Aide MultiCritère à la Décision (AMCD)

(*MultiCriteria Decision Making/Aiding (MCDM/MCDA)*)

Meltem ÖZTÜRK: ozturk@lamsade.dauphine.fr

www.lamsade.dauphine.fr/ ozturk, enseignement

References

- B. Roy. *Methodologie multicritere d'aide a la decision*. Economica, Paris, 1985
- D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, A. Tsoukiàs, and Ph. Vincke. *Evaluation and decision models: a critical perspective*. Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.
- P.C. Fishburn. *Interval Orders and Interval Graphs*. J. Wiley, New York, 1985.
- R.D. Luce. *Semiorders and a theory of utility discrimination*. Econometrica, 24:178-191, 1956.

References

- M. Öztürk, A. Tsoukiàs, and Ph. Vincke. Preference modelling. In M. Ehrgott, S. Greco, and J. Figueira, editors, *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, pages 27-73. Springer, 2005
- P.C. Fishburn. *Utility Theory for Decision Making*. Wiley, New York, 1970.
- M. Pirlot and Ph. Vincke. Semi Orders. Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.
- B. Roy and D. Bouyssou. Aide Multicritère à la Décision: Méthodes et Cas. Economica, Paris, 1993.

Index

- Introduction
  - **Définitions**
  - Théorie du choix social
  - Agrégation lexicographique
- Critère unique de synthèse
- Méthodes de surclassement

Aide à la Décision

***Définition* [Roy 1985]**

L'aide à la décision est l'activité de celui qui, prenant appui sur ***des modèles clairement explicités*** mais non nécessairement complètement formalisés, ***aide à obtenir des éléments de réponses*** aux questions que se pose un intervenant dans ***un processus de décision***, éléments concourant à ***éclairer la décision*** et normalement à ***prescrire***, ou simplement à ***favoriser*** un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, et objectifs et système de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part.

Notions Elementaires

Décideur: Le décideur est l’intervenant pour le compte duquel l’aide à la décision s’exerce;

Analyste: Celui qui prend en charge l’aide à la décision.

Action / Alternative: « Objet » qui est analyse, evalué et comparé avec d’autres objets pendant le process de décision.

= solution, scénario, candidat, plan, projet, program, investment, ...

Notions Elementaires

Critère: Fonction g, définie sur l'ensemble des actions potentielles de telle sorte qu'il soit possible de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions a et b à partir de $g(a)$ and $g(b)$.

Notions Elementaires

Critère: Fonction g, définie sur l'ensemble des actions potentielles de telle sorte qu'il soit possible de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions a et b à partir de $g(a)$ and $g(b)$.

- *Exhaustivité*:

$$g_j(a) = g_j(b), \forall j \Longrightarrow \text{pas de préférence entre } a \text{ and } b$$

Notions Elementaires

Critère: Fonction g, définie sur l'ensemble des actions potentielles de telle sorte qu'il soit possible de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions a et b à partir de $g(a)$ and $g(b)$.

- *Exhaustivité*:

$$g_j(a) = g_j(b), \forall j \Longrightarrow \text{pas de préférence entre } a \text{ and } b$$

- *Cohésion*:

$$\left.\begin{array}{r} g_j(a) = g_j(b), \forall j \neq k \\ a \text{ préféré à } b \text{ pour } g_k \end{array}\right\} \Longrightarrow a\text{préféré à } b$$

Notions Elementaires

Critère: Fonction g, définie sur l'ensemble des actions potentielles de telle sorte qu'il soit possible de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions a et b à partir de $g(a)$ and $g(b)$.

- *Exhaustivité*:

$$g_j(a) = g_j(b), \forall j \Longrightarrow \text{pas de préférence entre } a \text{ and } b$$

- *Cohésion*:

$$\left.\begin{array}{r} g_j(a) = g_j(b), \forall j \neq k \\ a \text{ préféré à } b \text{ pour } g_k \end{array}\right\} \Longrightarrow a\text{préféré à } b$$

- *Non-redundance*: la suppression d'un critère conduit à remettre en cause d'un des deux axiomes précédents.

L'exemple de Thierry

Thierry veut acheter une voiture sportive. Après une première analyse, il considère les critères suivants :

- *Coût* : coût liés à la voiture sur une période de 4 ans (prix, entretien, essence, ...) calculé en euros,
- *Accélération* : temps nécessaire pour parcourir 1km, départ arrété (en secondes),
- *Reprise* : temps nécessaire pour parcourir 1km en partant en 5^{eme} vitesses à 40km/h (en secondes),
- *Freinage* : échelle qualitative recodée sur l'intervalle [0,4],
- *Tenue de route* : échelle qualitative recodée sur l'intervalle [0,4].

L’exemple de Thierry

	Nom	**Coût** (euros)	**Accel.** (sec.)	**Reprise** (sec.)	**Freins** [0,4]	**Tenue-r** [0,4]
1	Fiat Tipo	18342	30.7	37.2	2.33	3.00
2	Alfa 33	15335	30.2	41.6	2.00	2.50
3	Nissan Sunny	16973	29.0	34.9	2.66	2.50
4	Mazda 323	15460	30.4	35.8	1.66	1.50
5	Mitsubishi Colt	15131	29.7	35.6	1.66	1.75
6	Toyota Corolla	13841	30.8	36.5	1.33	2.00
7	Honda Civic	18971	28.0	35.6	2.33	2.00
8	Opel Astra	18319	28.9	35.3	1.66	2.00
9	Ford Escort	19800	29.4	34.7	2.00	1.75
10	Reunault 19	16966	30.0	37.7	2.33	3.25

Notions Elementaires

Problématiques:

- *Problématique du choix*
- *Problematique du rangement*
- *Problematique de classification*
  - *classes ordonnées / pas-ordonnées*
  - *classes prédefinies / not-prédefinies*
- *Problematique de la description*

Exemple

Choisir un candidat pour une position spécifique:

Décideur: le directeur du département concerné

Analyste: consultant

Action / Alternatif: candidats

Criteria: éducation, expérience de travail, age, etc.

Problematique: choix / rangement

Index

- Introduction
  - Définitions
  - **Théorie du choix social**
  - Agrégation lexicographique
- Critère unique de synthèse
- Méthodes de surclassement

Théorie du Choix Social

<u>But</u>: Etude des problèmes de décision où un groupe de votants doivent prendre une décision pour choisir un seul candidats.

Décideur: le peuble?

Analyste: personnes qui choisissent le procédure?

Actions / Alternatifs: candidats

Critères: votants

Problématique: choix (rangement?)

