Représentation des actions et planification en environnement partiellement observable en logique doxastique graduelle

Noël Laverny
IRIT, Toulouse
Noel.Laverny@freesbee.fr

Jérôme Lang
IRIT, Toulouse
lang@irit.fr

Résumé *L'article [18] donne un cadre formel et algorithmique pour la représentation d'actions et la génération de plans en environnement observable, où l'observabilité partielle est représentée à l'aide de la logique épistémique* S5*, mais ne permet pas de prendre en compte des observations en conflit avec l'état de croyance initial, ni de considérer des croyances graduelles dans l'expression des effets des actions ou des conditions de branchements des plans. Nous en proposons ici une extension, où les croyances graduelles sont représentées à l'aide d'une famille d'opérateurs doxastiques* B_i*. Nous introduisons d'abord les notions d'état de croyances et d'observation ; nous montrons ensuite comment calculer la révision d'un état de croyance par une observation, puis la progression d'un état de croyance par une action épistémique et par une action ontique. Nous introduisons enfin la notion de plan, étendons la progression des actions aux plans et montrons comment la vérification de plan se ramène à la validité d'une certaine formule de notre logique doxastique graduelle.*

1 Introduction

La planification en environnement partiellement observable est un problème délicat en intelligence artificielle, en raison de sa grande complexité algorithmique, à la fois en ce qui concerne le temps de recherche d'une politique d'action et la taille d'une politique. L'approche la plus répandue est celle des *Processus décisionnels markoviens partiellement observables* (POMDP). Néanmoins, dès que l'espace des états a une structure combinatoire, leur applicabilité est limitée en pratique, à cause de leur complexité algorithmique : il n'est alors plus question d'envisager une représentation explicite des effets des actions, des préférences de l'agent et des politiques solutions.

C'est pourquoi de nombreux chercheurs ont développé des approches logiques pour la représentation des actions et la planification en environnement partiellement observable. La logique propositionnelle permet en effet une représentation structurée et concise des diverses données du problème et facilite sa résolution grâce à l'utilisation de méthodes algorithmiques déjà bien éprouvées pour les problèmes de satisfaisabilité, d'abduction etc.

L'étude de langages propositionnels pour la représentation d'actions comprend le développement de *langages d'action*, par exemple ceux de la famille du langage $\mathcal{A}$ [13] et de ses extensions (voir notamment [14, 2], ainsi que les théories causales [24, 22] et la mise-à-jour des croyances [30, 19]. Les langages d'actions sont le fondement d'approches logiques pour la planification avec actions non-déterministes et observabilité partielle, voir notamment [6, 1, 4, 26] (on y reviendra avec plus de détails en conclusion) et [17] qui est le point de départ du présent article.

Les approches précédentes offrent, grâce à l'utilisation de la logique pour la représentation des actions, un avantage indéniable par rapport aux POMDP du point de vue de la concision de la représentation des données et solutions du problème et du temps de calcul pour la recherche d'une politique solution ; mais, d'un autre côté, ils introduisent une perte d'expressivité considérable en éliminant toute gradualité de l'incertitude dans les états de croyance. En effet, l'incertitude sur l'état courant et sur les effets des actions est du type "tout-ou-rien" : les états de croyance sont représentés par des formules de la logique épistémique $\mathsf{S5}$ [2, 1, 17] (ou de la logique classique pour les autres approches) et la sémantique des actions non-déterministes est décrite en termes de fonctions de transition non-déterministes (mais sans gradualité). On peut ainsi exprimer qu'il est possible que tel état s soit l'état courant du monde, ou que tel état s' est un état successeur possible de l'état s lorsqu'on a effectué l'action a, mais on ne peut pas exprimer que tel état est plus plausible qu'un autre, ou que tel effet d'action est plus normal (ou moins exceptionnel) qu'un autre. On ne peut évidemment pas faire ce reproche aux POMDP, qui ont une représentation des états de croyance et des fonctions de transition d'actions probabilistes.

Cette perte de la notion graduelle de l'incertitude est fâcheuse, puisqu'il est de nombreux problèmes pratiques où les connaissances de l'agent ne sont pas une certitude inébranlable.

