De l'usage de la mesure de plausibilité pour le raisonnement par défaut

Yves Moinard
IRISA, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES-Cedex, FRANCE

Résumé *Friedman et Halpern ont introduit la notion d'inférence par plausibilité qui permet d'unifier de nombreuses approches du raisonnement par défaut. Cependant, la version qu'ils utilisent est parfois limitée dans sa puissance d'expression, en ce qui concerne le raisonnement par défaut. Une modification naturelle de la version originale produit une notion qui permet de traduire davantage de formalismes déjà connus. En particulier, tous les exemples étudiés dans les papiers introductifs de Friedman et Halpern peuvent également être exprimés à l'aide de cette nouvelle version. Par contre, il existe des formalismes connus et importants qui échappent à la version originale, et qui peuvent être traduits à l'aide de la nouvelle version. Cela confirme et accentue l'intérêt de l'inférence par plausibilité, d'autant plus que la définition de la nouvelle version est encore plus simple que la définition originale. Ce texte étudie les propriétés du raisonnement de ces deux versions, ce qui au passage complète la liste des propriétés déjà connues pour la version originale.*

1 Introduction

Friedman et Halpern ont introduit la notion d'inférence par plausibilité, qui généralise de nombreux formalismes connus de raisonnement par défaut [3, 4, 5]. Certains formalismes échappent à cette notion, à cause d'une particularité de la définition choisie: Les formules de plausibilité nulle (ou $\perp$) sont en effet considérées à part, et il en résulte que si une formule ψ et sa négation sont deux conséquences (par défaut) d'une donnée φ, alors la formule **faux**, et donc toute formule, est conséquence de φ. Cette propriété, appelée ici (P0), n'est en général satisfaite en raisonnement par défaut que dans les cas où on requiert la règle du "ET" (si on peut déduire deux formules ψ_1 et ψ_2, alors on peut aussi déduire leur conjonction $\psi_1 \wedge \psi_2$). L'inférence par plausibilité permet de rejeter la règle du "ET", ce qui lui confère une généralité intéressante, généralité qui devient sujette à caution si on impose la règle (P0). Rappelons que la formulation originale du raisonnement par défaut de Reiter [9] n'accepte ni le "ET" ni (P0).

On simplifie ici la définition de l'inférence par plausibilité en ne particularisant plus les formules de plausibilité nulle. Cette nouvelle version permet de traduire un grand nombre de formalismes issus de la notion introduite par Reiter, ainsi que d'autres formalismes de raisonnement par défaut, qui échappaient à la version originale. Tous les exemples de raisonnement par défaut considérés en [4] peuvent également être traduits par cette nouvelle version, mais il semble difficile de trouver un exemple présentant un intérêt pratique, traduisible dans l'ancienne version et pas dans la nouvelle. Cette affirmation est justifiée par la description à l'aide de règles de raisonnement intuitives, des cas où une de deux version de l'inférence par plausibilité peut être traduite en termes de l'autre.

Le cadre logique et les définitions de Friedman et Halpern sont introduits en 2. En 3 sont données quelques propriétés de cette inférence par plausibilité, ce qui montre pourquoi certains formalismes de raisonnement par défaut échappent à cette notion. En 4 une nouvelle version de l'inférence par plausibilité, plus facile à énoncer, est introduite et on montre pourquoi elle englobe davantage de formalismes de raisonnement par défaut. En 5 la comparaison entre les deux versions est développée, et les conditions de transformations de l'une des deux inférences en termes de l'autre sont décrites. Cela démontre en particulier pourquoi tous les exemples de raisonnement par défaut considérés par Halpern et Friedman peuvent aussi être traduits dans la nouvelle version.

2 Inférence par plausibilité (version originale)

Les auteurs Friedman et Halpern ne considèrent en [3, 4] que le cas propositionnel, et que les inférences à partir d'un seule formule (ou d'un nombre fini de formules), et nous les suivrons sur ces points, afin d'éviter des complications techniques inutiles pour notre propos. Soit $\mathbf{L}$ un langage propositionnel, assimilé à l'ensemble de ses formules classiques. Un nouveau connecteur logique $\rightarrow$ est introduit: $\varphi \rightarrow \psi$ signifie que ψ peut être déduit "par défaut" de ψ *("si φ, alors typiquement ψ")*. Les auteurs ne considèrent que des formalismes satisfaisant l'"équivalence logique à gauche" (LLE) (pour "left logical equivalence"), l'"affaiblissement à droite" (RW) (pour "right weakening") et la "réflexivité" (REF), définies par Kraus, Lehmann et Magidor [6]:

(LLE) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \Leftrightarrow \varphi'$, alors de $\varphi \rightarrow \psi$, inférer $\varphi' \rightarrow \psi$.
(RW) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \psi'$, alors de $\varphi \rightarrow \psi$, inférer $\varphi \rightarrow \psi'$.
(REF) $\varphi \rightarrow \varphi$.

On peut alternativement définir une inférence par défaut grâce à une application f de $\mathbf{L}$ dans l'ensemble des ensembles de formules $\mathcal{P}(\mathbf{L})$:

$$\psi \in f(\varphi) \text{ ssi } \varphi \rightarrow \psi, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(\varphi) = \{\psi \in \mathbf{L}, \varphi \rightarrow \psi\}.$$

Ce texte utilise deux inférences par plausibilité. On utilisera donc deux connecteurs $\xrightarrow{\text{FH}}$ et $\xrightarrow{\text{N}}$ et les deux applications correspondantes f_{FH} et f_N.

(RW) implique l'"équivalence logique à droite" (RLE) (pour "right logical equivalence"): si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Leftrightarrow \psi'$, alors de $\varphi \to \psi$, on infère $\varphi \to \psi'$. Comme (LLE) et (RW) sont toujours supposés, on identifie dans ce texte une formule à sa classe d'équivalence. Les formules **vrai** et **faux** vérifient donc: $\mathbf{vrai} = \varphi \vee \neg\varphi$, $\mathbf{faux} = \varphi \wedge \neg\varphi$, où φ est n'importe quelle formule de $\mathbf{L}$.