Plusieurs résultats: Economie, Sciences Politiques, Mathématiques appliquées, Recherche Opérationnelles

Deux prix de Nobel (K. Arrow, A. Sen)

Axiomes d'Arrow (1951)

- ***Universalité***: la méthode doit etre capable de considerer toute configuration de liste ordonnée
- ***Transitivité***: l e résultat de la méthode doit etre une liste ordonnée des candidats
- ***Unanimité***: la méthode doit respecter la préférence unanime des votants
- ***Absence de dictateur***: la méthode ne doit pas permettre la présence des dictateurs
- ***Indépendence***: la comparaison de deux candidats doivent etre basee seulement sur leur comparaison respective dans les listes des votants

Théorème: Il n'y a pas de méthode respectant les cinq axiomes d'Arrow.

Index

- Introduction
  - Définitions
  - Théorie du choix social
  - **Agrégation lexicographique**
- Critère unique de synthèse
- Méthodes de surclassement

Agrégation Lexicographique

a est préféré à b si

a est préféré à b sur le plus important critère

ou

a et b sont indifférent sur le plus important critère et a est préféré à b sur le deuxième plus important critère

ou

a et b sont indifférent sur le deuxième plus important critère et a est préféré à b sur le troisième plus important critère

ou

$\dots$

Index

- Introduction
- **Critère unique de synthèse**
  - **Somme pondérée**
  - Multiattribute utility theory
  - Problèmes d’échelles : signifiance
- Méthodes de surclassement

Notation

- A: l'ensemble fini des actions, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
- F: l'ensemble des critères $F = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$
- $g_j(a_i)$: l'évaluation de l'action i pour le critère j
- w_j: le poids d'importance du critère j

Introduction

- L'approche du critère unique de synthèse vise à construire une fonction g synthétisant tous les critères : $g(a) = f(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a))$,
- g permet de comparer les actions pour choisir parmi elles, les ranger, les affecter à des catégories,
- La construction de g est souvent difficile et requiert de demander beaucoup d'information au décideur.
- Deux aspects sont à étudier :
  - quelles propriétés doivent posséder les préférences du décideur pour être représentables par une fonction g ?
  - Comment construire la fonction g et fixer la valeur des paramètres intervenant dans la fonction analytique choisie ?

Somme ponderée

Soit A l'ensemble des actions et g_j ($j = 1, 2, ..., n$) critère à maximiser.

Soit w_j le poids de g_j, pour tout j.

$$aPb \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j \times g_j(a) > \sum_{j=1}^{n} w_j \times g_j(b), \; j = 1, \ldots, n$$

$$aIb \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j \times g_j(a) = \sum_{j=1}^{n} w_j \times g_j(b), \; j = 1, \ldots, n$$

Somme pondérée

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60 000	48 000	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée			

- Pas de gagnant de Condorcet!

Somme pondérée

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60 000	48 000	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	36 024	28 828	

- Pas de gagnant de Condorcet!

Somme pondérée

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60 000	48 000	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	36 024	28 828	

- Pas de gagnant de Condorcet!
- Normalisation

Somme pondérée

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60	48	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	**60**	56,8	

- Pas de gagnant de Condorcet!
- Normalisation de bénéfice: diviser par 1000

Somme pondérée

	a	**b**	w_j
Bénéfice (euros)	30	24	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	42	**42,4**	

- Pas de gagnant de Condorcet!
- Normalisation de bénéfice: diviser par 2000

Somme pondérée

	a	**b**	w_j
Bénéfice (euros)	30	24	0.6
Gain de temps(mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	42	**42,4**	

- Pas de gagnant de Condorcet!
- Normalisation de bénéfice: diviser par 2000
- Compensation $\Longrightarrow$ poids: taux de substitution : 2000 euros de bénéfice est équivalent à 1,5 (0.6/0.4) gain de minutes

Somme pondérée

	a	**b**	w_j
Bénéfice (euros)	30	24	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	42	**42,4**	

- Pas de gagnant de Condorcet!
- Normalisation de bénéfice: diviser par 2000
- Compensation $\Longrightarrow$ poids: taux de substitution : 2000 euros de bénéfice est équivalent à 1,5 (0.6/0.4) gain de minutes
- Compensation linéaire: 2000 euros d'augmentation de bénéfice est équivalent à 1,5 gain de minutes meme si notre bénéfice de départ est 2000 ou 2000 000!

Somme pondérée

	a	**b**	w_j
Bénéfice (euros)	30	24	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	42	**42,4**	

- Pas de gagnant de Condorcet!
- Normalisation de bénéfice: diviser par 2000
- Compensation $\Longrightarrow$ poids: taux de substitution : 2000 euros de bénéfice est équivalent à 1,5 (0.6/0.4) gain de minutes
- Compensation linéaire: 2000 euros d'augmentation de bénéfice est équivalent à 1,5 gain de minutes meme si notre bénéfice de départ est 2000 ou 2000 000!
- Que faire avec des données qualitatives?

Index

- Introduction
- Critère unique de synthèse
  - Somme pondérée
  - **Multiattribute utility theory**
  - Problèmes d'échelles : signifiance
- Méthodes de surclassement

Multiattribute utility (value) theory

Soit A l'ensemble des actions et g_j ($j = 1, 2, ..., n$) critère à maximiser et w_j le poids de g_j, pour tout j.

