Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin

OL – Outils Logiques

Exercices sur les relations d'ordre

Exercice 1 : Que peut-on dire d'une relation qui est à la fois symétrique et antisymétrique ?

Exercice 2 : Soient E et F deux ensembles. Soit $\leq_E$ une relation d'ordre sur E et $\leq_F$ une relation d'ordre sur F. On définit la relation $\leq$ sur $E \times F$ par $(x, y) \leq (u, v) \iff x \leq_E u \wedge y \leq_F v$. $\leq$ est-elle une relation d'ordre sur $E \times F$? Justifier votre propos.

Exercice 3 : Soient $<_1$ et $<_2$ deux relations d'ordre strict de E.

1. Montrer que la relation $<_1^{-1}$ est une relation d'ordre strict sur E ;
2. Est-ce que la relation $<_1 \circ <_2$ est également une relation d'ordre de E ? Justifier votre propos.

Exercice 4 : Soit P l'ensemble des partitions d'un ensemble E non vide. On munit P de la relation R définie par $\forall(p_1, p_2) \in P \times P, (p_1, p_2) \in R$ si et seulement si tout élément de p_2 est l'union d'éléments de p_1.

1. Est-ce que R constitue une relation d'ordre de $P \times P$?
2. R est-elle totale ?
3. P possède-t-il un plus petit élément pour R ? un plus grand élément pour R ?

Dans tous les cas, justifier votre propos.

Exercice 5 : Soit $\mathbb{N}$ muni de l'ordre naturel $\leq$. On définit les applications **min** et **max** de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

— **max**(x, y) vaut y si $x \leq y$, vaut x sinon ;
— **min**(x, y) vaut x si $x \leq y$, vaut y sinon.

Monter que :

1. ($\mathbb{N}$,**min**,**max**) a une structure de treillis ;
2. **max** est distributive sur **min**.