et inversement. Ainsi, nous serons amenés à remettre en question les propriétés établies dans le cadre non-hiérachisé ce qui donnera forme à une **logique des défauts stratifiée**.

De plus, nous verrons si les propriétés introduites dans les deux cadres précédents s'appliquent toujours quand nous avons affaire à des **multi-ensembles de connaissances**. Cette représentation des connaissances nous permet de prendre en considération, via les multiplicités, que **des agents ou des communautés d'agents peuvent avoir des connaissances en commun**. Ainsi nous serons amené à discuter des propositions établies dans le cadre ensembliste, donnant lieu à une **logique des défauts multi-ensembliste**.

Le mémoire est organisé en deux parties, comme suit. Dans la *première partie*, traitant de l'**état de l'art**, les **préliminaires formels** nécessaires à la compréhension du sujet seront introduits (Chapitre 1). Ensuite, la **logique des défaut de Reiter**, socle de notre travail, sera présentée (Chapitre 2) suivie de la **logique avec défauts prioritisés de Brewka et Eiter** définissant les propriétés essentielles qu'une logique des défauts prioritisée doit respecter (Chapitre 3).

Dans la *deuxième partie*, traitant de notre **contribution au problème de la trivialisation de la logique des défauts**, nous examinerons le problème dans le contexte d'**ensembles de connaissances non-hiérachisés** (Chapitre 4), d'**ensembles de connaissances stratifiés** (Chapitre 5) et de **multi-ensembles de connaissances** et plus particulièrement de la fusion de multi-ensembles de connaissances selon une stratification donnée (Chapitre 6). Enfin nous clôturerons en mettant en avant les conclusions qu'amène ce travail et les perspectives de recherches futures qui nous sont offertes, par un exposé des possibilités que nous entrevoyons.

Première partie

État de l'art

Chapitre 1

Préliminaires formels

Le désir d'exprimer de manière formelle le processus de raisonnement a conduit à la naissance de logiques mathématiques, d'expressivités et de complexités différentes. Leur emploi est fortement lié à un domaine d'application, la plus connue de ces logiques mathématiques est la logique propositionnelle. Dans ce chapitre, nous présentons ainsi une partie de la terminologie nécessaire à la compréhension de la suite du mémoire. [1]

1.1 Logique propositionnelle

1.1.1 Aspects syntaxiques

Définition 1.1. *Une **variable propositionnelle** (ou encore* atome*), est une variable booléenne utilisée pour représenter des propriétés de base. Elle ne peut prendre que deux valeurs de vérités possibles : vrai ou $faux$ (également notées par 1 et 0, respectivement).*

Définition 1.2. *Un **connecteur logique** est un opérateur permettant de combiner une ou plusieurs variables propositionnelles pour en faire un énoncé complexe. Le nombre (positif) de variables combinées est son* arité.

Définition 1.3. *Une **formule propositionnelle** est définie de manière inductive comme suit :*
- *une variable propositionnelle α est une formule propositionnelle,*
- *Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n$ des formules propositionnelles et μ un connecteur logique d'arité n. Alors $\mu(\Sigma_1, \Sigma_2, ...\Sigma_n)$ est une formule propositionnelle.*

Notations . *On note $Var(\Sigma)$ l'ensemble des variables propositionnelles qui apparaissent dans une formule propositionnelle Σ.*

Dans la suite, nous considérons les connecteurs logiques suivants : la négation ($\neg$) d'arité 1, la conjonction ($\wedge$), la disjonction ($\vee$), l'implication matérielle ($\Rightarrow$) et l'équivalence ($\Leftrightarrow$) d'arité 2.

Définition 1.4. *La **taille d'une formule**, notée $|\Sigma|$, est le nombre d'occurrences de symboles (connecteurs et variables propositionnels) utilisés pour l'écrire.*

Définition 1.5. *On désigne par **littéral** tout atome l ou sa négation $\neg l$. l est appelé littéral positif et $\neg l$ littéral négatif. On appelle littéral complémentaire de l, la négation de l.*

Définition 1.6. *On appelle **clause** toute disjonction de littéraux. La clause vide, symbole du faux, est notée $\bot$. On désigne par clause tautologique toute clause qui contient un littéral a et son complémentaire $\neg a$. La clause $\top$, symbole du vrai est une clause tautologique.*

[1] Dans un soucis de compréhension, certaines définitions seront données au fil de ce mémoire.

Définition 1.7. *Une formule Σ est sous forme* ***CNF*** *(Conjunctive Normal Form) si et seulement si Σ est une conjonction de clauses. Toute formule propositionnelle peut être mise sous forme CNF. Cependant, la transformation peut nécessiter une croissance exponentielle en la taille de la formule initiale.*

1.1.2 Aspects sémantiques

Définition 1.8. *En logique propositionnelle, une* ***interprétation*** *ω est une application de l'ensemble V des variables propositionnelles vers l'ensemble des valeurs de vérité $[vrai, faux]$.*

$$\omega : V \to \{vrai, faux\}^{|V|}$$

La sémantique des connecteurs logiques usuels est définie dans la table 1.1. Il existe d'autres connecteurs logiques (tel que le NAND *de Scheffer), mais ceux présentés ici sont fonctionnellement complets du point de vue du pouvoir d'expression.*

$\omega(\Sigma)$	$\omega(\Gamma)$	$\omega(\neg\Sigma)$	$\omega(\Sigma \wedge \Gamma)$	$\omega(\Sigma \vee \Gamma)$	$\omega(\Sigma \Rightarrow \Gamma)$	$\omega(\Sigma \Leftrightarrow \Gamma)$	$\omega(\Sigma \oplus \Gamma)$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Tab. 1.1: Tables de vérité d'une formule propositionnelle.

La **sémantique** d'une formule Σ dans l'interprétation ω est définie de manière inductive. On dit que les connecteurs sont **vérifonctionnels**. La valeur de vérité donnée à une formule Σ par une interprétation ω est notée $\omega(\Sigma)$. Pour une formule Σ, il existe $2^{|Var(\Sigma)|}$ interprétations différentes.

Définition 1.9. *On dit que deux formules sont* ***équivalentes*** *(noté $\equiv$) si et seulement si elles prennent la même valeur de vérité pour toutes les interprétations. En d'autres termes, Σ et Γ sont équivalentes si et seulement si $\forall\omega$, $\omega(\Sigma) = \omega(\Gamma)$.*

Définition 1.10. *Soient Σ une formule et ω une interprétation. On dit que ω est un* ***modèle*** *de Σ si $\omega(\Sigma) = 1$. On dit aussi que ω satisfait Σ (noté $\omega \models \Sigma$). Toute interprétation qui n'est pas modèle de Σ est appelée* ***contre-modèle*** *de Σ.*

Définition 1.11. *On dit qu'une formule Σ est* ***satisfiable*** *si et seulement si il existe une interprétation ω telle que $\omega(\Sigma)$=1. Si Σ n'admet aucun modèle, elle est alors dite* ***insatisfiable****.*

Définition 1.12. *On désigne par formule* ***valide*** *toute formule Σ telle que $\forall\omega$, $\omega(\Sigma) = 1$. Une telle formule est également appelée tautologie. Une formule Σ valide est notée $\models \Sigma$ et par conséquent $\neg\Sigma$ est contradictoire.*

Définition 1.13. *Une formule Σ est une* ***conséquence logique*** *de Γ si et seulement si tout modèle de Γ est un modèle de Σ. On note cela $\Gamma \models \Sigma$.*

1.2 Noyaux minimaux inconsistants (MUSes)

SAT est probablement l'un des problèmes de *satisfaction de contraintes* les plus étudiés au sein de la communauté de la recherche en Intelligence Artificielle. Il consiste à vérifier si un ensemble de clauses de formules propositionnelles possède au moins une affectation de ses variables qui satisfasse toutes les clauses. Dans le cas où le problème n'est pas satisfiable, il peut s'avérer intéressant de donner une **explication précise de cette inconsistance** en extrayant l'ensemble minimal de formules inconsistantes qui rendent le problème non soluble, on appelle cet ensemble MUS (Minimally Unsatisfiable Subformulae).

1.2.1 Inconsistance d'un problème

Quand le résultat du test de satisfiabilité d'une formule propositionnelle est positif, la majeure partie des solveurs SAT actuels fournissent un modèle de la formule. Par contre si la formule ne possède pas de modèle, aucune information concernant l'inconsistance n'est donnée. Pourtant **l'extraction de MUSes** peut se révéler intéressante dans un nombre important de domaines, parce qu'il **circonscrit ce qui est *faux* dans le problème**.

Par exemple, quand nous testons la consistance d'une base de connaissance, nous aimerions connaître la partie qui est contradictoire plutôt que de savoir qu'il existe une contradiction. De plus, un ensemble restreint de formules peut être inconsistant et mener à lui seul à l'**effondrement du système tout entier**.

Les MUSes fournissent une information essentielle qui représente, en terme de contraintes impliquées, l'**explication minimale d'infaisabilité**. En effet, de nombreux domaines comme le diagnostic à base de modèle, la validation de base de connaissance et bien d'autres encore, nécessitent que de telles explications soient délivrées en cas d'infaisabilité.

1.2.2 Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage de la logique propositionnelle standard construit sur un ensemble fini de variables propositionnelles, dénotées a, b, etc. Notons le problème d'optimisation lié à SAT comme suit :

Définition 1.14. *Soit une instance SAT Σ, **max-SAT** consiste a trouver un nombre maximal de clauses de Σ qui peuvent être satisfaites sous une même interprétation.*

Lorsqu'une instance SAT est insatisfaite, elle possède au moins un ensemble de sous-formules minimal inconsistant, appelé MUS.

Définition 1.15. *Un MUS Γ d'une instance SAT Σ est un ensemble de clauses tel que :*
- $\Gamma \subseteq \Sigma$,
- Γ *est insatisfiable,*
- *Tout sous-ensemble propre de Γ est satisfiable.*

Dans la suite, un autre concept crucial est la notion de *couverture inconsistante (stricte)*.

Définition 1.16. *Soit Σ un ensemble de formules propositionnelles. $\Sigma' \subseteq \Sigma$ est une **couverture inconsistante stricte** de Σ si et seulement si $\Sigma \setminus \Sigma'$ est satisfiable et $\Sigma' = \cup\mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \subseteq MUS(\Sigma)$ tel que, si $|\mathcal{A}| > 1$, chaque membre de $\mathcal{A}$ sont disjoints deux à deux.*

Il peut être noté qu'une même instance insatisfiable peut posséder différentes couvertures inconsistantes. Pour exemple :

Exemple 1.1. *Soit $\Sigma = \{a, b, \neg a \vee \neg b, \neg a, c, \neg c \vee a\}$. Σ contient quatre MUSes : $MUS_1 = \{a, \neg a\}$, $MUS_2 = \{a, b, \neg b \vee \neg a\}$, $MUS_3 = \{\neg a, c, \neg c \vee a\}$ et $MUS_4 = \{b, \neg a \vee \neg b, c, \neg c \vee a\}$. Σ contient deux couvertures inconsistantes strictes, $IC_1 = MUS_1 \cup MUS_4$ et $IC_2 = MUS_2 \cup MUS_3$.*

Bien qu'une couverture inconsistante ne nous fournit pas l'ensemble de tous les MUSes présents dans une formule, **elle encode une série d'explications minimales pour l'insatisfiabilité**, ce qui est suffisant pour expliquer assez de sources d'infaisabilité dans le but de retrouver la consistance si ces dernières sont réparées.

Plusieurs techniques pour manier les contradictions dans des systèmes basés sur la logique ont été étudiées dans la littérature. Une famille d'approches propose de retrouver la satisfiabilité par la **suppression de tout ou parties de MUSes**. En effet, supprimer une formule par MUS permet de retrouver la consistance. Deux approches différentes peuvent être proposées dans cette voie. Dans la première, supprimer l'union ensembliste de tous les MUSes, donc supprimer des causes d'inconsistance qui ne peuvent être formulées avec moins de clauses. Dans l'autre approche, nous optons pour un changement minimal en supprimant au plus une formule par MUS.

Chapitre 2

Logique des défauts

La logique des défauts a été introduite et développée par Reiter [REI80] pour formaliser *le raisonnement simplement consistant.* En présence d'informations incomplètes, nous sommes amenés à tirer des conclusions conjecturales simplement plausibles. En particulier, nous interprétons parfois comme absolument générales des lois qui apparaissent correctes dans la plupart des cas, mais qui admettent certaines exceptions.

2.1 Raisonnement par défaut

Reprenons l'exemple cité dans l'introduction, tiré de Alliot et Schiex [AS93]. Si l'Éole est un avion, alors j'en infère que l'Éole vole. Tous les avions ne volent pas, mais je me sens autorisé à conclure que l'Éole vole s'il n'existe rien dans mes croyances qui m'interdise de tirer cette conclusion. Comme le fait que l'Éole vole est consistant avec mes croyances, je conclus que l'Éole vole, parce que cette conclusion est la plus naturelle pour moi. Ce genre de raisonnement est appelé **raisonnement par défaut**, la règle d'inférence particulière que j'applique est :

$$\frac{Avion(x) : Vole(x)}{Vole(x)}$$

L'interprétation intuitive est celle-ci. Si x est un avion et qu'il est consistant avec tout ce qui est cru que x vole, alors x vole. On représente ainsi la loi générale, munie d'**exceptions**, énonçant que typiquement les avions volent. Une règle de ce genre, appelée "règle de défaut", permet de traiter les cas d'exceptions sans nécessiter l'identification préalable de ces cas.

La logique des défauts appartient à une classe plus vaste des logiques, les **logiques non monotones** ainsi appelées car les raisonnements qu'elles modélisent sont *révisables* et l'ensemble des formules déductibles ne croît pas (au sens de l'inclusion) de façon monotone lorsque l'on ajoute une formule dans les prémisses. En effet, si j'ai inféré que l'Éole vole par une règle de défaut et que par la suite mes croyances évoluent et m'indique que l'Éole est bloqué au musée de l'air pour toujours, je devrais modifier mon inférence initiale et supprimer le fait inféré et les raisonnements qui en découlent.

Un système de logique des défauts se présentera sous la forme d'une *théorie avec (règles de) défauts*, constituée d'un ensemble particulier de formules et règles d'inférence. L'ensemble en question contient des formules de la logique des prédicats[1]représentant les informations de base données au système et traitées en tant qu'*axiomes* ; il contient en outre des règles de défaut qui traduisent les différentes *lois comprenant des exceptions.*

Pour un tel système il existe un certain nombre d'**ensembles consistants de croyances** (zéro, un ou plusieurs ensembles) qui peuvent en être inférées. Ces ensembles représentent les différentes images du monde qui peuvent être imaginées à partir de la théorie avec défauts.

2.2 Théories avec défauts

2.2.1 Définition formelle

Définition 2.1. *Désignons par $\mathcal{L}$ un langage prédicatif du premier ordre. Une* ***règle de défaut*** *(en abrégé* défaut*) $\mathcal{D}$ est une expression de la forme :*

$$\frac{\alpha(x) : \beta_1(x), ..., \beta_m(x)}{\gamma(x)}$$

où $\alpha(x)$,$\beta_1(x), ..., \beta_m(x)$ et $\gamma(x)$, appelés respectivement ***pré-requis****,* ***justifications*** *et* ***conséquent*** *du défaut $\mathcal{D}$, sont des formules de $\mathcal{L}$ dont les variables libres sont choisies parmis $x = (x_1, ..., x_n)$. Un défaut $\mathcal{D}$ est dit* fermé *si et seulement si $\alpha(x)$,$\beta_1(x), ..., \beta_m(x)$ et $\gamma(x)$ ne contiennent pas de variable libre. Dans ce cas $\alpha(x)$,$\beta_1(x), ..., \beta_m(x)$ et $\gamma(x)$ sont notés plus simplement α, $\beta_1, ..., \beta_m$ et γ.*

Pour un défaut $\mathcal{D}$ nous appelons $pre(\mathcal{D})$, $just(\mathcal{D})$ et $cons(\mathcal{D})$ pour dénoter le pré-requis, les justifications et le conséquent de $\mathcal{D}$, respectivement.

Les variables libres d'un défaut sont interprétées comme *universellement quantifiées*, leur portée s'étendant sur les trois membres du défaut. Un défaut qui n'est pas fermé est appelé *ouvert*. Un défaut ouvert représente un schéma général d'inférence. Une instance d'un défaut ouvert est un défaut fermé obtenu par remplacement de toutes les variables libres du défaut ouvert par des constantes de $\mathcal{L}$ (en respectant la loi implicite de portée des variables libres du défaut).

Définition 2.2. *Une* ***théorie avec règles de défauts*** $\mathbf{\Gamma}$*, appelée* ***D-théorie****, est une paire (Σ, Δ) où :*
- Σ ***est un ensemble de formules fermées de*** $\mathcal{L}$***.***
- Δ ***est un ensemble de règles de défauts,***

On dit en abrégé que Γ est une *théorie avec défauts*. Une théorie avec défauts $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ est dite fermée si et seulement si tous les défauts de Δ sont fermés.

2.2.2 Utilité des règles de défaut

Reprenons notre exemple introductif sous forme de **représentation d'une connaissance incomplète**. La connaissance est donnée sous la forme de deux règles de défaut indiquant respectivement "Un avion appartenant à un musée est généralement localisé là où se situe le musée" et "Un avion participant à une exposition est généralement localisé là où se situe l'exposition", soit :

$$\frac{Musee(x, y) \wedge Localisation(y) = z : Localisation(x) = z}{Localisation(x) = z},$$
$$\frac{Exposition(x, y) \wedge Localisation(y) = z : Localisation(x) = z}{Localisation(x) = z}.$$

En considérant que le musée accueillant l'Éole est le musée des arts et métiers se situant à Paris et que l'Éole est actuellement exposé au Bourget, alors **ces deux règles d'inférence induisent des**

[1]Dans ce chapitre le langage de représentation est prédicatif dans le but de présenter des exemples récurrents de la littérature pour soutenir les définitions. Cependant dans la suite le langage de représentation est propositionnel. Une présentation de la logique propositionnelle est faite dans les préliminaires formels, chapitre 1. Le lecteur souhaitant élargir sa connaissance de la logique des prédicats peut se référer au chapitre concerné dans Alliot et Schiex [AS93].

conclusions mutuellement inconsistantes. Si l'on applique d'abord la première règle, il faut empêcher toute inférence qui améneraît la conclusion : "L'Éole se situe au Bourget". On dira que "L'Éole se situe à Paris" et "L'Éole se situe au Bourget" sont des **formules appartenant à deux extensions** (mutuellement inconsistantes) de la théorie ayant les deux règles de défaut énoncées ci-dessus.

Voyons maintenant une situation qui illustre l'utilisation que l'on peut faire des règles de défaut dans des **structures hiérarchisées** comportant des exceptions. Considérons les assertions suivantes représentées dans la figure 2.1 : "Un avion vole", "Un avion de musée est un avion mais ne vole pas", "Un avion de démonstration est un avion de musée et vole". Ces assertions sont représentables au moyen d'une théorie $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ définie comme suit :

- $\Sigma = \{\forall x(Demo(x) \supset Musee(x)), \forall x(Musee(x) \supset Avion(x)), \forall x(Demo(x) \supset Vole(x))\}$.
- $\Delta = \{\dfrac{Avion(x) : Vole(x) \wedge \neg Musee(x)}{Vole(x)}, \dfrac{Musee(x) : \neg Vole(x) \wedge \neg Demo(x)}{\neg Vole(x)}\}$,

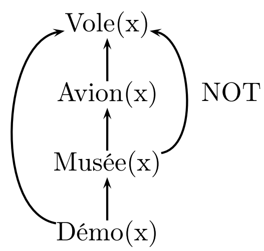

Fig. 2.1: Structure hiérarchisée

Si x est un *avion de démonstration*, les trois formules de la théorie nous permettent d'inférer que x est un *avion de musée*, un *avion* et qu'il *vole*, les conclusions des deux défauts ne peuvent pas être déclenchées. Cette inférence détermine l'unique extension de la théorie formée de l'union de Γ et de l'assertion "x est un avion de démonstration".

Si x est un *avion de musée* et si l'on sait que x n'est *pas un avion de démonstration* alors la deuxième formule de la théorie nous permet d'inférer que x est un *avion* et du deuxième défaut on infère que x ne *vole pas*. Cette inférence détermine l'unique extension de la théorie formée de l'union de Γ et de l'assertion "x est un avion de musée et n'est pas un avion de démonstration".

2.3 Extensions de théories avec défauts

Une théorie avec défauts $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ sous-tend un certain nombre d'ensembles de croyances (zéro, un ou plusieurs ensembles) que l'on peut inférer de façon consistante avec l'ensemble Σ de formules. Ces ensembles de croyances sont appelés **extensions** de la théorie avec défauts.

Les extensions d'une théorie avec défauts ne sont explicitement définies ici que pour les théories fermées. Les théories ouvertes avec défauts peuvent être transformées en des théories fermées correspondantes en remplaçant tous les défauts ouverts par l'ensemble de toutes leurs instances via la restriction de l'applicabilité des défauts ouverts au domaine de Herbrand de la théorie. Moyennant cette transformation, les résultats obtenus pour les théories fermées avec défauts peuvent être étendus aux théories ouvertes avec défauts lorsque ces théories sont finies (à noter ici que les théories contenant des fonctions d'arité non nulle ont un domaine de Herbrand infini).

Avant de formaliser le sujet, indiquons une caractérisation intuitive des propriétés que doit posséder une extension d'une théorie fermée avec défauts : **une extension est un sur-ensemble des infor-**

mations de base du système qui comprend tout ce qui peut-être inféré, que ce soit par les règles logiques classiques ou par les défauts.

Définition 2.3. *Etant donné un sous-ensemble* X *de* $\mathcal{L}$*, appelons* $Th_{\mathcal{L}}(X)$ *l'ensemble des formules fermées qui peuvent être déduites de* X *par les lois d'inférence classiques de* $\mathcal{L}$*. Formellement,* $Th_{\mathcal{L}}(X) = \{w | w \in \mathcal{L}, w \text{ est fermé et } X \vdash w\}$.

