Mise à jour d'une base de connaissances possibiliste à l'aide de regles de transition eventuellement incertaines

Boris Mailhé

E. N. S. Cachan,
Antenne de Bretagne
61, Avenue du President Wilson
94235 Cachan cedex

bmailhe@eleves.bretagne.ens-cachan.fr

Henri Prade

I. R. I. T.
Universite Paul Sabatier
118 Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex

prade@irit.fr

RESUME. Dans cet article, la connaissance partielle disponible des évolutions possibles d'un système dynamique est représentée par un ensemble de paires de formules propositionnelles: Si la première est vraie alors la seconde sera vraie a l'étape suivante. Plus généralement, un niveau de certitude, exprimé en termes de mesure de nécessité, peut être associé a la seconde formule. Un graphe de transition possibiliste reliant les états possibles peut être déduit de ces paires et utilisé pour mettre a jour une base de connaissances incertaine, également représentée dans le cadre de la logique possibiliste, et associée a une distribution de possibilité sur les états. La mise a jour peut également s'effectuer directement au niveau syntaxique a partir des paires décrivant les transitions et les formules de la base. Comme de nombreux ensembles de paires peuvent décrire le même graphe, on s'intéresse au représentant de cette classe qui donne les calculs syntaxiques les plus simples. Enfin, on peut affiner la représentation des transitions en utilisant une seconde fonction de transition. On obtient ainsi une description bipolaire, encodée d'une part par des paires associées a des degrés de nécessité décrivant ce qui n'est pas impossible, et d'autre part par des paires associées a des degrés de possibilité garantie indiquant les éventualités les plus couramment observées.

MOTS-CLES: transition, mise à jour, logique possibiliste.

1 Introduction

Une base propositionnelle en logique possibiliste permet de décrire ce qui est connu d'une situation empreinte d'incertitude. À une telle base est semantiquement

associée une distribution de possibilité qui code l'ensemble flou des mondes plus ou moins possibles compatibles avec l'information disponible. Differentes operations de traitement de l'information peuvent etre definies, tant au niveau semantique sur les distributions, que de maniere equivalente et plus compacte au niveau syntaxique sur les bases. Il peut s'agir notamment d'operations de revision à l'arrivee d'une nouvelle information, ou de fusion d'elements d'information emanant de differentes sources, ou encore de prise de decision à partir d'une base de connaissances incertaines et d'une base de buts assortis de priorites. Benferhat *et col.* [BDP 00] ont propose une contrepartie de l'idee de filtrage de Kalman, c'est-à-dire une operation de mise à jour dans un monde dynamique suivie d'une revision, dans le cadre de la logique possibiliste. Dans cet article, nous etudions la mise à jour d'une base possibiliste par une fonction de transition partiellement connue, dans cette perspective.

La recherche de descriptions compactes de haut niveau, en particulier pour des systemes dynamiques, (e.g., [BDH 99]) est en effet un theme important de recherche en intelligence artificielle actuellement. En effet, les agents doivent souvent observer ou interagir avec un environnement en evolution. Differents problemes sont lies à cette question: mise à jour de bases de donnees, description des etats futurs ou passes du systeme ou de l'environnement. Katsuno et Mendelzon [KM 92] ont propose des postulats auxquels devrait obeir toute mise à jour d'une base de connaissances à l'arrivee d'information. La semantique sous-jacente de ces postulats peut être interpretee en termes de transitions preferees à partir d'un etat donne ; voir par exemple [DDP 95]. Dans cet article nous supposons cette fonction de transition partiellement connue sous forme de paires (condition, consequence eventuellement incertaine).

Quand l'évolution est parfaitement connue, la fonction de transition est une application qui à chaque etat associe son successeur. Dans cet article, on considere une connaissance imprecise qui conduit à un graphe de transition non fonctionnel, et si les etats sont les modeles d'un langage logique alors on definit la fonction de transition au niveau syntaxique. De plus, l'on souhaite mener le plus de calculs possibles au niveau syntaxique afin de travailler avec une representation plus compacte tout en restant en accord avec les resultats semantiques.

Après quelques rappels sur la théorie des possibilités, nous définirons d'abord une fonction de transition stricte, puis incertaine, au niveau syntaxique et nous en tirerons le graphe de transition liant les etats. Ce graphe nous permettra ensuite de mettre à jour une base de connaissances, d'abord au niveau semantique, puis syntaxique. Puis nous chercherons la plus petite forme possible calculable syntaxiquement pour exprimer la fonction de transition sans perte d'information. On espere ainsi deboucher sur une methode de calcul raisonnable et entierement syntaxique. Enfin nous nous interesserons à une description plus fine de ce qu'on connait de la fonction de transition, distinguant les etats pouvant certainement suivre l'etat actuel et ceux pour lesquels rien n'interdit qu'ils soient atteints.