On peut alors se demander comment réintroduire, dans les approches logiques pour la représentation d'action et la planification en environnement partiellement observable, la gradualité dans l'expression de l'incertitude des croyances, tout en préservant l'expression logique de ces croyances. Cela nous conduit à remplacer la logique épistémique $\mathsf{S5}$ par une logique doxastique permettant l'expression de modalités quantifiant l'incertitude d'une manière ou d'une autre. Il est temps de noter la distinction entre logique *épistémique* (ou logique *des connaissances*) et logique *doxastique* (ou logique *des croyances*) : tandis que les connaissances sont toujours vraies (ce qui correspond à l'axiome $K\varphi \rightarrow \varphi$ de $\mathsf{S5}$), les croyances ne le sont pas nécessairement. Tandis que la logique épistémique la plus simple est $\mathsf{S5}$, la logique doxastique la plus simple est $\mathsf{KD45}$ (elle ne se distingue de $\mathsf{S5}$ qu'en ce qui concerne l'axiome ci-dessus, imposé dans $\mathsf{S5}$ mais pas dans $\mathsf{KD45}$). Une piste intéressante consisterait à introduire des modalités de croyances *probabilistes*. C'est cependant une tâche peu aisée, et qui nous emméneraient loin du cadre de [18] que nous souhaitons ici généraliser. Par exemple, la propriété cruciale $K(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$ est satisfaite dans $\mathsf{S5}$ et $\mathsf{KD45}$, mais ne le serait pas dans une logique doxastique probabiliste (si $P_\alpha\varphi$ exprime intuitivement que $Prob(\varphi) \geq \alpha$, alors $P_\alpha\varphi \wedge P_\alpha\psi$ n'est pas équivalente à $P_\alpha(\varphi \wedge \psi)$. Pour cette raison, nous faisons dans cet article le choix de prendre comme théorie de l'incertain les *fonctions conditionnelles ordinales* (FCO) [27], connues parfois sous le nom de *kappa-fonctions* et équivalentes à une forme de la théorie des possibilités (où l'opération choisie pour le conditionnement est le produit) [11]. Comme on le verra en partie 2, les FCO permettent de passer facilement à une version graduelle de $\mathsf{KD45}$, tout en gardant toutes les propriétés de $\mathsf{KD45}$. En outre, les OCF, dont il existe une interprétation intuitive en termes de probabilités infinitésimales, sont suffisantes dans de nombreuses situations où il n'existe qu'un petit nombre de "degrés de croyance". Ce choix constitue donc un bon compromis entre simplicité et expressivité.

En partie 2 on définit la version graduelle du langage $\mathsf{KD45}$ propositionnel, puis on définit une sémantique et une axiomatique ; cette Section sera limitée à l'essentiel, étant donnée qu'elle n'est pas l'objectif principal de cet article. La partie 2.3 on introduira un connecteur supplémentaire, qui a pour effet de *combiner* deux états de croyance ; cette combinaison est cruciale pour la suite de l'article. La partie 3.1 introduit la notion d'observation et d'action épistémique dans le cadre précédemment défini, ainsi que la révision d'un état de croyance par une observation et, enfin, la progression d'un état de croyance par une action épistémique. La partie 3.2 introduit les actions ontiques et l'opérateur de progression associée. La partie 4 introduit les notions de plan doxastiquement interprétables (PDI), de progression d'un état de croyance initial par un PDI, et de problème de planification. On montrera notamment en quoi les PDI constituent une version graduelle des "programmes à base de connaissances" de [12] et de [25]. On conclura par un bref exposé de travaux connexes et quelques pistes de recherches futures.

2 $\mathsf{KD45}_G$ et les états de croyances

2.1 Le langage

Le langage $\mathcal{L}$ de la logique doxastique graduelle $KD45_G$ est construit à partir d'un ensemble fini de variables propositionnelles VAR, de connecteurs habituels de la logique classique, des constantes logiques $\top$ et $\bot$ et des modalités doxastiques $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, …, $\mathbf{B}_\infty$. L'ensemble des *formules plates* (FP) de $\mathcal{L}$ est défini inductivement par :

- pour toute formule propositionnelle (sans modalité) φ construite sur VAR, φ est une FP et pour tout $i = 1, \ldots, +\infty$, $\mathbf{B_i}\varphi$ est une FP.
- si Φ et Ψ sont des FP alors $\neg\Phi$, $\Phi\wedge\Psi$, $\Phi\vee\Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$ et $\Phi \leftrightarrow \Psi$ sont des FP.

Intuitivement, $\mathbf{B_i}\varphi$ signifie que « l'agent croit que φ est vrai au degré i ». $\mathbf{B}_1$ est la plus faible croyance, $\mathbf{B}_\infty$ est la plus forte et coïncide avec une modalité de connaissance : on notera $\mathbf{B}_\infty = \mathbf{K}$ (ce que l'agent croit à un degré infini est vrai). Les formules de $\mathsf{KD45}_G$ seront notées Φ, Ψ etc.

Les formules plates de $KD45_G$ ne contiennent donc pas de modalités imbriquées. Cette restriction est faite pour simplifier l'exposition, vu que le développement de $\mathsf{KD45}_G$ n'est pas l'objectif principal de cet article[1].