Définition 2.4. *Soit* $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ *une théorie fermée avec défauts. Etant donné un sous-ensemble* S *de* $\mathcal{L}$*, désignons par* $\Pi(S)$ *le plus petit sous-ensemble de* $\mathcal{L}$ *satisfaisant aux trois conditions suivantes :*
- $\Sigma \subseteq \Pi(S)$,
- $Th_{\mathcal{L}}(\Pi(S)) = \Pi(S)$,
- *si* $\dfrac{\alpha : \beta_1, ..., \beta_m}{\gamma} \in \Delta$*, si* $\alpha \in \Pi(S)$ *et si* $\neg\beta_1, ..., \neg\beta_m \notin S$*,alors* $\gamma \in \Pi(S)$.

Un ensemble de formules $E \subseteq \mathcal{L}$ est une *extension* pour Γ si et seulement si $\Pi(E) = E$, c'est-à-dire si et seulement si E est un **point-fixe** de l'opérateur Π. Une telle extension E peut être caractérisée de la manière suivante.

Définition 2.5. *Construisons une suite de formules* E_i *en posant* $E_0 = \Sigma$ *et*

$$E_{i+1} = Th_{\mathcal{L}}(E_i) \cup \{\gamma | \frac{\alpha : \beta_1, ...\beta_m}{\gamma} \in \Delta\} \text{ où } \alpha \in E_i \text{ et } \neg\beta_1, ..., \neg\beta_m \notin E,$$

pour $i = 0, 1, 2, etc.$ *Alors l'ensemble donné* E *est une extension pour* Γ *si et seulement si* $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

Dans la suite, nous ferons une distinction entre **raisonnement sceptique** et **raisonnement crédule** à partir d'une théorie Γ. Une formule (de la logique standard) f peut-être inférée de manière *sceptique* (resp. *crédule*) à partir d'une théorie Γ si et seulement si f appartient à toutes (resp. au moins une) extension(s) de Γ.

2.4 Théories particulières

En logique des défauts il existe des théories particulières pour lesquelles *l'existence d'extensions est fortement liée à la forme des défauts* constituant l'ensemble des règles de défauts.

2.4.1 Théories normales

Certaines théories avec défauts ne possèdent pas d'extension. Il existe cependant une classe de théories avec défauts pour lesquelles **l'existence d'extensions est assurée**. Il s'agit des théories pour lesquelles le *conséquent* et le *justificatif* d'un même défaut sont identiques. Ces théories sont appelées *normales.* Un défaut normal dont le *pré-requis* est vide est appelé **super-normal**.

Définition 2.6. *Une* théorie normale *est uniquement constituée de* ***défauts normaux****. Par définition un défaut normal peut-être utilisé pour exprimer des assertions telles que : "Normalement ou typiquement, Les* α *sont des* β*" et est de la forme :*

$$\frac{\alpha(x) : \beta(x)}{\beta(x)}$$

Outre la propriété intéressante d'admettre au moins une extension, les théories normales avec défauts possèdent une propriété de **semi-monotonie** : si on accroît l'ensemble des défauts d'une théorie normale, alors la nouvelle théorie normale ainsi obtenue admet une extension qui inclut une extension de la première théorie. Une conséquence pratique importante de cette propriété est la possibilité de construire une théorie de la preuve qui reste locale par rapport aux défauts mis en jeu.

2.4.2 Théories semi-normales

Les défauts normaux semblent suffisamment expressifs pour représenter un grand nombre de formes de raisonnement opérant par défaut. Les propriétés des **systèmes formels** que constituent les théories normales sont particulièrement avantageuses en raison des caractéristiques suivantes.

Le *conséquent* et la *justification* d'un défaut normal sont identiques. Un défaut normal est donc inapplicable quand la fausseté de son conséquent a été démontrée. Pareils défauts ne peuvent introduire d'inconsistances, ne peuvent réfuter la justification d'autres défauts normaux appliqués précédemment et ne peuvent réfuter leur propre justification. En résumé les théories normales sont semi-monotones, possèdent toujours au moins une extension et présentent une théorie de la preuve assez simple.

Cependant, certains problèmes désagréables peuvent survenir au cours de l'utilisation des défauts normaux. En particulier l'interaction de différentes règles normales peut faire apparaître des conclusions non souhaitées. Pour cette raison il semble parfois nécessaire de **bloquer la transitivité** entre des règles de défauts.

Définition 2.7. *Par définition, un défaut* semi-normal *est un défaut qui est de la forme :*

$$\frac{\alpha(x) : (\beta(x) \wedge \gamma(x))}{\beta(x)}$$

L'application d'un défaut semi-normal est donc contrôlée explicitement au moyen de la présence d'une **condition supplémentaire** dans sa justification. Les théories avec défauts semi-normaux (appelées théories semi-normales) ne possèdent pas nécessairement d'extension et perdent certaines des propriétés avantageuses des théories normales, en particulier la semi-monotonie.

2.4.3 Utilité des théories particulières

A titre d'exemple, considérons la théorie normale $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ où Δ contient deux défauts normaux signifiant que “typiquement, un *avion de musée* est un *avion*” et que “typiquement, un *avion* vole” et l'assertion que “Éole est un *avion de musée*”, soit la théorie avec défauts normaux $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ suivante :

$$\Sigma = \{Musee(Eole)\}, \Delta = \{\frac{Musee(x) : Avion(x)}{Avion(x)}, \frac{Avion(x) : Vole(x)}{Vole(x)}\}$$

Les règles de Δ permettent d'inférer, par défaut, que un *avion de musée vole*, ce qui n'est pas le cas. On peut remédier à ce problème en introduisant un troisième défaut normal qui indique que “typiquement un *avion de musée ne vole pas*. On obtient la théorie normale $\Gamma' = (\Sigma, \Delta')$ où Δ' est l'ensemble de défauts suivant :

$$\Delta' = \{\frac{Musee(x) : Avion(x)}{Avion(x)}, \frac{Avion(x) : Vole(x)}{Vole(x)}, \frac{Musee(x) : \neg Vole(x)}{\neg Vole(x)}\}$$

Pour un *avion de musée* donné, Δ' peut induire deux extensions qui diffèrent selon la capacité de l'avion concerné à voler. En particulier Γ' admet les extensions :

- $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{Musee(Eole), Avion(Eole), Vole(Eole)\})$,
- $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{Musee(Eole), Avion(Eole), \neg Vole(Eole)\})$.

Néanmoins, il semble raisonnable de demander que la transitivité entre les deux premières règles de Δ soient bloquée. On favoriserait ainsi a priori l'extension dans laquelle un *avion de musée ne vole pas*. Ceci peut s'effectuer en modifiant la deuxième règle de telle façon que celle-ci ne puisse s'appliquer dans le cas exceptionnel où un *avion* est un *avion de musée*. On obtient ainsi la théorie semi-normale $\Gamma'' = (\Sigma, \Delta'')$ où Δ'' est l'ensemble de défauts suivant :

$$\Delta'' = \{\frac{Musee(x) : Avion(x)}{Avion(x)}, \frac{Avion(x) : Vole(x) \wedge \neg Musee(x)}{Vole(x)}, \frac{Musee(x) : \neg Vole(x)}{\neg Vole(x)}\}$$

De cette manière, on obtient l'extension désirée, à savoir E_2. Cependant, nous ferons dans le chapitre suivant, traitant de la **logique des défauts prioritisée de Brewka et Eiter**, que cette approche s'avère maladroite et que **pour donner de l'importance à une conclusion plutôt qu'à une autre, l'utilisation de priorités est une voie plus intéressante**.

Chapitre 3

Logique des défauts prioritisée

En logique des défauts certaines situations mènent à établir des préférences entre extensions, une voie intéressante semble être celle de la prioritisation via un ordre de préférence entre défauts de la théorie. Un certain nombre de variantes de la logique des défauts, prenant en compte les priorités entre défauts, ont été proposées dans la littérature. Pourtant aucune d'entre-elles ne respectent les deux principes naturels de maniement des préférences introduits par Brewka et Eiter [BE99], lesquels présentent une approche qui ne souffre pas de ce problème.

3.1 Prioritisation en logique des défauts

En raisonnement non monotone les **conflits entre défauts** sont omniprésents. Par exemple, les règles les plus spécifiques peuvent être en conflit avec les règles les plus générales (comme dans le dernier exemple du chapitre précédent), un problème qui a été largement étudié dans le contexte de *réseaux d'héritage*. Quand les défauts sont utilisés pour représenter des formes de "buts" en *planification* les conflits surviennent naturellement. La même conclusion émane en *diagnostic à base de modèle* où les défauts servent à représenter l'assertion que typiquement un composant fonctionne. En *raisonnement légal* les conflits parmi les lois sont vraiment courants et font le bonheur de nombreux hommes de lois. Dans notre cas, on verra plus-tard qu'il est utile de donner une priorité plus (resp. moins) forte aux défauts introduits par rapport aux défauts de la théorie initiale pour pallier le problème de la trivialisation en logique des défauts quand l'union ensembliste des règles de défauts n'est pas vide.

Les formalismes standards non monotones manient de tels conflits en générant des **ensembles de croyances multiples**. En *logique des défauts* et en *logique auto-epistémique* ces ensembles sont appelés **extensions** et expansions, respectivement. En *circonscription* les ensembles de croyances correspondent aux différentes classes de *modèles préférés*.

Habituellement, ces ensembles de croyances ne sont pas tous plausibles. Nous tendons souvent à **préférer des règles** en conflit plutôt que d'autres et nous intéressons aux ensembles de croyances générés par ces règles uniquement. Une voie pour arriver à cela est de **ré-représenter les défauts** de telle sorte que les croyances non souhaitées ne soient pas générées, par exemple en ajoutant de nouvelles conditions de consistance à un défaut (comme avec les théories semi-normales vues précédemment). Cette approche a l'avantage que la machinerie logique de la logique non monotone sous-jacente ne nécessite pas de changement. D'un autre côté, re-représenter les défauts de cette manière est une entreprise vraiment maladroite. Les nouveaux défauts en résultant tendent à être plutôt complexes. De plus, l'ajout d'une nouvelle information à la base de connaissances peut mener vers une représentation distante. En d'autres mots, **la tolérance d'élaboration est violée**.

Ainsi nous préférons une approche ou les préférences parmi les défauts peuvent être représentées via une **relation de préférence** explicite et où la machinerie logique est étendue convenablement. En effet, pour tous les formalismes non monotones majeurs, de telles versions prioritisées ont été proposées dans le passé, parmi eux plusieurs versions prioritisées de la logique des défauts de Reiter ont fait leur apparition.[1]Cependant nous verrons que certaines d'entre-elles ne sont pas totalement satisfaisantes. Il s'avère que celles-ci refondent implicitement la logique des défauts en une logique de croyances graduées, pendant que d'autres renforcent excessivement l'application de règles de plus haute priorité, ce qui mène vers un comportement contre-intuitif.

3.2 Théorie avec défauts prioritisée

Une théorie avec défauts génère des extensions qui représentent des *ensembles acceptables de croyances* qu'un raisonnement peut adopter en se basant sur la théorie $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$. Pour définir une théorie avec défauts prioritisée, Brewka et Eiter [BE99] étendent les théories avec défauts à l'aide d'un **ordre partiel strict** $\prec$ sur les règles de défaut (i.e. $d \not\prec d$, et $d \prec d'$, $d' \prec d''$ implique $d \prec d''$). Un défaut d devra être *préféré* à un défaut d' quand l'ordre $d \prec d'$ apparaît.

Définition 3.1. *Une théorie avec défauts prioritisée est un triplet* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *ou* (Σ, Δ) *est une théorie avec défauts et* $\prec$ *est un ordre partiel strict sur* Δ*.*

Les théories avec défauts partiellement ordonnées ont l'avantage que **le classement de préférences parmi certains défauts peut-être laissé non spécifié**. Cette propriété est importante parce que dans plusieurs cas l'assignement de préférence n'est pas une voie naturelle. Cependant le cas d'un ordre partiel quelconque peut-être réduit à un raffinement particulier, appelé **bien-ordonné**, de façon canonique. Rappelons, qu'un ordre partiel est bien-ordonné si et seulement si chaque sous-ensemble des éléments contient le plus petit élément. On peut observer que chaque ensemble bien-ordonné est un **ordre total**.

Définition 3.2. *Une théorie avec défauts totalement prioritisée est une théorie avec défauts prioritisée* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *où* $\prec$ *est bien ordonné.*

Les conclusions de théories avec défauts prioritisées sont définies en termes d'**extensions préférées**, lesquelles sont un **sous-sensemble des extensions classiques**. La définition d'extension préférée pour les théories totalement prioritisées sera vue dans les sections suivantes. *Le cas général des théories avec défauts quelconques prioritisées peut être réduit à ce dernier cas* de la manière suivante.

Définition 3.3. *Soit* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *une théorie avec défauts prioritisée fermée.* E *est une extension préférée de* Γ *si et seulement si* E *est une extension préférée d'une théorie avec défauts totalement prioritisée* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec')$ *tel que* $d \prec d'$ *implique* $d \prec' d'$*.*

Dans la suite nous nous restreindrons aux théories avec défauts totalement prioritisée. Sauf cas contraires, toutes les théories avec défauts sont notées fermées.

3.3 Principes naturels de priorités

Un certain nombre de variantes de la logique des défauts, prenant en compte les priorités entre défauts, ont été proposées dans la littérature. Pourtant aucune d'elles ne respectent les deux **principes naturels de maniement des préférences** introduit par Brewka et Eiter [BE99].

[1]Le lecteur souhaitant étudier ces différentes versions peut se référer à [BE99].

3.3.1 Principe de préférence

Soient B_1 et B_2 deux extensions d'une théorie avec défauts prioritisée Γ générées respectivement par les défauts $d_1 \cup \Sigma$ et $d_2 \cup \Sigma$, où $d_1, d_2 \notin \Sigma$. Si d_1 est préféré à d_2 alors B_2 n'est pas une extension préférée de la théorie.

Ce principe peut-être vu comme un postulat de signification pour le terme préférence et établit que **nous avons besoin de peu de chose pour le maniement de préférence** dans un système basé sur des règles. Il est dur de voir comment l'utilisation du terme "préférence parmi des règles" peut être justifié dans les cas où ce principe est violé.

3.3.2 Principe de pertinence

Notons E une extension préférée d'une théorie avec défauts $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$, d un défaut tel que le prérequis de d n'est pas dans E. Alors E est une extension préférée de $\Gamma' = (\Sigma, \Delta \cup \{d\}, \prec')$ quand $\prec'$ est en accord avec $\prec$ à propos des priorités parmi les défauts dans Δ.

Ce principe est relatif à la pertinence, Il établit qu'une formule p peut **dépendre des priorités des défauts participant à la dérivation** de p seulement et pas des priorités de défauts lesquels deviennent applicables quand p est cru.

Par conséquent, l'ajout d'une règle qui n'est pas applicable dans un ensemble de croyances préféré ne pourra jamais rendre cet ensemble de croyance non préféré à moins qu'une nouvelle information de préférence change les préférences parmi les anciennes règles (par transitivité). En d'autres mots, **un ensemble de croyance n'est pas touché par la non application de règles qui ne sont pas applicables**.

3.4 Problèmes des approches existantes

3.4.1 Contrôle de la quasi-inductivité

Un premier groupe d'approches de théories avec défauts prioritisée utilise les préférences pour **contrôler la définition quasi-inductive des extensions de Reiter** : à chaque étape de la génération des extensions, les défauts avec la priorité la plus élevée dont les pré-requis ont déjà été dérivés sont appliqués.

Le problème ici est que les extensions préférées ne prennent pas en considération le fait qu'un défaut puisse faire appel à un autre défaut pour s'appliquer. Il peut donc se produire qu'un défaut moins prioritaire fasse partie d'une extension préférée bien que le pré-requis d'un défaut en conflit plus prioritaire fait partie d'une extension préférée. Dans ce cas le **principe de préférence est violé**.

Exemple 3.1. *Considérons la théorie avec défauts prioritisée* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *suivante :*

$$\Sigma = \emptyset,\ \Delta = \{\frac{a : b}{b}, \frac{: \neg b}{\neg b}, \frac{: a}{a}\},\ \prec: \{d_1 \prec d_2, d_2 \prec d_3\}$$

Cette théorie avec défauts possède deux extensions classiques, $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b\})$ *générée par les défauts* d_1 *et* d_3*,* $E_2 = (\{a, \neg b\})$ *générée par les défauts* d_2 *et* d_3*. L'unique extension préférée de l'approche contrôlant la quasi-inductivité est* E_2*. La raison étant que le pré-requis du défaut* d_2 *est dérivé avant la pré-requis du défaut* d_1 *lors de la construction de l'extension préférée.*

La logique des défauts n'est pas une logique de croyances graduées où les degrés de croyance doivent jouer un rôle. La logique des défauts modélise la consistance de croyance basée sur le raisonnement révisable. Ici, puisque a est une croyance acceptée, nous croyons le défaut d_1 applicable et E_1 est l'unique extension préférée de Γ.

3.4.2 Approche de Rintanen

Une approche entièrement différente a été proposée par Rintanen [Rin95] en s'appuyant sur l'utilisation d'un ordre total sur les défauts (normaux) pour provoquer un ordre lexicographique des extensions.

Appelons un défaut normal $r = \frac{a:b}{b} \in \Delta$ générateur dans un ensemble de formules E (noté $r \in GEN(\Delta, E)$), si a et b appartiennent à E. Une extension E est donc préférée à une extension E', si et seulement si il y a un défaut $r \in GEN(\Delta, E) \backslash GEN(\Delta, E')$ satisfaisant la condition : si r' est préféré à r et que $r' \in GEN(\Delta, E')$, alors $r' \in GEN(\Delta, E)$.

Malheureusement cette approche aussi mène vers des résultats contre intuitif et **viole les principes naturels de priorité** vus précédemment.

Exemple 3.2. *Considérons la théorie avec défauts prioritisée suivante :*

$$\Sigma = \emptyset,\ \Delta = \{\frac{a:b}{b}, \frac{:\neg a}{\neg a}, \frac{:a}{a}\},\ \prec: \{d_1 \prec d_2, d_2 \prec d_3\}$$

Cette théorie avec défauts possède deux extensions classiques, $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a\})$ et $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b\})$. Intuitivement, puisque la décision de croire a ou pas dépend de d_2 et de d_3 seulement, et puisque d_2 est préféré à d_3, nous voudrions conclure $\neg a$, en d'autres mots de préférer E_1. Pourtant l'approche de Rintanen préfère E_2. La raison étant que dans E_2, d_1 est appliqué. Croire en a est donc accepté sur la base qu'il puisse nous permettre d'appliquer un défaut de plus haute priorité.

Il est facile de voir que cette approche viole le principe de pertinence : E_1 est clairement l'extension unique préférée du sous-ensemble de règle d_2, d_3 dans l'approche de Rintanen. L'ajout du défaut d_1 lequel n'est pas applicable dans E_1 rend E_1 non-préférée.

3.5 Extensions préférées

Dans cette section nous introduisons la notion d'extensions préférées de Brewka et Eiter [BE99] **pour les théories avec défauts totalement prioritisées**. Comme mentionné précédemment, les théories prioritisées avec défauts quelconques peuvent être *réduites* à ce cas de façon canonique.

3.5.1 Théories avec défauts super-normaux

Le maniement de préférences de théories prioritisées avec défauts super-normaux est plutôt facile. L'idée centrale de Brewka et Eiter [BE99] est de vérifier l'applicabilité des défauts dans l'ordre de préférence. Tout d'abord, introduisons l'**opérateur C** qui étant donné une théorie totalement prioritisée avec défauts libres de pré-requis Γ (non nécessairement super-normaux), **produit des tentatives de conclusions** de Γ.

Soit un défaut d actif dans un ensemble de formules S, si $pre(d) \in S$, $\neg just(d) \cap S = \emptyset$ et $cons(d) \notin S$. Intuitivement, un **défaut** est **actif** dans S si il est applicable dans S et qu'il n'a pas encore été appliqué.

Définition 3.4. *Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ une théorie avec défauts libres de pré-requis totalement prioritisée. L'opérateur C est défini comme suit : $C(\Gamma) = \bigcup_{\alpha \geq 0} E_\alpha$ où $E_0 = Th_{\mathcal{L}}(\Sigma)$, et pour tout ordinal $\alpha > 0$,*

$$E_\alpha = \begin{cases} \underline{E}_\alpha, & \text{si aucun défaut de } \Delta \text{ n'est actif dans } \underline{E}_\alpha, \\ Th_{\mathcal{L}}(\underline{E}_\alpha \cup \{cons(d)\}), & \text{où } d = min_\prec\{d' \in \Delta | d' \text{ est actif dans } \underline{E}_\alpha\}, \end{cases}$$

où $\underline{E}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$. (Notons que pour chaque successeur ordinal $\alpha = \beta + 1$, $\underline{E}_\alpha = E_\beta$).

Dans le cas de théories avec défauts super-normaux, l'opérateur C produit **toujours une extension** dans le sens de Reiter et donc peut directement être utilisé pour définir les extensions préférées.

Définition 3.5. *Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ une théorie totalement prioritisée avec défauts super-normaux. E est l'extension préférée de Γ si et seulement si $E = C(\Gamma)$.*

Il est évident qu'**il y a toujours exactement une extension préférée**. Notons que la définition de cette extension est totalement constructive. Elle étend la notion de sous-théories préférées comme développée dans le cas infini.

3.5.2 Théories avec défauts libres de pré-requis

Dans cette partie, Brewka et Eiter [BE99] montrent que nous ne pouvons pas simplement étendre la définition pour les défauts super-normaux aux défauts libres de pré-requis. En effet, il se peut que des défauts soient appliqués durant la construction puis défaits plus tard par l'application de défauts de priorité moins haute.

Exemple 3.3. *Considérons la théorie avec défauts $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ suivante :*

$$\Sigma = \emptyset,\ \Delta = \{\frac{:\neg b}{a}, \frac{:\neg a}{\neg a}, \frac{:a}{a}, \frac{:b}{b}\},\ \prec : \{d_1 \prec d_2, d_2 \prec d_3, d_3 \prec d_4\}$$

L'application de l'opérateur C à cette théorie avec défauts produit l'extension préférée $E = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b\})$. Il est facile de voir que celle-ci est une extension classique. Néanmoins, on ne peut pas dire de cette extension qu'elle préserve les priorités. Le défaut d_2 est défait dans E par l'application du défaut d_3 qui est moins préféré que le défaut d_2. En d'autres mots, ***sans traitement spécial*** *d'un tel cas,* ***une règle peut hériter d'une préférence plus grande*** *d'une règle avec le même conséquent, même si elle n'est pas applicable dans l'extension.*

Pour pallier ce problème nous devons imposer une nouvelle condition dans la définition d'une extension : dans la construction de conclusions nous devons **rejeter toute règle dont le conséquent est dans E mais qui est défaite dans E**. Puisque nous devons prendre E comme résultat de la construction dans l'explication, cela est équivalent à l'ajout d'une *condition de point-fixe*. Ce qui doit être fait est de vérifier si nous arrivons au même ensemble de formules après élimination de règles qui sont défaites et présentes dans E.