2 Rappels

Nous considérons une base de connaissances incertaines, représentée à l'aide de la logique possibiliste [DLP 94]. Une telle base de connaissances Σ est composée d'un ensemble de couples (F, α) ou F est une formule et α une borne inférieure de sa mesure de nécessité. En logique possibiliste, les modèles d'une base de connaissances forment un ensemble flou, de fonction caractéristique π. Etant donné cette fonction et une formule propositionnelle classique F, on définit trois mesures [DP 87] d'après les valeurs de π sur les modèles de F, dont l'ensemble est noté [F]:

- $\Pi(F) = \max_{\omega \in [F]} \pi(\omega)$, appelée *possibilité* de F. Elle mesure à quel point la formule ne surprendra pas l'agent si elle est vraie. $\Pi(F) = 0$ signifie que F est obligatoirement fausse.
- $\Delta(F) = \min_{\omega \in [F]} \pi(\omega)$, appelée *possibilité garantie* de F. Elle exprime à quel point la formule n'a rien d'impossible.
- $N(F) = 1 - \Pi(\neg F) = 1 - \max_{\omega \notin [F]} \pi(\omega)$, appelée *nécessité* de F. Elle exprime à quel point la formule est certaine ($\neg F$ étant impossible). $N(F) = 1$ signifie que F est obligatoirement vraie.

N.B. Si nécessaire on utilisera les notations π_Σ, Π_Σ, Δ_Σ, N_Σ pour souligner que la distribution, ou la mesure est associée à Σ.

3 Représentation imprécise d'une fonction de transition par un ensemble de règles de transition

On considère un ensemble de variables propositionnelles A. $\Omega \equiv P(A)$ est l'univers des états possibles et L l'ensemble des formules logiques sur A.

3.1 Fonction de transition stricte

Définition: La représentation imprécise d'une fonction de transition f sur A est un ensemble de paires (H; C), appelés règles de transition, ou H et C sont deux formules sur A.

Intuitivement, on peut interpréter une paire (H; C) comme: "si H est vraie à l'instant t, alors C doit être vraie à l'instant t + 1". L'idée de décrire des évolutions sous formes de paires, éventuellement assorties de termes annexes liés à l'incertitude ou à la nonmonotonie, se retrouve chez différents auteurs, dont en particulier Cordier et Siegel [CS 92], [CS 95]. Etant donné une représentation f, on peut définir le graphe correspondant Γ^f sur Ω, $\Gamma^f(\omega)$ donnant tous les successeurs possibles pour chaque état ω, à partir de l'information disponible codée par f. Puisque la connaissance d'un ensemble d'états A est une connaissance imprécise, chaque état de A peut être le bon, donc chaque successeur de chaque état de A est un état possible à

l'étape suivante. C'est pourquoi on souhaite pouvoir étendre Γ^f à des ensembles d'états à l'aide d'images supérieures, en posant $\Gamma^f(A) = \cup_{\omega \in A} \Gamma^f(\omega)$. De plus, pour rester cohérent avec notre interprétation des règles, on doit avoir $\forall$ (H; C) $\in$ f, $\Gamma^f([H]) \subseteq [C]$. Ceci impose que $\forall\omega, \forall H, \omega \in [H] \Rightarrow \Gamma^f(\omega) \subseteq [C]$. Ainsi la forme la plus générale possible pour Γ^f est donnée par

$\Gamma^f(\omega) = \cap_{(H;C) / \omega \in [H]} [C]$, ensuite abrégé en $\Gamma^f(\omega) = \cap_{\omega \in [H]} [C]$.

On peut alors calculer $\Gamma^{f-1}(\omega) = \cap_{\omega \in [C]^c} [H]^c$. On peut voir que Γ^f et Γ^{f-1} ont des formes similaires en échangeant H et C et en les complémentant. On peut donc poser $f^{-1} = \{(\neg C; \neg H) \mid (H; C) \in f\}$, ce qui correspond aux contraposées des règles. Une fois qu'on a le graphe, on peut également calculer la clôture de f donnée par $f^* = \{(A; B) \mid \Gamma^f([A]) \subseteq [B]\}$. f^* est l'ensemble des règles auxquelles le système obéit s'il obéit aux règles de f. On peut remarquer que si $(H_1; C_1)$ et $(H_2; C_2)$ appartiennent à f^*, alors $(H_1 \wedge H_2; C_1 \wedge C_2)$ et $(H_1 \vee H_2; C_1 \vee C_2)$ appartiennent également à f^*.

