

OL – Outils Logiques**Exercices sur les relations****Exercice 1 :** Soient A et B des ensembles et soient R et S deux relations de $A \times B$. A-t-on :

- $Dom(R \cup S) = Dom(R) \cup Dom(S)$?
- $Dom(R \setminus S) = Dom(R) \setminus Dom(S)$?

Exercice 2 : Soient E un ensemble et A une partie de E . Soient R et S deux relations de $E \times E$. Indiquer parmi les assertions suivantes celles qui sont vérifiées. Justifier votre réponse.

- $R^{-1}(A) \cup R(A) = E$
- $Im(R \cup S) = Im(R) \cup Im(S)$
- $(R \cup S)(A) = R(A) \cup S(A)$
- $(R \Delta S)(A) = R(A) \Delta S(A)$

Exercice 3 : Soient E un ensemble, A et B deux parties de E . Soit R une relation de $E \times E$. Indiquer parmi les assertions suivantes celles qui sont vérifiées. Justifier votre réponse.

- $R(A \cap B) \subset R(A) \cap R(B)$
- $R(A \Delta B) = R(A) \Delta R(B)$

Exercice 4 : Soit R une relation binaire sur E . Montrer que :

- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
- $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$
- $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$
- $R_1 \subset R_2 \iff R_1^{-1} \subset R_2^{-1}$
- $(R^{-1})^{-1} = R$

Exercice 5 : Sur l'ensemble \mathbb{Z} , on définit deux relations, Σ et Δ par :

- $x \Sigma y \iff x + y$ est pair ;
- $x \Delta y \iff x - y$ est pair.

Est-ce que $\Sigma = \Delta$? Σ et Δ sont-elles réflexives, symétriques, transitives ?**Exercice 6 :**

- Est-ce que la relation donnée par la matrice booléenne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est réflexive ? symétrique ? transitive ?

- Soit le raisonnement suivant : *Je démontre que toute relation binaire à la fois symétrique et transitive est réflexive. Si R est symétrique, alors $aRb \implies bRa$ et par transitivité aRa . Que pensez-vous de ce raisonnement ?*

Exercice 7 : On considère la relation R de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ définie par $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$ si et seulement si $(x_1 \leq x_2 \implies y_1 \leq 2y_2)$. R est-elle :

1. réflexive ?
2. symétrique ?
3. antisymétrique ?
4. asymétrique ?
5. transitive ?
6. fonctionnelle ?