Définition 3.6. *Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ une théorie totalement prioritisée avec défauts libres de pré-requis. Un ensemble E de formules est une extension préférée de Γ, si et seulement si :*

$$E = C(\Gamma^{\star E}),$$

où $\Gamma^{\star E}$ est obtenue à partir de Γ par suppression de tous les défauts dont le conséquent est dans E et est défait dans E.

Avec cette nouvelle propriété, comme avec les théories super-normales, l'extension préférée (si elle existe) est unique [BE99].

Proposition 3.1. *Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ une théorie totalement prioritisée avec défauts libres de pré-requis. Toute extension préférée de Γ est une extension classique et Γ a au plus une seule extension préférée.*

3.5.3 Théories avec défauts quelconques

Dans cette partie Brewka et Eiter [BE99] proposent maintenant de **réduire le cas général au cas libre de pré-requis** abordé à la section précédente. L'idée simple est la suivante : afin de vérifier si une extension E d'une théorie totalement prioritisée Γ est préférée, nous évaluons les pré-requis des règles de défaut participant à l'extension E.

L'**évaluation des pré-requis** signifie, premièrement *élimination des pré-requis qui sont contenus dans l'extension E, dans les défauts correspondants*. Et ensuite, l'*élimination des règles dont le pré-requis n'est pas contenu dans l'extension E*. Finalement, nous vérifions si la théorie libre de pré-requis

Γ_E résultante a E comme extension préférée.

Observons que cette opération peut être vue comme duale à la réduction standard de Gelfond/Lifschitz de la programmation logique [GL88], dans laquelle les justificatifs plutôt que les pré-requis sont utilisés pour éliminer et simplifier les règles.

Définition 3.7. *Soit* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *une théorie avec défauts totalement prioritisée et* E *un ensemble de formules. La théorie avec défauts* $\Gamma_E = (\Sigma, \Delta_E, \prec_E)$ *est obtenue à partir de* Γ *comme suit :*

Δ_E *issu de* Δ *par :*
– *élimination de tous les défauts* $d \in \Delta$ *tels que* $pre(d) \notin E$*, et*
– *remplacement de* $pre(d)$ *par* $\top$ *dans les défauts restants ;*

$\prec_E$ *hérite de* $\prec$ *comme suit : pour chaque règles* d *et* d' *de* Δ_E*,* $d \prec_E d'$ *si et seulement si* $d_1 \prec d'_1$ *pour les règles* d_1 *et* d'_1 *les moins* $\prec$ *dans* Δ *qui mettent en évidence* d *et* d' *(i.e.* $d_1 = d$ *et* $d'_1 = d'$*), respectivement.*

La théorie avec défauts résultante est clairement libre de pré-requis. Nous pouvons donc définir les extensions préférées pour les théories avec défauts quelconque comme suit :

Définition 3.8. *Soit* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *une théorie totalement prioritisée avec défauts.* E *est une extension préférée de* Γ*, si* E *est une extension classique de* Γ*, et* E *est un extension préférée de* Γ_E*.*

3.6 Respect des principes de priorités

Ici, Brewka et Eiter [BE99] montrent que les exemples problématiques introduits précédemment sont traités correctement avec cette approche.

Exemple 3.4. *Considérons la théorie avec défauts prioritisée* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *suivante :*

$$\Sigma = \emptyset,\ \Delta = \{\frac{a : b}{b}, \frac{: \neg b}{\neg b}, \frac{: a}{a}\},\ \prec : \{d_1 \prec d_2, d_2 \prec d_3\}$$

Cette théorie avec défauts admet deux extensions classiques, $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b\})$ *et* $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg b\})$*.* Δ_{E_1} *donne l'ensemble de règles de défaut* Δ_{E_1} *suivant :*

$$\Delta_{E_1} = \{\frac{: b}{b}, \frac{: \neg b}{\neg b}, \frac{: a}{a}\}$$

Il n'est pas difficile de voir que $C(\Delta_{E_1}) = E_1$. Puisqu'il n'y a pas de règle qui soit dans E_1 mais qui soit défaite dans E_1, E_1 est une extension préférée. Au contraire, E_2 n'est pas préférée. Notons que la réduction duale Δ_{E_2} de E_2 est la même que la réduction duale Δ_{E_1} de E_1, et que l'opérateur C appliqué à cette réduction ne reproduit pas E_2.

Exemple 3.5. *Considérons la théorie avec défauts prioritisée* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ *suivante :*

$$\Sigma = \emptyset,\ \Delta = \{\frac{a : b}{b}, \frac{: \neg a}{\neg a}, \frac{: a}{a}\},\ \prec : \{d_1 \prec d_2, d_2 \prec d_3\}$$

Cette théorie avec défauts admet deux extensions classiques, $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a\})$ *et* $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b\})$*. Nous avons vu précédemment que* E_1 *doit être préférée.* Δ_{E_1} *donne l'ensemble de règles de défaut* Δ_{E_1} *suivant :*

$$\Delta_{E_1} = \{\frac{: \neg a}{\neg a}, \frac{: a}{a}\}$$

Clairement, $C(E_{\Delta_1}) = E_1$, et puisque une fois encore il n'y a pas de règle qui soit dans E_1 mais qui soit défaite dans E_1, E_1 est une extension préférée. E_2 n'est pas préférée puisque $C(\Delta_{E_2}) = Th_{\mathcal{L}}(\{b, \neg a\})$ ce qui diffère de E_2.

La proposition suivante nous indique que les règles qui ne sont pas générées dans une extension préférée doivent être défaites par les règles générées appropriées ayant une priorité plus haute.

Proposition 3.2. *Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ une théorie avec défauts de base totalement prioritisée et E une* ***extension classique*** *de Γ. E est une* ***extension préférée*** *de Γ, si et seulement si pour chaque défaut $d \in \Delta$ tel que $pre(d) \in E$ et que $cons(d) \notin E$, il existe un ensemble de défaut $K_d \subseteq \{d' \in GEN(\Delta, E) | d' \prec d\}$ tel que d est défait dans $Th_{\mathcal{L}}(\Sigma \cup cons(K_d))$ [BE99].*

En exploitant cette proposition, nous pouvons établir que les principes naturels de prioritisation sont tous deux respectés avec cette approche.

Proposition 3.3. *L'approche d'extension préférée satisfait les principes de préférence et de pertinence décrits précédemment. [BE99]*

3.7 Extensions préférées “faibles”

Précédemment nous avons vu que cette nouvelle approche satisfaisait les principes naturels d'une logique prioritisée. D'un autre côté, Brewka et Eiter [BE99] montrent une *propriété moins désirable* de cette approche qui est que dans certains cas, il n'existe pas d'extension préférée. C'est ce qui se passe dans l'Exemple 3.3 ; il est facile de vérifier qu'aucune des deux extensions classiques $E_1 = (\{a, b\})$ et $E_2 = (\{\neg a, b\})$ n'est une extension préférée.

Un autre exemple montre que **les théories avec défauts normaux prioritisées peuvent ne pas posséder d'extension préférée**. Donc, la propriété des théories avec défauts super-normaux, qui met en évidence le fait que ces dernières possèdent toujours une extension, est perdue si les pré-requis sont permis dans les défauts.

Exemple 3.6. *Considérons la théorie avec défauts prioritisée $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \prec)$ suivante :*

$$\Sigma = \emptyset,\ \Delta = \{\frac{a : \neg b}{\neg b}, \frac{: b}{b}, \frac{b : a}{a}\},\ \prec: \{d_1 \prec d_2, d_2 \prec d_3\}$$

Cette théorie possède une unique extension classique $E = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b\})$. Pourtant E n'est pas une extension préférée, puisque la préférence de d_1 nécessite de conclure $\neg b$.

Intuitivement, **si les extensions non préférées existent alors les priorités que l'utilisateur a données sont incompatibles** avec la manière avec laquelle les défauts doivent être exécutés pour générer une extension. Dans l'exemple précédent c'est clairement le cas. *Il y a deux directions centrales pour manier l'inconsistance dans ce cas.*

La première est d'**arrêter sur une occurrence qui mène à l'inconsistance**, et de notifier à l'utilisateur qu'il y a une inconsistance dans ses priorités. La seconde est d'**essayer de traiter l'inconsistance en harmonisant l'information de priorité** et le retranchement logique de l'application de défaut, en relâchant ou en modifiant l'information de priorité de telle sorte que l'extension préférée devienne possible.

Nous croyons qu'en général, la première direction est préférable à la seconde puisque l'utilisateur devient explicitement conscient qu'il y a quelque chose d'anormal dans ces préférences, qui ne peut être satisfait. Cependant nous pouvons considérer qu'un approche de prioritisation doit être consistante dans le sens où si des extensions classiques existent alors plusieurs d'entre-elles peuvent toujours être sélectionnées par une méthode de prioritisation. Dans ce cas **un affaiblissement de l'approche d'extensions préférées de Brewka et Eiter pourrait être désirable**, laquelle sélectionne les extensions préférées si elles existent et sélectionne les extensions classiques sinon.

Il y a différentes possibilités pour généraliser les extensions préférées aux extensions préférées "faibles". Une possibilité est de permettre un **réordonnancement minimal des défauts** dans Δ, i.e., E devienne une extension préférée après un échange du moins de défauts possible qui soient voisins dans $\prec$. Une autre approche est de supprimer des préférences entre défauts, e.g., pour relâcher l'ordre $\prec$ le moins possible tel que des extensions préférées existent. Nous n'allons pas poursuivre ces possibilités plus loin ici. Pourtant, nous observons des limitations à ces extensions préférées "faibles".

Nous appellons une fonction χ qui sélectionne un sous-ensemble $\chi(\Gamma)$ à partir des extensions classiques d'une théorie avec défauts prioritisée Γ, un **affaiblissement de préférence consistant** d'extensions préférées. $\chi(\Gamma)$ sélectionne toutes et uniquement toutes les extensions préférées si elles existent sinon il sélectionne les extensions classiques.

Proposition 3.4. *Toute affaiblissement de préférence consistant χ d'extensions préférées doit violer les principes naturels de priorités. [BE99]*

Ce résultat nous indique que nous devons sacrifier les principes naturels de priorités si nous voulons obtenir une extension préférée "faible" pour toute théorie consistante.

Deuxième partie

Problème de la trivialisation

Chapitre 4

Connaissances de base non hiérarchisées

Supposons que nous nous donnions n théories avec défauts à fusionner, de telle sorte que l'union ensembliste de leurs parties de la logique classique, notée $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$, soit inconsistante. Une voie directe pour aborder la trivialisation de la théorie avec défauts résultante consiste en la suppression d'assez de formules de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ afin que le sous-ensemble résultant devienne consistant. Cependant, nous allons voir que la suppression de formules devient inutilement destructive.

4.1 Définition

En effet, un **raisonnement crédule** pourrait explorer les différentes extensions qui peuvent être obtenues si l'on considère comme acceptables les différents *sous-ensembles maximaux consistants* des différents MUSes de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$. Aussi, un **raisonnement sceptique** pourrait chercher à explorer ce qui pourrait appartenir à toutes ces extensions. A cet égard, si nous remplaçons chaque formule f des MUSes de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ par un défaut super-normal correspondant

$$\frac{:f}{f}$$

, nous pourrions obtenir une nouvelle théorie avec défauts où nous considérons que *chaque formule f appartenant aux MUSes peut être inférée si f est supposée consistante.* Cependant, puisque l'union ensembliste des conséquents de ces nouveaux défauts est inconsistante, **la logique des défauts interdit la présence des toutes ces formules f dans la même extension**. Il est intéressant de voir que cette approche permet le maniement du problème de trivialisation des théories avec défauts contenant un ensemble inconsistant de connaissances de base, en utilisant le cadre de la logique des défauts lui-même. [1]

Notations . *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble non vide de n théories avec défauts, appelées **D-théories**, de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$, à fusionner. L'ensemble de toutes les formules de tous les MUSes de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ est noté $\cup\mathbf{MUS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{\Sigma_i})$.*

Définition 4.1. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble non vide de n théories avec défauts de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$, à fusionner. La **D-théorie fusionnée résultante**, est donnée par $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ où*
- $\Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$,
- $\Delta = \cup_{i=1}^{n}\Delta_i \cup \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$.

[1] On peut aussi voir ce problème de trivialisation en ne considérant qu'une seule théorie dont la partie de la logique classique est inconsistante.

Cette définition correspond donc à la politique qui requiert un **traitement uniforme des formules à l'intérieur des MUSes**. A l'opposé, des variantes pourraient utiliser un opérateur *select* pour fournir un sous-ensemble de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ tel que $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit consistante, et de telle sorte que chaque formule f de $select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit remplacée par un défaut super-normal correspondant dans la théorie fusionnée. Nous verrons dans les chapitres suivants des critères de préférence permettant l'utilisation de l'opérateur *select*.

4.2 Ensemble de défauts initiaux vide

Premièrement, considérons la situation basique où l'ensemble des défauts $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ est vide. Bien évidemment, ce problème coïncide avec celui de la fusion d'ensembles de formules propositionnelles tel que leur union ensembliste soit inconsistante. La définition précédente fournit donc une approche originale pour traiter ce cas.

Exemple 4.1. *Soit* $\Gamma_1 = (\{\neg a \vee b, \neg b\}, \emptyset)$ *et* $\Gamma_2 = (\{a\}, \emptyset)$ *deux D-théories à fusionner. Clairement,* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\neg a \vee b, a, \neg b\}$ *est inconsistante.* $\Gamma = (\emptyset, \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a \vee b}{\neg a \vee b}, \frac{:\neg b}{\neg b}\})$ *et possède les trois extensions* $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg a \vee b\})$, $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg b, \neg a \vee b\})$ *et* $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg b\})$ *; chacune d'entre-elles contient deux des conséquents des trois défauts introduits.*

4.2.1 Calcul des extensions

Intéressons nous maintenant à la remarque suivante. Il est possible de *caractériser l'intersection ensembliste de toutes les extensions* de la théorie avec défauts fusionnée, quand l'ensemble des défauts initiaux est vide. Pour cela, nous avons recours à la **fonction de choix** (usuelle) θ pour une **famille finie d'ensembles** non vides $\Xi = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$, qui "pioche" un élément dans chaque Ω_i de la famille. Dans le cas particulier où Ξ est vide, $\theta(\Xi)$ est vide.

Notations . *Soit* Θ *la* ***sous-classe de fonctions de choix*** θ *pour* $\Xi = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ *t.q. pour* $i \neq j, \theta(\Omega_i) \in \Omega_j \Rightarrow \theta(\Omega_j) = \theta(\Omega_k), \exists k \neq j$ *(k n'est pas forcément égal à i). Cette sous-classe est restreinte aux fonctions de choix* θ ***dont l'image est minimale*** *t.q. si* $\theta \in \Theta$ *alors* $\nexists \theta' \in \Theta$ *t.q.* $\theta'(\Xi) \subset \theta(\Xi)$.

Proposition 4.1. *Soit* $n > 1$. *Considérons n D-théories finies de la forme* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *à fusionner. Si* Δ_i *est vide pour* $i = 1..n$, *alors l'****intersection ensembliste de toutes les extensions*** *de la D-théorie fusionnée résultante* $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ *est* $Th_{\mathcal{L}}(\{\psi\})$ *où*

$$\psi = \bigvee_{\theta \in \Theta} \bigwedge \left(\; (\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) \setminus \theta(MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)) \; \right).$$

Démonstration. Il est bien connu que les extensions d'une théorie avec défauts super-normaux $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ sont exactement les sur-ensembles de Σ qui sont les sous-ensembles maximaux consistants de $\Sigma \cup cons(\Delta)$. Soit E un ensemble obtenu après suppression dans $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ d'un élément de chaque MUS de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$. Alors, E est consistant parce qu'il ne peut contenir de sous-ensembles inconsistants (par définition d'un MUS). De plus, si E est maximal consistant, alors parcourir tout ces E épuise clairement les sous-ensembles maximaux consistants de $\Sigma \cup cons(d)$, i.e. les extensions de $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$. Aussi, il reste à montrer que E est maximal consistant. Si E n'est pas maximal consistant alors c'est un sous-ensemble d'un E' maximal consistant. Cependant un tel E' est nécessairement obtenu à l'aide d'un θ satisfaisant la restriction de la sous-classe Θ aux fonctions de choix θ dont l'image est minimale. Mais $\vee_{\theta^E \in \Theta} \wedge \left((\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) \setminus \theta^E(MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\right)$ est clairement impliqué par $\vee_{\theta^{E'} \in \Theta} \wedge \left((\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) \setminus \theta^{E'}(MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\right)$. Enfin, la contrainte "$\theta(\Omega_i) \in \Omega_j \Rightarrow \theta(\Omega_j) = \theta(\Omega_k)$ pour au moins un $k \neq j$" assure que si un MUS a des éléments supprimés par d'autres MUSes alors ce MUS doit supprimer un de ces éléments (parce qu'aucun autre élément de ce MUS n'a besoin d'être vraiment supprimé, puisque l'inconsistance survenant dans ce MUS a déjà été traitée). Cette condition est clairement satisfaite par la restriction aux fonctions de choix ayant une image minimale. $\square$

4.2.2 Propositions centrales

En accord avec l'Exemple 4.1, la propriété suivante nous montre que **chaque formule satisfiable dans $\cup$MUS($\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$) appartient à au moins une extension des théories fusionnées**, quand l'union ensembliste des ensembles de défauts initiaux est vide. Par conséquent, aucune formule n'est perdue durant le processus de fusion dans le sens où chaque formule non-contradictoire qui est remplacée par un défaut - qui était supprimée dans les mécanismes de fusion standard - peut être trouvée dans au moins une extension de la théorie fusionnée.

Proposition 4.2. *Soit $n > 1$. Considérons n D-théories finies $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner t.q. $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \emptyset$ et que $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ soit inconsistante. Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ la D-théorie fusionnée résultante. Pour toute formule satisfiable $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ il existe au moins une extension de Γ qui contient f et il n'existe aucune extension de Γ qui contienne $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$.*

Démonstration. Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ la D-théorie fusionnée obtenue selon la définition 4.1. Par définition d'un MUS, $\Sigma \cup (\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ est inconsistante. Aussi, par la Définition 4.1, Σ est consistant parce que $\Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$. Il est bien connu qu'une théorie avec défauts (Σ, Δ) possède une extension inconsistante ssi Σ est inconsistant. Donc, aucune extension de Γ ne contient $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$. Si f est une formule satisfiable de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$, alors c'est un conséquent d'un défaut de la théorie super-normale Γ. Donc, f est dans au moins une extension de Γ par définition du calcul des extensions de théorie avec défauts super-normaux. □

En se basant sur la propriété précédente, il peut être imaginé que l'intersection de toutes les extensions peut coïncider exactement avec les extensions de la théorie avec défauts $\Gamma' = (\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i), \emptyset)$ où l'on supprime les MUSes. Comme l'exemple suivant le montre, ce n'est pas le cas puisque **le calcul de plusieurs extensions traduit un mode de raisonnement par cas qui permet des inférences qui pourraient être effacées si $\cup$MUS($\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$) était simplement supprimé de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$.**

Exemple 4.2. *Considérons $\Gamma_1 = (\{a \wedge b, c \supset d\}, \emptyset)$ et $\Gamma_2 = (\{\neg a \wedge c, b \supset d\}, \emptyset)$ deux D-théories à fusionner. Clairement, $\{a \wedge b, \neg a \wedge c\}$ est un MUS. Si nous supprimons simplement le MUS, nous obtenons $\Gamma' = (\{c \supset d, b \supset d\}, \emptyset)$. Clairement, Γ' a une unique extension qui est $Th_{\mathcal{L}}(\{c \supset d, b \supset d\})$ qui ne contient pas d. C'est absolument inadéquat puisque la contradiction est expliquée par la co-existence de a et de $\neg a$. Considérons maintenant que a soit vrai. Alors, à partir de $a \wedge b$ et de $b \supset d$ nous pouvons déduire d. De manière similaire, si a est maintenant $faux$, alors nous pouvons aussi déduire d. Ainsi, la D-théorie fusionnée résultante $\Gamma = (\{c \supset d, b \supset d\}, \{\frac{:a \wedge b}{a \wedge b}, \frac{:\neg a \wedge c}{\neg a \wedge c}\})$ possède deux extensions, chacune d'elles contient d. Par conséquent, d peut être inféré en utilisant une approche sceptique au raisonnement par défaut.*

Ce dernier exemple nous montre aussi que **ce traitement de l'inconsistance peut permettre que plus de conclusions (légitimes) soient inférées que par la suppression de tout ou parties de MUSes**. Ce n'est pas surprenant puisque par affaiblissement de formules dans les défauts, nous avons supprimé moins d'information que si nous avions supprimé les formules. Autrement dit, un *raisonnement sceptique* sur une théorie avec défauts fusionnée sera capable d'inférer (au moins) toutes les formules qu'il est possible d'inférer si l'on supprime les MUSes de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$.

Proposition 4.3. *Soit $n > 1$. Considérons n D-théories $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner. Soit $\cap_j E_j$ l'intersection ensembliste de toutes les extensions de la D-théorie fusionnée résultante $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$. Soit E l'unique extension de $\Gamma' = (\Sigma \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i), \emptyset)$. Si $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \emptyset$ pour $i = 1..n$ alors $E \subseteq \cap_j E_j$.*

Démonstration. Trivialement, $E = \Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$. C'est à dire que E est logiquement équivalent à $\bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$. Par la proposition 4.1, chaque disjonction dans ψ est $\bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \theta(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)))$. De plus, $\theta(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)) \subseteq \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ alors $\psi \models \bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$. □

Exemple 4.3. *Considérons la fusion de D-théories où* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{a, \neg a \vee \neg b, b, c\}$ *et* $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \emptyset$. *La D-théorie fusionnée résultante est* $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ *où* $\Sigma = \{c\}$ *et* $\Delta = \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}\}$. *Les extensions de* Γ *sont* $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{c, a, \neg a \vee \neg b\})$, $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{c, \neg a \vee \neg b, b\})$ *et* $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{c, a, b\})$. *L'extension unique de la D-théorie où l'on supprime les MUSes est* $E = Th_{\mathcal{L}}(\{c\})$. $\cap_{j=1}^{3}E_j = \{c, a \vee b\}$ *et* $E \subseteq \cap_{j=1}^{3}E_j$.

