Outils Logiques pour l'informatique

Licence informatique – semestre 5

Section 1

Les ensembles

La théorie des ensembles

La théorie des ensembles a été proposée par le mathématicien Georg Cantor (1845-1918).

- prend comme primitives les notions d'ensemble et d'appartenance
- reconstruit à partir de ce noyau les concepts de fonctions, de relations, les entiers naturels, relatifs, les nombres rationnels, réels, complexes. . .
- propose plusieurs notions d'infini

Elle fait partie des grandes théories fondamentales des mathématiques.

Définition d'un ensemble

Definition

Un ensemble est une collection d'objets distincts. On appelle ces objets les **éléments** de l'ensemble.
Un ensemble est vide s'il n'a aucun élément.

Notations

- Soit E un ensemble et e un objet, la notation $e \in E$ se lit *e est un élément de E* ou *e appartient à E*
- L'ensemble vide est noté $\emptyset$

Définition d'un ensemble (2)

- Un ensemble peut être défini par extension : on donne la liste exhaustive de tous ses éléments
  - $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
  - $A = \{\texttt{'a', 'b', 'c', ..., 'z'}\}$

  Cela convient pour des ensembles finis de petite taille !
- Un ensemble peut être défini par compréhension : un ensemble contient tous les éléments caractérisés par une propriété commune
  $X = \{x \text{ tel que } P(x)\}$
  où P est une propriété qu'on appellera un prédicat
  - l'ensemble des entiers compris entre 15 et 128692
  - l'ensemble des entiers qui ne se divisent que par 1 et par eux-mêmes
  - l'ensemble des droites d'un plan
  - etc ...

  Oui mais ...

Le paradoxe du barbier

Dans une civilisation lointaine, la barbe (chez les hommes) est prohibée. Pour cela, une loi est votée qui assigne au barbier l'obligation de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et uniquement ceux-là. Qui rase le barbier ?

Le paradoxe du barbier

Dans une civilisation lointaine, la barbe (chez les hommes) est prohibée. Pour cela, une loi est votée qui assigne au barbier l'obligation de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et uniquement ceux-là. Qui rase le barbier ?

Cette illustration est une variante du paradoxe de Russell. Bertrand Russell le publie en 1903. Il a été découvert de manière indépendante à la même période par Ernst Zermelo.

Paradoxe de Russell

L'ensemble des ensembles ne s'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?
Soit $X = \{x / x \notin x\}$
Contradiction : $X \in X \iff X \notin X$

La théorie des ensembles a été renforcée pour dépasser ce paradoxe.

Définition d'un ensemble (3)

- Un ensemble peut être défini par construction à partir d'autres ensembles
  - par rapport à la propriété vérifiée :
    $Pairs \ = \ \{x \in \mathbb{N} \ / \ x\%2 == 0\}$
  - par des opérations sur d'autres ensembles : $\times, \cup, \cap, \overline{X}, \ldots$

Inclusion

Soient A, B, C des ensembles.

Definition

A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si et seulement si tous les éléments de A sont des éléments de B : $A \subset B \iff \forall e \in A, e \in B$

$A \subset B$ peut aussi se lire A est un sous-ensemble de B ou A est une partie de B.

On peut restreindre l'inclusion $A \subsetneq B$: A *est strictement inclus dans* B

- La négation de $A \subset B$ est $A \not\subset B$
  Quel est le lien de $A \not\subset B$ avec $B \subset A$?

Inclusion

Soient A, B, C des ensembles.

Definition

A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si et seulement si tous les éléments de A sont des éléments de B : $A \subset B \iff \forall e \in A, e \in B$

$A \subset B$ peut aussi se lire A est un sous-ensemble de B ou A est une partie de B.