Identifier une formule à sa classe d'équivalence rend compte de (LLE) et (RLE), mais pas complètement de (RW). En termes de f, (RW) est: Si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \psi'$ et $\psi \in f(\varphi)$, alors $\psi' \in f(\varphi)$. Cela signifie que l'ensemble $f(\varphi)$ n'est pas un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{L}$, mais une union de théories appelée ici une *U-théorie* [pour "union de théories"] où une *théorie* $\mathcal{T}$ est un ensemble de formules déductivement clos: $\mathcal{T} = \{\varphi \in \mathbf{L}, \mathcal{T} \vdash_{\mathbf{L}} \varphi\}$. Appelons $\mathbf{T}$ l'ensemble de toutes les théories de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ l'ensemble de toutes les U-théories. Bien sûr on a $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{U}$. Ainsi, f est une application de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{U}$, où $\mathbf{L}$ est l'ensemble des [classes d'équivalence de] formules. Ne considérer que ces applications revient à ne considérer que les connecteurs $\to$ satisfaisant (LLE) et (RW). Si on exige aussi $\varphi \in f(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathbf{L}$, on traduit également (REF). Dans certains cas, on exige les règles (ET), (OU), (CM) (pour "cumulative monotony") et (CT) (pour "cumulative transitivity"):

(ET) De $\varphi \to \psi$ et $\varphi \to \psi'$, inférer $\varphi \to \psi \wedge \psi'$.
(OU) De $\varphi \to \psi$ et $\varphi' \to \psi$, inférer $\varphi \vee \varphi' \to \psi$.
(CM) De $\varphi \to \psi$ et $\varphi \to \psi'$, inférer $\varphi \wedge \psi \to \psi'$ *(monotonie cumulative).*
(CT) De $\varphi \to \psi$ et $\varphi \wedge \psi \to \psi'$, inférer $\varphi \to \psi'$ *(transitivité cumulative).*

Voici les traductions en termes de l'application f. Rappelons que f satisfait (LLE), (RW) et (REF), c'est-à-dire que f est une application de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{U}$ satisfaisant $\varphi \in f(\varphi)$.

(ET) f est une application de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{T}$.
(OU) $f(\varphi) \cap f(\varphi') \subseteq f(\varphi \vee \varphi')$.
(CM) Si $\psi \in f(\varphi)$ alors $f(\varphi) \subseteq f(\varphi \wedge \psi)$.
(CT) Si $\psi \in f(\varphi)$ alors $f(\varphi \wedge \psi) \subseteq f(\varphi)$.

Ces propriétés sont bien connues, toutefois (CT), (CM) et (REF) sont surtout pertinentes dans le cas où (ET) est satisfaite. Quand (ET) n'est pas satisfaite, il est utile de considérer les propriétés *(ET) réflexif* (équivalente à la *réflexivité forte* (sREF) de [7] où ces propriétés sont introduites), *monotonie cumulative restreinte* ("restricted (CM)") et *transitivité cumulative forte* ("strong cumulative transitivity"):

(ET-REF) Si $\psi \in f(\varphi)$, alors $\varphi \wedge \psi \in f(\varphi)$ c'à-d., si $\varphi \to \psi$, alors $\varphi \to \varphi \wedge \psi$.
(rCM) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \varphi$ et $\psi \in f(\varphi')$ alors $\psi \in f(\varphi \wedge \varphi')$
c'à-d., si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \varphi$, et $\varphi' \to \psi$ alors $\varphi \wedge \varphi' \to \psi$.
(sCT) Si $\psi \in f(\varphi)$ et $\psi' \in f(\varphi \wedge \psi)$, alors $\psi \wedge \psi' \in f(\varphi)$
c'à-d., si $\varphi \to \psi$ et $\varphi \wedge \psi \to \psi'$, alors $\varphi \to \psi \wedge \psi'$.

Évidemment, (ET) + (REF) implique (ET-REF), (CM) implique (rCM), et, par (RW, (ET-REF) implique (REF) et (sCT) implique (CT).

Définition 2.1 Une *d-application* ("d" pour "défaut") est une application f : $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{U}$ satisfaisant (ET-REF).

Ainsi, une d-application est une inférence satisfaisant les règles (LLE), (RW) et (ET-REF). Les défauts de Reiter, et la plupart de leurs variantes, peuvent être étudiés comme des d-applications. Pour toute d-application, (CT) et (sCT) sont équivalentes (immédiat). Une autre propriété intéressante (et facile à démontrer) des d-applications est que, en présence de la règle (ET) (par exemple, en terminologie des défauts à la Reiter, quand on considère l'intersection de toutes les extensions: "raisonnement prudent"), (rCM) et (CM) sont équivalentes.

Voici les définitions de l'inférence par plausibilité introduite en [3, 4]:

Un *espace de plausibilité* est un tuple $(W, \mathbf{F}, Pl, D, \leq)$ où W et D sont des ensembles, $\mathbf{F}$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(W)$ des sous-ensembles de W qui est fermé pour la réunion et le complémentaire dans W, Pl est une application de $\mathbf{F}$ dans D, l'ensemble D étant muni d'une relation d'ordre partiel $\leq$. La relation d'ordre strict $<$ est définie comme d'habitude par $d_1 < d_2$ si $[d_1 \leq d_2$ et $d_2 \not\leq d_1]$ c'à-d., si $[d_1 \leq d_2$ et $d_1 \neq d_2]$.

Pl doit de plus satisfaire la condition (A1):

(A1) Si $A \subseteq B$ alors $Pl(A) \leq Pl(B)$.

Si on désigne $Pl(\emptyset)$ par $\perp$ et $Pl(W)$ par $\top$, on a donc, pour tout $d \in Pl(\mathbf{F})$: $\perp \leq d \leq \top$.

Une *structure de plausibilité* PL dans $\mathbf{L}$ est un espace de plausibilité où l'ensemble des *mondes* W est l'ensemble M de toute les interprétations classiques pour $\mathbf{L}$. Pour toute formule $\varphi \in \mathbf{L}$, $[[\varphi]]$ désigne l'ensemble des éléments de W $(= M)$ qui satisfont φ: $[[\varphi]] = \{w \in W, w \models_{\mathbf{L}} \varphi\}$ ($w \models_{\mathbf{L}} \varphi$ désigne ce que Friedman et Halpern notent par $\pi(w)(\varphi) = TRUE$). L'ensemble $\mathbf{F}$ des sous-ensembles de W considérés est ici, comme en [4], l'ensemble $\{[[\varphi]], \varphi \in \mathbf{L}\}$.

La définition originale de Friedman et Halpern, où W est un ensemble de "copies d'éléments" de M, n'est qu'apparemment plus générale. En effet, il est inutile de considérer dans W des copies multiples d'un élément $m \in M$, puisqu'on ne considère que les sous-ensembles $[[\varphi]]$ de W. Un ensemble dans W de "copies multiples" d'un $m \in M$ peut être réduit au singleton $\{m\}$ (soit toutes les copies apparaissent dans $[[\varphi]]$, soit aucune). De même, pour le cas de "zéro copie" de m, c'à-d. si W est un sous-ensemble strict de M, on peut définir une mesure de plausibilité équivalente sur l'ensemble M tout entier. On donne ici l'intuition de la définition de Pl_M à partir de Pl_W: pour tout sous-ensemble M_i de M, $Pl_M(M_i) = Pl_W(M_i \cap W)$. L'inférence par plausibilité est préservée, de même que (A1) et les autres propriétés d'une structure de plausibilité introduites dans ce texte. Ainsi, Pl pourrait être défini directement comme une application de $\mathbf{L}$ dans D: $Pl(\varphi) = Pl([[\varphi]])$. Voici l'expression de (A1) avec cette convention:

(A1) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \Rightarrow \psi$, alors $Pl(\varphi) \leq Pl(\psi)$.

Définition 2.2 [3, 4] L'*inférence par plausibilité* (par Friedman et Halpern) est définie ainsi: étant donnée une structure de plausibilité PL, on définit

$PL \models \varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi$ si soit $Pl(\varphi) = \perp$, soit $Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$.