4.3 Ensemble de défauts initiaux non-vide

4.3.1 Interaction des différents types de défauts

Considérons le cas général où les théories contiennent des défauts, et étudions comment les nouveaux défauts peuvent interagir avec ceux de la théorie initiale. Précédemment nous avons pu voir que les théories avec défauts normaux possèdent la propriété intéressante de **semi-monotonie**. Celle-ci assure que quand nous ajoutons de nouveaux défauts à une théorie avec défauts normaux Γ, toute extension de Γ est contenue dans une extension de la nouvelle théorie. En accord avec cela, nous pouvons dériver la propriété suivante.

Proposition 4.4. *Soit* $n > 1$. *Considérons un ensemble fini de* n *D-théories avec défauts normaux de la forme* $\Gamma_i = (\Delta_i, \Sigma_i)$ *à fusionner. Alors, pour toute extension* E *de* $\Gamma' = (\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \backslash \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i), \cup_{i=1}^{n}\Delta_i)$, *il existe une extension des théories fusionnées qui contient* E.

Démonstration. La théorie normale Γ diffère de la théorie normale Γ' uniquement par la présence de défauts super-normaux introduits dans Γ, comme établi dans la définition 4.1. Le résultat découle alors immédiatement de la propriété bien connue de semi-monotonie des théories avec défauts normaux. □

Remarquons que cette propriété assure que tant que nous itérons le processus de fusion de théories avec défauts normaux, nous sommes toujours sûrs que **chaque extension ne peut qu'être étendue**.

Maintenant dans le cas général, **le remplacement de MUSes ou parties de MUSes par des défauts correspondants n'assure pas que nous obtenions un ensemble étendu d'extensions** comme cela pourrait être le cas si tout ou parties de ces MUSes étaient supprimées. Autrement dit, **les défauts introduits peuvent signifier quelque chose qui inhibe certains défauts de la théorie initiale**. La propriété de semi-monotonie est donc perdue dans le cas général.

Exemple 4.4. *Considérons* $\cup_{i=1}^{n}\Gamma_i = (\{a, \neg a\}, \Delta)$ *où* $\Delta = \{\frac{:b}{b}, \frac{a:c}{\neg b}, \frac{\neg a:c}{\neg b}\}$. *La théorie* $\Gamma' = (\emptyset, \Delta)$ *exhibe une extension qui est* $Th(\{b\})$. *Au contraire,* $\Gamma = (\emptyset, \Delta \cup \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a}{\neg a}\})$ *ne contient aucune extension contenant* b.

L'extension de la proposition 4.2 aux théories avec défauts où $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i \neq \emptyset$ ne tient pas : comme montré dans l'exemple suivant, **les formules consistantes de $\cup \mathbf{MUS}(\cup_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Sigma}_i)$ peuvent n'appartenir à aucune extension de la théorie avec défauts fusionnée résultante**.

Exemple 4.5. *Soient deux D-théories* $\Gamma_1 = (\{a, c\}, \emptyset)$ *et* $\Gamma_2 = (\{\neg a\}, \{\frac{c:b}{\neg a}\})$ *à fusionner.* $\cup MUS(\cup_{i=1}^{2}\Sigma_i) = \{a, \neg a\}$. *La D-théorie fusionnée résultante est* $\Gamma = (\{c\}, \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a}{\neg a}, \frac{c:b}{\neg a}\})$. *L'extension unique de* Γ *est* $E = Th_{\mathcal{L}}(\{c, \neg a\})$, *laquelle ne contient pas* a.

De plus, l'extension de la proposition 4.3 aux théories avec défauts où $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i \neq \emptyset$ ne tient pas non plus. Comme l'exemple suivant le montre, **quand les défauts initiaux sont normaux, l'extension unique de $\boldsymbol{\Gamma}' = (\boldsymbol{\Sigma}, \cup_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Delta}_i)$ n'est pas nécessairement contenue dans l'intersection ensembliste de toutes les extensions de la D-théorie fusionnée résultante**.

Exemple 4.6. *Soit* $n > 1$. *Considérons* n *D-théories à fusionner t.q.* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{a, \neg a \vee \neg b, b, c\}$ *et* $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \{\frac{a:d}{d}, \frac{c:\neg d}{\neg d}\}$. $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ *est la D-théorie fusionnée résultante où* $\Sigma = \{c\}$ *et* $\Delta = \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}, \frac{a:d}{d}, \frac{c:\neg d}{\neg d}\}$. $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{c, a, \neg a \vee \neg b, d\})$ *et* $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{c, a, \neg a \vee \neg b, b, \neg d\})$ *font partie des extensions de* Γ. *L'extension unique de la théorie* $\Gamma' = (\Sigma, \cup_{i=1}^{n}\Delta_i)$ *est* $E = Th_{\mathcal{L}}(\{c, \neg d\})$. $\cap_{j=1}^{n}E_j = Th_{\mathcal{L}}(\{c\})$. *Donc* $E \nsubseteq \cap_{j=1}^{n}E_j$.

4.3.2 Discrimination des différents types de défauts

Dans les différentes approches vues précédemment, **aucune distinction n'est faite entre les défauts de la théorie initiale et les défauts introduits** pour remplacer tout ou parties des MUSes, comme si tous les défauts sont de la même nature épistémologique.

En effet les nouveaux défauts sont introduits pour *corriger* et *affaiblir* tout ou parties des connaissances exhibant quelques déficiences. Notre approche pour corriger les MUSes est équivalente à considérer que les formules participant aux MUSes peuvent être *acceptées* par défaut. Il peut donc être défendu que le rôle des défauts supplémentaires est similaire à celui des défauts de la théorie initiale, lesquels sont normalement supposés représenter un raisonnement par défaut.

Au contraire, il peut être intéressant que les nouveaux défauts puissent avoir une priorité plus (resp. moins) haute que les défauts de la théorie initiale. Dans ce cas nous devons avoir recours à une forme de **logique des défauts prioritisée** dont l'idée centrale est d'étendre la théorie avec défauts avec un ordre partiel $\prec$ (i.e., $d \not\prec d$ et $d \prec d'$, $d' \prec d''$ implique que $d \prec d''$) et assurer que les nouveaux défauts d' soient tels que $d' \prec d$ (resp. $d \prec d'$) pour chaque défaut d des théories initiales. Nous verrons dans le chapitre suivant les propriétés liées à la discrimination des différents types de défauts.

4.4 Complexité et techniques d'approximation

Dans le cas propositionnel, le calcul des MUSes est **calculatoirement difficile** dans le pire des cas puisque vérifier si une clause appartient ou non à l'ensemble des MUSes d'une CNF est $\Sigma_2^p - complet$ comme montré dans l'article de Eiter et Gottlob [EG92]. Par conséquent, **le processus entier** de recherche et de remplacement des formules contradictoires par des défauts correspondants, et ensuite de raisonnement crédule par défaut **n'est pas plus difficile calculatoirement que le raisonnement crédule par défaut lui-même** puisque, dans le cas général, ce dernier est aussi $\Sigma_2^p - complet$ (tandis qu'il est $\Pi_2^p - complet$ dans la cas d'un raisonnement sceptique par défaut) comme montré dans l'article de Gottlob [GOT92].

Faits intéressants, **des techniques algorithmiques récentes rendent possible le calcul d'un MUS** pour de nombreux problèmes réels comme dans l'article de Grégoire, Mazure et Piette [GMP06a]. Pourtant le nombre de MUSes dans un ensemble de n clauses peut être intraitable aussi, puisqu'il est de $C_n^{n/2}$ dans le pire cas. Heureusement, des techniques efficaces ont aussi étaient recemment définies pour **le calcul de tous les MUSes** pour plusieurs *benchmarks*, modulo une possible limitation d'explosion exponentielle comme montré dans l'article de Grégoire, Mazure et Piette [GMP07].

Cependant, dans beaucoup de cas nous ne pouvons nous permettre de calculer l'union ensembliste de tous les MUSes. Dans ce contexte, plusieurs techniques peuvent être appliquées.

Premièrement, il peut être noté qu'il n'est pas nécessaire de remplacer toutes les formules de tous les MUSes par des défauts correspondants pour retrouver la consistance. En effet, nous pourrions d'abord détecter un MUS, remplacer toutes ses formules par des défauts, ensuite itérer le processus jusqu'à ce que la consistance soit retrouvée. Une telle approche doit nous **éviter le calcul de tous les MUSes** ; cela a déjà était étudié dans le cadre propositionnel clausal dans le contexte de détection de *couvertures inconsistantes strictes* de Grégoire, Mazure et Piette [GMP06b], dont la définition est donnée dans les préliminaires formels (Chapitre 1).

Lemme 4.1. *Une couverture inconsistante stricte Σ' de Σ est vide ssi Σ est satisfiable.*

Démonstration. Si Σ' est une couverture inconsistante de Σ, alors $\Sigma \setminus \Sigma'$ est satisfiable. Donc, si Σ' est vide, Σ est satisfiable. Inversement, si Σ est satisfiable alors $MUS(\Sigma)$ est vide et à partir de cela Σ' ne peut être obtenu qu'à partir d'un $\mathcal{A} \subseteq MUS(\Sigma)$ vide. Par conséquent, Σ' ne peut être que vide. $\square$

Lemme 4.2. *Une couverture inconsistante stricte Σ' de Σ existe toujours.*

Démonstration. Le cas où Σ est satisfiable est trivial, à partir de cela supposons Σ insatisfiable. Si $|MUS(\Sigma)| = 1$ alors notons $\mathcal{A}$ constitué de l'unique MUS de Σ, à partir de cela $\cup\mathcal{A}$ est une couverture inconsistante stricte de Σ. Maintenant notons $|MUS(\Sigma)| > 1$. Considérons $M_1, M_2, \ldots$ une énumération de $MUS(\Sigma)$ (en utilisant le théorème de compacité, il peut être montré que $MUS(\Sigma)$ est au plus infini dénombrable). En commençant avec $\mathcal{A}_0 = \emptyset$, nous définissons $\mathcal{A}_{n+1}$ comme $\mathcal{A}_n \cup \{M_{n+1}\}$ si $M_{n+1} \cap (\cup\mathcal{A}_n) = \emptyset$ et comme $\mathcal{A}_n$ autrement. Alors, $\mathcal{A} = \cup_n \mathcal{A}_n$, où les $\mathcal{A}_\rangle$ sont disjoints deux à deux et $\Sigma \setminus (\cup\mathcal{A})$ est satisfiable. □

Lemme 4.3. *Pour tout $M \in MUS(\Sigma)$, il existe une couverture inconsistante stricte de Σ qui contient M.*

Démonstration. Réarranger l'énumération de la preuve précédente t.q. $M_1 = M$. □

Les *couvertures inconsistantes strictes* $IC(\Sigma)$ sont donc les ensembles minimaux de formules dans Σ qui peuvent **expliquer assez de sources de contradiction** dans Σ pour retrouver la consistance si elles sont réparées. Dans l'article de Grégoire, Mazure et Piette [GMP06b], une technique pour calculer les couvertures inconsistantes strictes dans le cas propositionnel clausal a été introduite et prouvée efficace pour certains benchmarks difficiles. Clairement, **les couvertures inconsistantes strictes sont une approximation de l'union ensembliste de MUSes** dans le sens où toutes formules de la couverture appartient toujours à cet union mais pas inversement, et que supprimer la couverture conduit à la restauration de la consistance. Le prix à payer pour cette approximation est que plusieurs couvertures inconsistantes strictes peuvent co-exister pour un ensemble de MUSes donné.

Maintenant, la plupart du temps, il est possible d'**extraire un sur-ensemble** Ω de tous les MUSes de $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ vraiment rapidement, de telle sorte que *rétracter* Ω restaure la consistance de $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$. D'un autre côté, ce sur-ensemble peut être $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ lui-même. Par conséquent, nous pouvons remplacer toutes formules de Ω par un défaut super-normal correspondant. Clairement, un tel processus voudrait restaurer la consistance. Le prix à payer est que les deux formules appartenant (resp. n'appartenant pas) aux MUSes, seront affaiblies et traitées de la même manière.

Une variante de cette approche consiste en le **remplacement d'au plus une formule par MUS**. Clairement, d'un point de vue pratique, la détection d'une telle formule ne doit pas nécessiter de notre part de calculer un MUS exactement mais simplement un sur-ensemble d'un MUS, tel que la suppression de cette formule rende ce sur-ensemble consistant. Puisque les MUSes peuvent partager des intersections non-vides, notons qu'il est cependant difficile de garantir qu'un nombre minimal de formules soient remplacées sans calculer tous les MUSes explicitement.

Remarquons dans l'exemple suivant que **la propriété de raisonnement par cas supportée par le raisonnement sceptique ne tient pas quand $\cup\mathbf{MUS}(\cup_{i=1}^{n}\mathbf{\Sigma_i})$ est sur-approximé**.

Exemple 4.7. *Considérons la fusion de D-théories $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ où $\cup_{i=1}^n \Sigma_i = \{a, \neg a, c\}$ et $\cup_{i=1}^n \Delta_i = \{\frac{a:\neg c}{\neg c}, \frac{\neg a:\neg c}{\neg c}\}$. $\cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i) = \{a, \neg a\}$.*

Considérons dans un premier temps que nous possédons une connaissance exacte de $\cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$. Ainsi nous obtenons la D-théorie fusionnée résultante $\Gamma = (\Sigma, \Delta)$ t.q. $\Sigma = \{c\}$ et $\Delta = \{\frac{a:\neg c}{\neg c}, \frac{\neg a:\neg c}{\neg c}, \frac{:a}{a}, \frac{:\neg a}{\neg a}\}$. Les extensions de Γ sont $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{c, a\})$ et $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{c, \neg a\})$, donc $\cap_{i=1}^2 E_i = Th_{\mathcal{L}}(\{c\})$. Ainsi c est l'unique conclusion sceptique de Γ.

Dans un second temps, considérons que nous possédons une connaissance sur-approximée de $\cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$, comme étant $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$. Ainsi nous obtenons la D-théorie fusionnée résultante $\Gamma' = (\Sigma', \Delta')$ t.q. $\Sigma' = \emptyset$ et $\Delta' = \{\frac{a:\neg c}{\neg c}, \frac{\neg a:\neg c}{\neg c}, \frac{:a}{a}, \frac{:\neg a}{\neg a}, \frac{:c}{c}\}$. Les extensions de Γ' sont les mêmes que celles de Γ plus les extensions $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg c, a\})$ et $E_4 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg c, \neg a\})$, donc $\cap_{i=1}^2 E_i = \emptyset$. Ainsi Γ' ne possède pas de conclusion sceptique.

Cet exemple montre que la sur-approximation de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ peut affaiblir considérablement une information de base de $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ n'appartenant pas à $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$. Ainsi une information "certaine", qui est par définition **une conclusion sceptique, peut être réduite au rang de conclusion crédule dans le cadre de théories avec défauts normaux ou pire ne faire partie d'aucune extension dans le cadre de théories avec défauts quelconques**.

Chapitre 5

Connaissances de base stratifiées

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la fusion de théories avec défauts où $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ est stratifiée. Autrement dit, dans cet ensemble une échelle de préférence entre formules est donnée. Nous verrons si les propriétés proposées dans le chapitre précédent à propos des différentes approches pour traiter le problème de la trivialisation tiennent encore. Aussi, nous introduirons de nouvelles propriétés, lesquelles apparaissent uniquement dans ce cas et donnant lieu à une forme de logique des défauts stratifiée.

5.1 Stratification

5.1.1 Politique d'union

Intéressons nous tout d'abord à la notion de stratification. Jusqu'à présent, l'union ensembliste des ensembles de formules de la logique propositionnelle, notée $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ était plate. En effet, il n'existait pas de préférence entre les différentes formules la constituant. [1]

Pourtant il peut être intéressant de **préférer certaines formules à d'autres**. Rappelons que chaque théorie représente les connaissances d'un agent ou d'une communauté d'agents. On peut donc vouloir donner une préférence à certaines théories plutôt qu'à d'autres afin de privilégier certaines connaissances, pour prendre en compte la fiabilité de la source d'information par exemple. D'une autre manière, on peut vouloir établir une échelle de préférence entre les formules d'un même agent, ou encore préférer certaines formules d'une théorie à celles d'une autre théorie, et inversement.

Dans le cas général, on veut **réunir les préférences entre les agents** de façon à ce que l'on obtienne une *stratification globale* sur les formules dont les strates ne coïncident pas nécessairement aux ensembles de formules des agents. Aussi, dans la suite nous considérerons l'ensemble stratifié $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ sans tenir compte de la politique d'union des théories dont il est issu.

Remarquons que pour être plus rigoureux, **nous devrions considérer une stratification sur $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ aussi**. En effet, les raisons qui nous poussent à stratifier $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ s'appliquent aussi à $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$. Cependant, afin de simplifier la représentation de théories avec défauts stratifiée, nous préférons ne considérer que la stratification des connaissances de base. Aussi, la considération d'une stratification sur $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ ne modifie en rien les résultats qui suivent, seules les définitions doivent à être adaptées, le comportement restant le même.

[1] On peut aussi voir ce problème en ne considérant qu'une seule théorie dont l'ensemble de formules de la logique classique est stratifié.

5.1.2 Définitions

Définition 5.1. *Un ensemble de formules de la logique propositionnelle Σ est* ***stratifié*** *en n* ***strates*** *$S_1, ..., S_n$ quand il existe un* ***pré-ordre total***[2] *$\preceq$ entre formules t.q. $\forall x, y \in \Sigma$:*
- *si ($x \preceq y$) et ($y \preceq x$), alors $\exists i \in [1, ..., n]$ tel que $x, y \in S_i$, signifiant qu'il n'y a pas de préférence entre x et y,*
- *si ($x \preceq y$) et ($y \not\preceq x$), noté ($x \prec y$) alors $\exists i, j \in [1, ..., n]$ où $i < j$ tel que $x \in S_i$ et $y \in S_j$, signifiant que x est strictement préféré à y.*
- *$\{S_1, ..., S_n\}$ forme une partition de Σ.*

Définition 5.2. *Soit Σ un ensemble de formules stratifié en n strates. Les strates sont ordonnées par ordre décroissant de préférence, ainsi les formules appartenant à la strate S_1 sont* ***les plus préférées****, et celles appartenant à la strate S_n sont* ***les moins préférées****.*

Afin de simplifier la représentation de la stratification d'un ensemble de formules, celui-ci sera donné comme la suite de ses strates, de la plus préférée à la moins préférée, comme sur l'exemple suivant.

Exemple 5.1. *Considérons un ensemble de formules $\Sigma = \{a, c, \neg a, \neg c\}$ et une stratification sur Σ t.q. Σ soit partitionnée en deux strates $S_1 = \{\neg a, \neg c\}$ et $S_2 = \{a, c\}$. La représentation de Σ et de sa stratification est $\Sigma = \{\{\neg a, \neg c\} \prec \{a, c\}\}$.*

5.2 Théorie avec défauts stratifiée

Comme dans le chapitre précédent, supposons que nous nous donnions plusieurs théories avec défauts à fusionner, de telle sorte que l'union ensembliste de leurs parties de la logique classique, notée $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$, soit inconsistante. Une voie directe pour **aborder la trivialisation** de la théorie avec défauts résultante consiste en la suppression d'assez de formules de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ afin que le sous-ensemble résultant devienne consistant. Cependant, nous avons vu précédemment que la suppression de formules était destructive et que **l'utilisation du cadre de la logique des défauts pourrait être une voie plus intéressante**. Aussi de cette manière, on conserve une trace de toute les formules, ce qui nous permettra d'avoir accès à une extension qui n'est pas préférée par exemple.

En exploitant la stratification de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$, on peut s'apercevoir que quand la logique des défauts trivialise alors **l'union ensembliste de tous les MUSes,** $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ **est aussi stratifiée** selon le pré-ordre total $\preceq$ de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$. Cette échelle de préférence peut être conservée lors du remplacement de formules appartenant à l'union ensembliste des MUSes par un défaut super-normal correspondant. En étendant le pré-ordre total de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ aux règles de défauts introduites, on a alors affaire à une forme de **logique des défauts stratifiée**.

Dans le chapitre précédent où $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ était plate, nous réservions un **traitement uniforme des formules à l'intérieur de** $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ dans le sens où toutes étaient remplacées par un défaut super-normal correspondant. Ici, des variantes pourraient utiliser l'opérateur **select se basant sur la stratification de** $\cup \mathbf{MUS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{\Sigma_i})$ pour en fournir un sous-ensemble tel que $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit consistant, et de telle sorte que chaque formule f de $select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit remplacée par un défaut super-normal correspondant. Autrement dit, on pourrait garder le maximum de formules *les plus préférées* consistantes entre elles au sein de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ et remplacer les formules *les moins préférées* (causant une inconsistance avec *les plus préférés*) par des défauts super-normaux en adaptant à Δ la relation de préférence sur les formules de $\{\frac{:f}{f} \in select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\}$. Nous étudierons différents mécanismes de sélections de sous-ensembles préférés dans la section suivante.

Définition 5.3. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble de n D-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner. la fonction select est une fonction de $2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$ t.q. $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit consistant et que $select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)) \subseteq \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$.*

[2]Rappelons qu'un pré-ordre est une relation *réflexive* et *transitive*.

Définition 5.4. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble de n D-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner. Le pré-ordre $\preceq$ est un pré-ordre total sur $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i \cup \{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\}$. La **théorie avec défauts stratifiée** résultante (associée à select et à $\preceq$), appelée **SD-théorie**, est donnée par $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ où :*
- $\Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$,
- $\Delta = \cup_{i=1}^{n}\Delta_i \cup \{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\}$.

