Outils Logiques pour l'informatique

Licence informatique – semestre 5

Section 1

Les relations

Les relations

Relation

- concept qui permet de définir un lien entre deux éléments, deux objets
  - *x est le père de y*
  - *x est inscrit dans la formation y*
  - $x \leq 3y + 2$
  - $x \in X$
  - $X \subset Y$
- une relation est un lien entre un élément d'un ensemble A et un élément d'un ensemble B

Les relations (2)

Définition

Une **relation binaire** R d'un ensemble A vers un ensemble B est une partie G_R de $A \times B$.
$G_R = \{(x, y)/x \in A,\ y \in B,\ et\ xRy\}$

On appelle aussi cet ensemble le **graphe** de la relation.

On confond souvent R et G_R.

La notion de relation peut être généralisée aux relation n-aires
$\Longrightarrow$ on ne considérera que des relations binaires dans la suite.

Exemple

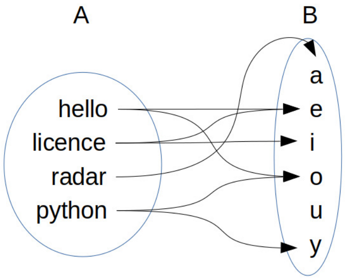
Soient les ensembles A et B définis ainsi :

$A = \{\text{licence, hello, radar, python}\}$

$B = \{\text{a,e,i,o,u,y}\}$

Soit la relation *contient* de A vers B. Alors son graphe est défini ainsi :

$$G_{contient} = \{(\text{licence,i}), (\text{licence,e}), (\text{hello,e}), (\text{hello,o}), (\text{radar,a}), (\text{python,y}), (\text{python,o})\}$$



Les relations (3)

- Domaine d'une relation R :
  $Dom(R) = \{x \in A / \exists y \in B \ t.q.\ xRy\}$
  Exemple : $Dom(contient) = \{$licence, hello, radar, python$\}$
- Image d'une relation R :
  $Im(R) = \{y \in B / \exists x \in A \ t.q.\ xRy\}$
  Exemple : $Im(contient) = \{$a,e,i,o,y$\}$
- Égalité de deux relations R_1 et R_2 :
  $R_1 = R_2 \iff G_{R_1} = G_{R_2}$
  Exemple : La relation *contient* et la relation *a pour voyelle* sont égales.

Relation inverse (ou réciproque)

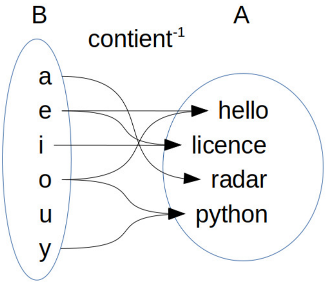
Définition

L'**inverse** (ou réciproque) d'une relation R de A vers B est une relation R^{-1} de B vers A :

$G_{R^{-1}} = \{(y, x) / x \in A,\ y \in B,\ et\ xRy\}$

Exemple :

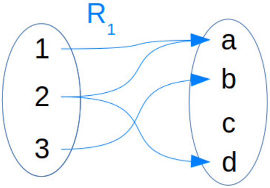
$G_{contient^{-1}} =$ {(i,licence), (e,licence), (e,hello), (o,hello), (a,radar), (y,python), (o,python)}

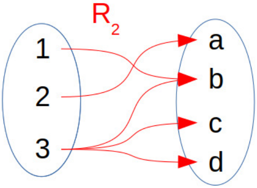


Un autre exemple

Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$.

Soient les relations R_1 et R_2 de A vers B définies respectivement par
$R_1 = \{(1, a), (2, a), (2, d), (3, b)\}$
$R_2 = \{(1, b), (2, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}\}$



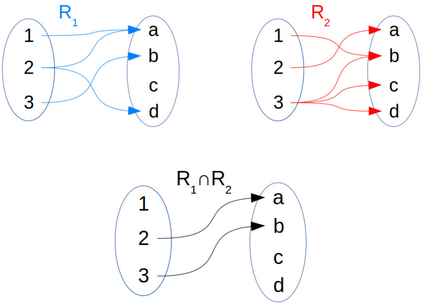


Intersection

Définition

Soient R et S deux relations définies de A vers B. L'**intersection** de R et S, notée $R \cap S$, est définie de A vers B par
$G_{R \cap S} = \{(x,y) \in A \times B / (x,y) \in G_R \cap G_S\}$