On définit l'application f_{FH} de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{L})$, associée à PL:

$f_{FH}(\varphi) = \{\psi \in \mathbf{L}, PL \models \varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi\}$.

Propriété 2.1 *L'inférence par plausibilité f_{FH} est une d-application.*

Démonstration: Cela signifie que cette inférence satisfait (LLE), (RW) et (ET-REF). Comme (LLE) et (RW) figurent dans les textes originaux, il reste à démontrer (ET-REF):

On a $\varphi \wedge (\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge \psi$ et $\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge \neg\psi$. Si $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi$, alors soit $Pl(\varphi) = \perp$ soit $Pl(\varphi\wedge\psi) > Pl(\varphi\wedge\neg\psi)$. On obtient toujours $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \varphi\wedge\psi$. □

Ce résultat montre que l'inférence par plausibilité est effectivement bien adaptée au raisonnement par défaut. De plus, il se trouve que de nombreuses propriétés importantes du raisonnement par défaut ont une traduction exacte et simple en termes de Pl. Comme l'on démontré Halpern et Friedman, c'est le cas des règles (ET) et (OU) [qui sont falsifiées par une inférence par plausibilité sans condition particulière] et du système $\mathbf{P}$ de [6]. Le système $\mathbf{P}$ est défini comme respectant les règles (ET), (OU) et (CM) [avec (LLE), (RW) et (ET-REF) qui, en présence de (ET) et (RW), équivaut à (REF)]. Ce système satisfait aussi la règle (CT). Le fait que l'inférence par plausibilité contienne le système $\mathbf{P}$ est important puisque l'on connaissait déjà de nombreuses définitions et sémantiques pour ce système: inférence préférentielle [6], ϵ-entailment [8], inférence possibiliste [2], etc... (cf [4]).

Il y a cependant un comportement étrange, remarqué par les auteurs: en cas de (ET), l'inférence par plausibilité satisfait (OU), sauf le "cas trivial" $Pl(\varphi \vee \varphi') = \perp$. Ce cas particulier est si déroutant que les auteurs ajoutent une propriété particulière, appelée (A3), à Pl, afin de le supprimer. Les *structures de plausibilité qualitatives* des auteurs sont des structures de plausibilité satisfaisant une propriété appelée (A2), qui est la traduction sémantique de la règle (ET), ainsi que (A3). Ils démontrent que les structures de plausibilité qualitatives fournissent une nouvelle sémantique pour le système $\mathbf{P}$.

En ce qui concerne le raisonnement par défaut en l'absence de la règle (ET), Friedman et Halpern ne décrivent en [4] aucun système connu qui pourrait être traduit en termes d'inférence par plausibilité. C'est dommage, puisque le raisonnement par défaut en l'absence du (ET) est reconnu comme nécessaire dans de nombreuses situations, et puisque l'inférence par plausibilité, qui ne possède pas la règle (ET) au départ, semble bien adaptée aussi pour le raisonnement par défaut sans (ET).

3 D'autres propriétés de l'inférence f_{FH}

Propriété 3.1 *L'inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (rCM).*

Démonstration: Supposons $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \varphi$ et $\varphi' \xrightarrow{\text{FH}} \psi$. Alors soit $Pl(\varphi') = \bot$, soit $Pl(\varphi' \wedge \psi) > Pl(\varphi' \wedge \neg\psi)$. Si $Pl(\varphi') = \bot$, par (A1) on a $Pl(\varphi' \wedge \varphi) = \bot$, donc $\varphi \wedge \varphi' \xrightarrow{\text{FH}} \psi$. Par hypothèse, $\varphi \wedge \varphi' \wedge \psi = \varphi' \wedge \psi$, et par (A1), $Pl(\varphi \wedge \varphi' \wedge \neg\psi) \leq Pl(\varphi' \wedge \neg\psi)$. Donc, si $Pl(\varphi' \wedge \psi) > Pl(\varphi' \wedge \neg\psi)$, on a $Pl(\varphi \wedge \varphi' \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \varphi' \wedge \neg\psi)$, donc $\varphi \wedge \varphi' \xrightarrow{\text{FH}} \psi$. $\square$

Cette propriété de l'inférence par plausibilité explique le résultat suivant, considéré comme "surprenant" en [4]: en présence de (ET), l'inférence par plausibilité satisfait aussi (CM). En effet, pour toute d-application (c'à-d. pour toute application bien adaptée au raisonnement par défaut en son sens général), (rCM) + (ET) implique (CM). Cette propriété rappelle aussi le comportement de la X-logique, que l'on définit maintenant:

Définition 3.1 [11, 10] Pour tout $X \subseteq \mathbf{L}$, on définit ainsi la *X-application* f_X de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{L})$: $\varphi \in f_X(\psi)$ ssi $Th(\psi \wedge \varphi) \cap X \subseteq Th(\psi)$.

On note $\psi \rightarrow_X \varphi$ pour $\varphi \in f_X(\psi)$.

Cette notion a été utilisée par Suchenek [11], afin de faciliter le calcul de la circonscription et d'autres formalismes de minimisation. La circonscription satisfait (ET), Suchenek n'a donc considéré que les cas où f_X satisfait (ET). Cependant, comme remarqué par [10], généralement, les X-applications falsifient (ET). Le résultat suivant, dont les démonstrations sont immédiates (voir [7]), résume les principales propriétés des X-applications:

Propriété 3.2 *Toute X-application est une d-application qui satisfait aussi (CT), (OU) et (rCM).*

Bien que les X-applications soient des d-applications satisfaisant (rCM), tout comme les inférences par plausibilité, et que plusieurs autres propriétés des X-applications soient satisfaites par des inférence par plausibilité particulières, il est curieusement impossible de traduire les X-logiques en termes d'inférence par plausibilité. Cette impossibilité provient de la propriété suivante:

(P0) Si $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \rightarrow \neg\psi$, alors $\varphi \rightarrow$ **faux**.

Si (RW) est satisfait, donc en particulier pour toute d-application, on a $\varphi \rightarrow$ **faux** ssi $\varphi \rightarrow \sigma$ pour chaque $\sigma \in \mathbf{L}$ [c'à-d. **faux** $\in \mathbf{f}(\varphi)$ ssi $f(\varphi) = \mathbf{L}$]. Ainsi, en présence de (RW), (P0) peut être formulée comme une équivalence:

(P0) ($\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \rightarrow \neg\psi$) ssi ($\varphi \rightarrow$ **faux**).