5.3 Mécanismes de sélection

On appelle mécanisme de sélection initial, tout mécanisme permettant d'obtenir des sous-ensembles consistants ordonnés ou pas, à partir d'un ensemble Σ de formules propositionnelles stratifié en n strates $S_1, ..., S_n$ par une relation de préférence $\preceq$. Le concept le plus utilisé pour manier l'inconsistance est de travailler avec les **sous-ensembles maximaux consistants** de Σ, appelés MSS (Maximal Satisfiable Subset) de Σ.

Définition 5.5. *Un sous-ensemble X de Σ est un **sous-ensemble maximal consistant au sens de l'inclusion**, appelé* **MSS**$^{\text{INCL}}$ *(ou encore thèses de Σ), si et seulement si X est consistant et $\nexists Y$ t.q. Y soit un sous-ensemble consistant de Σ et que $Y \supset X$.*[3]

Définition 5.6. *Un sous-ensemble X de Σ est un **sous-ensemble maximal consistant au sens de la cardinalité**, appelé* **MSS**$^{\text{LEX}}$*, si et seulement si X est consistant et pour tout sous-ensemble consistant Y de Σ, $|Var(Y)| \leq |Var(X)|$, où $|Var(Y)|$ représente la cardinalité de Y.*

Différentes approches, comparées par Cayrol, Lagasquie-Schiex et Schiex [CLSS98], ont étaient proposées pour utiliser la relation de préférence $\preceq$ dans le but de **sélectionner les sous-ensembles *préférés* de** Σ. Nous allons voir successivement des formalismes privilégiant la *maximalité au sens de l'inclusion*, puis ceux utilisant la *maximalité au sens de la cardinalité* qui permettent de raffiner les précédents. Enfin nous proposerons un *mécanisme de sélection sceptique*, adapté au contexte de la logique des défauts, avec lequel nous travaillerons dans la suite.

5.3.1 Préférence basée sur l'inclusion

Il existe de nombreux travaux qui travaillent à partir de $MSS^{\text{INCL}}(\Sigma)$. On les rassemble sous le terme "Inclusion Based Preference", c'est-à-dire que parmi tous les sous-ensembles consistants, on privilégie les sous-ensembles maximaux consistants. Ils correspondent tous au même mécanisme de sélection que nous noterons INCL.

Définition 5.7. *Notons $\Sigma = (S_1, ..., S_n)$ un ensemble de formules stratifié. Soit Z t.q. $Z \in MSS^{\text{INCL}}(\Sigma)$, Z_i dénote $Z \cap S_i$. La **préférence au sens de l'inclusion** est l'ordre strict*[4] *défini sur $MSS^{\text{INCL}}(\Sigma)$ par : $Y \ll^{\text{INCL}} X$ si et seulement si il existe i tel que $Y_i \supset X_i$ et pour tout $j < i$, $X_j = Y_j$.*

Exemple 5.2. *Soit l'ensemble de formules stratifié $\Sigma = \{\{a\} \prec \{\neg a \vee \neg b, b\} \prec \{c\}\}$. Notons les MSS^{INCL} de Σ suivies de leurs différentes intersections avec les strates de Σ dans le tableau 5.1. En appliquant la définition de préférence au sens de l'inclusion, on obtient l'ordre suivant sur les MSS^{INCL} de Σ : $X \ll^{\text{INCL}} Z$, $Y \ll^{\text{INCL}} Z$. Par conséquent X et Y sont les MSS^{INCL} préférées de Σ.*

5.3.2 Préférence lexicographique

Ici, il ne s'agit pas seulement de travailler à partir de sous-ensembles maximaux consistants au sens de l'inclusion, mais plutôt de "raffiner" le mécanisme vu précédemment en ne sélectionnant que certains de ces sous-ensembles. Pour cela, on sélectionne les sous-ensembles maximaux consistants au sens de la cardinalité. On notera ce type de mécanisme LEX.

[3] Notons qu'il existe un lien entre MUSes et Thèses correspondant à $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cap MSS^{\text{INCL}}(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$.

[4] Rappelons qu'une relation d'ordre strict est *irréflexive* et *transitive*.

X,Y,Z	$\cap S_1$	$\cap S_2$	$\cap S_3$
$X=\{c,a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$Y=\{c,\neg a\vee\neg b,a\}$	$\{a\}$	$\{\neg a\vee\neg b\}$	$\{c\}$
$Z=\{c,\neg a\vee\neg b,b\}$	$\emptyset$	$\{\neg a\vee\neg b,b\}$	$\{c\}$

Tab. 5.1: Intersection des MSS^{Incl} de Σ avec les strates de Σ.

Définition 5.8. *Notons $\Sigma=(S_1,...,S_n)$ un ensemble de formules stratifié. Soit Z t.q. $Z\in MSS^{\text{Lex}}(\Sigma)$, Z_i dénote $Z\cap S_i$. La **préférence lexicographique** est l'ordre strict défini sur les sous-ensembles maximaux consistants au sens de la cardinalité de Σ par : $Y\ll^{\text{Lex}}X$ si et seulement si il existe i tel que $|Var(X_i)|<|Var(Y_i)|$ et pour tout $j<i$, $|Var(X_j)|=|Var(Y_j)|$.*

Exemple 5.3. *Notons l'ensemble de formules stratifié $\Sigma=\{\{a\}\prec\{\neg a\vee\neg b,b\}\prec\{c\}\}$ de l'exemple 5.1. Notons les MSS^{Lex} de Σ suivies de leurs différentes intersections avec les strates de Σ dans le tableau 5.2. En appliquant la définition de préférence lexicographique, on obtient l'ordre suivant sur les MSS^{Lex} de Σ : $X\ll^{\text{Lex}}Z$, $Y\ll^{\text{Lex}}Z$. Par conséquent X et Y sont les MSS^{Lex} préférées de Σ.*

X,Y,Z	$\lvert\cap S_1\rvert$	$\lvert\cap S_2\rvert$	$\lvert\cap S_3\rvert$
$X=\{c,a,b\}$	1	1	1
$Y=\{c,\neg a\vee\neg b,a\}$	1	1	1
$Z=\{c,\neg a\vee\neg b,b\}$	0	2	1

Tab. 5.2: Intersection des MSS^{Lex} de Σ avec les strates de Σ.

5.3.3 Comparaisons

Dans l'exemple précédent les *sous-ensembles maximaux consistants au sens de la cardinalité* de Σ coïncident avec les *sous-ensembles maximaux consistants au sens de l'inclusion* de Σ et les sous-ensembles préférés des deux mécanismes coïncident. Pourtant comme l'exemple suivant le montre, cela n'est pas toujours le cas.

Exemple 5.4. *Soit Σ un ensemble de formules stratifié t.q. $\Sigma=\{\{a\wedge\neg b,b\wedge\neg c,c\wedge\neg d\}\prec\{d\wedge\neg a\}\}$. $X=\{a\wedge\neg b,c\wedge\neg d\}$ et $Y=\{b\wedge\neg c,d\wedge\neg a\}$ sont à la fois les MSS^{Incl} et les MSS^{Lex} de Σ. Les ensembles préférés au sens de l'inclusion de Σ sont X et Y. Cependant Y n'est pas un sous-ensembles préféré au sens de la cardinalité de Σ.*

De plus, Il peut être montré que dans le cadre non-hiérachisé aussi, la *préférence lexicographique* raffine la *préférence basée sur l'inclusion ensembliste* : **tout sous-ensemble consistant $\ll^{\text{Lex}}$-préféré de E est un sous-ensemble consistant $\ll^{\text{Incl}}$-préférée**, mais l'inverse n'est pas forcément vrai.

Exemple 5.5. *Considérons $\Sigma_1=\{a\wedge b\wedge c\wedge d\}$ et $\Sigma_2=\{\neg a,\neg b,\neg c,\neg d\}$ deux ensembles de formules de la logique propositionnelle a fusionner. L'ensemble résultant de la fusion $\Sigma=\{a\wedge b\wedge c\wedge d,\neg a,\neg b,\neg c,\neg d\}$ est inconsistant.*

Les deux MSS^{Incl} de Σ correspondent aux deux ensembles initiaux Σ_1 et Σ_2 dont la cardinalité est égale à 1 et à 4, respectivement. Ils sont tous deux les sous-ensembles consistants $\ll^{\text{Incl}}$-préférées de Σ.

A l'opposé il n'existe qu'un MSS^{Lex} de Σ, correspondant à Σ_2. Celui-ci est donc l'unique sous-ensemble consistant $\ll^{\text{Lex}}$-préféré de Σ.

5.3.4 Mécanisme de sélection sceptique

Dans le cadre général de la résolution du problème de la trivialisation en logique des défauts, nous avons vu qu'il était intéressant de remplacer toutes les formules appartenant aux MUSes par des défauts super-normaux correspondants. Aussi nous avons vu qu'il suffit de ne remplacer qu'au plus une formule par MUS afin de retrouver la consistance dans $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$. C'est dans ce but que nous avons défini la fonction de sélection *select* qui remplace assez de formules de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ pour retrouver la consistance. **Ainsi il est possible d'imaginer une fonction select se basant sur le sous-ensemble maximal consistant préféré de $\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{i}}$ en ne remplaçant que ce qui fait partie de $\cup\mathbf{MUS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{i}}) \setminus \cup\mathbf{MSS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{i}})$**.

Cependant, nous avons vu que l'utilisation des mécanismes de sélection introduits permettent dans certains cas l'obtention de **plusieurs sous-ensembles maximaux consistants préférés** à partir d'un ensemble Σ stratifiée . Bien sûr nous préférerions n'obtenir qu'un seul sous-ensemble maximal consistant préféré dans le cadre de notre utilisation afin de ne travailler que sur **une seule théorie** avec défauts fusionnée, comme c'est le cas quand $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ est plate.

Pour arriver à ce résultat nous pouvons utiliser le cadre même de la logique des défauts, et ainsi **renforcer la notion de préférence**. En effet, si plusieurs sous-ensembles préférés peuvent exister, cela est dû au fait qu'il n'existe pas de préférence entre certaines formules de l'ensemble. Il peut donc être intéressant de considérer une **approche sceptique** afin de ne considérer que ce que les sous-ensembles préférés ont en commun. Ainsi de manière générale, les formules non sélectionnées par notre *select* se basant sur les MSS de Σ seront affaiblies puisque remplacées par un défaut super-normal leur correspondant.

Définition 5.9. *Notons $\Sigma = (S_1, ..., S_n)$ un ensemble de formules stratifié. Notons $X^1, ..., X^m$ les sous-ensembles préférés de Σ au sens de l'inclusion*[5]*. Le* ***sous-ensemble préféré sceptique*** *de Σ, noté $SCE(\Sigma)$ est égal à $\cap_{i=1}^{m}(X^i)$.*

Exemple 5.6. *Notons un ensemble de formules stratifié $\Sigma = \{\{a\} \prec \{\neg a \vee \neg b, b\} \prec \{c\}\}$. Notons les MSS^{INCL} de Σ suivies de leurs différentes intersections avec les strates de Σ dans le tableau 5.1. En appliquant la définition de préférence au sens de l'inclusion, on obtient l'ordre suivant sur les thèses de Σ : $X \ll^{\text{INCL}} Z$, $Y \ll^{\text{INCL}} Z$. Autrement dit, $X = \{c, a, b\}$ et $Y = \{c, \neg a \vee \neg b, a\}$ sont les sous-ensembles préférés de Σ au sens de l'inclusion. Ainsi $SCE(\Sigma) = X \cap Y = \{c, a\}$.*

Ainsi dans la suite $\mathbf{select}(\cup\mathbf{MUS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{i}})) = \cup\mathbf{MUS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{i}}) \setminus \mathbf{SCE}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{i}})$[6]. Cependant, afin d'introduire des propriétés générales, nous ne considérons aucune méthode de sélection quand cela n'influe pas directement dans les résultats.

5.4 Ensemble de défauts initiaux vide

Premièrement, considérons la situation basique où l'ensemble des défauts $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ est vide. Dans ce cas, le pré-ordre total sur l'ensemble des règles de défauts Δ issue de la fusion ne concerne alors que les défauts introduits. Nous nous intéresserons plus tard à l'interaction des défauts introduits avec les défauts de la théorie initiale quand $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ n'est pas vide.

5.4.1 Calcul des extensions préférées

En remplaçant les formules appartenant à $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ par des défauts super-normaux et en conservant la stratification de cet ensemble, nous avons stratifié l'ensemble auparavant vide $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$. Cette relation de préférence sur Δ diverge de celle que Brewka et Eiter [BE99] donne dans le cadre du calcul des extensions de théories totalement prioritisées avec défauts super-normaux. En effet dans ce dernier les préférences entre défauts sont établies par un **ordre total**, différent du **pré-ordre total**[7]de

[5]Remarquons que la méthode de sélection diffère de celle choisit dans le cadre multi-ensembliste du chapitre suivant et que son utilisation est sujette à discussion.

[6]Plus clairement, $\Sigma = SCE(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ et $\Delta = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus SCE(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$.

notre théorie avec défauts stratifiée.

Cependant, comme avec les théories totalement prioritisées avec défauts super-normaux de Brewka et Eiter [BE99], il s'agit toujours de **vérifier l'applicabilité des défauts dans l'ordre de préférence**. La seule différence étant que **plusieurs extensions préférées peuvent être produites** quand il n'y a pas de préférence entre deux sous-ensembles de défauts générateurs inconsistants appartenant à la même strate.

Rappelons qu'un défaut $\frac{a:b_1,\ldots,b_m}{c}$ est **défait** par un ensemble de formules S, ssi $\neg b_i \in S, \forall i \in \{1, ..., n\}$. Un défaut d est appelé **générateur** dans un ensemble de formules S, si $pred(d) \in S$, $\neg just(d) \cap S = \emptyset$ et que $cons(d) \in S$; Notons par $GEN(\Delta, E)$ l'ensemble de tous les défauts de Δ qui sont générateurs dans une extension E.

Définition 5.10. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble de n D-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner selon $\preceq$. Considérons la SD-théorie fusionnée résultante $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$. Une **extension classique** de Γ est une extension de (Σ, Δ).*

Définition 5.11. *Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ une SD-théorie stratifiée selon le pré-ordre $\preceq$ t.q. E soit une extension classique de Γ. Alors E est une **extension préférée** de Γ ssi $\forall d \in \Delta$ t.q. $pre(d) \in E$ et $cons(d) \notin E$, $\exists$ un ensemble de défauts $K_d \subseteq \{d' \in GEN(\Delta, E) | d' \preceq d\}$ t.q. d soit défait dans $Th_{\mathcal{L}}(\Sigma \cup cons(K_d))$.*

Exemple 5.7. *Soit $\Gamma_1 = (\{\neg a \vee b, \neg b\}, \emptyset)$, $\Gamma_2 = (\{a\}, \emptyset)$ deux D-théories à fusionner selon la stratification $\{\Sigma_2 \prec \Sigma_1\}$. $\cup_{i=1}^{2} \Sigma_i = \{\{a\} \prec \{\neg a \vee b, \neg b\}\}$ et forme l'unique MUS.*

La SD-théorie résultante est : $\Gamma = (\emptyset, \{\{\frac{:a}{a}\} \prec \{\frac{:\neg a \vee b}{\neg a \vee b}, \frac{:\neg b}{\neg b}\}\})$. Selon la définition précédente, il existe deux extensions préférées de la SD-théorie Γ qui sont $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b\})$ et $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg b\})$. $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a \vee \neg b, \neg b\})$ qui est une extension classique de Γ n'est pas une extension préférée de Γ.

Dans l'exemple précédent, **les extensions préférées de la théorie avec défauts stratifiée où l'on remplace toutes les formules de $\cup \mathbf{MUS}(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ par un défaut super-normal coïncident avec celles de la SD-théories stratifiée selon un mécanisme de sélection sceptique**.

En effet, grâce au mécanisme de sélection sceptique utilisé pour la fusion de D-théories, on ne remplace par des défauts super-normaux que les formules qui ne peuvent faire partie de toutes les extensions préférées puisque n'appartenant pas à toutes les $MSS^{\textsc{Incl}}$ de Σ. Ainsi l'ensemble Σ résultant est consistant et toute formule le constituant fera partie de toutes les extensions préférées de Γ. En remplaçant chaque formule de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ sans mécanisme de sélection par un défaut super-normal on remplace donc inutilement certaines formules qui feront partie de toutes les extensions préférées de Γ.

5.4.2 Propositions précédentes

Dans le chapitre précédent, nous avons établit un certain nombre de propriétés. La propriété 4.2 montrant que toute formule satisfiable $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ appartient à une extension de la fusion de D-théories où $\cup_{i=1}^{n} \Delta_i = \emptyset$, ne tient pas dans le cas stratifié[8]. En effet, la stratification non-dégénérée[9] $\preceq$ de Γ ne permet pas toujours à toutes les formules de l'union des MUSes de pouvoir faire partie d'une extension.

Proposition 5.1. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble de n D-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner selon $\preceq$. Soit $\cup_{i=1}^{n} \Delta_i = \emptyset$ et $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ inconsistant. Soit $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ satisfiable. f ne fera partie d'aucune extension préférée de Γ ssi $f \in \theta(M)$ pour au moins un $M \in MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ où :*

[7] Notons qu'un pré-ordre total sous-tend un ordre total ou plusieurs ordres totaux.

[8] Il est évident que la partie de la propriété montrant que toutes les formules de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ ne peuvent appartenir ensemble à une extension de la théorie résultant de la fusion tient encore dans le cadre stratifié.

[9] Rappelons qu'une stratification est dégénérée si elle n'est formée que d'une seule strate.

– $\forall M \in MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ *alors* $\theta(M) \ni \alpha$ *ssi* $\forall \beta \in M, \beta \preceq \alpha \Rightarrow \nexists M' \preceq M$ *t.q.* $\theta(M') \ni \beta$,
– $M' \preceq M$ *ssi* $\forall \alpha \in M, \exists \alpha' \in M'$ *t.q.* $\alpha' \preceq \alpha$.

Démonstration. $\forall E, \exists K_{\frac{:f}{f}} \subseteq \{d' | d' \in GEN(\Delta, E), d' \preceq \frac{:f}{f}\}$ t.q. $Th_{\mathcal{L}}(\Sigma \cup cons(K_{\frac{:f}{f}}))$ défait $\frac{:f}{f}$. Donc $\neg f \in Th_{\mathcal{L}}(\Sigma \cup cons(K_{\frac{:f}{f}}))$. Ainsi $\exists M$ t.q. $Th_{\mathcal{L}}(M \setminus f) \neq \mathcal{L}$. Supposons que $\nexists M' \preceq M$, alors si $f \neq \alpha$ il y a contradiction donc $f = \alpha \in \theta(M)$. Supposons que $\exists M' \preceq M$, alors en répétant le même raisonnement comme il y a un nombre fini de MUS, le processus termine. □

On s'aperçoit alors qu'**une formule la moins préférée d'un MUS peut faire partie de toutes (resp. au moins une) extensions préférées** de Γ si une autre formule de ce MUS ne fait pas partie de toutes (resp. au moins une) extensions préférées de Γ, comme le montre la figure 5.1. Remarquons que l'on pourrait éviter ce phénomène en imposant que les formules logiquement équivalentes soit dans la même strate.

$$MUS_3 \quad MUS_2 \quad MUS_1$$

$$\ldots \prec \{c, \neg c \vee \neg b\} \prec \{b, \neg a \vee \neg b\} \prec \{a\}$$

Fig. 5.1: Illustration de la Proposition 5.1

Exemple 5.8. *Considérons la fusion de D-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *selon la stratification* $\preceq$. $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\{\neg a \vee \neg b\} \prec \{b, a\} \prec \{\neg a\}\}$ *et* $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \emptyset$. $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ *et contient 2 MUSes,* $MUS_1 = \{\{\neg a \vee \neg b\} \prec \{b, a\}\}, MUS_2 = \{\{a\} \prec \{\neg a\}\}$.

La SD-théorie résultante est $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ *où* $\Sigma = \emptyset$ *et* $\Delta = \{\{\frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}\} \prec \{\frac{:b}{b}, \frac{:a}{a}\} \prec \{\frac{:\neg a}{\neg a}\}\}$. *Les extensions classiques de la SD-théorie* Γ *sont* $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a \vee \neg b, b, \neg a\})$, $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a \vee \neg b, a\})$ *et* $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{b, a\})$. *Les extensions préférées de* Γ *sont* E_1 *et* E_2 *selon la définition d'extension préférée 5.11. Ainsi, on s'aperçoit que* $\neg a$ *qui est la formule la moins préférée de* $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ *fait partie d'une extension préférée de* Γ.

Trivialement, l'intersection de toutes les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$, où $\preceq$ n'est pas dégénérée, ne peut pas toujours coïncider exactement avec les extensions préférées de la théorie avec défauts $\Gamma' = (\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i), \emptyset)$ où l'on supprime les MUSes. Cela est du à la stratification sur $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ qui garantit dans ce cas qu'au moins une formule $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ fasse partie de toutes les extensions préférées de Γ.

Proposition 5.2. *Soit* $n > 1$. *Considérons* n *D-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i, \preceq)$ *à fusionner. Soit* $\cap_j E_j$ *l'intersection ensembliste des extensions préférées de la SD-théorie fusionnée résultante* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$. *Soit* E *l'unique extension préférée de* $\Gamma' = (\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i), \emptyset)$. *Si* $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \emptyset$ *pour* $i = 1..n$ *alors* $E \subseteq \cap_j E_j$.

Démonstration. Trivialement, $E = \Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$. C'est à dire que E est logiquement équivalent à $\bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$. Chaque disjonction dans ψ est $\bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \theta(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)))$. De plus, $\theta(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)) \subseteq \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ alors $\psi \models \bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$. Toutes les extensions préférées E_j contiennent $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ donc $\cap_{j=1}^{n}E_j = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$. □

5.5 Ensemble de défauts initiaux non vide

Nous allons maintenant considérer le cas général où les théories à fusionner contiennent des défauts. Ainsi nous étudierons comment les défauts introduits peuvent interagir avec ceux de la théorie initiale et de quelle manière définir le calcul des extensions préférées de théories stratifiées.