Exemple : $G_{R_1 \cap R_2} = \{(2,a),(3,b)\}$

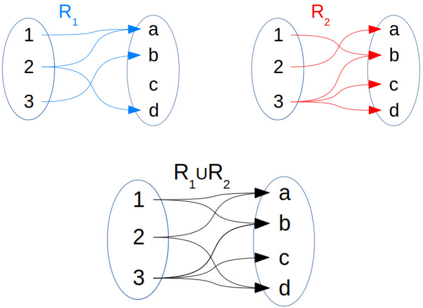


Union

Définition

Soient R et S deux relations définies de A vers B. L'**union** de R et S, notée $R \cup S$, est définie de A vers B par
$G_{R \cup S} = \{(x, y) \in A \times B / (x, y) \in G_R \cup G_S\}$

Exemple : $G_{R_1 \cup R_2} = \{(1,a),(2,a),(2,d),(3,b),(1,b),(3,c),(3,d)\}$

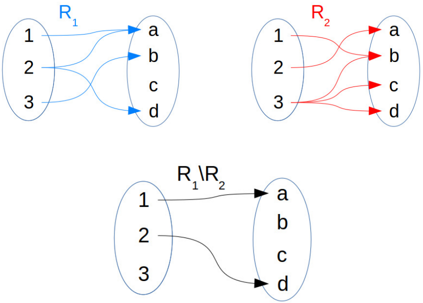


Différence ensembliste

Définition

Soient R et S deux relations définies de A vers B. La **différence ensembliste** $R\backslash S$ est définie de A vers B par
$G_{R\backslash S} = \{(x,y) \in A \times B / (x,y) \in G_R \backslash G_S\}$

Exemple : $G_{R_1\backslash R_2} = \{(1{,}a),(2{,}d)\}$

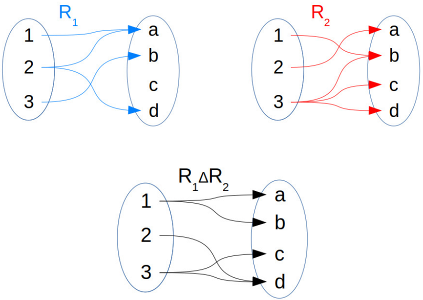


Différence symétrique

Définition

Soient R et S deux relations définies de A vers B. La **différence symétrique** de R et S, notée $R \Delta S$, est définie de A vers B par
$G_{R\Delta S} = \{(x, y) \in A \times B / (x, y) \in G_R \Delta G_S\}$

Exemple : $G_{R_1 \Delta R_2} = \{(1,a),(2,d),(1,b),(3,c),(3,d)\}$

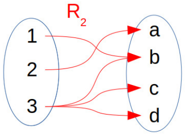


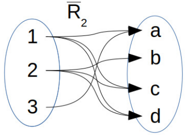
Complémentaire d'une relation

Définition

Le **complémentaire** (ou **négation**) d'une relation R définie de A vers B est noté $\overline{R}$ et est défini de A vers B par
$G_{\overline{R}} = \{(x, y) \in A \times B/(x, y) \notin G_R\}$

Exemple : $G_{\overline{R_2}} = \{(1,a),(1,c),(1,d),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a)\}$

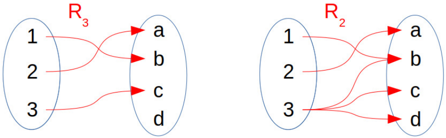




Inclusion de relations

Soient R et R deux relations sur $A \times B$.
On peut écrire $R \subset S$ pour exprimer $xRy \implies xSy$

Exemple : $G_{R_2} = \{(1,b),(2,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$ et $G_{R_3} = \{(1,b),(2,a),(3,c)\}$
On a $R_3 \subset R_2$



On notera parfois aussi $R \leq S$, ou on dira que R est plus **fine** que S.

Relation et ensemble des parties

Soient A un ensemble de taille $|A| = n$ et B un ensemble de taille $|B| = m$.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations sur $A \times B$.

Il existe autant de relations dans $\mathcal{R}$ que de parties dans l'ensemble $A \times B$:

$$|\mathcal{R}| = |\wp(A \times B)| = 2^{nm}$$

Relations internes

Soit E un ensemble.
Dans la suite, on ne s'intéressera plus qu'aux relations définies sur $E \times E$.

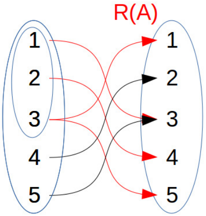
On parle de relations internes, ou définies sur ou dans E.

Si A est une partie de E, et R une relation de E, on notera $R(A)$ l'ensemble des éléments de E qui sont images de A.

$$R(A) = \{y \in E / \exists x \in A \ t.q. \ (x, y) \in R\}$$

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in E \times E / |x - y| = 2\} \\ &= \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\} \\ R(A) &= \{3, 4, 1, 5\} \end{aligned}$$



Composition de relations

Soient R et S deux relations internes à E.