(ET) implique (P0), (P0) étant (ET) restreint aux formules contradictoires. Par contre, il semble très étrange d'exiger (P0) en l'absence de (ET) C'est pourtant ce que fait l'inférence par plausibilité introduite jusqu'ici:

Propriété 3.3 *L'inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (P0).*

Démonstration: Si $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi$ et $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \neg\psi$, alors soit $Pl(\varphi) = \bot$, soit $[Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$ et $Pl(\varphi \wedge \neg\psi) > Pl(\varphi \wedge \psi)]$. Le second terme de l'alternative est impossible car $>$ est un ordre strict, donc on a $Pl(\varphi) = \bot$, et $\varphi \xrightarrow{\text{FH}}$ **faux**. $\square$

Voici une conséquence immédiate:

Corollaire 3.4 *Il existe des X-applications qui ne peuvent pas être traduites en termes d'inférence par plausibilité comme défini en Définition 2.2.*

Démonstration: Voici une X-application qui falsifie (P0):

Exemple 3.1 *Le vocabulaire a deux symboles propositionnels a et b, X est le singleton $\{a \wedge b\}$. On a $f_X(\neg a) = f_X(\neg a \vee b) = Th(\neg a \wedge b) \cup Th(\neg a \wedge \neg b)$, et donc f_X falsifie (P0) [et a fortiori (ET)]: $\neg a \rightarrow_X \neg a \wedge b$, $\neg a \rightarrow_X \neg a \wedge \neg b$, donc, par (RW), $\neg a \rightarrow_X a \vee \neg b$, mais $\neg a \not\rightarrow_X$* **faux**.

Cet exemple très simple n'est pas une exception, et on peut considérer que la plupart des X-applications qui falsifient (ET) falsifient aussi (P0). Cependant, les X-applications qui falsifient (ET) sont utiles (en particulier pour faciliter le calcul) pour le raisonnement par défaut [10, 7, 1]. $\square$

La propriété (P0) est en fait la seule raison qui interdit la traduction des X-logiques: toute X-application satisfaisant (P0) est facilement traduite en termes de la plausibilité vue jusqu'ici, comme démontré ci-dessous.

Voici un argument très fort "contre (P0)". Il est inattendu, du point de vue des propriétés du raisonnement, que l'extension de (P0) à plus de deux formules ne soit plus satisfaite par l'inférence par plausibilité introduite ci-dessus, comme le montre l'exemple suivant, issu d'un exemple donné en [4, p.658]:

Exemple 3.2 *La mesure de plausibilité est ici une probabilité Pr, donc elle est définie par ses valeurs pour les formules dont la théorie est complète. Le vocabulaire a deux symboles propositionnels q et r. $Pr(q \wedge r) = 0.2$, $Pr(q \wedge \neg r) = Pr(\neg q \wedge r) = 0.4$. Donc, on a $Pr(\neg q \wedge \neg r) = 0$, $Pr(q) = Pr(r) = 0.6$, $Pr(q \not\Leftrightarrow r) = 0.8$, $Pr(q \vee r) = Pr(\mathbf{vrai}) = 1$, etc... Comme on a* **vrai** $\xrightarrow{\text{FH}} \varphi$ *ssi $Pr(\varphi) > 0.5$, on a $f_{FH}(\mathbf{vrai}) = Th(q) \cup Th(r) \cup Th(q \not\Leftrightarrow r)$ [on a aussi $f_{FH}(q \vee r) = f_{FH}(\mathbf{vrai})$]. Donc, on a, avec $\varphi =$* **vrai**, *ou $\varphi = q \vee r$: $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} q$, $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} r$, $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} (q \not\Leftrightarrow r)$, avec $q \wedge r \wedge (q \not\Leftrightarrow r) \vdash_{\mathbf{L}}$* **faux**, *tandis que l'on* n'a pas $\varphi \xrightarrow{\text{FH}}$ **faux**. *(P0) ne peut pas être étendue à plus de deux formules.* $\square$

4 Une autre inférence par plausibilité

Le manque d'expressivité de l'inférence par plausibilité, en ce qui concerne le raisonnement par défaut, provient de sa définition en terme d'alternative. On va en effet montrer que si on supprime l'alternative, on obtient une notion d'inférence légèrement différente et qui englobe davantage de formalismes de raisonnement par défaut que la définition originale.

Définition 4.1 L'*inférence par N-plausibilité* (N pour "normale", ou "nouvelle") est définie ainsi, à partir d'une structure de plausibilité PL (dont la définition est inchangée) :

$PL \models \varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ si $Pl(\varphi \wedge \psi) \geq Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$.

On définit l'application f_N de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{L})$, associée à PL, par:

$f_N(\varphi) = \{\psi \in \mathbf{L}, Pl \models \varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi\}$.

Comme avec la définition originale, on a:

Propriété 4.1 *L'inférence par N-plausibilité f_N est une d-application satisfaisant (rCM).*

Les démonstrations sont immédiates, et semblables aux démonstrations déjà données pour f_{FH}.

Comme pour les définitions originales, l'inférence par N-plausibilité peut falsifier (ET), (CT) et (OU). Cependant, le comportement est bien plus "régulier" qu'avec les définitions originales: avec f_N, (ET) implique (CT), qui implique (OU). Rappelons qu'avec f_{FH}, Friedman et Halpern ont montré que (ET) "implique presque" (OU), mais que (ET) n'implique pas (OU) en toute généralité.

Voici quatre propriétés qu'une structure de plausibilité peut satisfaire (ou pas): A, B et C sont des sous-ensembles de W (dans $\mathbf{F}$) qui sont disjoints deux à deux ($A \cap B = \emptyset$,...).

(A2$_N$) Si $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A \cup C) \geq Pl(B)$, alors $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$.

(A3) Si $Pl(A) = Pl(B) = \perp$, alors $Pl(A \cup B) = \perp$.

(A6$_N$) Si $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) \geq Pl(B)$, alors $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$.

(A7$_N$) Si $Pl(A) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) \geq Pl(B)$, alors $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$.

On conserve ici la numérotation déjà introduite par Friedman et Halpern dans [4], ce qui explique l'absence de (A4) et (A5), introduites par ces auteurs pour des propriétés non étudiées dans ce texte. L'indice $_N$ désigne les propriétés en $\geq$ au lieu de $>$. Les propriétés en $_N$ sont utiles pour f_N, et donc en général n'avaient pas été considérées par Halpern et Friedman, mais la propriété (A2) (donnée ci-dessous) associée à (A2$_N$), figure en [4]. (A6) (donnée ci-dessous) et son associée (A6$_N$) sont nouvelles. (A7), aussi donnée ci-dessous, est apparemment évoquée, mais n'est pas formulée en [4], (A3) figure en [4] pour f_{FH}, où elle joue un rôle important.

Il est immédiat de vérifier que (A2$_N$) implique (A6$_N$), qui implique (A7$_N$), qui implique (A3) [rappel: $Pl(B) = \perp$ ssi $Pl(\emptyset) \geq Pl(B)$].

Remarquons que si la plausibilité est une probabilité, (A3) est satisfaite.

On a les résultats suivants, où le *cas trivial du (OU)*, introduit par Friedman et Halpern, est défini comme suit en termes du connecteur $\rightarrow$:

(P3) Si $\varphi_1 \rightarrow \mathbf{faux}$ et $\varphi_2 \rightarrow \mathbf{faux}$ alors $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \mathbf{faux}$.