5.5.1 Interaction des différents types de défauts

Précédemment nous avons pu remarquer que les théories avec défauts normaux possède la propriété intéressante de **semi-monotonie**. Celle-ci assure que quand nous ajoutons de nouveaux défauts à une théorie avec défauts normaux Γ, toute extension de Γ est contenue dans une extension de la nouvelle théorie. Cependant, dans le cadre stratifié, en appliquant la méthode de sélection sceptique, cette propriété ne tient plus. En effet si il existe un sous-ensemble préféré $K \in SCE(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ tel que $Th_{\mathcal{L}}(K)$ défait un défaut normal d de la théorie initiale, alors d ne sera jamais appliqué, comme nous le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.9. *Soit $n > 1$. Considérons n D-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ stratifiée selon $\preceq$ et la méthode de sélection sceptique, à fusionner, où $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\{a \wedge b\} \prec \{\neg a\}\}$ et $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \{\frac{:\neg b}{\neg b}\}$. $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$. La SD-théorie résultant de la fusion est $\Gamma = (\{a \wedge b\}, \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg b}{\neg b}\}, \preceq)$. L'extension préférée de Γ est $E = Th_{\mathcal{L}}(\{a \wedge b\})$. L'unique extension préférée de la théorie $\Gamma' = (\emptyset, \{\frac{:\neg b}{\neg b}\})$ est $E = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg b\})$ et n'est pas inclue dans l'intersection des extensions préférées de Γ.*

Bien-sûr dans le cas général, **le remplacement de MUSes ou partie de MUSes par des défauts correspondants n'assure pas que nous obtenions un ensemble étendu d'extensions préférées** comme cela pourrait être le cas si tout ou parties de ces MUSes étaient supprimées. Le problème est identique à celui vu à la section 4.3.1 du chapître précédent, la stratification de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ n'influant pas dans ce cas.

5.5.2 Discrimination des différents types de défauts

Dans la section précédente, l'ensemble des défauts de la théorie initiale $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ étant vide, il n'était pas nécessaire d'émettre une préférence au sein de l'ensemble des défauts Δ. Maintenant en considérant $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ non vide et en prenant en compte la stratification sur les défauts introduits, il convient d'émettre une préférence entre les deux types de défauts. En effet, la stratification des défauts introduits nous contraint à préférer l'un des deux types de défauts par rapport à l'autre pour respecter la définition de pré-ordre total.

Nous avons vu précédemment, que les défauts introduits peuvent signifier quelques chose de contradictoire avec les défauts de la théorie initiale. Mais ne perdons pas de vue que **les défauts que nous introduisons sont issues de connaissances générales qui doivent être préférées aux connaissances révisables** que sont les règles de défauts de la théorie initiale. En effet, la présence des nouveaux défauts au sein de l'ensemble des règles de défauts doit être vu comme une **forme de relâchement**. Dans l'exemple précédent, les formules $a \wedge b$ et $\neg a$ étant inconsistantes entre-elles, on introduit des défauts leur correspondant afin de considérer les extensions préférées contenant l'une ou l'autre, individuellement.

Ainsi, nous proposons de **donner une priorité plus forte aux défauts introduits face aux défauts de la théorie initiale**.

Définition 5.12. *Considérons n D-théories $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner selon $\preceq$. Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ la SD-théorie fusionnée résultante. $\preceq$ est un pré-ordre total sur Δ donnant la priorité aux défauts introduits face aux défauts de la théorie initiale ssi $\forall d, d' \in \Delta$ t.q. $d \in \{\frac{:f}{f} | f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ et $d' \in \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ alors $d \prec d'$.*

5.5.3 Calcul des extensions préférées

La Définition 5.11 d'extensions préférées de théories avec défauts stratifiées s'applique toujours quand $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i \neq \emptyset$. La seule différence est que l'**on doit prendre en compte la discrimination des différents types de défauts dans le calcul des extensions préférées**. Voyons sur deux exemples l'application de celle-ci.

Exemple 5.10. *Considérons la fusion de n D-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *selon* $\preceq$ *où* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\{a\} \prec \{\neg a \vee \neg b, b, c\}\}$ *et* $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \{\frac{c:\neg a}{\neg a}\}$. $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \{\{a\} \prec \{\neg a \vee b, b\}\}$. *La SD-théorie fusionnée résultante selon une discrimination privilégiant les défauts introduits est* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ *où* $\Sigma = \{c\}$ *et* $\Delta = \{\{\frac{:a}{a}\} \prec \{\frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}\} \prec \{\frac{c:\neg a}{\neg a}\}\}$.

Les extensions classiques de Γ *où les défauts introduits sont préférés aux défauts de la théorie initiale sont* $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg a \vee \neg b, c\})$ *et* $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b, c\})$ *et* $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a \vee \neg b, b, c, \neg a\})$. *Les extensions préférées de* Γ *sont* E_1 *et* E_2.

Exemple 5.11. *Considérons la fusion de n D-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *selon* $\preceq$ *où* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\{a\} \prec \{\neg a\}\}$ *et* $\Delta = \{\frac{:b}{b}, \frac{a:c}{\neg b}, \frac{\neg a:c}{\neg b}\}$. $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \{\{a\} \prec \{\neg a\}\}$. *La SD-théorie fusionnée résultante selon une discrimination privilégiant les défauts introduits est* $\Gamma = (\emptyset, \{\{\frac{:a}{a}\} \prec \{\frac{:\neg a}{\neg a}\} \prec \{\frac{:b}{b}, \frac{a:c}{\neg b}, \frac{\neg a:c}{\neg b}\}\}, \preceq)$.

Les extensions classiques de Γ *sont* $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg b\})$ *et* $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a, \neg b\})$.

Selon la méthode de calcul des extensions préférées d'une SD-théorie, on obtient une extension préférée qui est $E = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg b\})$.

Dans ce dernier exemple, l'extension préférée coïncide avec l'extension préférée de la théorie avec défauts obtenue quand on donne une priorité plus forte aux défauts de la théorie initiale. On remarque que **la discrimination des différents types de défauts n'influe pas dans le calcul des extensions si aucun sous-ensemble de défauts de la théorie initial ne *contredit* un sous-ensemble de défauts introduits**. Ce qui nous amène à la propriété suivante.

Définition 5.13. *Soient* X, Y *deux ensembles finis de formules.* X *contredit* Y *ssi* $\exists x \in \mathcal{L}$ *t.q.* $Th_{\mathcal{L}}(X) = Th_{\mathcal{L}}(\{x\})$, $\exists y \in \mathcal{L}$ *t.q.* $Th_{\mathcal{L}}(Y) = Th_{\mathcal{L}}(\{y\})$, *et* $y = \neg x$.

Proposition 5.3. *Soit la fusion de n D-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *selon* $\preceq$. *Soient* $\Gamma_1 = (\Sigma, \Delta, \preceq_1)$ *et* $\Gamma_2 = (\Sigma, \Delta, \preceq_2)$ *les deux SD-théories fusionnées où :*

- $\preceq_1$ *est un pré-ordre total sur* Δ *t.q.* $\forall d_1, d_1' \in \Delta$ *t.q.* $d_1 \in \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ *et* $d_1' \in \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ *alors* $d_1 \prec d_1'$,
- $\preceq_2$ *est un pré-ordre total sur* Δ *t.q.* $\forall d_2, d_2' \in \Delta$ *t.q.* $d_2 \in \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ *et* $d_2' \in \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ *alors* $d_2' \prec d_2$.

Si $\forall D \subseteq \cup_{i=1}^{n}\Delta_i, \nexists D' \subseteq \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ *t.q.* D contredit D', *alors* E *est une extension préférée de* Γ_1 *ssi* E *est une extension préférée de* Γ_2.

Démonstration. Si $\forall D \subseteq \cup_{i=1}^{n}\Delta_i, \nexists D' \subseteq \{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ t.q. D *contredit* D' alors $\forall E$ une extension préférée de $\Gamma = (\Sigma, \Delta \setminus \cup_{i=1}^{n}\Delta_i, \preceq)$, E est une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq_2)$ et $\forall E'$ une extension préférée de $\Gamma = (\Sigma, \Delta \setminus \{\frac{:f}{f} | f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\})$, E' est une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta \preceq_1)$. Trivialement, dans ce cas une extension préférée de Γ_1 est une extension préférée de Γ_2. Par contre si D contredit D' alors E n'est pas une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq_2)$ et E' n'est pas une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq_1)$. □

Ainsi, on pourrait vouloir remettre en question la discrimination des différents types de défauts lors de la fusion de théories avec défauts. Nous avons vu précédemment que les défauts introduits peuvent signifier quelque chose de contradictoire avec les défauts de la théorie initiale. Cela est tout à fait naturel puisque les formules issues des *MUSes* signifient à la base quelque chose de contradictoire avec les défauts de la théorie initiale dans ce cas. On remarque alors qu'**un sous-ensemble de défauts de la théorie initiale contredisant un sous-ensemble de défauts introduits implique un autre sous-ensemble de défauts introduits**, nous amènant à la propriété suivante, laquelle est fortement liée à la précédente.

Proposition 5.4. *Soit* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ *une SD-théorie. Soit* $D \subseteq \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ *et* $D' \subseteq \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$. *Si* D *contredit* D', *alors il existe un sous-ensemble* $E \subseteq \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ *t.q* $cons(D') \cap cons(E) = \emptyset$, *impliqué par* $cons(D)$.

Démonstration. Soient $Th_{\mathcal{L}}(D) = Th_{\mathcal{L}}(\{d\})$, $Th_{\mathcal{L}}(D') = Th_{\mathcal{L}}(\{d'\})$ et $Th_{\mathcal{L}}(E) = Th_{\mathcal{L}}(\{e\})$ selon la définition 5.13. Si $D' \subseteq \{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)\}$ alors $\exists E \subseteq (\{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)\})$ t.q. $cons(D') \cup cons(E)$ soit inconsistant. Ainsi $Th_{\mathcal{L}}(\{\neg d'\}) \subseteq Th_{\mathcal{L}}(\{e\})$. Si D contredit D' alors $Th_{\mathcal{L}}(\{d\}) \subseteq Th_{\mathcal{L}}(\{\neg d'\})$. Ainsi, par transitivité $Th_{\mathcal{L}}(\{d\}) \subseteq Th_{\mathcal{L}}(\{e\})$. □

Chapitre 6

Multi-ensembles de connaissances

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la fusion de théories avec défauts où les connaissances sont représentées par des multi-ensembles. Autrement dit, dans ces "ensembles" un élément peut apparaître plusieurs fois. Nous verrons que les propriétés introduites dans les chapitres précédents s'appliquent toujours après une redéfinition du calcul des extensions. Aussi, la différence s'établit en grande partie lors le choix du mécanisme de sélection de formules inconsistantes pour leur remplacement par des défauts supernormaux correspondants.

6.1 Introduction

Jusqu'à présent nous considérions $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ et $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ comme des ensembles dans lesquels un élément n'apparaissait au plus qu'une seule fois. Rappelons que ces ensembles représentent les *connaissances* d'un agent ou d'une communauté d'agents. Il semble donc naturel que des agents puissent avoir des connaissances en commun et que par conséquent un élément puisse apparaître plusieurs fois dans $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ ou dans $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$. Ainsi, considérons maintenant $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ et $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ comme des multi-ensembles de connaissances.

6.1.1 Multi-ensemble

Définition 6.1. *Un* ***multi-ensemble*** *est une paire* (A, m) *où* A *est un ensemble appelé* support *et* $m : A \rightarrow \mathbb{N}^+$ *est une fonction de* A *dans l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}^+$*, appelée* multiplicité.[1]

Dans le multi-ensemble (A, m), l'élément x apparaît $m(x)$ fois. Un multi-ensemble est dit fini si la somme des multiplicités des éléments de son support est finie. Il se note en utilisant des doubles accolades $\{\!\{\ldots\}\!\}$ qui encadrent les éléments, ayant une multiplicité strictement positive, répétés autant de fois que celle-ci, comme dans les exemples suivants.

Exemple 6.1. *Soit* $\Sigma = \{\!\{a, b, a, b, b, c\}\!\}$ *un multi-ensemble de formules de la logique propositionnelle.* Σ *représente le multi-ensemble* $(\{a, b, c\}, m)$ *où* m *est la fonction telle que* $m(a) = 2$*,* $m(b) = 3$ *et* $m(c) = 1$*.*

Exemple 6.2. *Soit* $\Delta = \{\!\{\frac{a:b}{c}, \frac{a:b}{c}, \frac{a:b}{c}, \frac{:d}{e}, \frac{:d}{e}, \frac{e:f}{f}\}\!\}$ *un multi-ensemble de règles de défauts.* Δ *représente le multi-ensemble* $(\{\frac{a:b}{c}, \frac{:d}{e}, \frac{e:f}{f}\}, m)$ *où* m *est la fonction telle que* $m(\frac{a:b}{c}) = 3$*,* $m(\frac{:d}{e}) = 2$ *et* $m(\frac{e:f}{f}) = 1$*.*

Afin de lever toute ambiguïté, il convient de définir formellement les opérations classiques que nous serons amenés à utiliser dans la suite sur les multi-ensembles.

[1] Dans la théorie des ensembles, un multi-ensemble est aussi appelé *sac*.

Définition 6.2. *Soit n>1. Considérons n multi-ensembles de la forme $X_i = (A_i, m_i)$. L'**union multi-ensembliste** $\cup_{i=1}^n X_i$ est défini par $X = (A, m)$ où :*
- $A = \cup_{i=1}^n A_i$,
- $\forall x \in A, m(x) = \sum_{i=1}^n m_i(x) \in A_i$.

Définition 6.3. *Soit n>1. Considérons n multi-ensembles de la forme $X_i = (A_i, m_i)$. L'**intersection multi-ensembliste** $\cap_{i=1}^n X_i$ est défini par $X = (A, m)$ où :*
- $A = \cap_{i=1}^n A_i$,
- $\forall x \in A, m(x) = MIN_{i=1}^n m_i(x) \in A_i$.

Définition 6.4. *Soit $\Sigma = (A, m)$ un multi-ensemble de formules. Les **conséquences logiques** d'un multi-ensemble de formules $Th_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ sont définies comme suit[2] :*
- $f \in Th_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ *ssi* $f \in Th_{\mathcal{L}}(A)$,
- $\forall f \in Th_{\mathcal{L}}(A), \forall \Sigma' \subseteq \Sigma, \forall x \in f$ *alors* $m(f) = MAX_{\Sigma'_1}^{\Sigma'_n}(MIN_{x_1}^{x_m}(m_j(x_i)))$.

6.1.2 Stratification induite

Dans les multi-ensembles $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ et $\cup_{i=1}^n \Delta_i$, la multiplicité établit implicitement une relation de préférence dans l'ensemble support. Autrement dit, **on pourrait considérer qu'un élément dont la multiplicité est strictement plus élevée que celle d'un autre élément sera strictement préféré à ce dernier**. En effet, dans ce cas de figure plus la multiplicité d'un élément est élevée plus sa préférence par rapport aux autres élément l'est. On peut donc trouver un ensemble stratifié induit par un multi-ensemble donné comme définit dans la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Soit $X = (A, m)$ un multi-ensemble fini. Il existe une **stratification** sur A en n strates $S_1, ..., S_n$ selon un pré-ordre total $\preceq$ sur A ssi $\forall f, g \in A$ alors $m(f) \geq m(g)$ implique $f \preceq g$.*

Démonstration. $\forall x, y \in A$. La relation $x \preceq y$ résultante est un pré-ordre puisque la relation $m(y) \leq m(x)$ est une relation réflexive et transitive par définition. Aussi la relation $x \preceq y$ résultante est totale par le même raisonnement. On construit $S_1, ..., S_n$ comme suit t.q. les S_i forment les classes d'équivalence de la relation $x \preceq y$ résultante :
- $S_1 = \{x \in A | \forall y \in A, m(y) \leq m(x)\}$,
- $S_{n+1} = \{x \in A | \forall y \in A \setminus \cup_{i=1}^n S_n, m(y) \leq m(x)\}$,
- si $x \preceq y$ et $y \not\preceq x$ alors $\exists i, x \in S_i$ et $\exists j \geq i, y \in S_j$.

$\square$

Exemple 6.3. *Considérons le multi-ensemble de formules propositionnelles $\Sigma = \{\!\{a, a, a, b, b, \neg a \vee \neg b\}\!\}$. Celui-ci induit l'ensemble de formules propositionnelles stratifié $\{\{a\} \prec \{b\} \prec \{\neg a \vee \neg b\}\}$.*

Exemple 6.4. *Considérons le multi-ensemble de règles de défauts $\Delta = \{\!\{\frac{a:b}{c}, \frac{a:b}{c}, \frac{a:b}{c}, \frac{:d}{e}, \frac{:d}{e}, \frac{e:f}{f}\}\!\}$. Celui-ci induit l'ensemble de règles de défauts stratifié $\{\{\frac{a:b}{c}\} \prec \{\frac{:d}{e}\} \prec \{\frac{e:f}{f}\}\}$.*

Ainsi dans le cadre de multi-ensembles de connaissances non hiérarchisés, **si l'on considère la stratification induite de $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ et de $\cup_{i=1}^n \Delta_i$ comme légitimes** alors les propositions établies pour les *ensembles de connaissances stratifiés* du chapitre précédent sont applicables dans ce cas. Il n'est cependant pas nécessaire de transformer les multi-ensembles $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ et $\cup_{i=1}^n \Delta_i$ en des ensembles stratifiés. **Il suffit simplement de considérer la multiplicité de $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ comme un élément de préférence** (via la méthode de sélection *select*) lors du remplacement des formules les moins préférées de $\cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$. De la même manière, il convient de considérer **la multiplicité de $\cup_{i=1}^n \Delta_i$ comme un élément de préférence** lors du calcul des extensions préférées dans la définition de Brewka et Eiter [BE99], comme nous allons le voir dans la suite.

[2]On pourrait donner une autre définition selon l'appréciation de la multiplicité.

Aussi, dans le cadre de multi-ensembles de connaissances stratifiés, si l'on considère la stratification de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ et de $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ comme légitimes alors les propositions du chapitre précédent s'appliquent. Nous allons voir dans la suite que dans le cadre de multi-ensembles de connaissances stratifiés la différence se situe dans le choix d'un mécanisme de sélection lors du remplacement des formules les moins préférées par des défauts super-normaux correspondants. En effet dans ce cas celui-ci doit s'appuyer sur un mécanisme de sélection lexicographique pour prendre en compte la multiplicité de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ via la cardinalité. De la même manière, comme dans le cadre de multi-ensembles de connaissances non hiérarchisés (paragraphe précédent), il convient de considérer la multiplicité de $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ comme un élément de préférence dans le calcul des extensions préférées.

Bien-sûr, si l'on considère comme illégitime la stratification induite des multi-ensembles de connaissances, que ce soit dans le cadre non-hiérarchisé ou dans le cadre stratifié, il convient alors de ne travailler que sur l'ensemble support de ces multi-ensembles. Pour cela, il faut se référer aux chapitres précédents traitant du cadre ensembliste de la logique des défauts.

6.2 Multi-ensembles de connaissances stratifiés

Dans les sections qui viennent, nous allons nous intéresser à la **fusion de théories avec défauts multi-ensemblistes où $\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{\Sigma_i}$** est stratifiée. Autrement dit, dans ce multi-ensemble une échelle de préférence entre éléments est donnée. Nous verrons si les propriétés proposées dans les chapitres précédents à propos des différentes approches pour traiter le problème de la trivialisation tiennent encore.

6.3 Stratification

6.3.1 Politique d'union

Comme dans le cadre ensembliste, dans le cadre multi-ensembliste, il peut être intéressant de **préférer certaines formules à d'autres**. Rappelons que chaque théorie représente les connaissances d'un agent ou d'une communauté d'agents. On peut donc vouloir donner une préférence à certaines théories plutôt qu'à d'autres afin de privilégier certaines connaissances, pour prendre en compte la fiabilité de la source d'information par exemple. D'une autre manière, on peut vouloir établir une échelle de préférence entre les formules d'un même agent, ou encore préférer certaines formules d'une théorie à celles d'une autre théorie, et inversement.

Dans le cas général, on veut **réunir les préférences entre les agents** de façon à ce que l'on obtienne une *stratification globale* sur les éléments du support[3]du multi-ensemble résultant de l'union, dont les strates ne coïncident pas nécessairement aux multi-ensembles de formules des agents. Aussi, dans la suite nous considérerons $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ sans tenir compte de la politique de réunion dont il est issu.

Remarquons que pour être plus rigoureux, **nous devrions considérer une stratification sur le multi-ensemble $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ aussi**. En effet, les raisons qui nous poussent à stratifier $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ s'appliquent aussi à $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$. Cependant, afin de simplifier la représentation de théories avec défauts stratifiée, nous préférons ne considérer que la stratification des connaissances de base. Aussi, la considération d'une stratification sur $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ ne modifie en rien les résultats qui suivent, seules les définitions demandent à être adaptées.

6.3.2 Définitions

Définition 6.5. *Un multi-ensemble de formules de la logique propositionnelle $\Sigma = (A, m)$ est **stratifié** en n **strates** $S_1, ..., S_n$ quand il existe un **pré-ordre total**[4]$\preceq$ sur A t.q. $\forall x, y \in A$:*

[3]On pourrait aussi stratifier le multi-ensemble $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ sur les occurrences des formules de celui-ci, mais nous ne traitons pas ce cas ici.

– *si* $(x \preceq y)$ *et* $(y \preceq x)$*, alors* $\exists i \in [1, ..., n]$ *tel que* $x, y \in S_i$*, signifiant qu'il n'y a pas de préférence entre* x *et* y*,*
– *si* $(x \preceq y)$ *et* $(y \npreceq x)$*, noté* $(x \prec y)$ *alors* $\exists i, j \in [1, ..., n]$ *où* $i < j$ *tel que* $x \in S_i$ *et* $y \in S_j$*, signifiant que* x *est strictement préféré à* y*.*
– $\{S_1, ..., S_n\}$ *forme une partition de* Σ*.*

Définition 6.6. *Soit* Σ *un multi-ensemble de formules stratifié en* n *strates. Les strates sont ordonnées par ordre décroissant de préférence, ainsi les formules appartenant à la strate* S_1 *sont* ***les plus préférées****, et celles appartenant à la strate* S_n *sont* ***les moins préférées****.*

Afin de simplifier la représentation de la stratification d'un multi-ensemble de formules, celui-ci sera donné comme la suite de ses strates, de la plus préférée à la moins préférée, comme sur l'exemple suivant.