On note $S \circ R$ la composition des deux relations :

$$S \circ R = \{(x, y) \in E \times E / \exists z \in E \ t.q. \ (x, z) \in R \ et \ (z, y) \in S\}$$

On note parfois $R.S$ le produit des deux relations :

$$R.S = S \circ R$$

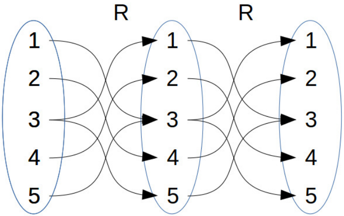
Composition de relations (2)

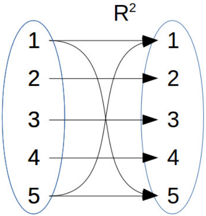
Lorsqu'on compose une relation R avec elle-même, on note

$$R^2 = R.R = R \circ R$$

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in E \times E / |x - y| = 2\} \\ &= \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\} \\ R^2 &= \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\} \end{aligned}$$





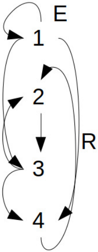
Relations particulières

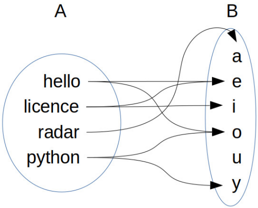
- relation vide, notée $\emptyset_E$:
  $\forall (x, y) \in E \times E,\ (x, y) \notin \emptyset_E$
- relation pleine, notée Π_E :
  $\forall (x, y) \in E \times E,\ (x, y) \in \Pi_E$
- relation identité, notée Id_E :
  $\forall (x, y) \in E \times E,\ (x, y) \in Id_E \iff x = y$

Représentations d'une relation

On peut représenter une relation de plusieurs manières. Principalement :

- par un diagramme sagittal
- par une matrice booléenne





$$\begin{array}{cc} & E \\ E & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Réflexivité

Définition

Une relation R est réflexive si et seulement si $\forall x \in E,\ (x, x) \in R$.

- sur un diagramme : tous les noeuds doivent posséder une flèche qui boucle sur le noeud
- sur une matrice booléenne : la diagonale ne doit contenir que des 1

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1 n'est pas réflexive. R_2 est réflexive.

Antiréflexivité

Définition

Une relation R est antiréflexive si et seulement si $\forall x \in E,\ (x, x) \notin R$.

- sur un diagramme : aucun noeud ne doit posséder une flèche qui boucle sur lui-même
- sur une matrice booléenne : la diagonale ne doit contenir que des 0

Attention : une relation peut n'être ni réflexive, ni antiréfléxive

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_1 n'est pas antiréflexive. R_3 est antiréflexive.

Symétrie

Définition

Une relation R est symétrique si et seulement si
$(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$.

- sur un diagramme : toutes les flèches doivent être présentes dans chaque sens (sauf les boucles sur un noeud)
- sur une matrice booléenne : la matrice doit être symétrique par rapport à la diagonale.

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

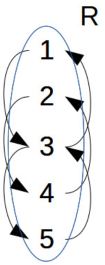
$$R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

R_1 n'est pas symétrique. R_2 est symétrique.

Symétrie (2)

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in E \times E / |x - y| = 2\} \\ &= \{(1,3), (2,4), (3,1), (3,5), (4,2), (5,3)\} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



R est symétrique.

Antisymétrie, Asymétrie

Définition

Une relation R sur E est antisymétrique ssi il n'existe pas de couple (x, y) avec $x \neq y$ tel que (x, y) et (y, x) soient dans R :
$\forall x, \forall y, ((x, y) \in R \; et \; (y, x) \in R) \implies x = y$

L'asymétrie renforce la propriété d'antisymétrie en interdisant les couples (x, x).

Définition

Une relation R sur E est asymétrique ssi il n'existe pas de couple (x, y) tel que (x, y) et (y, x) soient dans R : $\forall x, \forall y, (x, y) \in R \implies (y, x) \notin R$

Attention : une relation peut n'être ni symétrique, ni antisymétrique

Antisymétrie, Asymétrie (2)

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_1 est antisymétrique.

$$R_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_2 est asymétrique.

$$R_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R_3 n'est ni symétrique ni antisymétrique.

Transitivité

Définition

Une relation R est transitive si et seulement si
$(x, y) \in R$ *et* $(y, z) \in R \implies (x, z) \in R$.

