Outils Logiques pour l'informatique

Licence informatique – semestre 5

Section 1

Ensembles ordonnés

Relation d'ordre

Définition

Une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive est une relation d'ordre.
Un ensemble muni d'une relation d'ordre est un ensemble ordonné.

Dans la suite on pourra noter $\leq$ une relation d'ordre et $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

Exemple :
la relation $\leq$ définie sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre.

- $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leq x$
- $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$

Relation d'ordre (2)

On considère la relation *vient-avant* définie sur $\mathbb{B}^8$, l'ensemble des mots de longueur 8 sur $\{0, 1\}$.
On note x_7,x_6,...x_0 les lettres (de gauche à droite) d'un mot x de cet ensemble.
On définit la relation *vient-avant* par

$$(x, y) \in \textit{vient-avant}$$
$$\iff x = y \vee (\exists j \in [0; 7] \text{ t.q. } (\forall i > j, i \in [0; 7]\ x_i = y_i) \wedge x_j < y_j).$$

- $(\mathtt{11110000},\mathtt{11110001}) \in$ *vient-avant*
- $(\mathtt{00000110},\mathtt{10000000}) \in$ *vient-avant*

La relation *vient-avant* est-elle une relation d'ordre ?

Diagramme de Hasse

- Restriction du diagramme sagittal d'une relation
- Les liens réflexifs n'apparaissent pas
- Les liens qui peuvent être obtenus par transitivité n'apparaissent pas

Le diagramme de Hasse ne représente que les relations avec un successeur immédiat.

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et la relation d'ordre $\geq$.

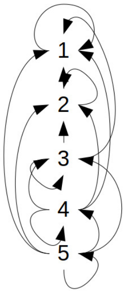


Diagramme sagittal

Diagramme de Hasse

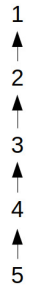
Ordre total, ordre partiel

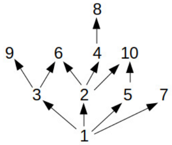
Définition

$(E, \preceq)$ est un ensemble totalement ordonné si et seulement si $\forall x, y \in E, x \preceq y \vee y \preceq x$.

Dans un ensemble totalement ordonné, on peut toujours comparer deux éléments.
Un ensemble qui n'est pas totalement ordonné est un ensemble partiellement ordonné.

- $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \geq)$ est un ensemble totalement ordonné
- $(\{1, 2, \ldots\ 10\}, divise)$ est un ensemble partiellement ordonné (x *divise* $y \iff y = ax$).





Ordre strict

Définition

Une relation binaire qui est irréflexive et transitive est une relation d'ordre strict.

Par opposition, on parle parfois de relation d'ordre large pour présenter une relation d'ordre qui n'est pas d'ordre strict.

Théorème

Une relation d'ordre strict est asymétrique.

Les relations $<$ et $>$ sur $\mathbb{R}$ sont des relations d'ordre strict.
$\subset$ est une relation d'ordre large sur l'ensemble $\wp(E)$, et $\subsetneq$ est une relation d'ordre strict sur $\wp(E)$.

Ordre strict et ordre large

On peut passer facilement d'un ordre strict à un ordre large et réciproquement :

- si R est une relation d'ordre strict sur E, alors $R \cup Id_E$ est une relation d'ordre large sur E
- si R' est une relation d'ordre large sur E, alors $R' \setminus Id_E$ est une relation d'ordre strict sur E.

On peut aussi écrire, pour $\preceq$ une relation d'ordre large et $\prec$ sa relation d'ordre strict associée :

- $x \prec y \iff (x \preceq y \wedge x \neq y)$
- $x \preceq y \iff (x \prec y \vee x = y)$

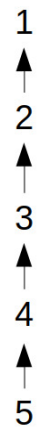
Minorant, Majorant

Définition

x est un minorant de y pour la relation $\leq$ si et seulement si $x \leq y$.
x est un majorant de y pour la relation $\leq$ si et seulement si $y \leq x$.

- x est un minorant de y s'il existe un chemin de x à y dans le diagramme de Hasse de la relation
- x est un majorant de y s'il existe un chemin de y à x dans le diagramme de Hasse de la relation

Soit l'ensemble ordonné $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \geq)$.
$\{1, 2, 3\}$ est l'ensemble des majorants de 3.
$\{3, 4, 5\}$ est l'ensemble des minorants de 3.