Propriété 4.2 *1. Une inférence f_N par N-plausibilité satisfait (ET) ssi Pl satisfait (A2$_N$).*

2. Une inférence f_N par plausibilité satisfait le cas trivial du (OU), aussi appelé (P3) ici, ssi Pl satisfait (A3).

3. Une inférence f_N par N-plausibilité satisfait (CT) ssi Pl satisfait (A6$_N$).

4. Une inférence f_N par N-plausibilité satisfait (OU) ssi Pl satisfait (A7$_N$).

Démonstration: Si X est un élément de $\mathbf{F}$, on désigne par x la formule de $\mathbf{L}$ définie par $[[x]] = X$. On donc $A \cap B = \emptyset$ ssi $\vdash_{\mathbf{L}} a \Rightarrow \neg b$.

1. Il suffit d'adapter (en la simplifiant) la démonstration originale donnée en [4] pour f_{FH} et (AND).

2. Immédiat (utiliser $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \mathbf{faux}$ ssi $Pl(\varphi) = \bot$).

3. $\Rightarrow$: f_N satisfait (sCT), A, B et C sont deux à deux disjoints dans $\mathbf{F}$, $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) \geq Pl(B)$. Soient les formules $\psi = a \vee b \vee c$, $\varphi_1 = a \vee b$ et $\varphi_2 = a \vee c$. On a $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 = a$ et $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 = \psi \wedge \neg\varphi_2 = b$. On a donc $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1$ et $\psi \wedge \varphi_1 \xrightarrow{\text{N}} \varphi_2$. Par (sCT), on obtient $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$, c'à-d. $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$: Pl satisfait (A6$_N$).

$\Leftarrow$: Pl satisfait (A6$_N$), ψ, φ_1 et φ_2 sont des formules telle que $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1$ et $\psi \wedge \varphi_1 \xrightarrow{\text{N}} \varphi_2$. Soient les ensembles $A = [[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2]], B = [[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2]]$ et $C = [[\psi \wedge \neg\varphi_1]]$. Par hypothèse on a $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) = Pl[[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2]] \geq Pl[[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2]] = Pl(B)$. Par (A6$_N$), on a donc $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$, donc $Pl(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) \geq Pl(\psi \wedge (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2))$, c'à-d. $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$: $\xrightarrow{\text{N}}$ satisfait (sCT), c'à-d. ici (CT).

4. $\Rightarrow$: f_N satisfait (OU), A, B et C sont deux à deux disjoints dans $\mathbf{F}$, $Pl(A) \geq Pl(B)$ et $Pl(A) \geq Pl(C)$. Soient $\varphi = a \vee b$, $\varphi' = a \vee c$ et $\psi = a$. On a $\varphi \wedge \psi = \varphi' \wedge \psi = (\varphi \vee \varphi') \wedge \psi = a$, $\varphi \wedge \neg\psi = b$, $\varphi' \wedge \neg\psi = c$, et $(\varphi \vee \varphi') \wedge \neg\psi = b \vee c$, donc $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ et $\varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$. Par (OU) on obtient $\varphi \vee \varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$, c'à-d. $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$: Pl satisfait (A7$_N$).

$\Leftarrow$: Pl satisfait (A7$_N$), φ, φ' et ψ sont des formules telles que $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ et $\varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$. Soient les ensembles $A = [[(\varphi \vee \varphi') \wedge \psi]], B = [[\varphi \wedge \neg\psi]]$ et $C = [[\neg\varphi \wedge \varphi' \wedge \neg\psi]]$. On a $B \cup C = [[(\varphi \vee \varphi') \wedge \neg\psi]]$, $A \supseteq [[\varphi \wedge \psi]]$, $A \supseteq [[\varphi' \wedge \psi]]$, et $[[\varphi' \wedge \neg\psi]] \supseteq C$. Par hypothèse (et (A1)), on a $Pl(A) \geq Pl(B)$ et $Pl(A) \geq Pl(C)$. Par (A7$_N$), on obtient $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$, c'à-d. $\varphi \vee \varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$: f_N satisfait (OU). $\square$

Corollaire 4.3 *Pour l'inférence par N-plausibilité, (ET) implique (CT) qui implique (OU), ces deux implications étant strictes.*

Ces deux implications se déduisent immédiatement de la Propriété 4.2. Pour trouver un f_N satisfaisant (CT) et falsifiant (ET), il suffit de trouver une mesure de plausibilité satisfaisant (A6$_N$) et falsifiant (A2$_N$). Toute X-application falsifiant (ET) (comme l'exemple 3.1) fournit un tel exemple, puisque l'on sait que toute X-application est une f_N qui satisfait (CT). Voici maintenant un f_N satisfaisant (OU) et falsifiant (CT) [soit une mesure de plausibilité satisfaisant ($A7_N$) et falsifiant ($A6_N$)]:

Exemple 4.1 *Comme dans l'exemple 3.2, la plausibilité est une probabilité. Le vocabulaire a deux symboles q et r. $Pr(q \wedge r) = 1/8$, $Pr(q \wedge \neg r) = 4/8$, $Pr(\neg q \wedge r) = 3/8$, [donc $Pr(\neg q \wedge \neg r) = 0$]. Il est facile de vérifier que Pr satisfait ($A7_N$).*

Soient $A = [[\neg q \wedge r]], B = [[q \wedge r]]$ et $C = [[q \wedge \neg r]]$, on a $Pr(A) = 3/8 \geq Pr(B) = 1/8$, $Pr(A \cup B) = 4/8 \geq Pr(C) = 4/8$, mais $Pr(A) \not\geq Pr(B \cup C) = 5/8$: Pr falsifie ($A6_N$).

L'inférence par N-plausibilité définie par Pr satisfait donc (OU) mais elle falsifie (sCT): Soient $\psi = q \vee r, \varphi_1 = r$ et $\varphi_2 = q \not\Leftrightarrow r$. On a $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \neg q \wedge r$ et $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 = q \wedge r$, donc $Pr(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) = 3/8 \geq Pr(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = 1/8$: $\psi \wedge \varphi_1 \xrightarrow{\text{N}} \varphi_2$. On a aussi $\psi \wedge \varphi_1 = r$ et $\psi \wedge \neg\varphi_1 = q \wedge \neg r$, donc $Pr(\psi \wedge \varphi_1) = 4/8 \geq Pr(\psi \wedge \neg\varphi_1) = 4/8$: $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1$. Cependant, $Pr(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) = 3/8 \not\geq Pr(\psi \wedge \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = Pr(q) = 5/8$: $\psi \not\xrightarrow{\text{N}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$. □

Comme pour $\xrightarrow{\text{FH}}$, on a, pour $\xrightarrow{\text{N}}$ (démonstration immédiate, par (A1)): $\varphi \xrightarrow{\text{N}}$ **faux** ssi $Pl(\varphi) = \perp$.

Cette nouvelle définition englobe les X-applications:

Propriété 4.4 *Toute X-application, définie par un ensemble X, est égale à l'inférence par N-plausibilité f_N définie par la mesure de plausibilité suivante:*

On définit la plausibilité Pl_X: pour tout $\varphi \in \mathbf{L}$, $Pl_X(\varphi) = \{x \in X, \varphi \vdash_{\mathbf{L}} x\}$.