$$aPb \Longleftrightarrow u(a) > u(b)$$

$$aIb \Longleftrightarrow u(a) = u(b)$$

avec $u(a) = f(g_1(a), \ldots, g_n(a))$

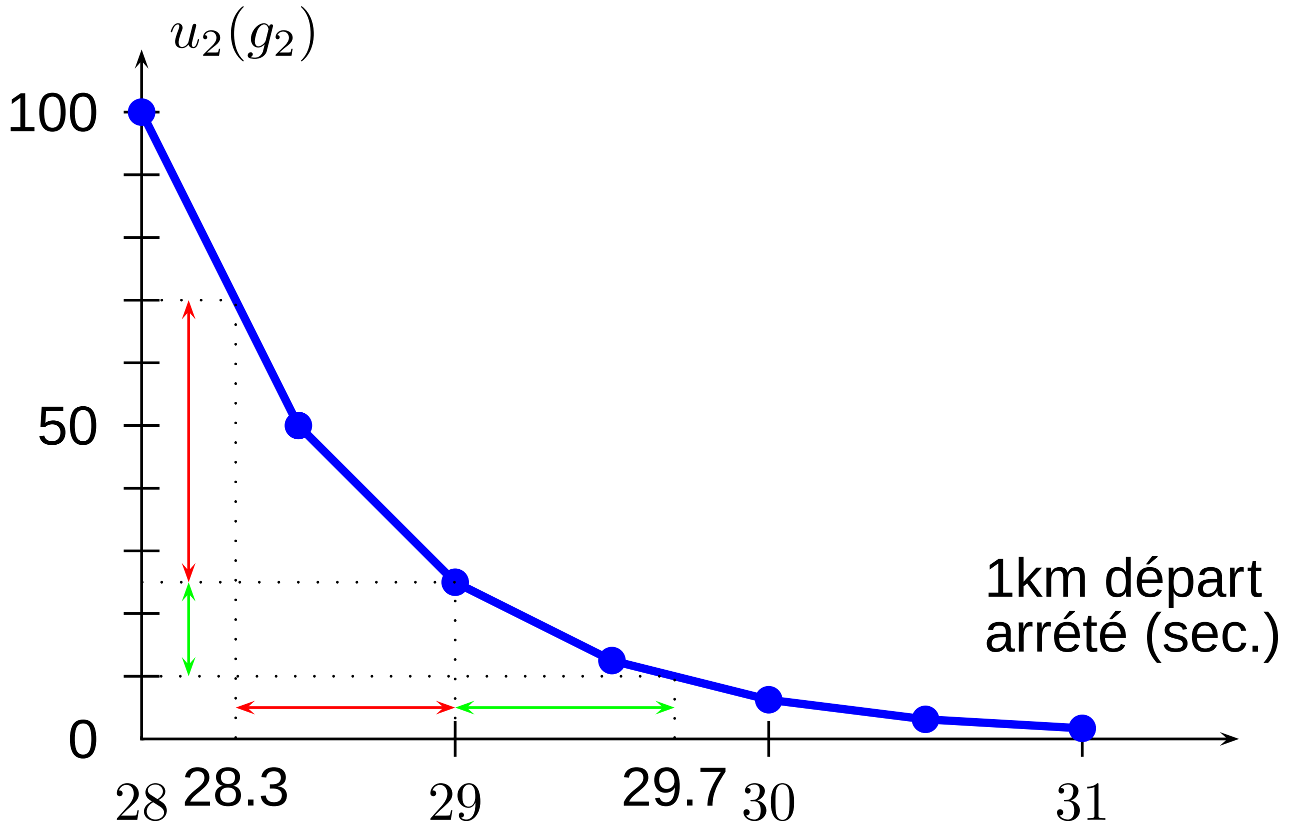
Un cas particulier est la forme additive:

$$u(a) = \sum_{j=1}^{n} w_j \times u_j(g_j(a))$$

où $u_j(g_j^{min}) = 0, \; u_j(g_j^{max}) = 100,$ et $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1,$

Exemple

choix de voiture: critère c_2 est l'acceleration



Construction de fonctions de valeur

- Pour spécifier un modèle additif il faut définir les fonctions $u_i, \ \forall i \in F$ et les “poids” $w_i, \ \forall i \in F$,
- Il existe plusieurs méthodes pour construire les u_i,
- Ces méthodes doivent être appliquée plusieurs fois pour construire chaque fonction u_i,
- Il existe plusieurs techniques pour définir les w_i,
- *Exemple* :
  soit un problème tri-critère de choix de voiture
  $\{$ confort, coût, accel. $\}$,

Construction des fonctions u_i

- Méthode 1 : lorsque le nombre de valeurs sur l'échelle E_i est fini
  - Ranger les éléments de E_i,
  - Ranger les intervalles entre éléments consécutifs dans le rangement précédent,
  - Attribuer des valeurs respectant l'information obtenue aux étapes 1 et 2,
- *Exemple* : g_1 critère confort,
  - "très confortable" $\succ$ "confortable" $\succ$ "assez confortable" $\succ$ "peu confortable" $\succ$ "inconfortable", ($e_1^1 \succ e_2^1 \succ e_3^1 \succ e_4^1 \succ e_5^1$),
  - $(e_2^1 \ominus_1 e_3^1) \succ (e_4^1 \ominus_1 e_3^1) \succ (e_1^1 \ominus_1 e_2^1) \sim (e_4^1 \ominus_1 e_5^1)$,
  - $u_1(e_1^1) = 100$, $u_1(e_2^1) = 85$, $u_1(e_3^1) = 45$, $u_1(e_4^1) = 15$, $u_1(e_5^1) = 0$,

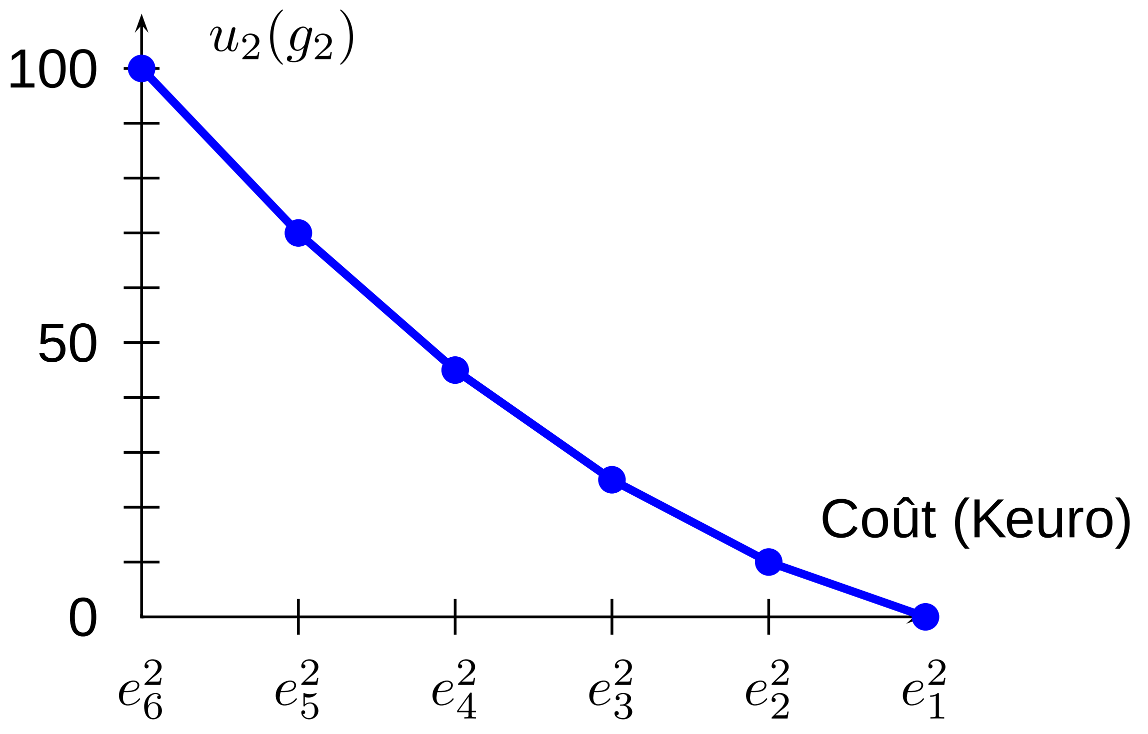
Construction des fonctions u_i

Méthode 2 :