Définissons maintenant des classes de formules (plates) dont nous aurons besoin par la suite :

- une formule est *objective* si et seulement si elle ne contient aucune modalité ; les formules objectives seront notées par des lettres grecques minuscules $\varphi, \psi, \ldots$.
- un *atome doxastique* est une formule de $KD45_G$ de la forme $\mathbf{B_i}\varphi$ où φ est objective ;
- un *atome doxastique graduel* (ADG) Φ de $KD45_G$ est une formule de la forme $\mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{B_n}\varphi_n \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}\varphi_1$, où φ, φ_1, $\ldots$, φ_n sont des formules objectives (avec $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$ si $i > j$) ;
- une formule Φ de $\mathsf{KD45}_G$ est dite *doxastiquement interprétable* si et seulement si elle ne contient pas de sous-formule qui ne soit pas dans le champ d'une modalité, ou encore, si et seulement si Φ est une combinaison booléenne d'atomes doxastiques ;
- une *formule doxastique positive* (FDP) Ξ de $KD45_G$ est une formule épistémiquement interprétable formée à partir d'atomes doxastiques et des connecteurs $\wedge$, $\vee$ (mais pas $\neg$ – pas de négation devant une modalité).

Voici des exemples :

- $\mathbf{B_4}(a \rightarrow \neg b) \vee (\mathbf{B_2}b \wedge \mathbf{K}(a \vee c)$ est une formule plate de $\mathsf{KD45}_G$, mais elle n'est pas épistémiquement interprétable ;
- $(\mathbf{B_4}a \rightarrow \mathbf{B_2}\neg b) \vee \mathbf{K}(a \vee c)$ est épistémiquement interprétable, mais ce n'est pas une FDP ;
- $(\mathbf{B_4}a \wedge \mathbf{B_2}\neg b) \vee \mathbf{K}(a \vee c)$ est une FDP (a fortiori, elle est épistémiquement interprétable) ;
- $\mathbf{K}(a \vee c) \wedge \mathbf{B_3}a \wedge \mathbf{B_2}a \wedge \mathbf{B_1}(a \wedge \neg c)$ est un ADG ;
- $\mathbf{K}(a \vee c)$, $\mathbf{B_3}a$, $\mathbf{B_2}a$ et $\mathbf{B_1}(a \wedge \neg c)$ sont des atomes doxastiques.

2.2 La sémantique

Soit $S = 2^{VAR}$ l'ensemble des interprétations associé à VAR. Un élément de S sera appelé un monde ou encore un *état*. On notera ses éléments $s, s', \ldots$. Si φ est une formule objective on notera $Mod(\varphi)$ l'ensemble de ses modèles : $Mod(\varphi) = \{s \in S \mid s \models \varphi\}$. Si $A \subseteq S$, on notera $Form(A)$ la formule φ telle que $Mod(\varphi) = A$.

Une structure $\mathcal{M}$ pour $\mathcal{L}$ est un n-uplet $\mathcal{M} = \langle s^*, M_\infty, M_n, \ldots, M_1 \rangle$, où :

[1]Par ailleurs, une définition plus générale, autorisant les formules avec modalités imbriquées, conduirait à un résultat montrant que toute fomule est équivalente à une formule plate – tout comme dans les logiques épistémique et doxastique usuelles $\mathsf{S5}$ et $\mathsf{KD45}$.

- $M_\infty, M_n, \ldots, M_1$ est une famille finie de sous-ensembles imbriqués de S : $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq M_\infty \subseteq S$;
- $M_1 \neq \emptyset$;
- $s^* \in M_\infty$.

La vérité d'une formule (plate) de $\mathcal{L}$ en un état d'une structure $\mathcal{M}$ est définie de manière inductive par :
- pour toute formule objective φ de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M} \models \varphi$ si et seulement si $s^* \models \varphi$;
- pour toute formule objective φ et pour tout $i \in \overline{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M} \models \mathbf{B_i}\varphi$ si et seulement si $\forall s' \in M_i$ on a $s' \models \varphi$;
- pour toute formule Φ et Ψ de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M} \models \Phi \wedge \Psi$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \Phi$ et $\mathcal{M} \models \Psi$
- pour toute formule Φ et Ψ de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M} \models \Phi \vee \Psi$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \Phi$ ou $\mathcal{M} \models \Psi$
- pour toute formule Φ de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M} \models \neg\Phi$ si et seulement si $\mathcal{M} \not\models \Phi$.

Les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ sont définis à partir des connecteurs précédents de la façon habituelle.

Si $\mathcal{M} \models \Phi$, on dit que Φ est vraie dans la structure $\mathcal{M}$. Une formule de $\mathcal{L}$ est *valide* (resp. *satisfaisable*) si et seulement si elle est vraie dans tout modèle $\mathcal{M}$ (resp. dans au moins un modèle). Une formule Ψ est une *conséquence* de Φ (ce que l'on note $\Phi \models \Psi$) si et seulement si tout modèle qui vérifie Φ vérifie aussi Ψ. Deux formules Φ et Ψ sont équivalentes (ce que l'on note $\Phi \equiv \Psi$) si et seulement si $\Phi \models \Psi$ et $\Psi \models \Phi$.