On définit $D = \{Pl_X(\varphi), \varphi \in \mathbf{L}\}$, l'ordre partiel $\geq$ étant $\subseteq$ (i.e.$\leq$ est $\supseteq$).

Il s'agit d'une traduction aisée, et la démonstration, très facile, illustre bien la puissance et la souplesse d'utilisation de la notion d'inférence par N-plausibilité:

(1) La structure $PL_X = (Pl_x, \subseteq)$ satisfait (A1): Si $\varphi \vdash_{\mathbf{L}} \psi$, et si $x \in Pl_X(\psi)$, alors $x \in X$ et $\psi \vdash_{\mathbf{L}} x$ donc $\varphi \vdash_{\mathbf{L}} x$ et $x \in Pl_X(\varphi)$.

(2) $\supseteq$ est une relation d'ordre.

(3) Par la Définition 3.1, on a $\varphi \rightarrow_X \psi$ ssi, pour tout $x \in X$, si $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{L}} x$, alors $\varphi \vdash_{\mathbf{L}} x$, c'à-d. ssi, pour tout $x \in X$, si $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{L}} x$, alors $\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{L}} x$, c'à-d. ssi $\{x \in X, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{L}} x\} \subseteq \{x \in X, \varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{L}} x\}$, c'à-d. ssi $Pl_X(\varphi \wedge \psi) \geq Pl_X(\varphi \wedge \neg\psi)$, c'à-d. ssi $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$. □

5 Comparaison entre ces deux inférences

Après avoir donné quelques propriétés de la nouvelle version f_N, revenons un peu sur l'originale f_{FH} afin d'affiner la comparaison entre les deux formalismes. Voici trois autres propriétés qu'une mesure de plausibilité peut posséder (ou non). Rappelons que (A2) figure déjà dans [4].

Soient A, B et C des sous-ensembles de W (dans $\mathbf{F}$) deux à deux disjoints.

(A2) Si $Pl(A \cup B) > Pl(C)$ et $Pl(A \cup C) > Pl(B)$, alors $Pl(A) > Pl(B \cup C)$.
(A6) Si $Pl(A \cup B) > Pl(C)$ et $Pl(A) > Pl(B)$, alors $Pl(A) > Pl(B \cup C)$.
(A7) Si $Pl(A) > Pl(C)$ et $Pl(A) > Pl(B)$, alors $Pl(A) > Pl(B \cup C)$.

Comme avec les "nouvelles versions" (indicées par $_N$) données ci-dessus, (A2) implique (A6) qui implique (A7) (immédiat). L'implication de (A2) vers (A7) a été évoquée (semble-t-il) dans [4], même si (A7) ne figure pas dans ce texte. Une différence importante avec les "nouvelles versions" est que (A7) n'implique pas (A3), tandis que (A7_N) implique (A3). On a les résultats suivants pour l'inférence par plausibilité f_{FH}:

Propriété 5.1 *1. L'inférence f_{FH} satisfait (ET) ssi Pl satisfait (A2).*
2. L'inférence f_{FH} satisfait (P3), cas trivial du (OU), ssi Pl satisfait (A3).
3. L'inférence f_{FH} satisfait (CT) ssi Pl satisfait (A6).
4. L'inférence f_{FH} satisfait (OU) ssi Pl satisfait (A7) et (A3).

Démonstrations omises: Les points 1 et 2 sont de [4], auquel on renvoie le lecteur, et dans lequel des résultats proches du point 4 sont évoqués. Les points 3 et 4 sont sans difficulté.

Corollaire 5.2 (Immédiat) *Si une inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (ET), alors elle satisfait (CT). Si f_{FH} satisfait (CT) et le cas trivial du (OU), alors elle satisfait (OU). Ces implications sont strictes.*

Voici une propriété satisfaite par les deux inférences par plausibilité:

(P) Si $\varphi \to \mathbf{faux}$ et $\psi \to \varphi$, alors $\psi \to \neg\varphi$.

Propriété 5.3 *Les deux versions de l'inférence par plausibilité f_{FH} et f_N satisfont (P).*

Cette "consistance relative faible", dont la démonstration est immédiate, est donc importante: un formalisme qui falsifie (P) ne peut être traduit par aucune des inférences par plausibilité définies dans ce texte.

Il est utile de rappeler ici une autre propriété, satisfaite par toute d-application, donc en particulier par les deux versions d'inférence par plausibilité:

$$\varphi \to \mathbf{faux} \text{ ssi } \varphi \to \psi \text{ pour tout } \psi \in \mathbf{L}.$$

On a déjà vu que, si $\to$ est un des deux connecteurs $\xrightarrow{\text{FH}}$ ou $\xrightarrow{\text{N}}$, on a:

$$\varphi \to \mathbf{faux} \text{ ssi } Pl(\varphi) = \bot.$$

Une conséquence de la propriété 5.3, pour l'inférence f_{FH} (grâce à (P0)), est le renforcement suivant de (P):

(P') Si $\varphi \to \mathbf{faux}$ et $\psi \to \varphi$, alors $\psi \to \mathbf{faux}$.

Propriété 5.4 *L'inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (P').*
L'inférence par N-plausibilité f_N satisfait (P') ssi elle satisfait (P3), cas trivial du (OU).

Là encore, les démonstrations sont immédiates. Rappelons que f_N satisfait (OU) ssi toute plausibilité Pl qui la définit satisfait (A3). Ainsi donc, pour f_N, (A3) correspond aussi à (P'), cette correspondance étant fausse pour f_{FH}.

Voici une dernière propriété importante ici d'une mesure de plausibilité:

(A0) Pour tous A et B disjoints dans **F**, si $Pl(A) = Pl(B)$, alors $Pl(A \cup B) = \perp$.

(A0) implique (A3), mais (A0) est bien plus fort que (A3). Les deux résultats ci-dessous (Propriété 5.5 et Théorème 5.7) montrent l'utilité de (A0) dans notre contexte.

Propriété 5.5 *Une inférence par N-plausibilité f_N satisfait (P0) ssi Pl satisfait (A0).*

La démonstration ne présente pas de difficultés.

Corollaire 5.6 *Si une inférence par N-plausibilité f_N satisfait (P0), elle satisfait (P3).*

($A2_N$) implique (A0) [prendre $A = \emptyset$ dans ($A2_N$)], ce qui correspond au fait aussi évident que (ET) implique (P0). On a déjà remarqué (exemple 3.1) qu'une inférence f_N peut satisfaire (CT) et falsifier (P0), ce qui démontre que ($A6_N$) n'implique pas (A0).