g_2 : coût à l'achat (les modèles coûtent de 10 à 20 Keuros),

- on discrètise l'échelle :$e_1^2 = 20$K€, $e_2^2 = 18$K€, $e_3^2 = 16$K€, $e_4^2 = 14$K€, $e_5^2 = 12$K€, $e_6^2 = 10$K€,
- $(e_2^2 \ominus_2 e_1^2) \prec (e_3^2 \ominus_2 e_2^2) \prec (e_4^2 \ominus_2 e_3^2) \prec (e_5^2 \ominus_2 e_4^2) \sim (e_6^2 \ominus_2 e_5^2)$,
- $u_i(e_1^2) = 0$, $u_i(e_2^2) = 10$, $u_i(e_3^2) = 25$, $u_i(e_4^2) = 45$, $u_i(e_5^2) = 72,5$,$u_i(e_6^2) = 100$,
- On suppose la fonction linéaire par morceaux.

Exemple



Construction des coefficients w_i

Méthode :

- soit b_j l'action telle que $g_i(b_j) = g_i^{min},\ \forall i \neq j$ et $g_j(b_j) = u_j^{max}$. Classer par ordre de préférence les $b_j,\ j \in F$ (supposons que le classement soit $b_n \succ \ldots \succ b_1$), on en déduit que $w_n \geq \ldots \geq w_1$
- soit b_n^j l'action t. q. $g_i(b_n^j) = g_i^{min}, \forall i \neq n$;
  déterminer $g_n(b_n^j)$ tel que $b_1 I b_n^j$
  d'où $u(b_n^j) = u(b_1)$ donc
  $\sum_{i=1}^n u_i(b_1) = \sum_{i=1}^n u_i(b_n^j)$
  $100.w_1 = u_n(g_n(b_n^j)).w_n$, d'où $\frac{w_n}{w_1} = \frac{100}{u_i(x_i)}$
- procéder de façon identique pour g_2, ..., g_{n-1}
- on obtient ainsi les ratios $\frac{w_n}{w_i},\ i = 1, \ldots, n-1$,

Construction des coefficients w_i

Soit les critères $\{$ confort, coût, accel. $\}$,

- (inconfortable, 20K€, 28 s.)
  $\succ$ (inconfortable, 10K€, 31 s.)
  $\succ$ (très confortable, 20K€, 31 s.)
  donc $u(b_3) > u(b_2) > u(b_1)$ d'où $w_3 > w_2 > w_1$,

Construction des coefficients w_i

Soit les critères $\{$ confort, coût, accel. $\}$,

- (inconfortable, 20K€, 28 s.)
  $\succ$ (inconfortable, 10K€, 31 s.)
  $\succ$ (très confortable, 20K€, 31 s.)
  donc $u(b_3) > u(b_2) > u(b_1)$ d'où $w_3 > w_2 > w_1$,

- (très confortable, 20K€, 31 s.) I (inconfortable, 20K€, 29.5 s.)
  d'où $100.w_1 = u_3(29.5\text{s.}).w_3$ donc $\frac{w_3}{w_1} = \frac{100}{u_3(29.5\text{s.})} = \frac{100}{12.5} = 8$

Construction des coefficients w_i

Soit les critères $\{$ confort, coût, accel. $\}$,

- (inconfortable, 20K€, 28 s.)
  $\succ$ (inconfortable, 10K€, 31 s.)
  $\succ$ (très confortable, 20K€, 31 s.)
  donc $u(b_3) > u(b_2) > u(b_1)$ d'où $w_3 > w_2 > w_1$,

- (très confortable, 20K€, 31 s.) I (inconfortable, 20K€, 29.5 s.)
  d'où $100.w_1 = u_3(29.5\text{s.}).w_3$ donc $\frac{w_3}{w_1} = \frac{100}{u_3(29.5\text{s.})} = \frac{100}{12.5} = 8$

- (inconfortable, 10K€, 31 s.) I (inconfortable, 20K€, 28.5 s.)
  d'où $100.w_2 = u_3(28.5\text{s.}).w_3$ donc $\frac{w_3}{w_2} = \frac{100}{u_3(28.5\text{s.})} = \frac{100}{50} = 2$

Construction des coefficients w_i

Soit les critères $\{$ confort, coût, accel. $\}$,

- (inconfortable, 20K€, 28 s.)
  $\succ$ (inconfortable, 10K€, 31 s.)
  $\succ$ (très confortable, 20K€, 31 s.)
  donc $u(b_3) > u(b_2) > u(b_1)$ d'où $w_3 > w_2 > w_1$,

- (très confortable, 20K€, 31 s.) I (inconfortable, 20K€, 29.5 s.)
  d'où $100.w_1 = u_3(29.5\text{s.}).w_3$ donc $\frac{w_3}{w_1} = \frac{100}{u_3(29.5\text{s.})} = \frac{100}{12.5} = 8$

- (inconfortable, 10K€, 31 s.) I (inconfortable, 20K€, 28.5 s.)
  d'où $100.w_2 = u_3(28.5\text{s.}).w_3$ donc $\frac{w_3}{w_2} = \frac{100}{u_3(28.5\text{s.})} = \frac{100}{50} = 2$

- posons $w_3 = 8 \ \Rightarrow \ w_1 = 1,\ w_2 = 4$, or $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$
  donc $w_1 = \frac{1}{13}$, $w_1 = \frac{4}{13}$ et $w_3 = \frac{8}{13}$,

Index

- Introduction
- Critère unique de synthèse
  - Somme pondérée
  - Multiattribute utility theory
  - **Problèmes d’échelles : signifiance**
- Méthodes de surclassement

Echelle/ Signifiance

Echelle : Ensemble de nombres susceptibles pour coder une information relative aux objets de A

Caractéristiques:

- Caractéristique d'ordre
- Caractéristique de distance
- Caractéristique d'origine