3.2 Cas d'une fonction de transition possibiliste

On peut plus généralement associer une mesure de nécessité à la fonction de transition, donnant à chaque règle un niveau de confiance limité quand l'agent n'a qu'une connaissance incertaine des évolutions possibles. f est alors un ensemble de triplets (H; C; α), où α est le degré de nécessité de la règle, i.e. "si H est vrai à l'instant t, C aura une nécessité d'au moins α à l'instant t + 1". On peut encore déduire un graphe Γ^f de cette fonction: $\mu_{\Gamma^f}(\omega; \omega') = 1 - \max_{\omega \in [H]; \omega' \notin [C]} \alpha$, et utiliser des images supérieures floues [DP 92] pour étendre cette fonction: $\mu_{\Gamma^f(A)}(\omega') = \max_{\omega \in A} \mu_{\Gamma^f}(\omega; \omega')$, ce qui est le principe d'extension de la théorie des ensembles flous, utilisé par Benferhat *et col.* dans [BDP 00]. On voit que si un état ω' ne satisfait pas C, alors $\mu_{\Gamma^f([H])}(\omega') \leq 1 - \alpha$, ce qui est bien ce qu'on attendait. Puis on peut utiliser la méthode d'extraction de formules à partir d'une distribution de possibilité pour construire une clôture de f:

$f^* = \{(A; B; \alpha) \mid \alpha = 1 - \max_{\omega \in [A]; \omega' \notin [B]} \mu_{\Gamma^f}(\omega; \omega')\}$.

4 Application à la mise à jour:

On considère maintenant une base de connaissances possibiliste notée $\Sigma = \{(F_i, \alpha_i), i \in I\}$ sur Ω et sa distribution de possibilité induite π telle que $N(F_i) \geq \alpha_i$ pour $i \in I$ ou I est un ensemble d'indices. On souhaite construire une base

possibiliste Σ' et sa distribution associée π' tels que si un état est rendu possible par Σ, alors ses successeurs dans Γ^f sont rendus possibles par Σ'. On l'obtient par le calcul de l'image supérieure de π par Γ^f, mais on peut obtenir un résultat équivalent au niveau syntaxique, en obtenant directement Σ' de Σ comme on va le voir.

4.1 Cas d'une transition stricte

Sémantiquement, on définit π' par

$\pi'(\omega') = \max_{\omega \in \Gamma^{f-1}(\omega')} \pi(\omega)$,

comme dans [BDP 00]. On exprime ainsi le fait que si un état ω est possible à l'instant t, ses successeurs ω' sont au moins aussi possibles à l'instant t + 1. On peut déduire Σ' de cette distribution. En effet, on peut établir que :

Lemme 1: Soit $(H_0; C_0)$ une règle de f^*. Soit $\alpha = N_\Sigma(H_0)$. Alors $N_{\Sigma'}(C_0) \geq \alpha$.

Preuve:

$N_\Sigma(H_0) = \alpha$ donc $\forall \omega \in [H_0]^c$, $\pi(\omega) \leq 1 - \alpha$,
puisque $N_\Sigma(H_0) = 1 - \max_{\omega \notin [H_0]} \pi(\omega)$.
Soit $\omega' \in \Omega$, tel que $\omega' \notin [C_0]$.
Alors $\Gamma^{f-1}(\omega') \subseteq [H_0]^c$ puisque $\Gamma^{f-1}(\omega) = \bigcap_{\omega \in [C]^c} [H]^c$.
Donc $\pi'(\omega') \leq 1 - \alpha$ à cause de la première inégalité.
Donc $N_{\Sigma'}(C_0) \geq \alpha$ car $N_{\Sigma'}(C_0) = 1 - \max_{\omega \notin [C_0]} \pi'(\omega')$.

Ce lemme donne un moyen syntaxique de trouver Σ'. On peut en effet poser

$\Sigma' = \{(C; \alpha) \mid (\exists H, (H; C) \in f^*) \wedge \alpha = N_\Sigma(H)\}$,

ce qui est cohérent avec le lemme. On peut ainsi représenter l'aspect temporel d'une évolution.

Prenons l'exemple d'une machine à café qui peut être en état de marche (W) ou en panne, avoir reçu suffisamment d'argent (M), avoir un gobelet sous le robinet (G), et être en train de verser du café (C). On peut décrire son fonctionnement par f = $\{(W \wedge M \wedge G; C \wedge \neg M); (W \wedge M \wedge \neg G; W \wedge M \wedge G); (\neg G; \neg C); (\neg M; \neg C)\}$. Supposons maintenant qu'au départ, on ait $\Sigma_0 = \{(W; 0.7); (M; 1)\}$. A partir de cette base de connaissances et de la fonction de transition, on peut prouver $((W \wedge M \wedge G) \vee (W \wedge M \wedge \neg G); 0.7)$. On peut alors déduire $\Sigma_1 = \{((C \wedge \neg M) \vee (W \wedge M \wedge G); 0.7)\}$, puis par la même méthode $\Sigma_2 = \{(\neg C \vee (C \wedge \neg M); 0.7)\}$. Une seule fonction de transition permet de décrire l'évolution d'un système markovien stationnaire. Si le système n'est pas stationnaire, on a besoin d'autant de fonctions de transition qu'il y a d'étapes dans l'évolution.