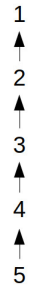


Minimum, Maximum

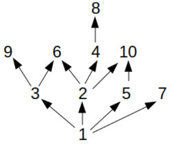
Par extension, si $E' \subset E$, on notera :

- $Maj(E')$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $\forall y \in E', y \preceq x$
- $Min(E')$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $\forall y \in E', x \preceq y$

$Maj(\{3,4,5\}) = \{1,2,3\}$
$Maj(\{3,4,5\}) \cap \{3,4,5\} = \{3\}$



$Maj(\{1,2,3\}) = \{6\}$
$Maj(\{1,2,3\}) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
$Maj(\{1,2\}) = \{2,4,6,8,10\}$
$Maj(\{1,2\}) \cap \{1,2\} = \{2\}$



Proposition

$Maj(E') \cap E'$ et $Min(E') \cap E'$ ont chacun au plus un élément.
S'il existe, c'est le maximum, resp. minimum de E'.

Élément minimal, élément maximal

Définition

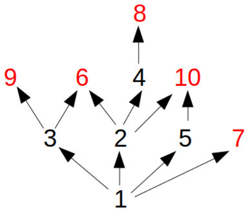
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.
Un élément de E est minimal s'il ne possède pas d'autre minorant que lui-même.
Un élément de E est maximal s'il ne possède pas d'autre majorant que lui-même.

$$\begin{tikzcd} 1 \\ 2 \arrow[u] \\ 3 \arrow[u] \\ 4 \arrow[u] \\ 5 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

- 5 est un élément minimal.
- 1 est un élément maximal.

Élément minimal, élément maximal (2)

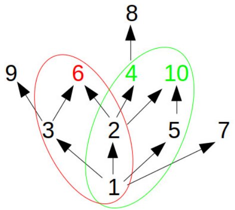
- 1 est un élément minimal
- $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ est l'ensemble des éléments maximaux.



Proposition

Soit E un ensemble ordonné et $E' \subset E$.
Si E' a un maximum, c'est son unique élément maximal.
La réciproque est fausse. *(Proposition similaire pour le minimum)*

- $\{1, 2, 3, 6\}$ a pour maximum et unique maximal 6
- $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ n'a pas de maximum, 4 et 10 sont ses deux maximaux



Borne supérieure, borne inférieure

La borne supérieure d'un ensemble est le plus petit de ses majorants.
La borne inférieure d'un ensemble est le plus grand de ses minorants.

Définition

Soit E un ensemble ordonné et $E' \subset E$. Un élément x de E est la borne supérieure de E' notée $\mathtt{sup}(E')$ si

$$(\forall y \in E', y \leq x) \wedge (\forall z \in E((\forall y \in E', y \leq z) \implies x \leq z))$$

Soit E un ensemble ordonné et $E' \subset E$. Un élément x de E est la borne inférieure de E' notée $\mathtt{inf}(E')$ si

$$(\forall y \in E', x \leq y) \wedge (\forall z \in E((\forall y \in E', z \leq y) \implies z \leq x))$$

Borne supérieure, borne inférieure (2)

Proposition

Soit E' une partie d'un ensemble ordonné E.

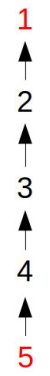
1. Si x est le maximum de E', alors $x = \sup(E')$
2. Si $\sup(E') \in E'$, alors $\sup(E')$ est le maximum de E'

Dans un ensemble totalement ordonné :

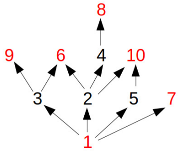
- les notions de maximum, de borne supérieure et d'élément maximal sont confondues
- les notions de minimum, de borne inférieure et d'élément minimal sont confondues

Borne supérieure, borne inférieure (3)

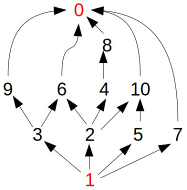
- $sup(\{1,2,3,4,5\}) = 1$
- $inf(\{1,2,3,4,5\}) = 5$



- $inf(\{1,2,\ldots 10\}) = 1$
- Il n'y a pas de borne supérieure.



- $inf(\{0,1,2,\ldots 10\}) = 1$
- $sup(\{0,1,2,\ldots 10\}) = 0$



Treillis

Définition

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est un treillis si tout couple d'éléments de E admet une borne supérieure et une borne inférieure.
On notera parfois $x \sqcup y$, au lieu de $\sup(\{x, y\})$, la borne supérieure de x et y et $x \sqcap y$ la borne inférieure.

Les opérations $\sqcup$ et $\sqcap$ permettent de calculer, pour tout couple d'éléments de E, leur plus petit majorant et leur plus grand minorant.

- Soit E un ensemble. L'ensemble ordonné $(\wp(E), \subset)$ est un treillis, les opérations binaires $\sqcup$ et $\sqcap$ étant respectivement $\cup$ et $\cap$.
- L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \textit{divise})$ est un treillis, les opérations binaires $\sqcup$ et $\sqcap$ étant respectivement *ppcm* et *pgcd*.