Echelle/ Signifiance

	Transformation	Exemple
E. Absolue	$f(x) = x$	denombrement
E. Ratio	$f(x) = \alpha x$	masse
E. d'intervalle	$f(x) = \alpha x + \beta$	temperature
E. Ordinale	$x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$	preference

Echelle/ Signifiance

Une proposition fondée sur un calcule utilisant les échelons d'une échelle est **signifiante**

si sa véracité ou sa fausseté demeure inchangée lorsqu'on remplace une échelle par une autre représentant toutes les deux la même information

Index

- Introduction
- Critère unique de synthèse
- Méthodes de surclassement
  - Modélisation des préférences
  - Comparaison par paires
  - Concordance/discordance

Historique

Les méthodes de surclassement ont été développées :

- dans les années 60 par B. Roy *et al.*,
- à l'occasion d'applications réelles,
- pour résoudre des difficultés rencontrées lors de l'utilisation d'approches de type critère unique de synthèse (compensation, données qualitatives, ...).

De nombreuses méthodes ont depuis été proposées : ELECTRE, PROMETHEE, ORESTE, MELCHIOR, TACTIC, MAPPAC, ...

Méthodes de surclassement

Les étapes des méthodes de surclassement:

- Détermination des éléments du problème (alternatives, critères, d'autres paramètres comme poids des critères, des seuils etc.)
- Comparaison par pair des alternatives sur chaque critère
- Agrégation des comparaisons par pair pour obtenir une comparaison entre pair d'alternatives
- Recommandation finale

Relation binaire

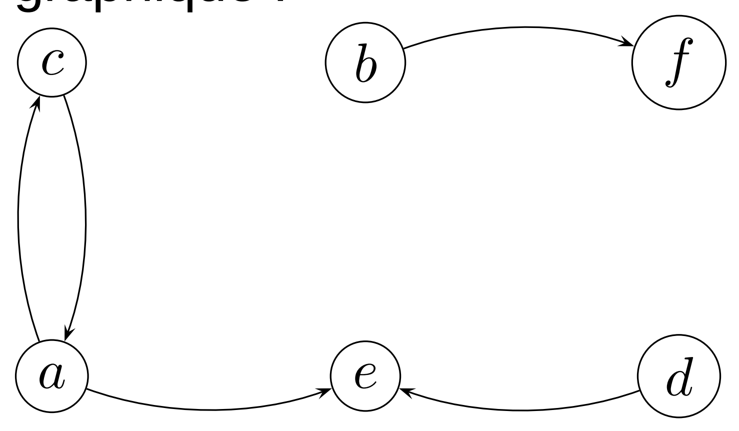
- Soit A un ensemble d'objets, de candidats, de décision, ...
- Une relation binaire R sur A est un sous-ensemble du produit cartésien de A (ı.e., $A \times A$),
- Exemple : $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et
  $R = \{(a, b), (c, a), (d, e), (b, f), (a, e)\}$,
- Une interprétation possible de R est :
  $aRb \Leftrightarrow a$ est préféré à b,
- Autre exemple :
  $A = \{$ Alain, Bernard, Charlotte, Diane, Emile, Françoise $\}$ et
  $R =$ "souhaite aller au cinéma avec",
  $R = \{(a, c), (c, a), (d, e), (b, f), (a, e)\}$.

Relation binaire

- Représentation matricielle d'une relation:

$\to$	a	b	c	d	e	f
a	0	0	1	0	1	0
b	0	0	0	0	0	1
c	1	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0

- représentation graphique :



Propriétés des relations binaires

- R est **reflexive** ssi $(a, a) \in R(aRa), \forall a \in A$,
- R est **irreflexive** ssi $(a, a) \notin R\ (a\not{R}a), \forall a \in A$,
- R est **symétrique** ssi $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R, \forall a, b \in A$,
- R est **asymétrique** ssi $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R, \forall a, b \in A$,
- R est **transitive** ssi
  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R, \forall a, b, c \in A$,
- R est **complète** ssi $(a, b) \in R$ et/ou $(b, a) \in R,\ \forall a, b \in A$.

Situations élémentaires de préférence

- **Préférence stricte** : P,
  il existe des raisons claires et positives qui justifient une préférence significative en faveur d'une des deux actions,
  P asymétrique,
- **Indifférence** : I,
  il existe des raisons claires et positives qui justifient une équivalence entre les deux actions,
  I symétrique et réflexive,
- **Incomparabilité** : J,
  Il n'existe pas de raisons claires et positives justifiant l'une des situations précédentes,
  J symétrique et irréflexive,

Structure de préférences

- $\{P, I, J\}$ est une structure de préférences si :
  - P asymétrique,
  - I symétrique et réflexive,
  - J symétrique et irréflexive,
  - $P \cup I \cup J$ complète,

- Exemple :
  - $A = \{a, b, c, d, e\}$
  - $P = \{(b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (d, c), (e, c)\}$,
  - $I = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, a)\}$,
  - $R = \{(a, e), (e, a), (a, d), (d, a), (d, e), (e, d)\}$,

Relation caractéristique

- Toute structure de préférences est caractérisée par la relation S définie par:

$$aSb \quad \Leftrightarrow \quad aPb \text{ ou } aIb \qquad (S = P \cup I)$$

- En effet, on a:

$$\begin{aligned} aPb &\quad \Leftrightarrow \quad aSb \text{ et } b\not S a \\ aIb &\quad \Leftrightarrow \quad aSb \text{ et } bSa \\ aRb &\quad \Leftrightarrow \quad a\not S b \text{ et } b\not S a \end{aligned}$$

- aSb signifie: "*a est au moins aussi bon que b*"
- S est appelée relation de **surclassement**

Modélisation des préférences

Evaluation:

	a	b	c
*E*valuation	25	11	9

Modélisation des préférences

Evaluation:

	a	b	c
*E*valuation	25	11	9

Comparaison par pair avec des relations de préférence:

***D*1**	a	b	c
a			
b			
c			

***D*2**	a	b	c
a			
b			
c			

Modélisation des préférences

Evaluation:

	a	b	c
*E*valuation	25	11	9

Comparaison par pair avec des relations de préférence:

D1	a	b	c
a	I	P	P
b	P^{-1}	I	P
c	P^{-1}	P^{-1}	I

D2	a	b	c
a			
b			
c			

Modélisation des préférences

Evaluation:

	a	b	c
*E*valuation	25	11	9

Comparaison par pair avec des relations de préférence:

D1	a	b	c
a	I	P	P
b	P^{-1}	I	$\boldsymbol{P}$
c	P^{-1}	$\boldsymbol{P}^{-1}$	I

D2	a	b	c
a	I	P	P
b	P^{-1}	I	$\boldsymbol{I}$
c	P^{-1}	$\boldsymbol{I}$	I

Préordre complet

- Il est possible de représenter numériquement un préordre complet par :

$$\begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ aIb \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{cases}$$

- La relation caractéristique S est représentée par :

$$aSb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$$

- A chaque fois qu'un problème de décision est réduit à la comparaison de "gains", la structure de préférence sous-jacente est un pré-ordre.