Le même schéma peut également servir dans un problème de diagnostic. Si on sait qu'à l'instant t on a $\Sigma_t = \{(\neg C; 1)\}$, alors on peut en deduire $\Sigma_{t-1} = \{(\neg W_V \neg M_V \neg G; 1)\}$. La disjonction représente les diverses causes qui peuvent produire les mêmes effets, un problème récurrent en diagnostic.

4.2 Cas d'une fonction de transition possibiliste

Maintenant on calcule l'image supérieure de π par Γ pour obtenir π', puisque tout successeur d'un état possible est possible à l'instant suivant.

$\pi'(\omega') = \max_{\omega \in \Omega} \min\{\pi(\omega), \mu_\Gamma^f(\omega;\omega')\}$.

Lemme 2: Soit $(H_0; C_0; \beta)$ une règle de f^*. Soit $\alpha = N_\Sigma(H_0)$. Alors $N_{\Sigma'}(C_0) \geq \min\{\alpha; \beta\}$.

Preuve:

$N_\Sigma(H_0) = \alpha$ donc $\forall \omega \notin [H_0], \pi(\omega) \leq 1 - \alpha$, puisque

$N_\Sigma(H_0) = 1 - \max_{\omega \notin [H_0]} \pi(\omega)$.

Soit $\omega' \in \Omega$, tel que $\omega' \notin [C_0]$. Alors $\forall \omega \in [H_0], \mu_\Gamma^f(\omega; \omega') \leq 1 - \beta$,

puisque $\mu_\Gamma^f(\omega; \omega') = 1 - \max_{\omega \in [H];\, \omega' \notin [C]} \beta$.

Donc $\pi'(\omega') = \max_{\omega \in \Omega} \min\{\pi(\omega), \mu_\Gamma^f(\omega;\omega')\} \leq \max\{1 - \alpha, 1 - \beta\}$

(car si $\omega \in [H_0]$, $\mu_\Gamma^f(\omega; \omega') \leq 1 - \beta$ et si $\omega \notin [H_0]$, $\pi(\omega) \leq 1 - \alpha$)

i.e. $\pi'(\omega') \leq 1 - \min\{\alpha; \beta\}$. Donc $N_{\Sigma'}(C_0) \geq \min\{\alpha; \beta\}$.

Cette preuve ressemble beaucoup à celle du lemme 1 et permet la même transformation syntaxique:

$$\Sigma' = \{(C; \alpha) \mid (\exists (H; \beta), (H; C; \beta) \in f^*) \wedge \alpha = \min\{\beta; N_\Sigma(H)\}\}.$$

Une fonction de transition floue peut représenter les effets des actions entreprises par l'agent. Pour la machine à cafe, on peut imaginer des actions simples comme $\{(\neg M; M; 1)\}$, prendre le gobelet $\{(G; \neg G; 1)\}$, ou frapper la machine quand elle ne fonctionne pas bien $\{(W; \neg W; 0.8); (\neg W; W; 0.1)\}$. L'incertitude permet de representer le fait que l'agent n'est pas sur des consequences de son action sur l'environnement.

5 Réduction de f^*

Les résultats précédents donnent un cadre théorique correct, mais le calcul de la cloture de f n'est en pratique pas raisonnable: pour n variables propositionnelles, on

peut avoir jusqu'à $2^{(2^{n+1})}$ règles dans f. De plus, l'utilisation de f^* donne trop d'information pour Σ' qu'on doit après simplifier. Il faut donc éliminer l'information inutile de f^*, sans rien perdre d'important. On souhaite pouvoir calculer ce représentant au niveau syntaxique, quitte à ce qu'il ne soit pas minimal.

Définition: Soit $(H_1; C_1)$ et $(H_2; C_2)$ deux règles de transition. On dit que $(H_1; C_1)$ est plus informative que $(H_2; C_2)$ quand $[H_2] \subseteq [H_1]$ et $[C_1] \subseteq [C_2]$.

Cela signifie qu'à partir d'une hypothèse plus faible, une règle plus informative donne une conclusion plus précise ; elle est donc plus utile comme le montre ce lemme:

Lemme 3: Soit f contenant les règles $(H_1; C_1)$ et $(H_2; C_2)$ avec $(H_1; C_1)$ plus informative que $(H_2; C_2)$. Alors, pour toute base de connaissances Σ, les mises à jour syntaxique de Σ par f ou par $f \setminus \{(H_2; C_2)\}$ donnent le même résultat.