On peut restreindre l'inclusion $A \subsetneq B$: A *est strictement inclus dans* B

- La négation de $A \subset B$ est $A \not\subset B$
  Quel est le lien de $A \not\subset B$ avec $B \subset A$? Aucun !
- $A \subset B \text{ et } B \subset A \implies A = B$ propriété d'antisymétrie de $\subset$
- $A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C$ propriété de transitivité de $\subset$

Inclusion (2) - Exemples

Soit $A = \{1, 2, 3\}$

- 1, 2, et 3 sont les éléments de A : $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$
- Soit $B = \{1, 2\}$. B est une partie (un sous-ensemble) de A : $B \subset A$
- Il y a d'autres parties de A : par exemple $\{1\} \subset A$
- $\emptyset \subset A$
- $A \subset A$
- Soit $C = \{2, 3, 4\}$. On a $A \not\subset C$ et $C \not\subset A$

Égalité entre deux ensembles

- Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments
- Mais on peut définir un ensemble de plusieurs manières différentes :

$$\{x \in \mathbb{N} \ / \ x^2 < 0\} = \{x \ / \ x \neq x\} = \emptyset$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x \leq 1\}$$

- Pour prouver que deux ensembles A et B sont égaux, le plus souvent on utilise

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Ensemble des parties d'un ensemble

Definition

On note $\wp(A)$ l'**ensemble des parties** (i.e. des sous-ensembles) de A.
$\wp(A) = \{B / B \subset A\}$
$\forall A$, on a :

- $\emptyset \in \wp(A)$
- $A \in \wp(A)$

Exemple :
Soit $A = \{1, 2\}$
$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Complémentaire d'un ensemble

Definition

Soit E un ensemble de référence. Soit A une partie de E.
Le **complémentaire** de A est défini par :
$\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$

On a

- $\overline{E} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = E$

Exemple :
Soient $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $A = \{2, 4, 6, 8\}$
$\overline{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

Produit d'ensembles

Definition

On appelle **produit cartésien** de deux ensembles A et B l'ensemble des couples formés d'un élément de A et d'un élément de B :

$$A \times B = \{(x, y) \ / \ x \in A \ et \ y \in B\}$$

Exemple

- Si $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2\}$ alors $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$
- $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B} \times \mathbb{B} = \{00, 01, 10, 11\}$

À votre avis :

- A-t-on $A \times B = B \times A$?
- A-t-on $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$?

Union et intersection d'ensembles

Definition

Soient A et B deux ensembles.
L'union des ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments de A et de B.
$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$

L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments communs de A et de B.
$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$

Exemple :
Soient $A = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, b)\}$ et
$B = \{(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (3, a), (3, c)\}$
$A \cup B = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, b), (1, c), (2, a), (3, a), (3, c)\}$
$A \cap B = \{(1, a), (2, c)\}$

Union et intersection d'ensembles (2)

Soient A,B,C des parties d'un ensemble E.

Propriétés des opérations d'union et d'intersection :

- $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativité)
- $A \cup \emptyset = A$ (élément neutre)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ (élément absorbant)
- $A \cup A = A \cap A = A$ (idempotence)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$)
- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Différence ensembliste

Definition

Soient A et B deux ensembles. La différence entre A et B est l'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B.
$A \backslash B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Exemple :
Soient $A = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, b)\}$ et
$B = \{(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (3, a), (3, c)\}$
$A \backslash B = \{(1, b), (3, b)\}$
$B \backslash A = \{(1, c), (2, a), (3, a), (3, c)\}$

Différence symétrique

Definition

Soient A et B deux ensembles. La différence symétrique entre A et B est l'ensemble de tous les éléments disjoints de A et de B : ceux qui appartiennent à A mais pas à B et ceux qui appartiennent à B mais pas à A.

$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Exemple :

$A \Delta B = \{(1, b), (3, b), (1, c), (2, a), (3, a), (3, c)\}$

Différences d'ensembles (2)

Soient A,B,C des parties d'un ensemble E.

Propriétés des opérations de différence et de différence symétrique :

- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
- $A \backslash B \neq B \backslash A$
- $A \Delta B = B \Delta A$ (commutativité)
- $A \Delta \emptyset = A \backslash \emptyset = A$ (élément neutre)
- $A \Delta E = E \backslash A = \overline{A}$
- $A \backslash A = A \Delta A = \emptyset$

Autres propriétés :

- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
- Lois de de Morgan :
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$