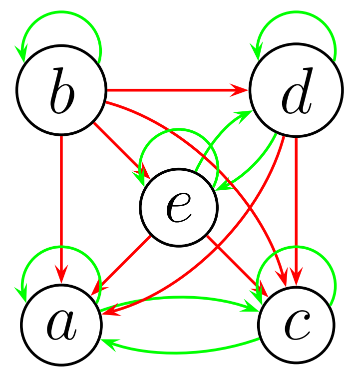
Préordre complet

- Un préordre complet correspond à la situation où on peut ranger tous les objets du "meilleur" au "moins bon" avec d'éventuels ex-aequos,
- la structure de préférences sous-jacente doit vérifier les propriétés suivantes:
  - $a \not{J} b, \forall a, b$ ($J = \emptyset$, pas d'incomparabilité),
  - aPb et $bPc \Rightarrow aPc$ (P est transitive),
  - aIb et $bIc \Rightarrow aIc$ (I est transitive).
- La relation caractéristique S est telle que :
  - aSb et bSc (ou non exclusif) : S est complète,
  - aSb et $bSc \Rightarrow aSc$ (S est transitive).

(Pré)ordre complet

- Dans un préordre complet :
  - la relation I est une relation d'équivalence (reflexive, symétrique et transitive)
  - la relation P est un "ordre faible" (asymétrique et négativement transitive : $a\not P b$ et $b \not P c \Rightarrow a \not P c$, $\forall a, b, c$).
  - la donnée de P suffit à connaître entièrement la structure,
- Un ordre complet est un pré-ordre complet dans lequel il n'y a pas d'ex-aequos
  - $I = \emptyset$,
  - la relation P est un ordre strict total.

Préordre complet : exemple



Surclassement

$A = \{a, b, c, d, e\}$
$P = \{(b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (d, c), (e, c), (e, a), (d, a)\}$
$I = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, a)\}$,
$J = \emptyset$, $S = P \cup I$

Une représentation numérique possible :

$$g(b) = 2, \; g(d) = g(e) = 1, \; g(a) = g(c) = 0$$

Intransitivité et seuils

$$\left\{\begin{array}{l}\text{intransitivité}\\ \text{préférence faible}\end{array}\right. \Longrightarrow \text{seuils} \Longrightarrow \text{intervalles}$$

Intransitivité et seuils

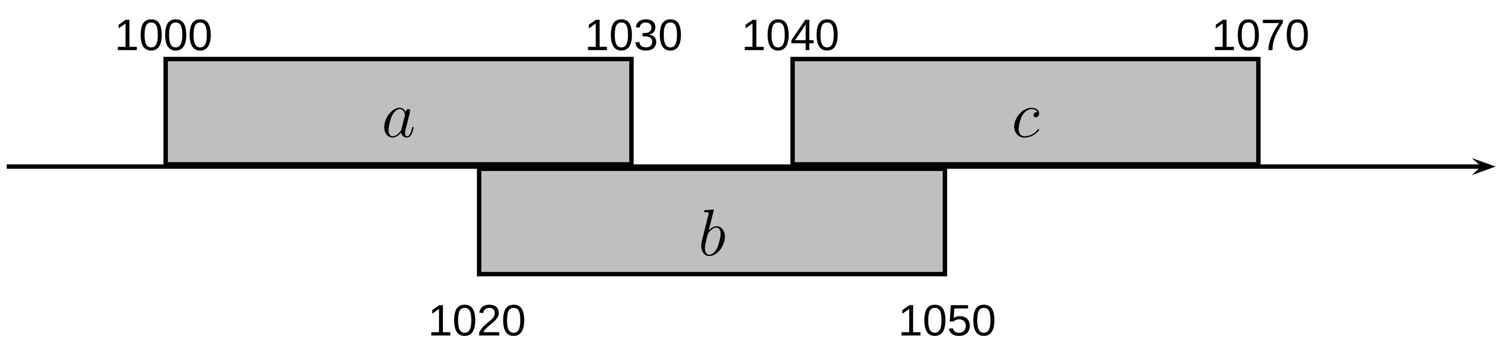
$$\left\{\begin{array}{l}\text{intransitivité}\\ \text{préférence faible}\end{array}\right. \Longrightarrow \text{seuils} \Longrightarrow \text{intervalles}$$

Soient a, b, c trois éléments de A avec
$g(a) = 1000, g(b) = 1020, g(c) = 1040$ et $q = 30$,

Intransitivité et seuils

$$\left\{\begin{array}{l}\text{intransitivité}\\ \text{préférence faible}\end{array}\right. \Longrightarrow \text{seuils} \Longrightarrow \text{intervalles}$$

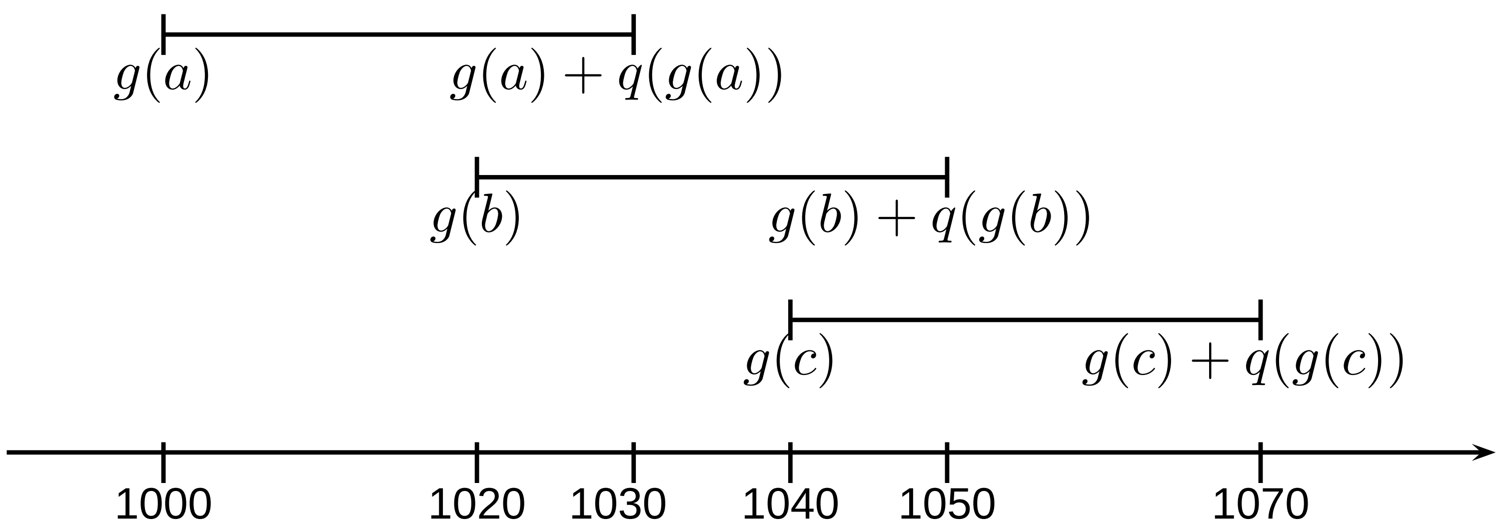
Soient a, b, c trois éléments de A avec
$g(a) = 1000, g(b) = 1020, g(c) = 1040$ et $q = 30$,



