

Fiche TD numéro 4 - Exercices sur les fonctions

Exercice 1 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de $E \rightarrow F$. Soient A et B deux parties de E et C et D deux parties de F .

Montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
4. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Exercice 2 : Soient E et F deux ensembles et soit f une application de $E \rightarrow F$. Démontrer que f est injective si et seulement si $\forall A \subset E, \forall B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 3 : Soit E un ensemble et soit f une application de $E \times E \rightarrow E$ qui est commutative, associative et telle qu'il existe un élément e dans E vérifiant : $\forall x \in E, f(x, e) = f(e, x) = x$. On définit la relation R sur E par $\forall x, y \in E$, on a $(x, y) \in R \iff \exists z \in E$ tel que $y = f(x, z)$. Indiquer pour chacun des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse, et justifier votre propos.

1. R est réflexive
2. R est antisymétrique
3. R est transitive

Exercice 4 : Soient E, F et G trois ensembles, f une application de $E \rightarrow F$ et g une application de $F \rightarrow G$.

1. Si f et g sont surjectives, a-t-on nécessairement $g \circ f$ surjective ?
2. Si $g \circ f$ est bijective, a-t-on nécessairement f et g bijective ?

Justifier votre propos.