Preuve:

Soit $\omega \in \Omega$, tel que $\omega \in [H_2]$. Alors $\omega \in [H_1]$. Donc $\Gamma^f(\omega) = \bigcap_{\omega \in [H]} [C] = [C_1] \cap [C_2] \cap [C']$, ou C' est tiré des autres hypothèses. Comme $[C_1] \subseteq [C_2]$, $[C_1] \cap [C_2] = [C_1]$. Donc $\Gamma^f(\omega) = [C_1] \cap [C']$, ce qui est directement l'image de ω par le graphe issu de $f \setminus \{(H_2; C_2)\}$. D'autre part, la suppression de la règle $(H_2; C_2)$ n'a aucune influence sur les états qui ne satisfont pas H_2.

Il suffit donc de ne garder que les règles les plus informatives de f^* pour obtenir le représentant minimal. On le fait en deux étapes:

- Pour chaque hypothèse, ne garder que la conclusion la plus précise. Puisque $f^* = \{(H; C) | \Gamma^f([H]) \subseteq [C]\}$, on obtient $f_1 = \{(H; C) \mid \Gamma^f([H]) = [C]\}$. On peut déjà observer que toutes les conclusions intéressantes sont de la forme $[C] = \bigcup_{\omega \in [H]} \bigcap [C_i]$, ce qu'on peut exprimer syntaxiquement $C = \vee_i(\wedge_j C_{ij})$, ou les C_{ij} sont des conclusions des règles de f.
- Pour chaque conclusion de f_1, ne garder que l'hypothèse la plus large possible, c'est-à-dire $f_2 = \{(\vee_{(H; C) \in f1} H; C) \mid \exists H, (H; C) \in f_1\}$. f_2 ne contient que les règles les plus informatives mais elle n'est pas forcément facile à calculer, surtout au niveau syntaxique.

C'est pourquoi on cherche une représentation proche de f_2 mais calculable syntaxiquement. On pose $f_3 = \{(\vee_i (\wedge_j H_{ij}); \vee_i (\wedge_j C_{ij})) \mid$ toutes les règles $(H_{ij}; C_{ij})$ sont dans f$\}$. Tout d'abord toutes les règles de f_3 sont dans f^* car si $(H_1; C_1)$ et $(H_2; C_2)$ sont des règles de f^*, alors $(H_1 \wedge H_2; C_1 \wedge C_2)$ et $(H_1 \vee H_2; C_1 \vee C_2)$

sont aussi des règles de f^*. Ensuite, toutes les conclusions de f_2 se trouvent dans f_3 grâce à la remarque du premier point.

Lemme 4: Soit (H'; C') une règle de f_2. Alors ($\vee_{\omega\in[H']} (\wedge_{\omega\in[Hi]} H_i)$; $\vee_{\omega\in[H']} (\wedge_{\omega\in[Hi]} C_i)$) est une règle équivalente, i.e. $[H'] = [\vee\ \omega\in[H'] (\wedge\ \omega\in[Hi]\ H_i)]$ et $[C'] = [\vee\ \omega\in[H'] (\wedge\ \omega\in[Hi]\ C_i)]$.

Preuve:
Puisque C' est une conclusion f_2, il existe des ensembles E et F_E tels que $C' = \vee_E \wedge_{F_E} C_i$. Le lemme est trivialement vérifié si $H' = \vee_E \wedge_{Fe} H_i$. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, puisque H' est la plus large hypothèse possible, $[H'] \supset [\vee_E \wedge_{Fe} H_i]$. Donc il existe un état ω n'appartenant pas à $[\vee_E \wedge_{Fe} H_i]$ mais appartenant à [H']. Pour cet état, $\Gamma^f(\omega) \subseteq [\vee_E \wedge_{Fe} C_i]$, donc $[\vee_E \wedge_{Fe} C_i] = [(\vee_E \wedge_{Fe} C_i) \vee (\wedge\ \omega\in[Hi]\ H_i)]$. On applique le même raisonnement à tous les états de H' \ $[\vee_E \wedge_{Fe} H_i]$ pour obtenir $[C'] = [\vee\ \omega\in[H'] (\wedge\ \omega\in[Hi]\ C_i)]$. D'autre part on a trivialement $[H'] \subseteq [\vee\ \omega\in[H'] (\wedge\ \omega\in[Hi]\ H_i)]$. S'ils n'étaient pas égaux, il y aurait deux états ω et ω' vérifiant les mêmes hypothèses, donc ayant la même image par Γ^f, avec $\omega\in[H']$ et $\omega'\notin[H']$. Alors $[H'] \cup \{\omega'\}$ suffirait pour obtenir la conclusion C' dans f', ce qui contredit le fait que H' est l'hypothèse la plus large qui oblige C' à être vraie à l'instant suivant. Donc $[H'] = [\vee\ \omega\in[H'] (\wedge\ \omega\in[Hi]\ H_i)]$.