Représentation avec seuils: aIb et bIc mais cPa

Intransitivité, seuils et **intervalles**

Soient a, b, c trois éléments de A avec
$g(a) = 1000, g(b) = 1020, g(c) = 1040$ et $q = 30$,



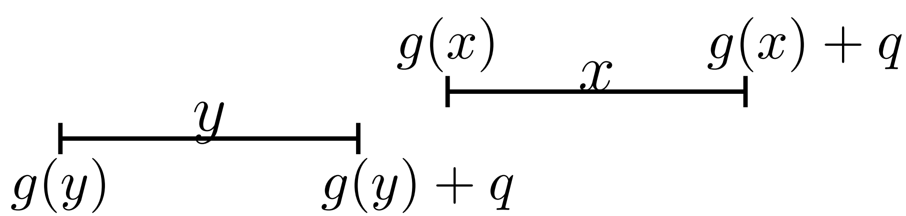
Représentation avec seuils: aIb *et* bIc *mais* cPa

Quasiordres

I intransitive: Luce ([Luce 1956]), quasiorders.

DÉFINITION 1 (QUASIORDRE) *Une relation réflexive $R = \langle P, I \rangle$ definie sur A, est un quasiordre si il existe une fonction g à valeurs réelles, définie sur A et une constante non-négative q tel que $\forall x, y \in A$,*

$$\begin{cases} xPy & \iff & g(x) > g(y) + q, \\ xIy & \iff & |g(x) - g(y)| \leq q. \end{cases}$$



xPy

Prise en compte d'un seuil

- Un seuil de discrimination vise à ne pas considérer comme significatives des petites différences ("tasse de café"),
- La transitivité de la relation d'indifférence n'est pas compatible avec l'existence d'un seuil de discrimination,
- Toute structure de préférences sous-jacente à un modèle à seuil vérifie :

$$\begin{cases} a \not{R} b, \ i.e., \ R = \emptyset \\ aPb, \ bIc, \ cPd \ \Rightarrow \ aPd \\ aPb, \ bPc, \ aId \ \Rightarrow \ dPc \end{cases}$$

- Toute structure de préférences vérifiant les propriétés ci-dessus peut être représenté par un modéle à seuil (si A fini ou denombrable),

Prise en compte d'un seuil

- La relation caractéristique S associée à un modèle à seuil est telle que ($\forall a, b, c, d \in A$):

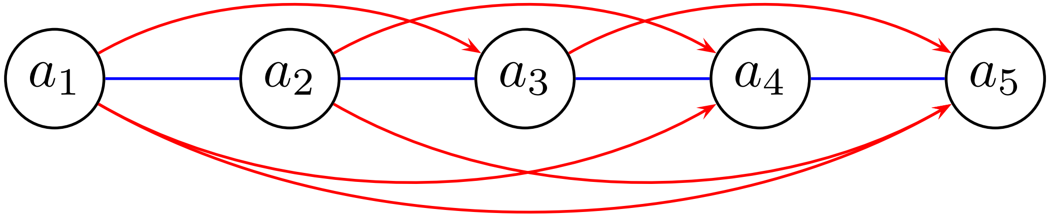
$$\begin{cases} aSb \text{ ou } bSa \quad (\text{ S est complète}) \\ aSb \text{ et } cSd \quad \Rightarrow \quad aSd \text{ ou } cSb \quad (\text{ S est de Ferrers}) \\ aSb \text{ et } bSc \Rightarrow aSd \text{ ou } dSc \;\; (\text{ S est semi-transitive}) \end{cases}$$

- Par définition, une structure de préférences est un quasi-ordre ssi elle est représentable par un modèle à un seuil,
- Dans un quasi-ordre, P est transitive ($PIP \subset P \Rightarrow P^2 \subset P$).

Quasi-ordre : un exemple

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$g_j(a_i)$	1	2	3	4	5

- $q = 1.5$,
- $P = \{(a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_5), (a_1, a_4), (a_2, a_5), (a_1, a_5)\}$,
- $I = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_5), (a_2, a_1), (a_3, a_2),$
  $(a_4, a_3), (a_5, a_4)\}$,
- $S = P \cup I$, $J = \emptyset$



Cas où le seuil est variable

- On peut souhaiter faire varier le seuil selon le niveau de l'échelle,
- On introduit souvent un seuil variable tel que :

$$\begin{cases} aPb & \Leftrightarrow \quad g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ aIb & \Leftrightarrow \quad a\not{P}b \text{ et } b\not{P}a \end{cases}$$

- exemple :

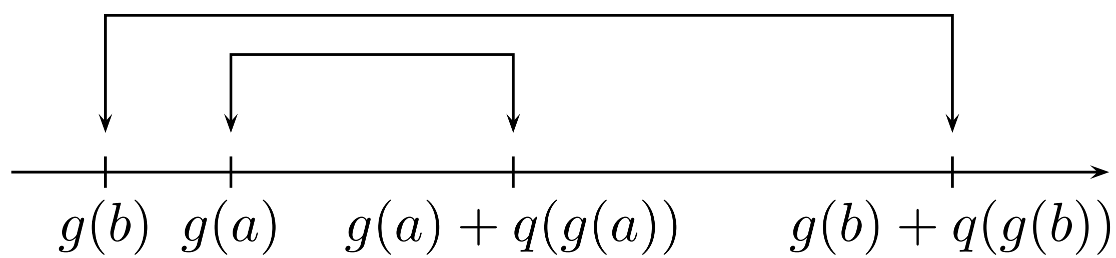
action	g	q	Intervalle
a_1	100	40	$[100, 140]$
a_2	130	30	$[130, 160]$
a_3	200	40	$[200, 240]$
a_4	230	20	$[230, 250]$
a_5	210	10	$[210, 220]$
a_6	190	15	$[190, 205]$