Théorème 5.7 *Une inférence par N-plausibilité f_N est égale à une inférence par plausibilité f_{FH} ssi f_N satisfait (P0).*

Démonstration: Si f_N falsifie (P0), f_N ne peut pas être égal à une f_{FH} par la propriété 3.3. Si f_N satisfait (P0), alors on a $\varphi \xrightarrow{N} \psi$ ssi $Pl(\varphi \wedge \psi) \geq Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$ ssi $[Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$ ou $(\varphi \xrightarrow{N} \psi$ et $\varphi \xrightarrow{N} \neg\psi)]$ ssi, par (P0) sous sa forme d'équivalence, $[Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$ ou $\varphi \xrightarrow{N}$ **faux**] ssi $[Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$ ou $Pl(\varphi) = \perp]$. Donc on a $\varphi \xrightarrow{N} \psi$ ssi $\varphi \xrightarrow{FH} \psi$. □

La démonstration n'introduit pas de nouvelle mesure de plausibilité: toute inférence par N-plausibilité satisfaisant (P0) est aussi l'inférence par plausibilité (version originale) définie par la même mesure de plausibilité. Ainsi, chaque fois que le passage de la nouvelle définition vers la définition originale est possible, ce passage est immédiat.

Pour l'autre sens, il faut introduire une nouvelle mesure de plausibilité. Mais ce passage, qui va être décrit maintenant, demeure assez simple quand même.

Voici d'abord une règle (fournie sous deux formes, qui se révèlent équivalentes pour toute version de l'inférence par plausibilité), qui est satisfaite par la nouvelle inférence f_N, mais qui peut être falsifiée par l'inférence originale f_{FH}:

(rP3) Si $\varphi_1 \rightarrow$ **faux** et $\varphi_2 \rightarrow$ **faux**, alors $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \varphi_1$.

(rP3') Si $\varphi_1 \to \mathbf{faux}$ et $\varphi_2 \to \mathbf{faux}$, alors $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \varphi_1$ et $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \neg\varphi_1$.

(rP3) est une restriction du cas trivial du (OU), d'où son acronyme: (rP3) ne mène pas à la conclusion $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \mathbf{faux}$, mais seulement à $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \varphi_1$ [et par symétrie, à $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \varphi_2$]. Pour toute version d'inférence par plausibilité, (rP3) et (rP3') sont équivalentes, dans ce cas là, on conclut donc en fait $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \varphi_1$ et $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \neg\varphi_1$:

Propriété 5.8
1. *L'inférence par N-plausibilité f_N satisfait (rP3).*
2. *Une inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (rP3) ssi elle satisfait (P3) ssi la mesure de plausibilité définissant f_{FH} satisfait (A3).*
3. *Une inférence par plausibilité (de n'importe quelle version, f_N ou f_{FH}) satisfait (rP3) ssi elle satisfait (rP3').*

Les démonstrations ne présentent aucune difficulté. Le troisième point est même immédiat: toute inférence par plausibilité satisfait (P), donc, pour f_N et pour f_{FH}, (rP3) est en fait équivalent à l'apparent renforcement (rP3').

Le deuxième résultat montre qu'il existe des f_{FH} qui falsifient (rP3).

Voici maintenant la condition pour le passage de la version originale de l'inférence par plausibilité vers la nouvelle version:

Théorème 5.9 *Une inférence par plausibilité f_{FH} est égale à une inférence par N-plausibilité f_N ssi f_{FH} satisfait (P3), le cas trivial du (OU).*

Rappelons que pour f_{FH} et pour f_N, l'inférence satisfait (P3) ssi la plausibilité qui la définit satisfait (A3). Ce théorème et sa démonstration sont importants, voici donc la démonstration un peu abrégée, mais commentée.

$\Rightarrow$: Si f_{FH} falsifie (P3), elle falsifie (rP3), satisfaite par toute inférence f_N.

$\Leftarrow$: Si f_{FH} satisfait (P3), on introduit une nouvelle mesure de plausibilité Pl' avec sa relation $\leq'$, définies à partir de la plausibilité Pl et la relation $\leq$ qui définissent f_{FH}. Voici l'idée générale: Grâce à (A3), on sait que l'on peut conserver intactes les classes d'équivalence (où deux formules sont équivalentes ssi elles ont la même plausibilité) de la formule **faux**, c'à-d. que l'on conserve l'ensemble de toutes les formules ayant une plausibilité égale à $\perp$. Il faut par contre (en général) casser les autres classes d'équivalence. Du moins doit-on casser les autres classes quand elles contiennent deux formules inconsistantes. Afin de simplifier la définition de Pl', on choisit ici de casser complètement toutes les autres classes en singletons, mais on pourrait essayer d'avoir beaucoup moins de classes. Voici les trois conditions qui doivent être satisfaites par $(Pl', \leq')$: (1) deux formules contradictoires qui étaient dans la même classe pour Pl (sauf la classe de **faux**) doivent devenir incomparables pour le nouvel ordre et Pl' (donc elles ne doivent pas demeurer dans la même classe, mais cela ne suffit pas), (2) condition (A1), et (3), informellement, "à part cela, préserver la relation" induite sur $\mathbf{L}$ par $(Pl, \leq)$.

On procède ainsi: Si $Pl(\varphi) = \perp$, alors $Pl'(\varphi) = \perp'$, sinon $Pl'(\varphi) = (Pl(\varphi), \varphi)$.

Cela définit l'ensemble D' des valeurs $Pl'(\varphi)$, voici la relation $\leq'$ sur D':

1. Si $d' \in D'$, $\bot' \leq' d'$.
2. $(Pl(\varphi_1), \varphi_1) \leq' (Pl(\varphi_2), \varphi_2)$ si $Pl(\varphi_1) < Pl(\varphi_2)$.
3. $(Pl(\varphi_1), \varphi_1) \leq' (Pl(\varphi_2), \varphi_2)$ si $Pl(\varphi_1) = Pl(\varphi_2)$ et $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$.

On a alors l'équivalence suivante: $[Pl'(\varphi_1) \geq' Pl'(\varphi_2)]$ ssi
$[Pl(\varphi_1){=}Pl(\varphi_2){=}\bot$ ou $Pl(\varphi_1){>}Pl(\varphi_2)$ ou $(Pl(\varphi_1){=}Pl(\varphi_2)$ et $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_2{\Rightarrow}\varphi_1)]$. □

Ainsi donc, si f_{FH} satisfait (P3), c'à-d. si f_{FH} est définie par une plausibilité Pl satisfaisant (A3), alors on peut utiliser une inférence par N-plausibilité au lieu de l'inférence par plausibilité originale. Ce résultat montre que la traduction en termes d'inférence par plausibilité donnée en [4] pour le système P, et aussi les "traductions sémantiques directes" données pour la "parameterized probability distribution" (PPD) et pour les structures préférentielles, auraient tout aussi bien pu être données en termes d'inférence par N-plausibilité. Les démonstrations seraient même plus simples, puisque la définition de $\stackrel{\mathrm{N}}{\longrightarrow}$ ne comporte pas l'alternative qui complique un peu les démonstrations avec $\stackrel{\mathrm{FH}}{\longrightarrow}$. Ceci concerne les sections 3, 4 et 5 de [4]. Les petits exemples de [4] dans lesquels la plausibilité est une probabilité sont aussi concernés, puisque (A3) est satisfaite dans ce cas. Les inférences définies par Friedman et Halpern à partir d'une " mesure de plausibilité qualitative" peuvent également être traduites en inférence par N-plausibilité, puisque là encore (A3) est satisfaite. Les sections 6 et 7 de [4] pourraient donc également être énoncées en termes du nouveau formalisme. La section 8 de [4], qui généralise les structures de plausibilité en considérant des ensembles de structures de plausibilité comme une nouvelle super structure de plausibilité (un peu comme les structures de Kripke sont construites à partir des structures logiques classiques en logique modale) pourrait aussi bien être adaptée également. De plus, les structures de plausibilité généralisées réellement considérées dans cette section 8 sont construites à partir de structures qualitatives, donc dans un cas où l'inférence de base originale peut être traduite en la nouvelle inférence.