- sur un diagramme : tout chemin entre deux noeuds doit être *court-circuité* par une flèche directe
- sur une matrice booléenne : on ne peut pas le *voir* immédiatement. Mais on peut l'observer en calculant la matrice booléenne de R^2 :
  R est transitive ssi $R^2 \leq R$

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Soit $R = \{(x, y) \in E \times E / x < y\}$

$$R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R est transitive.

Transitivité (2)

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in E \times E / |x - y| = 2\} \\ &= \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\} \end{aligned}$$

$$R^2 = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

R^2 n'est pas transitive.

Transitivité (3)

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R = \{(x, y) \in E \times E / \exists m \in \mathbb{N}\ t.q.\ |x - y| = 2m\}$$

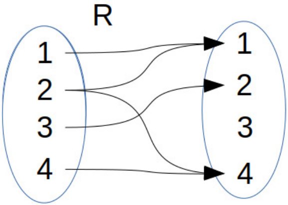
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

R^2 est transitive.

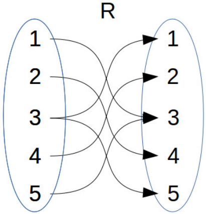
Relations totales

- Une relation R sur E est totale à gauche si elle propose une image pour chaque élément de E :
  $\forall x \in E, \exists y \in E \ t.q. \ (x, y) \in R$
- Une relation R sur E est totale à droite si elle propose un antécédant pour chaque élément de E :
  $\forall y \in E, \exists x \in E \ t.q. \ (x, y) \in R$
- Une relation R sur E est totale si elle est totale à gauche et totale à droite :
  $\forall x \in E, \exists y \in E \ t.q. \ (x, y) \in R \ et \ \exists z \in E \ t.q. (z, x) \in R$

Relations totales



- *R* est totale à gauche
- *R* n'est pas totale à droite
- *R* n'est pas totale



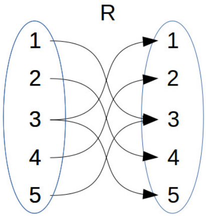
- *R* est totale

Relation fonctionnelle

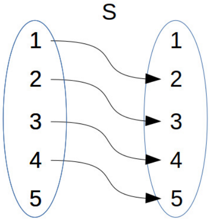
Définition

Une relation R définie sur E est fonctionnelle ssi chaque élément de E **a au plus** une image par R :
$\forall x, \forall y, \forall z \in E, ((x, y) \in R \text{ } et \text{ } (x, z) \in R) \implies y = z$

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$R = \{(x, y) \in E \times E / |x - y| = 2\}$ $S = \{(x, y) \in E \times E / x = y + 1\}$



R n'est pas fonctionnelle.



S est fonctionnelle.

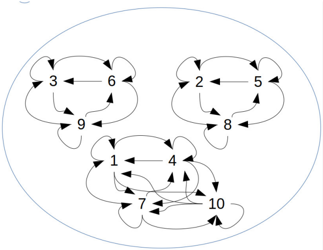
Classes d'équivalence

Définition

Une relation binaire sur un ensemble E qui est **réflexive**, **symétrique**, et **transitive** est une une relation d'équivalence pour E.

Soit la relation R définie sur $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$ par $\{(x, y) \in E \times E / x\%3 = y\%3\}$:

- R est réflexive
- R est symétrique
- R est transitive



Classes d'équivalence (2)

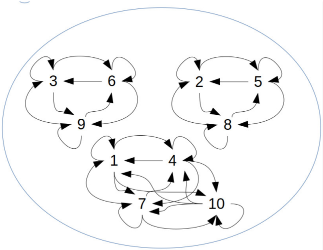
Si R est une relation d'équivalence et si $(x, y) \in R$, on dit que x et y sont équivalents.

Définition

Étant donné une relation d'équivalence R sur E, on appelle classe d'équivalence de x, notée $\mathscr{C}\ell(x)$, l'ensemble des éléments de E qui sont équivalents à x : $\mathscr{C}\ell(x) = \{y \in E / (x, y) \in R\}$

Soit la relation R définie sur $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$ par $\{(x, y) \in E \times E / x\%3 = y\%3\}$:

- $\mathscr{C}\ell(1) = \{1, 4, 7, 10\}$
- $\mathscr{C}\ell(2) = \{2, 5, 8\}$
- $\mathscr{C}\ell(3) = \{3, 6, 9\}$



Partition d'un ensemble

Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E telles que

- tout élément de E appartient à l'une des composantes de la partition
- deux composantes distinctes n'ont pas d'élément commun.

Théorème

Les classes d'équivalence d'une relation R sur E sont les composantes d'une partition de E.

Théorème

À toute partition d'un ensemble E on peut associer une relation d'équivalence.