Ainsi f_3 contient toute l'information nécessaire. $f_3 = \{(\vee_E (\wedge_{Fe} H_i); \vee_E (\wedge_{Fe} C_i)) \mid$ tous les $(H_i; C_i)$ sont dans f$\}$. f_3 peut également être simplifiée car si dans une base de connaissance Σ on sait (A; α) et (B; β), on peut en déduire (A ∧ B; min {α; β}). Donc si on développe les règles de f_3 pour les mettre sous la forme $(\wedge_E (\vee_{Fe} H_i); \wedge_E (\vee_{Fe} C_i))$, on peut en fait se contenter des disjonctions élémentaires. Enfin, quand on a prouvé $\vee_{Fe} H_i$, il est inutile d'essayer des hypothèses plus vagues qui ne pourront apporter que des conclusions moins precises.

6 Représentation bipolaire de la fonction de transition

Il est parfois intéressant de distinguer entre informations positives et négatives [DHP 00], [BDKP 02]. C'est le cas par exemple, quand un agent a des buts qu'il souhaite atteindre, des problèmes qu'il souhaite éviter et entre les deux des solutions qui lui sont indifférentes. Une base de connaissances possibiliste standard associée à une mesure de nécessité N représente une information négative puisqu'elle fournit une borne supérieure à la possibilité des modèles refusés. On peut utiliser une seconde base de connaissances associée à une mesure de possibilité garantie Δ pour représenter l'information positive de sorte que chaque modèle ω aura une borne supérieure $\pi_N(\omega)$ et une borne inférieure $\pi_\Delta(\omega)$. Bien sur, ceci n'a de sens que si $\forall\omega\in\Omega,\quad \pi_N(\omega) \geq \pi_\Delta(\omega)$ (critère de cohérence). On a alors besoin d'une seconde

fonction de transition pour travailler sur la base en Δ à chaque étape. Un moyen simple de vérifier le critère de cohérence est de prendre les mêmes hypothèses pour les deux fonctions et d'assurer que pour chaque hypothèse, la conclusion pour la base en Δ implique celle pour la base en N.

Pour cette seconde fonction, on interprète une règle de transition stricte comme: "si H est vraie à l'instant t, alors C est une bonne hypothèse à l'instant t + 1". Attention : C ne sera pas forcément vraie, elle sera juste vraiment possible, ce qu'on exprime à l'aide d'une mesure Δ. Un second graphe Γ_f peut être déduit de règles avec cette interprétation. Maintenant $\Gamma_f(\omega)$ donne tous les états qui satisfont l'agent. La connaissance d'un ensemble d'états possibles A est toujours une connaissance imprécise mais à présent un état doit être un bon successeur de tous les états de A pour être accepté avec certitude. On va donc étendre Γ_f à l'aide d'images inférieures [DP 92], en posant $\Gamma_f(A) = \bigcap_{\omega \in A} \Gamma_f(\omega)$.

Avec cette interprétation les règles de transition donnent la propriété $\forall$ (H; C) $\in$ f, $\Gamma_f([H]) \supseteq [C]$ donc $\forall\omega, \forall H, \omega \in [H] \Rightarrow \Gamma_f(\omega) \supseteq [C]$. Cette fois la forme la plus générale possible est donnée par $\Gamma_f(\omega) = \bigcup_{\omega \in [H]} [C]$.

On voit facilement que dans ce cas, $\Gamma_f^{-1}(\omega) = \bigcup_{\omega \in [C]} [H]$. On peut donc cette fois poser $f_{-1} = \{(C; H) \mid (H; C) \in f\}$. Puis on calcule la clôture de f donnée par $f_* = \{(A; B) \mid \Gamma_f([A]) \supseteq [B]\}$, et le principe d'extension est: si $(H_1; C_1)$ et $(H_2; C_2)$ sont dans f_*, alors $(H_1 \wedge H_2; C_1 \vee C_2)$ et $(H_1 \vee H_2; C_1 \wedge C_2)$ sont aussi dans f_*. Une fonction de transition de possibilité garantie donnera un graphe Γ_f basé sur des images inférieures floues, et α sera considéré comme un degré de possibilité garantie pour C. L'image des états est donnée par $\mu_{\Gamma_f}(\omega, \omega') = \max_{\omega \in [H];\ \omega' \in [C]} \alpha$ et son extension à des sous-ensembles stricts de Ω par $\mu_{\Gamma_f(A)}(\omega') = \min_{\omega \in A} \mu_{\Gamma_f}(\omega; \omega')$. Cette fois on voit que si un état ω' satisfait C, alors $\mu_{\Gamma_f([H])}(\omega') \geq \alpha$, ce qui donne $\Delta(C) \geq \alpha$ si H était vraie à l'instant précédent. On peut également calculer la clôture inférieure de f:
$f_* = \{(A; B; \alpha) \mid \alpha = \min_{\omega \in [A];\ \omega' \in [B]} \mu_{\Gamma_f}(\omega; \omega')\}$.