Voilà pourquoi le théorème 5.9 justifie l'affirmation qu'absolument toutes les inférences par défaut considérées en [4] auraient pu être exprimées aussi en termes de la nouvelle version proposée ici. De plus, cette nouvelle version est supérieure à l'originale dans des cas importants, où le (ET) n'est pas satisfait, comme le montre le cas des X-applications.

Le fait que (A0) est bien plus fort que (A3) permet de démontrer qu'au moins dans le cas fini, la nouvelle version fournit un plus grand nombre d'inférences que la version originale. En ce sens aussi, la nouvelle version est plus puissante, même s'il n'y pas inclusion pour les ensembles d'inférences respectifs.

6 Conclusion et perspectives

Friedman et Halpern affirment que la notion de mesure de plausibilité peut faciliter la compréhension du raisonnement par défaut, en unifiant de nombreux formalismes jusque là disparates. Le présent texte ne peut que renforcer ce point de vue, puisqu'il étend encore le domaine d'applicabilité de cette notion. En effet, travailler avec la version originale ou avec la nouvelle version introduite ici est très similaire. La notion de mesure de plausibilité présente plusieurs avantages. Elle fournit une "sémantique" facile à appréhender, commune à de nombreux formalismes de raisonnement par défaut (et au delà, mais le présent texte ne traite que du raisonnement par défaut). De nombreuses propriétés importantes du raisonnement (comme le (ET), le (OU), la transitivité cumulative) possèdent une traduction exacte et simple en termes de mesure de plausibilité. Cela devrait donc permettre d'obtenir de nouveaux résultats pour les nombreux formalismes concernés, et d'améliorer des résultats déjà connus. Voici un exemple de résultat, portant sur les X-logiques, que l'on peut obtenir par cette approche: Dans le cas fini, il existe une condition portant sur l'ensemble X qui permet de savoir si une X-application satisfait (ET) (condition C1 de [7]). Avec la traduction des X-logiques en inférence par plausibilité (seulement possible avec la nouvelle version pour ce cas là), on obtient une condition alternative ($A2_N$). Il semble que cette condition, au moins dans certains cas, soit plus facile à tester que la condition (C1), seule connue auparavant.

Le présent texte a introduit une nouvelle version, plus simple, de la notion d'inférence par plausibilité de Friedman et Halpern, et a donné la liste des principales propriétés du raisonnement formalisé par ces deux versions. Ces propriétés sont importantes, puisque ce sont elles qui déterminent si un domaine ou une situation peut ou non être traduit en termes de plausibilité. C'est pourquoi nous avons complété la liste des propriétés de la version originale, en plus bien sûr de donner les propriétés de la nouvelle version. Connaître ces propriétés permet aussi de trouver facilement des résultats techniques.

La première application concerne évidemment les deux formalismes eux-mêmes, l'un par rapport à l'autre. Il se trouve que nous avons fourni suffisamment de propriétés pour être capable de déterminer précisément dans quels cas une version peut être exprimée en termes de l'autre version. Une fois ce travail fait, décrire les traductions effectives s'est avéré particulièrement facile.

Les résultats présentés démontrent que la nouvelle version est plus puissante que l'originale (même s'il n'y pas inclusion stricte). Ils démontrent aussi que dans le cas de raisonnement par défaut qui falsifie la règle (ET), la nouvelle version est beaucoup mieux adaptée que la version originale, qui est handicapée par une propriété du raisonnement difficile à appréhender par l'utilisateur, et dont la pertinence semble douteuse.

Il reste à examiner les principaux formalismes de raisonnement par défaut, y compris des variantes de la formulation originale de Reiter, et à faire pour ces formalismes le travail fait ici pour les X-logiques (qui incluent dans certaines conditions, en particulier dans le cas d'un vocabulaire propositionnel fini, la circonscription).Un autre travail important concerne l'utilisation de l'inférence par plausibilité afin de faciliter le calcul effectif des inférences par défaut. La nature de l'inférence par plausibilité fait qu'une fois qu'un formalisme est traduit en ces termes, cela devrait faciliter le calcul effectif de l'inférence par défaut concernée. En effet, on peut "compiler les connaissances" en calculant les plausibilités des formules "hors ligne". Ensuite, le calcul "en ligne" des inférences utiles devrait être accéléré. Cet aspect très important n'a pas été abordé ici, et il conviendrait d'en évaluer la faisabilité. Les deux versions devraient d'ailleurs être considérées, afin de voir s'il n'existe pas des cas intéressants où la version originale peut être utilisée et se révèle supérieure. Il semble toutefois probable qu'en général il y ait peu d'écart entre les versions, et alors autant utiliser la nouvelle version, plus puissante.

Références

[1] A. Bochman. Credulous Nonmonotonic Inference. In T. Dean, editor, *IJCAI-99*, pages 30–35, Stockholm, Aug. 1999. Morgan Kaufmann.

[2] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic Logic. In Gabbay and al. eds, *Handbook of Logic in A.I. and Logic Programming, Vol. 3: Non-Monotonic and Uncertainty Reasoning*, pages 439–513. OUP, 1994.

[3] N. Friedman and J. Y. Halpern. Plausibility measures: a user's guide. In Besnard and Hanks, eds, *UAI-95*, pages 175–194, 1995. Morgan Kaufmann.

[4] N. Friedman and J. Y. Halpern. Plausibility measures and default reasoning. *Journal of the ACM*, 48(4):648–685, July 2001.

[5] J. Y. Halpern. Plausibility Measures: A General Approach For Representing Uncertainty. In Nebel, ed., *IJCAI-01*, pages 1474–1483, 2001.

[6] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics. *Artificial Intelligence*, 44(1–2):167–207, July 1990.

[7] Y. Moinard and R. Rolland. Circumscriptions from what they cannot do (Preliminary report). In *Common Sense'98*, pages 20–41, Jan. 1998. `http://www.ida.liu.se/ext/etai/nj/fcs-98/`

[8] J. Pearl. Probabilistic Semantics for Nonmonotonic Reasoning: A Survey. In *Knowledge Representation*, pages 505–516, Toronto, 1989.

[9] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13(1–2):81–132, Apr. 1980.

[10] P. Siegel and L. Forget. A representation theorem for preferential logics. In Aiello and al. eds, *KR'96*, pages 453–460, 1996. Morgan Kaufmann.

[11] M. A. Suchenek. First-Order Syntactic Characterizations of Minimal Entailment, Domain-Minimal Entailment, and Herbrand Entailment. *J. of Automated reasoning*, 10:237–263, 1993.