Outils Logiques pour l'informatique

Licence informatique – semestre 5

Section 1

Les fonctions

Fonction

On s'intéresse maintenant aux relations fonctionnelles, qui sont les fonctions mathématiques habituelles.

Définition

Une fonction est une relation d'un ensemble E vers un ensemble F telle que chaque élément de E est en relation avec au plus un élément de F.

On note une fonction $f : E \to F$, et on note $f(x) = y$ lorsque $(x, y) \in f$.

Exemples :

- la fonction *racine-carrée* de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- la fonction *minuscule* de l'ensemble des mots vers l'ensemble des mots

Vocabulaire

On retrouve les termes utilisés pour les relations, mais plus habituels encore pour les fonctions.
Soit f une fonction définie de $E \rightarrow F$:

- le domaine de f, ou *ensemble de définition* de f :
  $Dom(f) = \{x \in E / \exists y \in F, (x, y) \in f\}$
- l'image de f, ou *ensemble image* de f :
  $Im(f) = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}$
- si $f(x) = y$, on dit que
  - x est l'antécédant de y
  - y est l'image de x
- si $A \subset E, f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$
- si $B \subset F, f^{-1}(B) = \{x \in B / \exists y \in F, y = f(x)\}$
- ce qui donne $Dom(f) = f^{-1}(F)$ et $Im(f) = f(E)$

Application

Définition

Une application est une fonction de $E \to F$ qui associe un élément de F à tout élément de E.
On dit aussi que c'est une fonction totale sur E.

Autrement dit : une application est une fonction f sur E telle que $Dom(f) = E$.

Exemples :

- la fonction *identité* de $E \to E$;
- la *fonction caractéristique d'un ensemble* $A \subset E$ définie sur $E \to \{0, 1\}$ par $f(e) = 1$ si $e \in A$, $f(e) = 0$ sinon ;
- la fonction *longueur* de l'ensemble des mots vers $\mathbb{N}$

Injection

Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est une injection si tout élément de $y \in F$ a au plus un antécédant dans E.

On a donc :

f est injective

$$\iff (\forall x, y, \in E, f(x) = f(y) \implies x = y) \iff f^{-1}(f(E)) = E$$

Exemples :

- la fonction *premier* de $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que *premier(i)* est le *i*^{eme} nombre premier (*premier(1) = 2, premier(5) = 11...*)
- la fonction *successeur* (définie par *successeur(n) = n+1*) de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Surjection

Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est une surjection si tout élément de $y \in F$ a au moins un antécédant dans E.

On a donc :

f est surjective $\iff \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

Exemples :

- la fonction $modulo_{10}$ de $\mathbb{N} \rightarrow [0; 9]$ qui associe à n son modulo par 10
- la fonction *initiale* de l'ensemble des mots vers l'ensemble des lettres
- la fonction *longueur* de l'ensemble des mots vers $\mathbb{N}$

Bijection

Définition

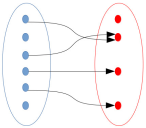
Une application $f : E \to F$ est une bijection si tout élément de $y \in F$ a exactement un antécédent dans E.

On a donc :
f est bijective $\iff \forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$
soit f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

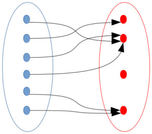
Exemples :

- la fonction *successeur* (définie par *successeur(n) = n+1*) de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- la fonction *renverse* (qui retourne un mot) de l'ensemble des mots vers l'ensemble des mots
- la fonction *index* des lettres minuscules de l'alphabet latin vers $[1; 26]$ qui retourne la position dans l'alphabet d'une lettre.

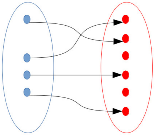
Résumé



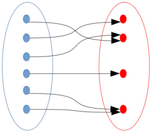
Fonction



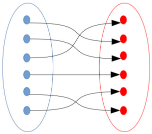
Application



Application injective



Application surjective



Bijection

Cardinalité d'un ensemble

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.

Définition

Un ensemble E est fini s'il existe un entier n et une bijection de E vers $[n]$. S'il existe, cet entier n est unique, s'appelle cardinal de E et est noté $|E|$.

On peut maintenant réécrire les définitions précédentes. Soit f une application de $E \to F$:

- f injective $\iff \forall y \in F, |f^{-1}(\{y\})| \leq 1$
- f surjective $\iff \forall y \in F, |f^{-1}(\{y\})| \geq 1$
- f bijective $\iff \forall y \in F, |f^{-1}(\{y\})| = 1$

Ensembles finis, ensembles infinis

Proposition

Soit f une application de $E \to F$.
Si E est fini et $|E| = |F|$, alors
f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective

Attention : si E n'est pas fini, la proposition est fausse :

- la fonction *premier* de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, telle que *premier(i)* est le i^{eme} nombre premier, est une injection, mais pas une surjection.
- la fonction $f(n) = 2n$ de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une injection et pas une surjection...
- la fonction $f(n) = n/2$ de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une surjection et pas une injection

Ensembles finis

Proposition

Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si E et F sont disjoints, alors $|E \cup F| = |E| + |F|$
2. Si $(A_i)_{i \in [n]}$ est une partition de E, alors $|E| = \Sigma_{i=1}^{n} |A_i|$
3. $|E \times F| = |E| \times |F|$
4. $|F^E| = |F|^{|E|}$, où F^E désigne l'ensemble des applications de $E \rightarrow F$
5. $|\wp(E)| = 2^{|E|}$

Ensembles finis ou infinis

Proposition

Soient E et F deux ensembles quelconques.

- $|E| \leq |F| \iff$ il existe une injection de $E \rightarrow F$
- $|E| \geq |F| \iff$ il existe une surjection de $E \rightarrow F$
- $|E| = |F| \iff$ il existe une bijection de $E \rightarrow F$

Ensembles dénombrables

Définition

Un ensemble E est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

On a les propriétés suivantes :

- Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.
- Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème (Théorème de Cantor)

Soit E un ensemble et $\wp(E)$ l'ensemble des parties de E.
On a $|E| < |\wp(E)|$.

Donc il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\wp(\mathbb{N})$
$\Longrightarrow$ $\wp(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.