On peut utiliser la relation Γ_f pour calculer la future base en Δ à partir de l'actuelle base Σ en N. On calcule l'image inférieure π' de π par Γ_f en utilisant l'implication de Dienes (5). Cette image est donnée par

$\pi'(\omega') = \min_{\omega \notin \Gamma_f^{-1}(\omega')} (1 - \pi(\omega'))$. On retrouve le lemme:

Lemme 5: Soit $(H_0; C_0)$ une règle de f_*. Si $N_\Sigma(H_0) = \beta$, alors $\Delta'(C_0) \geq \beta$.

Preuve: $N_\Sigma(H_0) = \beta$ donc $\forall \omega \notin [H_0]$, $\pi(\omega) \leq 1 - \beta$ puisque
$N_\Sigma(H_0) = 1 - \max_{\omega \notin [H_0]} \pi(\omega)$. Soit $\omega' \in \Omega$, tel que $\omega' \in [C_0]$.

Alors $\Gamma_f^{-1}(\omega') \supseteq [H_0]$ car $\Gamma_f^{-1}(\omega) = \cup_{\omega \in [C]} [H]$. Donc

$\forall \omega \notin \Gamma_f^{-1}(\omega')$, $\pi(\omega) \leq 1 - \beta$ à cause de la première inégalité, i.e. $1 - \pi(\omega) \geq \beta$

$\pi'(\omega') \geq \beta$ car $\pi'(\omega') = \min_{\omega \notin \Gamma_f^{-1}(\omega')} (1 - \pi(\omega'))$.

Donc $\Delta_{\Sigma'}(C_0) \geq \beta$ puisque $\Delta_{\Sigma'}(C_0) = \min_{\omega' \in [C_0]} \pi'(\omega')$.

On a donc un moyen syntaxique de calculer Σ_Δ' comme avec les nécessités. On a $\Sigma_\Delta' = \{(C; \beta) \mid (\exists H, (H; C) \in f_*) \wedge \beta = N_\Sigma(H)\}$.

Ces résultats peuvent être généralisés à une fonction f_* floue pour travailler sur une base en Δ. Le calcul sémantique de π' est celui d'une image inférieure floue [DP 92] toujours avec la même implication:
$\pi'(\omega') = \min_{\omega \in \Omega} \max\{1-\pi(\omega), \mu_{\Gamma_f}(\omega;\omega')\}$. On a alors le pendant du lemme 2:

Lemme 6: Soit $(H_0; C_0; \alpha_0)$ une règle de f_*. Soit $\beta = N_\Sigma(H_0)$. Alors $\Delta_{\Sigma'}(C_0) \geq \min\{\alpha; \beta\}$.

Preuve:
$N_\Sigma(H_0) = \beta$ donc $\forall \omega \notin [H_0]$, $\pi(\omega) \leq 1 - \beta$
puisque $N_\Sigma(H_0) = 1 - \max_{\omega \notin [H0]} \pi(\omega)$.
Soit $\omega' \in \Omega$, tel que $\omega' \in [C_0]$. Alors $\forall \omega \in [H_0]$, $\mu_{\Gamma_f}(\omega; \omega') \geq \alpha_0$
car $\mu_{\Gamma_f}(\omega; \omega') = \max_{(H; C) / \omega \in [H]; \omega' \in [C]} \alpha$.
Donc $\pi'(\omega') = \min_{\omega \in \Omega} \max\{1 - \pi(\omega), \mu_{\Gamma_f}(\omega; \omega')\} \geq \min\{\alpha_0, \beta\}$
car si $\omega \notin [H_0]$, $1 - \pi(\omega) \geq \alpha_0$ et si $\omega \in [H_0]$, alors $\mu_{\Gamma_f}(\omega; \omega') \geq \beta$.
Donc $\Delta_{\Sigma'}(C_0) \geq \min\{\alpha_0; \beta\}$.

On peut encore calculer Σ' sans avoir à travailler sur Ω, en posant la formule

$\Sigma' = \{(C; \beta) \mid (\exists (H; \alpha), (H; C; \alpha) \in f_*) \wedge \beta = \min\{\alpha; \Delta_\Sigma(H)\}\}$.

7 Conclusion

Cet article montre comment la connaissance imprécise et incertaine d'une fonction de transition peut être représentée dans le cadre de la logique possibiliste, et comment des problèmes de prédiction (ou de postdiction) peuvent être traités à l'aide d'une telle fonction incertaine et d'une base de connaissance possibiliste décrivant l'information disponible à propos de l'état actuel du monde. Il détaille aussi comment les calculs peuvent être effectués au niveau syntaxique, en restant en accord avec la sémantique possibiliste. De plus ces problèmes ont également été traités dans le cas d'une représentation bipolaire, plus riche.