Cas où le seuil est variable

- Condition de cohérence:

$$g(a) > g(b) \quad \Rightarrow \quad g(a) + q(g(a)) > g(b) + q(g(b))$$

- Situation interdite :



- Si la condition de cohérence est vérifiée, alors la structure de préférences sous-jacente est un quasi-ordre et on peut se ramener (en transformant les fonction g et q) à un modèle où le seuil est constant (c'est le cas si $q(g(a)) = \alpha g(a) + \beta$).

Cas ou le seuil est variable

- Une structure de préférences est une structure d'ordre d'intervalle si:

$$\begin{cases} xPy & \iff \quad g(x) > g(y) + q(g(y)), \\ xIy & \iff \begin{cases} g(x) \le g(y) + q(g(y)), \\ g(y) \le g(x) + q(g(x)), \end{cases} \end{cases}$$

- si la fonction q ne vérifie pas la condition de cohérence, alors la structure de préférences sous-jacente doit vérifier, $\forall a, b, c, d$:

$$\begin{cases} a \not J b, \ i.e., \ J = \emptyset \\ aPb, \ bIc, \ cPd \ \Rightarrow \ aPd \end{cases}$$

$$\begin{cases} aSb \text{ ou } bSa \quad (\text{ S est complète}) \\ aSb \text{ et } cSd \ \Rightarrow \ aSd \text{ ou } cSb \quad (\text{ S est de Ferrers}) \end{cases}$$

Prise en compte de deux seuils

- Il peut sembler arbitraire de déterminer une valeur en dessous de laquelle il y a indifférence et au dessus de laquelle une préférence stricte existe,
- Il existe souvent une zone d'hésitation,
- On introduit un seuil de préférence (en plus du seuil d'indifférence) au delà duquel il existe une préférence stricte,
- Entre le seuil d'indifférence et le seuil de préférence existe une zone d'ambiguité dans laquelle le décideur hésite entre l'indifférence et la préférence,

Prise en compte de deux seuils

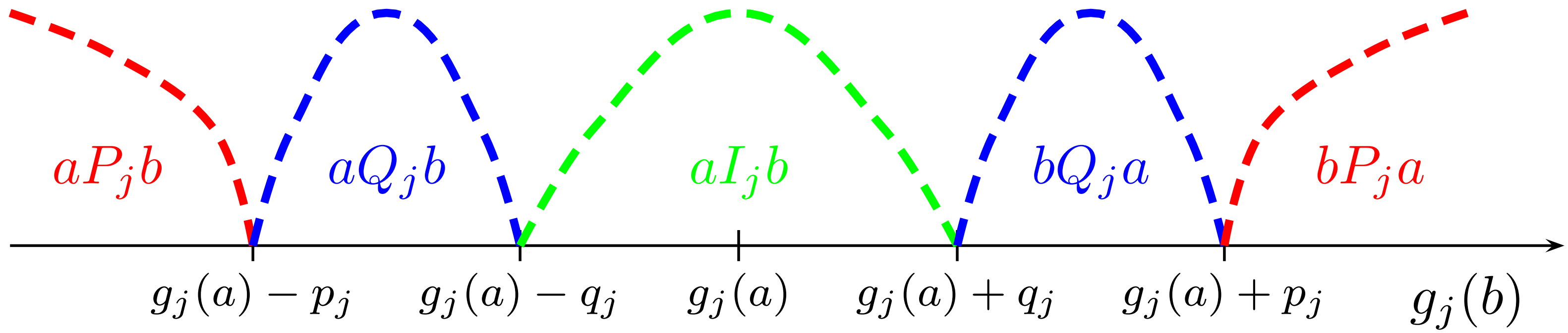
- Le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} aPb & \Leftrightarrow \quad g(a) > g(b) + p(g(b)) \\ aQb & \Leftrightarrow \quad g(b) + p(g(b)) \geq g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ aIb & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(b) + q(g(b)) \geq g(a) \\ g(a) + q(g(a)) \geq g(b) \end{cases} \end{cases}$$

- Q représente une relation de préférence "faible" qui traduit une situation d'hésitation entre une indifférence et une préférence,

$\Longrightarrow$ Pseudo-critère

Notion de pseudo-critère



Cas particuliers :

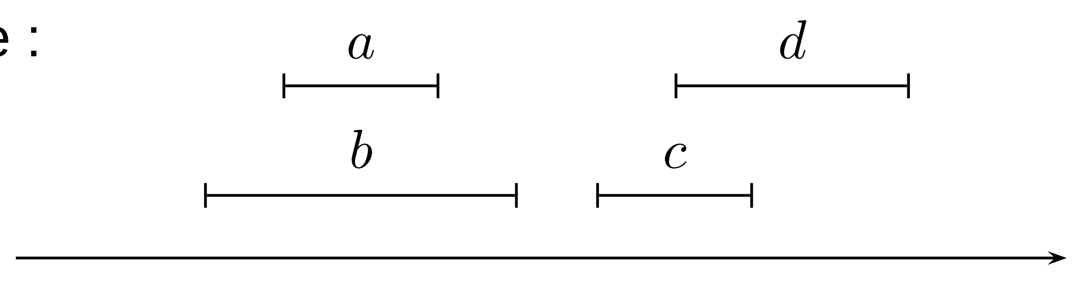
- $p_j = q_j$: quasi-critère,
- $q_j = 0$: pré-critère,
- $p_j = q_j = 0$: vrai-critère.

Une autre structure à trois relations

- Une structure à trois relations apparaît lorsque l'on compare des intervalles de la façon suivante:

$$\begin{cases} aPb & \Leftrightarrow & l_a > u_b \\ aQb & \Leftrightarrow & u_a > u_b > l_a > l_b \\ aIb & \Leftrightarrow & [l_a, u_a] \subset [l_b, u_b] \text{ ou } [l_b, u_b] \subset [l_a, u_a] \end{cases}$$

- Exemple :



- on a : aIb, cPa, cPb, dQc, dPa, dPb