Exemple 6.5. *Considérons un multi-ensemble de formules* $\Sigma = \{\!\{a, a, a, c, c, \neg a, \neg c\}\!\}$ *et une stratification sur* Σ *t.q.* Σ *soit partitionnée en deux strates* $S_1 = \{\!\{\neg a, \neg c\}\!\}$ *et* $S_2 = \{\!\{a, a, a, c, c\}\!\}$*. La représentation de* Σ *et de sa stratification est* $\Sigma = \{\{\!\{\neg a, \neg c\}\!\} \prec \{\!\{a, a, a, c, c\}\!\}\}$*.*

6.4 Théorie avec défauts stratifiée

Comme dans les chapitres précédents, supposons que nous nous donnions plusieurs théories avec défauts à fusionner, de telle sorte que l'union multi-ensembliste de leurs parties de la logique classique, notée $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$, soit inconsistante. Une voie directe pour **aborder la trivialisation** de la théorie avec défauts résultante consiste en la suppression d'assez de formules de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ afin que le sous-ensemble résultant devienne consistant. Cependant, nous avons vu précédemment que la suppression de formules était destructive et que **l'utilisation du cadre de la logique des défauts pourrait être une voie plus intéressante**. Aussi de cette manière, on conserve une trace de toute les formules, ce qui nous permettra d'avoir accès à une extension qui n'est pas préférée par exemple.

En exploitant la stratification de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$, on peut s'apercevoir que quand la logique des défauts trivialise alors **l'union multi-ensembliste de tous les MUSes,** $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ **est aussi stratifiée** selon le pré-ordre total $\preceq$ de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$. Cette échelle de préférence peut être conservée lors du remplacement de formules appartenant à l'union multi-ensembliste des MUSes par un défaut super-normal correspondant. En étendant le pré-ordre total de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ aux règles de défauts introduites, on a alors affaire à une forme de **logique des défauts stratifiée**.

Dans le cadre ensembliste, dans le cas où $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ était plate, nous réservions un **traitement uniforme des formules à l'intérieur de** $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ dans le sens où toutes étaient remplacées par un défaut super-normal correspondant. Ici, des variantes pourraient utiliser l'opérateur **select se basant sur la stratification et les multiplicités des éléments de** $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ pour en fournir un sous-ensemble tel que $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \mathit{select}(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit consistante, et de telle sorte que chaque formule f de $\mathit{select}(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit remplacée par un défaut super-normal correspondant. Autrement dit, on pourrait garder le maximum de formules *les plus préférées* consistantes entre elles au sein de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ et remplacer les formules *les moins préférées* (causant une inconsistance avec *les plus préférés*) par des défauts super-normaux en adaptant à Δ la relation de préférence sur les formules de $\{\frac{:f}{f} \in \mathit{select}(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\}$. Nous étudierons différents mécanismes de sélections de sous-ensembles préférés de formules dans la section suivante.

Définition 6.7. *Soit* $n > 1$*. Considérons un ensemble de* n *MD-théories*[5] *de la forme* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *à fusionner. la fonction select est une fonction de* $2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$ *t.q.* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \mathit{select}(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ *soit consistant et que* $\mathit{select}(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)) \subseteq \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$*.*

[4] Rappelons qu'un pré-ordre est une relation *réflexive* et *transitive*.
[5] Une théorie multi-ensembliste avec défauts est appelée MD-théorie.

Définition 6.8. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble de n MD-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner. Le pré-ordre $\preceq$ est un pré-ordre total sur $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i \cup \{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\}$. La **théorie multi-ensembliste avec défauts stratifiée** résultante (associée à select et à $\preceq$), appelée **MSD-théorie**, est donnée par $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ où :*
- $\Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$,
- $\Delta = \cup_{i=1}^{n}\Delta_i \cup \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in select(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))\}$.

6.5 Mécanismes de sélection

On appelle mécanisme de sélection initial, tout mécanisme permettant d'obtenir des sous-ensembles consistants ordonnés ou pas, à partir d'un multi-ensemble Σ de formules propositionnelles stratifié en n strates $S_1, ..., S_n$ par une relation de préférence $\preceq$. Le concept le plus utilisé pour manier l'inconsistance est de travailler avec les **sous-ensembles maximaux consistants** de Σ, appelés MSS (Maximal Satisfiable Subset) de Σ.

Définition 6.9. *Un sous-ensemble X de Σ est un **sous-ensemble maximal consistant au sens de l'inclusion**, appelé* **MSS**$^{\text{INCL}}$ *(ou encore thèses de Σ), si et seulement si X est consistant et $\nexists Y$ t.q. Y soit un sous-ensemble consistant de Σ et que $Y \supset X$.*[6]

Définition 6.10. *Un sous-ensemble X de Σ est un **sous-ensemble maximal consistant au sens de la cardinalité**, appelé* **MSS**$^{\text{LEX}}$*, si et seulement si X est consistant et pour tout sous-ensemble consistant Y de Σ, $|Var(Y)| \leq |Var(X)|$, où $|Var(Y)|$ représente la cardinalité de Y.*

Différentes approches, comparées par Cayrol, Lagasquie-Schiex et Schiex [CLSS98], ont étaient proposées pour utiliser la relation de préférence $\preceq$ dans le but de **sélectionner les sous-ensembles *préférés* de** Σ. Nous allons voir successivement des formalismes privilégiant la *maximalité au sens de l'inclusion*, puis ceux utilisant la *maximalité au sens de la cardinalité* qui permettent de raffiner les précédents. Enfin nous proposerons un *mécanisme de sélection sceptique*, adapté au contexte de la logique des défauts, avec lequel nous travaillerons dans la suite.

6.5.1 Préférence basée sur l'inclusion

Il existe de nombreux travaux qui travaillent à partir des $MSS^{\text{INCL}}(\Sigma)$. On les rassemble sous le terme "Inclusion Based Preference", c'est-à-dire que parmi tous les sous-ensembles consistants, on privilégie les sous-ensembles maximaux consistants. Ils correspondent tous au même mécanisme de sélection que nous noterons INCL.

Définition 6.11. *Notons $\Sigma = (S_1, ..., S_n)$ un multi-ensemble de formules stratifié. Soit Z t.q. $Z \in MSS^{\text{INCL}}(\Sigma)$, Z_i dénote $Z \cap S_i$. La **préférence au sens de l'inclusion** est l'ordre strict*[7] *défini sur $MSS^{\text{INCL}}(\Sigma)$ par : $Y \ll^{\text{INCL}} X$ si et seulement si il existe i tel que $Y_i \supset X_i$ et pour tout $j < i$, $X_j = Y_j$.*

Exemple 6.6. *Soit le multi-ensemble de formules stratifié $\Sigma = \{\{\!\{a, a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a \vee \neg b, b, b\}\!\} \prec \{\!\{c\}\!\}\}$. Notons les MSS^{INCL} de Σ suivies de leurs différentes intersections avec les strates de Σ dans le tableau 6.1. En appliquant la définition de préférence au sens de l'inclusion, on obtient l'ordre suivant sur les MSS^{INCL} de Σ : $X \ll^{\text{INCL}} Z$, $Y \ll^{\text{INCL}} Z$. Par conséquent X et Y sont les MSS^{INCL} préférées de Σ.*

6.5.2 Préférence lexicographique

Ici, il ne s'agit pas seulement de travailler à partir de sous-ensembles maximaux consistants au sens de l'inclusion, mais plutôt de "raffiner" le mécanisme vu précédemment en ne sélectionnant que certains de ces sous-ensembles. Pour cela, on sélectionne les sous-ensembles maximaux consistants au sens de la cardinalité. On notera ce type de mécanisme LEX.

[6] Notons qu'il existe un lien entre MUSes et Thèses correspondant à $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cap MSS^{\text{INCL}}(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$.
[7] Rappelons qu'une relation d'ordre strict est *irréflexive* et *transitive*.

X, Y, Z	$\cap S_1$	$\cap S_2$	$\cap S_3$
$X = \{\!\{c, a, a, b, b\}\!\}$	$\{\!\{a, a\}\!\}$	$\{\!\{b, b\}\!\}$	$\{\!\{c\}\!\}$
$Y = \{\!\{c, \neg a \vee \neg b, a, a\}\!\}$	$\{\!\{a, a\}\!\}$	$\{\!\{\neg a \vee \neg b\}\!\}$	$\{\!\{c\}\!\}$
$Z = \{\!\{c, \neg a \vee \neg b, b, b\}\!\}$	$\emptyset$	$\{\!\{\neg a \vee \neg b, b, b\}\!\}$	$\{\!\{c\}\!\}$

Tab. 6.1: Intersection des MSS^{Incl} de Σ avec les strates de Σ.

Définition 6.12. *Notons $\Sigma = (S_1, ..., S_n)$ un ensemble de formules stratifié. Soit Z t.q. $Z \in MSS^{\text{Lex}}(\Sigma)$, Z_i dénote $Z \cap S_i$. La* ***préférence lexicographique*** *est l'ordre strict défini sur les sous-ensembles maximaux consistants au sens de la cardinalité de Σ par : $Y \ll^{\text{Lex}} X$ si et seulement si il existe i tel que $|Var(X_i)| < |Var(Y_i)|$ et pour tout $j < i$, $|Var(X_j)| = |Var(Y_j)|$.*

Exemple 6.7. *Notons le multi-ensemble de formules stratifié $\Sigma = \{\{\!\{a, a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a \vee \neg b, b, b\}\!\} \prec \{\!\{c\}\!\}\}$ de l'exemple 6.1. Notons les MSS^{Lex} de Σ suivies de leurs différentes intersections avec les strates de Σ dans le tableau 6.2. On note que Σ ne compte qu'un seul MSS^{Lex}, trivialement en appliquant la définition de préférence lexicographique ce dernier est donc le MSS^{Lex} préféré de Σ.*

X, Y, Z	$\lvert \cap S_1 \rvert$	$\lvert \cap S_2 \rvert$	$\lvert \cap S_3 \rvert$
$X = \{\!\{c, a, a, b, b\}\!\}$	2	2	1

Tab. 6.2: Intersection des MSS^{Lex} de Σ avec les strates de Σ.

6.5.3 Comparaisons

Dans l'exemple précédent, les MSS^{Incl} préférés de Σ ne correspondent pas au MSS^{Lex} préféré de Σ. On voit bien ainsi que la préférence basée sur la cardinalité raffine la préférence basée sur l'inclusion dans le cadre stratifié. Il peut être montré que dans le cadre non-hiérachisé aussi, la *préférence lexicographique* raffine la *préférence basée sur l'inclusion ensembliste* : **tout sous-ensemble consistant $\ll^{\text{Lex}}$-préféré de E est un sous-ensemble consistant $\ll^{\text{Incl}}$-préférée**, mais l'inverse n'est pas forcément vrai.

Exemple 6.8. *Considérons $\Sigma_1 = \{\!\{a \wedge b \wedge c \wedge d, a \wedge b \wedge c \wedge d\}\!\}$ et $\Sigma_2 = \{\!\{\neg a, \neg b, \neg c, \neg d, \neg d\}\!\}$ deux multi-ensembles de formules de la logique propositionnelle a fusionner. Le multi-ensemble résultant de la fusion $\Sigma = \{\!\{a \wedge b \wedge c \wedge d, a \wedge b \wedge c \wedge d, \neg a, \neg b, \neg c, \neg d, \neg d\}\!\}$ est inconsistant.*

Les deux MSS^{Incl} de Σ correspondent aux deux multi-ensembles initiaux Σ_1 et Σ_2 dont la cardinalité est égale à 2 et à 5, respectivement. Ils sont tous deux les sous-ensembles consistants $\ll^{\text{Inc}}$-préférées de Σ.

A l'opposé il n'existe qu'un MSS^{Lex} de Σ, correspondant à Σ_2. Celui-ci est donc l'unique sous-ensemble consistant $\ll^{\text{Lex}}$-préféré de Σ.

6.5.4 Mécanisme de sélection sceptique

Dans le cadre général de la résolution du problème de la trivialisation en logique des défauts, nous avons vu qu'il était intéressant de remplacer toutes les formules appartenant aux MUSes par des défauts super-normaux correspondants. Aussi nous avons vu qu'il suffit de ne remplacer qu'au plus une[8]formule par MUS afin de retrouver la consistance dans $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$. C'est dans ce but que nous avons définit la fonction de sélection *select* qui remplace assez de formules de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ pour retrouver la consistance. **Ainsi il est possible d'imaginer une fonction** *select* **se basant sur le** ***sous-ensemble maximal consistant préféré*** **de $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ en ne remplaçant que ce qui fait partie de**

$\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) \setminus \cup MSS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$.

Cependant, nous avons vu que l'utilisation des mécanismes de sélection introduits permettent dans certains cas l'obtention de **plusieurs sous-ensembles maximaux consistants préférés** à partir d'un multi-ensemble Σ stratifiée. Bien que nous préférerions n'obtenir qu'un seul sous-ensemble maximal consistant préféré dans le cadre de notre utilisation afin de ne travailler que sur **une seule théorie** avec défauts fusionnée, comme c'est le cas dans le cadre ensembliste quand $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ est plate.

Pour arriver à ce résultat nous pouvons utiliser le cadre même de la logique des défauts, et ainsi **renforcer la notion de préférence**. En effet, si plusieurs sous-ensembles préférés peuvent exister, cela est dû au fait qu'il n'existe pas de préférence entre certaines formules du multi-ensemble. Il peut donc être intéressant de considérer une **approche sceptique** afin de ne considérer que ce que les sous-ensembles préférés ont en commun. Ainsi de manière générale, les formules non sélectionnées par notre *select* se basant sur les MSS de Σ seront affaiblies puisque remplacées par un défaut super-normal leur correspondant.

Définition 6.13. *Notons $\Sigma = (S_1, ..., S_n)$ un multi-ensemble de formules stratifié. Notons $X^1, ..., X^m$ les sous-ensembles préférés de Σ au sens de la cardinalité*[9]*. Le **sous-ensemble préféré sceptique** de Σ, noté $SCE(\Sigma)$ est égal à $\cap_{i=1}^{m}(X^i)$.*

Exemple 6.9. *Notons un multi-ensemble de formules stratifié $\Sigma = \{\{\!\{a, a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a \vee \neg b, b\}\!\} \prec \{\!\{c, c\}\!\}\}$. Notons les MSS^{Lex} de Σ $X = \{\!\{a, a, c, c, \neg a \vee \neg b\}\!\}$ et $Y = \{\!\{a, a, c, c, b\}\!\}$. En appliquant la définition de préférence au sens de l'inclusion, X et Y sont les sous-ensembles préférés de Σ au sens de la cardinalité. Ainsi $SCE(\Sigma) = X \cap Y = \{\!\{a, a, c, c\}\!\}$.*

Ainsi dans la suite $\mathbf{select}(\cup \mathbf{MUS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{\Sigma_i})) = \cup \mathbf{MUS}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{\Sigma_i}) \setminus \mathbf{SCE}(\cup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{\Sigma_i})$[10]. Cependant, afin d'introduire des propriétés générales, nous ne considérons aucune méthode de sélection quand cela n'influe pas directement dans les résultats.

6.6 Ensemble de défauts initiaux vide

Premièrement, considérons la situation basique où le multi-ensemble des défauts $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ est vide. Dans ce cas, le pré-ordre total sur le multi-ensemble des règles de défauts Δ issue de la fusion ne concerne alors que les défauts introduits. Nous nous intéresserons plus tard à l'interaction des défauts introduits avec les défauts de la théorie initiale quand $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ n'est pas vide.

6.6.1 Calcul des extensions préférées

En remplaçant les formules appartenant à $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ par des défauts super-normaux et en conservant la stratification de cet ensemble, nous avons stratifié le multi-ensemble auparavant vide $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$. Cette relation de préférence sur Δ diverge de celle que Brewka et Eiter [BE99] donne dans le cadre du calcul des extensions de théories ensemblistes totalement prioritisées avec défauts super-normaux.

Bien-sûr, comme dans le chapitre précédent, les préférences entre défauts sont établies par un **ordre total**, différent du **pré-ordre total**[11]de notre théorie avec défauts stratifiée. Cependant, comme avec les théories totalement prioritisées avec défauts super-normaux de Brewka et Eiter [BE99], il s'agit toujours de **vérifier l'applicabilité des défauts dans l'ordre de préférence**. La seule différence

[8]Dans le cadre multi-ensembliste on dira plutôt que retirer un élément du support dans le multi-ensemble $M \in MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ restaure la consistance dans M.

[9]Remarquons que la méthode de sélection diffère de celle choisit dans le cadre ensembliste du chapitre précédent afin de prendre en compte la multiplicité des éléments du multi-ensemble dans la sélection.

[10]Plus exactement, $\Sigma = SCE(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ et $\Delta = \cup_{i=1}^{n}\Delta_i \cup \{\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus SCE(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$.

étant que **plusieurs extensions préférées peuvent être produites** quand il n'y a pas de préférence entre deux sous-ensembles de défauts générateurs inconsistants appartenant à la même strate.

Mais surtout, dans la définition même que donnent Brewka et Eiter, celle-ci s'établit dans le cadre d'ensembles de connaissances et non pas de multi-ensembles de connaissances. **Une modification de la définition doit nous permettre de considérer les multiplicités de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ et de $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ comme un élément de préférence lors du calcul des extensions préférées**. Notons tout de même que ce travail peut être effectué sur $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ par le mécanisme de sélection sceptique. Mais le problème opérant aussi sur $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$, nous donnons une définition qui pourra être utilisée quand $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i \neq \emptyset$.

Rappelons qu'un défaut $\frac{a:b_1,\ldots,b_m}{c}$ est **défait** par un multi-ensemble de formules $S = (A, m)$, ssi $\neg b_i \in A, \forall i \in \{1, ..., n\}$. Un défaut d est appelé **générateur** dans un multi-ensemble de formules $S = (A, m)$, si $pred(d) \in A$, $\neg just(d) \cap A = \emptyset$ et que $cons(d) \in A$; Notons par $GEN(\Delta, E)$ l'ensemble de tous les défauts de Δ qui sont générateurs dans une extension E.

Définition 6.14. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble de n MD-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner selon $\preceq$. Considérons la MSD-théorie fusionnée résultante $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ où $\Sigma = (A_\Sigma, m_\Sigma)$ et $\Delta = (A_\Delta, m_\Delta)$ par définition d'un multi-ensemble. Une* ***extension classique*** *de Γ est une extension de (A_Σ, A_Δ).*

Cette définition d'*extension classique* d'une *MSD-théorie* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ se base sur les ensembles supports de Γ afin de **ne pas restreindre les extensions "possibles" de Γ à des extensions se basant sur la stratification induite des multi-ensembles, puisque celle-ci peut ne pas être compatible avec la stratification $\preceq$ de Γ dont la priorité est plus élevée**. Ainsi, la définition d'extension préférée qui suit s'imprègne du même raisonnement.

Définition 6.15. *Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ une MSD-théorie stratifiée selon le pré-ordre $\preceq$ où $\Sigma = (A_\Sigma, m_\Sigma)$ et $\Delta = (A_\Delta, m_\Delta)$ par définition d'un multi-ensemble. Soit E une extension classique de Γ. Alors E est une* ***extension préférée*** *de Γ ssi $\forall d \in A_\Delta$ t.q. $pre(d) \in E$ et $cons(d) \notin E$, $\exists$ un ensemble de défauts $K_d \subseteq \{d' \in GEN(A_\Delta, E) | (d' \prec d)$ et/ou $(d' \preceq d,\ d \preceq d'$ et $m_\Delta(d') \geq m_\Delta(d))\}$ t.q. d soit défait dans $Th_{\mathcal{L}}(\Sigma \cup cons(K_d))$.*

Exemple 6.10. *Considérons la fusion de n MD-théories $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ selon $\preceq$ où $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\{\!\{a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a \vee \neg b, b, b\}\!\} \prec \{\!\{c\}\!\}\}$ et $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \emptyset$. $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \{\{\!\{a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a \vee \neg b, b, b\}\!\}\}$. La MSD-théorie fusionnée résultante est $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ où $\Sigma = \{\!\{c\}\!\}$ et $\Delta = \{\{\!\{\frac{:a}{a}\}\!\} \prec \{\!\{\frac{\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}, \frac{:b}{b}\}\!\}\}$.*

Ainsi $A_\Sigma = \{c\}$ et $A_\Delta = \{\{\frac{:a}{a}\} \prec \{\frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}\}\}$. Les extensions classiques de Γ sont $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg a \vee \neg b, c\})$, $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b, c\})$ et $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{b, \neg a \vee \neg b, c\})$.

Selon la définition d'extension préférée d'une MSD-théorie, seule E_2 est une extension préférée de Γ.

Dans l'exemple précédent, **les extensions préférées de la MSD-théorie où l'on remplace toutes les formules de $\cup$MUS($\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$) par un défaut super-normal coïncident avec celles de la MSD-théorie stratifiée selon un mécanisme de sélection sceptique**.

En effet, grâce au mécanisme de sélection sceptique utilisé pour la fusion de MD-théories, on ne remplace par des défauts super-normaux que les formules qui ne peuvent faire partie de toutes les extensions préférées puisque n'appartenant pas à toutes les MSS^{Lex} de Σ. Ainsi le multi-ensemble Σ résultant est consistant et toute formule le constituant fera partie de toutes les extensions préférées de Γ. En remplaçant chaque formules de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ sans mécanisme de sélection par un défaut super-normal on remplace donc inutilement certaines formules qui feront partie de toutes les extensions préférées de Γ.

[11] Notons qu'un pré-ordre total sous-tend un ordre total ou plusieurs ordres totaux.

6.6.2 Propositions précédentes

Comme dans le chapitre précédent, la propriété 4.2 montrant que toute formule satisfiable $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ appartient à une extension de la fusion de D-théories où $\cup_{i=1}^n \Delta_i = \emptyset$, ne tient pas dans le cas multi-ensembliste stratifié[12]. En effet, la stratification non-dégénérée[13]de $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ ne permet pas à toutes les formules d'un MUS de pouvoir s'appliquer.