L'approche proposée peut être comparée à la mise à jour généralisée de Boutilier [B95] (voir également [LMW 01] pour un traitement plus compact grâce à une prise en compte de relations d'indépendance logique). Plusieurs différences sont à noter : [B95] travaille au niveau sémantique, utilise un opérateur de conditionnement dans le cadre représentationnel de la théorie des fonctions de Spohn (cadre qui peut être relié de manière étroite à la théorie des possibilités [DP 91]), et privilégie les transitions les plus plausibles.

Les résultats préliminaires de cet article pourront être développés dans de nombreuses directions comme l'extension à la logique du premier ordre, les relations avec les logiques de l'action, ou avec les automates possibilistes. En effet, les fonctions de transition modélisées dans l'article peuvent être assimilées à des actions non déterministes à effets conditionnels. Cependant, on ne s'est pas intéressé ici aux problèmes du décor, ou de la ramification. Notons aussi qu'à la différence des systèmes de transition dans les langages d'actions, dans le cas où aucune pré-condition d'un effet conditionnel n'est satisfaite par le monde considéré, on aboutit à une situation d'ignorance totale (tous les mondes sont des successeurs totalement possibles), plutôt que de supposer que ce monde considéré persiste.

Remerciements

Les auteurs remercient les relecteurs pour leurs commentaires utiles et pertinents.

Références

[BDP 00] S. Benferhat, D. Dubois, H. Prade, "Kalman-like filtering and updating in a possibilistic setting", *Proc. of the 14th European Conf. on Artificial Intelligence (ECAI '2000),* (W. Horn, ed.), Berlin, Aug. 2000, 8-12.

[BDKP 02] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, H. Prade, "Possibilistic logic representation of preferences: relating prioritized goals and satisfaction levels expression", *Proc. 15th Europ. Conf. on Artificial Intelligence (ECAI '2002)*, (F. von Harmelen , ed.), Lyon, July 2002, 685-689.

[B95] C. Boutilier, "Generalized update : Belief change in dynamic settings", *Proc. of the 14th Inter. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, Montreal, Canada, Aug. 20-25, 1995, 1550-1556.

[BDH 99] C. Boutilier, T. Dean, S. Hanks, "Decision-theoretic planning : structural assumptions and computational leverage", *J. of Artificial Intelligence Research*, 11, 1-94, 1999.

[CS 92] M.-O. Cordier, P. Siegel, A temporal revision model for reasoning about world change, *Proc. 3rd Int. Conf. Principles of Knowledge Repre-*

sentation and Reasoning (KR'92), Morgan Kaufmann, 732-739, 1992.

[CS 95] M.-O. Cordier, P. Siegel, Prioritized transitions for updates, *Proc.of 3rd European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty* (ECSQARU), (C. Froidevaux, J. Kohlas, eds.), LNCS 946, Springer Verlag, 142-151, 1995.

[DDP 95] D. Dubois, F. Dupin de Saint-Cyr and H. Prade, "Update postulates without inertia", *Proc. Europ. Conf. of Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU '95)*, (C. Froidevaux, J. Kohlas, eds.), Fribourg, Switzerland, July 1995, 162-170.

[DHP 00] D. Dubois, P. Hajek, H. Prade. "Knowledge-driven versus data-driven logics", *J. of Logic, Language, and Information*,9 , 65-89, 2000.

[DLP 94] D. Dubois, J. Lang, H. Prade. "Possibilistic logic", In : *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Vol. 3*, (Gabbay, D.M., Hogger, C.J., Robinson, J.A et Nute, D., eds.), Oxford University Press, 439-513, 1994.

[DP 87] D. Dubois, H. Prade, "*Théorie des Possibilités*", Masson, Paris, 1987.

[DP 91] D. Dubois, H. Prade, "Epistemic entrenchment and possibilistic logic", *Artificial Intelligence J.,* 50, 1991, 223-239.

[DP 92] D. Dubois, H. Prade, "Upper and lower images of a fuzzy set induced by a fuzzy relation: application to fuzzy inference and diagnosis", *Information Sciences,* 64, 1992, 203-232.

[KM 92] H. Katsuno and A.O. Mendelzon, "On the difference between updating a knowledge base and revising it", *Proc. 2nd Inter. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91),* (J. Allen, R. Fikes, E. Sandewall, eds.), Cambridge, Mass., April 1991, 387-394. Revised version in *Belief Revision,* (P. Gärdenfors, ed.), Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1992, 301-311.

[LMW 01] J. Lang, P. Marquis, M.-A. Williams, "Updating epistemic states" *, AI 2001/ Advances in Artificial Intelligence (Proc. 14th Australian Joint Conf. on Artif. Intelligence, Adelaide, Dec. 2001),* (M. Stumptner, D. Corbett, M. Brooks, eds.), LNAI 2256, Springer Verlag, 2001, 297-308.