Proposition 6.2. *Soit $n > 1$. Considérons un ensemble de n MD-théories de la forme $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner selon $\preceq$. Soit $\cup_{i=1}^n \Delta_i = \emptyset$ et $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ inconsistant. Soit $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ satisfiable. f ne fera partie d'aucune extension préférée de Γ ssi $f \in \theta(M)$ pour au moins un $M \in MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ où :*
- *$\forall M \in MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ alors $\theta(M) \ni \alpha$ ssi $\forall \beta \in M, \beta \preceq \alpha \Rightarrow \nexists M' \preceq M$ t.q. $\theta(M') \ni \beta$,*
- *$M' \preceq M$ ssi $\forall \alpha \in M, \exists \alpha' \in M'$ t.q. $\alpha' \preceq \alpha$.*

Démonstration. $\forall E, \exists K_{\frac{:f}{f}} \subseteq \{d' \in GEN(A_\Delta, E) | (d' \prec \frac{:f}{f})$ et/ou $(d' \preceq \frac{:f}{f}, \frac{:f}{f} \preceq d'$ et $m_\Delta(d') \geq m_\Delta(\frac{:f}{f}))\}$ t.q. $Th_{\mathcal{L}}(\Sigma \cup cons(K_{\frac{:f}{f}}))$ défait $\frac{:f}{f}$. Donc $\neg f \in Th_{\mathcal{L}}(\Sigma \cup cons(K_{\frac{:f}{f}}))$. Ainsi $\exists M$ t.q. $Th_{\mathcal{L}}(M \setminus f) \neq \mathcal{L}$. Supposons que $\nexists M' \preceq M$, alors si $f \neq \alpha$ il y a contradiction donc $f = \alpha \in \theta(M)$. Supposons que $\exists M' \preceq M$, alors en répétant le même raisonnement comme il y a un nombre fini de MUS, le processus termine. □

On s'aperçoit alors qu'**une formule la moins préférée d'un MUS peut faire partie de toutes (resp. au moins une) extensions préférées** de Γ si une autre formule de ce MUS ne fait pas partie de toutes (resp. au moins une) extensions préférées de Γ, comme le montre la figure 6.1. Remarquons que l'on pourrait éviter ce phénomène en imposant que les formules logiquement équivalentes soit dans la même strate.

$$MUS_3 \quad MUS_2 \quad MUS_1$$

$$\ldots \prec \{\!\{c, c, \neg c \vee \neg b\}\!\} \prec \{\!\{b, b, \neg a \vee \neg b\}\!\} \prec \{\!\{a, a\}\!\}$$

FIG. 6.1: Illustration de la Proposition 6.2

Exemple 6.11. *Considérons la fusion de MD-théories $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ selon la stratification $\preceq$. $\cup_{i=1}^n \Sigma_i = \{\{\!\{\neg a \vee \neg b\}\!\} \prec \{\!\{b, b, a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a\}\!\}\}$ et $\cup_{i=1}^n \Delta_i = \emptyset$. $\cup_{i=1}^n \Sigma_i = \cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ et contient 2 MUSes, $MUS_1 = \{\{\!\{\neg a \vee \neg b\}\!\} \prec \{\!\{b, b, a\}\!\}\}, MUS_2 = \{\{\!\{a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a\}\!\}\}$.*

La MSD-théorie résultante est $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ où $\Sigma = \emptyset$ et $\Delta = \{\{\!\{\frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}\}\!\} \prec \{\!\{\frac{:b}{b}, \frac{:b}{b}, \frac{:a}{a}\}\!\} \prec \{\!\{\frac{:\neg a}{\neg a}\}\!\}\}$. Les extensions classiques de la MSD-théorie Γ sont $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a \vee \neg b, b, \neg a\})$, $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a \vee \neg b, a\})$ et $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{b, a\})$. L' extension préférée de Γ est E_1 selon la définition d'extension préférée 6.15. Ainsi, on s'aperçoit que $\neg a$ qui est la formule la moins préférée de $\cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ fait partie de l'unique extension préférée de Γ.

Trivialement, l'intersection de toutes les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$, où $\preceq$ n'est pas dégénérée, ne peut pas toujours coïncider exactement avec les extensions préférées de la théorie avec défauts $\Gamma' = (\cup_{i=1}^n \Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i), \emptyset)$ où l'on supprime les MUSes. Cela est du à la stratification sur $\cup_{i=1}^n \Sigma_i$ qui garantit dans ce cas qu'au moins une formule $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ fasse partie de toutes les extensions préférées de Γ.

Proposition 6.3. *Soit $n > 1$. Considérons n MD-théories $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i, \preceq)$ à fusionner. Soit $\cap_j E_j$ l'intersection ensembliste des extensions préférées de la MSD-théorie fusionnée résultante $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$. Soit E l'unique extension préférée de $\Gamma' = (\cup_{i=1}^n \Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i), \emptyset)$. Si $\cup_{i=1}^n \Delta_i = \emptyset$ pour $i = 1..n$ alors $E \subseteq \cap_j E_j$.*

[12]Il est évident que la partie de la propriété montrant que toutes les formules de $\cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ ne peuvent appartenir ensemble à une extension de la théorie résultant de la fusion tient encore dans le cadre multi-ensembliste stratifié.

[13]Rappelons qu'une stratification est dégénérée si elle n'est formée que d'une seule strate.

Démonstration. Trivialement, $E = \Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$. C'est à dire que E est logiquement équivalent à $\bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$. Chaque disjonction dans ψ est $\bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \theta(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)))$. De plus, $\theta(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)) \subseteq \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ alors $\psi \models \bigwedge(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$. Toutes les extensions préférées E_j contiennent $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ donc $\cap_{j=1}^{n} E_j = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$. □

6.7 Ensemble de défauts initiaux non vide

Nous allons maintenant considérer le cas général où les théories à fusionner contiennent des défauts. Ainsi nous étudierons comment les défauts introduits peuvent interagir avec ceux de la théorie initiale et de quelle manière définir le calcul des extensions préférées de théories stratifiées multi-ensembliste.

6.7.1 Interaction des différents types de défauts

Précédemment nous avons pu remarquer que les théories avec défauts normaux possède la propriété intéressante de **semi-monotonie**. Celle-ci assure que quand nous ajoutons de nouveaux défauts à une théorie avec défauts normaux Γ, toute extension préférée de Γ est contenue dans une extension préférée de la nouvelle théorie. Cependant, dans le cadre stratifié multi-ensembliste, en appliquant la méthode de sélection sceptique, cette propriété ne tient plus. En effet si il existe un sous-ensemble préféré $K \in SCE(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ tel que $Th_{\mathcal{L}}(K)$ défait un défaut normal d de la théorie initiale, alors d ne sera jamais appliqué. Bien-sûr dans le cas général, **le remplacement de MUSes ou partie de MUSes par des défauts correspondants n'assure pas que nous obtenions un ensemble étendu d'extensions préférées** comme cela pourrait être le cas si tout ou parties de ces MUSes étaient supprimées.

Le problème est identique à celui vu à la section 5.5.1 du chapître précédent, le caractère multi-ensembliste de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ et de $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ n'influant pas dans ce cas.

6.7.2 Discrimination des différents types de défauts

Dans la section précédente, l'ensemble des défauts de la théorie initiale $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ étant vide, il n'était pas nécessaire d'émettre une préférence au sein de l'ensemble des défauts Δ. Maintenant en considérant $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ non vide et en prenant en compte la stratification sur les défauts introduits, il convient d'émettre une préférence entre les deux types de défauts. En effet, la stratification des défauts introduits nous contraint à préférer l'un des deux types de défauts par rapport à l'autre.

Nous avons vu précédemment, que les défauts introduits peuvent signifier quelques chose de contradictoire avec les défauts de la théorie initiale. Mais ne perdons pas de vue que **les défauts que nous introduisons sont issues de connaissances générales qui doivent être préférées aux connaissances révisables** que sont les règles de défauts de la théorie initiale. En effet, la présence des nouveaux défauts au sein du multi-ensemble des règles de défauts doit être vu comme une **forme de relâchement**. Par exemple, les formules $a \wedge b$ et $\neg a$ étant inconsistantes entre-elles, on introduit des défauts leur correspondant afin de considérer les extensions préférées contenant l'une ou l'autre, individuellement.

Ainsi, nous proposons de **donner une priorité plus forte aux défauts introduits face aux défauts de la théorie initiale**.

Définition 6.16. *Considérons n MD-théories $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ à fusionner selon $\preceq$. Soit $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ la MSD-théorie fusionnée résultante. $\preceq$ est un pré-ordre total sur Δ donnant la priorité aux défauts introduits face aux défauts de la théorie initiale ssi $\forall d, d' \in \Delta$ t.q. $d \in \{\frac{:f}{f} | f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ et $d' \in \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ alors $d \prec d'$.*

6.7.3 Calcul des extensions préférées

La Définition 6.15 d'extensions préférées de théories avec défauts stratifiées s'applique toujours quand $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i \neq \emptyset$. La seule différence est que l'**on doit prendre en compte la discrimination des différents types de défauts dans le calcul des extensions préférées**. Voyons sur deux exemples l'application de celle-ci.

Exemple 6.12. *Considérons la fusion de n MD-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *selon* $\preceq$ *où* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\{\!\{a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a \vee \neg b, b, b, c\}\!\}\}$ *et* $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i = \{\!\{\frac{c:\neg a}{\neg a}\}\!\}$. $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \{\{\!\{a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a \vee \neg b, b, b\}\!\}\}$. *La MSD-théorie fusionnée résultante selon une discrimination privilégiant les défauts introduits est* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ *où* $\Sigma = \{\!\{c\}\!\}$ *et* $\Delta = \{\{\!\{\frac{:a}{a}\}\!\} \prec \{\!\{\frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}, \frac{:b}{b}\}\!\} \prec \{\!\{\frac{c:\neg a}{\neg a}\}\!\}\}$.

Ainsi $A_\Sigma = \{c\}$ *et* $A_\Delta = \{\{\frac{:a}{a}\} \prec \{\frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}\} \prec \{\frac{c:\neg a}{\neg a}\}\}$. *Les extensions classiques de* Γ *où les défauts introduits sont préférés aux défauts de la théorie initiale sont* $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg a \vee \neg b, c\})$ *et* $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, b, c\})$ *et* $E_3 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a \vee \neg b, b, c, \neg a\})$. *L'unique extension préférée de* Γ *est* E_2.

Exemple 6.13. *Considérons la fusion de n MD-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *selon* $\preceq$ *où* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i = \{\{\!\{a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a\}\!\}\}$ *et* $\Delta = \{\!\{\frac{:b}{b}, \frac{a:c}{\neg b}, \frac{\neg a:c}{\neg b}\}\!\}$. $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) = \{\{\!\{a\}\!\} \prec \{\!\{\neg a\}\!\}\}$. *La MSD-théorie fusionnée résultante selon une discrimination privilégiant les défauts introduits est* $\Gamma = (\emptyset, \{\{\!\{\frac{:a}{a}\}\!\} \prec \{\!\{\frac{:\neg a}{\neg a}\}\!\} \prec \{\!\{\frac{:b}{b}, \frac{a:c}{\neg b}, \frac{\neg a:c}{\neg b}\}\!\}\}, \preceq)$.

Ainsi $A_\Sigma = \emptyset$ *et* $A_\Delta = \{\{\frac{:a}{a}\} \prec \{\frac{:\neg a}{\neg a}\} \prec \{\frac{:b}{b}, \frac{a:c}{\neg b}, \frac{\neg a:c}{\neg b}\}\}$. *Les extensions classiques de* Γ *sont* $E_1 = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg b\})$ *et* $E_2 = Th_{\mathcal{L}}(\{\neg a, \neg b\})$.

Selon la méthode de calcul des extensions préférées d'une MSD-théorie, on obtient une extension préférée qui est $E = Th_{\mathcal{L}}(\{a, \neg b\})$.

Dans ce dernier exemple, l'extension préférée coïncide avec l'extension préférée de la théorie avec défauts obtenue quand on donne une priorité plus forte aux défauts de la théorie initiale. On remarque que **la discrimination des différents types de défauts n'influe pas dans le calcul des extensions préférées si aucun sous-ensemble de défauts de la théorie initial ne *contredit* un sous-ensemble de défauts introduits**. Ce qui nous amène à la propriété suivante.

Définition 6.17. *Soient* X, Y *deux multi-ensembles finis de formules.* $X = (A_X, m_X)$ *contredit* $Y = (A_Y, m_Y)$ *ssi* $\exists x \in \mathcal{L}$ *t.q.* $Th_{\mathcal{L}}(A_X) = Th_{\mathcal{L}}(\{x\})$, $\exists y \in \mathcal{L}$ *t.q.* $Th_{\mathcal{L}}(A_Y) = Th_{\mathcal{L}}(\{y\})$, *et* $y = \neg x$.

Proposition 6.4. *Soit la fusion de n MD-théories* $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *selon* $\preceq$. *Soient* $\Gamma_1 = (\Sigma, \Delta, \preceq_1)$ *et* $\Gamma_2 = (\Sigma, \Delta, \preceq_2)$ *les deux MSD-théories fusionnées où :*

- $\preceq_1$ *est un pré-ordre total sur* Δ *t.q.* $\forall d_1, d'_1 \in \Delta$ *t.q.* $d_1 \in \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ *et* $d'_1 \in \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ *alors* $d_1 \prec d'_1$,
- $\preceq_2$ *est un pré-ordre total sur* Δ *t.q.* $\forall d_2, d'_2 \in \Delta$ *t.q.* $d_2 \in \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ *et* $d'_2 \in \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ *alors* $d'_2 \prec d_2$.

Si $\forall D \subseteq \cup_{i=1}^{n}\Delta_i, \nexists D' \subseteq \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ *t.q.* D contredit D', *alors* E *est une extension préférée de* Γ_1 *ssi* E *est une extension préférée de* Γ_2.

Démonstration. Si $\forall D \subseteq \cup_{i=1}^{n}\Delta_i, \nexists D' \subseteq \{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$ t.q. D *contredit* D' alors $\forall E$ une extension préférée de $\Gamma = (\Sigma, \Delta \setminus \cup_{i=1}^{n}\Delta_i, \preceq)$, E est une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq_2)$ et $\forall E'$ une extension préférée de $\Gamma = (\Sigma, \Delta \setminus \{\frac{:f}{f} | f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\})$, E' est une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta \preceq_1)$. Trivialement, dans ce cas une extension préférée de Γ_1 est une extension préférée de Γ_2. Par contre si D contredit D' alors E n'est pas une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq_2)$ et E' n'est pas une extension préférée incluse dans les extensions préférées de $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq_1)$. □

Ainsi, on pourrait vouloir remettre en question la discrimination des différents types de défauts lors de la fusion de théories avec défauts. Nous avons vu précédemment que les défauts introduits peuvent signifier quelque chose de contradictoire avec les défauts de la théorie initiale. Cela est tout à fait

[13] Dans le cadre infini, on doit se référer à une autre définition de "contredire" dont nous faisons abstraction ici.

naturel puisque les formules issues des $MUSes$ signifient à la base quelque chose de contradictoire avec les défauts de la théorie initiale dans ce cas. On remarque alors qu'**un sous-ensemble de défauts de la théorie initiale contredisant un sous-ensemble de défauts introduits implique un autre sous-ensemble de défauts introduits**, nous amènant à la propriété suivante, laquelle est fortement liée à la précédente.

Proposition 6.5. *Soit* $\Gamma = (\Sigma, \Delta, \preceq)$ *une MSD-théorie. Soit* $D \subseteq \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$ *et* $D' \subseteq \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)\}$*. Si* D *contredit* D'*, alors il existe un sous-ensemble* $E \subseteq \{\frac{:f}{f}$ *t.q.* $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)\}$ *t.q* $cons(D') \cap cons(E) = \emptyset$*, impliqué par* $cons(D)$*.*

Démonstration. Soient $D = (A_D, m_D)$, $D' = (A_{D'}, m_{D'})$ et $E = (A_E, m_E)$ selon la définition de multi-ensemble. Soient $Th_{\mathcal{L}}(A_D) = Th_{\mathcal{L}}(\{d\})$, $Th_{\mathcal{L}}(A_{D'}) = Th_{\mathcal{L}}(\{d'\})$ et $Th_{\mathcal{L}}(A_E) = Th_{\mathcal{L}}(\{e\})$ selon la définition 5.13. Si $A_{D'} \subseteq \{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)\}$ alors $\exists A_E \subseteq (\{\frac{:f}{f}$ t.q. $f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)\})$ t.q. $cons(A_{D'}) \cup cons(A_E)$ soit inconsistante. Ainsi $Th_{\mathcal{L}}(\{\neg d'\}) \subseteq Th_{\mathcal{L}}(\{e\})$. Si A_D contredit $A_{D'}$ alors $Th_{\mathcal{L}}(\{d\}) \subseteq Th_{\mathcal{L}}(\{\neg d'\})$. Ainsi, par transitivité $Th_{\mathcal{L}}(\{d\}) \subseteq Th_{\mathcal{L}}(\{e\})$. $\square$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, un "patch" à la logique des défauts de Reiter [REI80], l'une des logiques les plus populaire pour la représentation du raisonnement révisable, a été proposé. Il permet à un raisonnement de manier des théories avec défauts impliquant des bases de la logique propositionnelle contradictoires là où la logique des défauts classique trivialise. Ce nouveau cadre offre une méthode originale pour traiter l'inconsistance aussi bien des théories avec défauts que des théories de la logique classique. Une telle variante de la logique des défauts a son intêret quand la fusion de plusieurs sources de connaissances est considéré, puisque classiquement un raisonnement avec défauts infère toutes les conclusions même quand une inconsistance mineure survient.

En effet, la **logique des défauts** est un outil intéressant pour la **représentation du raisonnement révisable**. Nous avons vu dans l'état de l'art, que cette logique permet de traiter des contradictions de manière globale, grâce à la distinction des connaissances axiomatiques et des exceptions de théories avec défauts. Pourtant, la définition de Reiter ne prévoit rien en ce qui concerne les contradictions locales, menant alors au **problème de la trivialisation** de la logique des défauts. Dans un premier temps, nous avons vu comment palier ce problème, par le **remplacement des formules contradictoires par des défauts super-normaux correspondants**. On s'est aperçu alors que l'interaction de ces défauts introduits avec les défauts de la théorie initiale conduit à devoir **privilégier l'un de ces deux types de défauts** par le biais d'une stratification au sein de l'ensemble des défauts fusionné dans certains cas.

Ainsi, nous nous sommes intéressé à une forme de **logique des défauts stratifiée**, qui émet des préférences sur les connaissances lors de la fusion de théories avec défauts. Cela nous a amené à étudier la logique des défauts prioritisée de Brewka et Eiter [BE99], qui définit les principes naturels de préférence qu'une logique avec défauts prioritisée doit respecter. Nous avons aussi considéré le cas où des agents où communauté d'agents ont des **connaissances en commun**, en redéfinissant certaines propriétés pour prendre en considération la **multiplicité des connaissances de théories avec défauts multi-ensemblistes**.

De cette manière, en combinant ces différentes possibilités, nous pourrions imaginer une manière intéressante de raisonner en présence de contradiction. Cependant, notre approche se basant sur le calcul de tous les MUSes exactement, la **complexité du processus de raisonnement**, qu'il soit sceptique ou crédule, dans ce cas est **calculatoirement difficile**. Dans la perspective de recherches futures, nous pourrions nous intéresser au comportement de notre approche en se basant sur un **calcul approximatif des sources d'inconsistance** comme les couvertures inconsistantes strictes étudiées par Grégoire, Mazure et Piette [GMP06b] par exemple.

Un point dont nous avons fait abstraction dans ce mémoire est la **non-associativité de la fusion de théories avec défauts** à laquelle nous pourrions remédier en définissant une logique des défauts étiquetée, permettant de faire la distinction entre défauts introduits et défauts de la théorie initiale lorsque l'on itère le processus de fusion. Ainsi nous pouvons conclure que de nombreuses perspectives s'offrent à nous à l'issue de ce travail de Recherche passionnant et que nous espérons pouvoir continuer notre collaboration très rapidement.

Bibliographie

[AS93] Jean-Marc Alliot and Thomas Schiex. *Intelligence Artificielle et Informatique Théorique*. Cepadues, ISBN : 2-85428-324-4, 1993.

[BE99] G. Brewka and T. Eiter. Prioritizing default logic : Abridged report, 1999.

[CLSS98] Claudette Cayrol, Marie-Christine Lagasquie-Schiex, and Thomas Schiex. Nonmonotonic reasoning : From complexity to algorithms. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 22(3-4) :207–236, 1998.

[EG92] Thomas Eiter and Georg Gottlob. On the complexity of propositional knowledge base revision, updates, and counterfactuals. *Artif. Intell.*, 57(2-3) :227–270, 1992.

[GL88] Michael Gelfond and Vladimir Lifschitz. The stable model semantics for logic programming. In Robert A. Kowalski and Kenneth Bowen, editors, *Proceedings of the Fifth International Conference on Logic Programming*, pages 1070–1080, Cambridge, Massachusetts, 1988. The MIT Press.

[GMP06a] Eric GREGOIRE, Bertrand MAZURE, and Cédric PIETTE. Extracting muses. In *17th European Conference on Artificial Intelligence(ECAI'06)*, pages 387–391, Trento, Italy, aoÃ»t 2006.

[GMP06b] Eric GREGOIRE, Bertrand MAZURE, and Cédric PIETTE. Tracking muses and strict inconsistent covers. In *Sixth ACM/IEEE International Conference on Formal Methods in Computer Aided Design(FMCAD'06)*, pages 39–46, San Jose (USA), novembre 2006.

[GMP07] Eric GREGOIRE, Bertrand MAZURE, and Cédric PIETTE. Boosting a complete technique to find mss and mus thanks to a local search oracle. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence(IJCAI'07)*, pages 2300–2305, Hyderabad (India), janvier 2007.

[GOT92] GEORG GOTTLOB. Complexity Results for Nonmonotonic Logics. *J Logic Computation*, 2(3) :397–425, 1992.

[GRE90] Eric GREGOIRE. *Logiques non monotones et intelligence artificielle*. Hermés, Paris, France, décembre 1990.

[Por05] Nadège Porquet. *Contribution à l'étude de relations d'inférence paraconsistante sous ressources limitées*. PhD thesis, Université d'Artois, Décembre 2005.

[REI80] Ray REITER. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, pages 81–132, 1980.

[Rei83] Raymond Reiter. On reasoning by default. In *Proceedings of TINLAP 2, Theoretical Issues in Natural Language Processing 2*, pages 210–218. Association for Computational Linguistics, 1983.

[Rin95] Jussi Rintanen. On specificity in default logic. In *IJCAI*, pages 1474–1479, 1995.