Dans une structure $\mathcal{M}$, l'état s^* représente l'état réel tandis que la famille emboîtée d'ensembles d'états $\mathcal{C} = (M_\infty, M_n, \ldots, M_1)$, appelée *état de croyance*, représente les croyances (subjectives) de l'agent quant à l'état réel. Plus i est grand, plus les états de $M_i \backslash M_{i-1}$ sont exceptionnels. En particulier, les mondes qui ne sont pas dans M_∞ sont impossibles, tandis que ceux de M_1 sont "normaux".

Lorsque Φ est doxastiquement interprétable, s^* n'a aucune influence sur la valeur de vérité de Φ ; seul l'état de croyance compte (d'où la terminologie "doxastiquement interprétable") et par abus de langage, pour les formules doxastiquement interprétables on peut noter $\mathcal{C} \models \Phi$ au lieu de $\mathcal{M} \models \Phi$.

Une *fonction conditionnelle ordinale (OCF)* [27] est une fonction $\kappa : S \longmapsto \overline{\mathbb{N}}$ telle que $\min_{s \in S} \kappa(s) = 0$. Intuitivement, $\kappa(s)$ est le degré d'exceptionnalité de l'état s. La fonction κ est étendue aux formules objectives par : $\kappa(\varphi) = \min\{\kappa(s) \mid s \models \varphi\}$.

L'interprétation la plus intuitive de $\kappa(s)$ – et également celle qui est à la base de leur définition – est en termes de probabilités infinitésimales : si $\kappa(s) = k$ alors $prob(s) = o(\varepsilon^k)$, où ε est un réel infiniment petit. Ainsi, $\kappa(s) = 0$ signifie que s a une probabilité non négligeable (ou encore, s est "non exceptionnel"), $\kappa(s) = 1$ que s est "simplement exceptionnel", $\kappa(s) = 2$ que s est "doublement exceptionnel", etc.

Tout état de croyance $\mathcal{C} = (M_1, \ldots, M_n, M_\infty)$ est identifiable à une fonction

κ. En effet, à toute fonction κ on peut associer l'état de croyance $\mathcal{C}_\kappa$ définie par la suite des $M_i = \{s \in S \mid \kappa(s) < i\}$ ($i \in \overline{\mathbb{N}}$). Inversement, à tout état de croyance $\mathcal{C}$ est associé une fonction $\kappa_\mathcal{C}$ définie par $\kappa(s) = 0$ si $s \in M_1$, $\kappa(s) = 1$ si $s \in M_2 \setminus M_1$, ..., $\kappa(s) = n$ si $s \in M_\infty \setminus M_n$ et $\kappa(s) = \infty$ si $s \notin M_\infty$. Intuitivement, M_i est donc l'ensemble des états qui ont un *degré d'exceptionnalité* strictement inférieur à i.

Puisque que tout état de croyance correspond bijectivement à une OCF, on peut identifier l'un et l'autre et définir la validité d'une formule *doxastiquement interprétable* de $\mathsf{KD45}_G$ pour une OCF.

Définition 1 *Soit κ une OCF et Φ une formule doxastiquement interprétable de* $\mathsf{KD45}_G$.

$$\kappa \models \Phi \textbf{ \textit{ssi} } \mathcal{C}_\kappa \models \Phi$$

Les propriétés suivantes aident à comprendre la sémantique de $\mathsf{KD45}_G$.

Proposition 1

1. *pour toute formule φ objective, $\mathcal{C}_\kappa \models \mathbf{B_i}\varphi$* ssi *$\kappa(\neg\varphi) \geqslant i$.*
2. *toute formule doxastique positive est équivalente à un ADG ;*
3. *pour tout état de croyance $\mathcal{C} = \langle M_\infty, M_n, \dots M_1\rangle$, soit Φ_M l'ADG $\mathbf{K}\, Form(M_\infty) \wedge \mathbf{B_n}\, Form(M_n) \wedge \dots \wedge \mathbf{B_1}\, Form(M_1)$. On a $M \models \Phi_M$, et pour tout ADG Ψ, on a $M \models \Psi$ si et seulement si $\Phi_M \models \Psi$.*

Le troisième point montre qu'il y a une correspondance parfaite entre les structures, les OCF et les ADG.

Il n'est pas dans l'objectif de cet article de donner une axiomatique de $\mathsf{KD45}_G$ (ce qui n'est sans doute pas difficile), mais il est important de noter que les classes de formules suivantes sont valides dans $\mathsf{KD45}_G$:

Proposition 2

1. *chaque $\mathbf{B_i}$(y compris $\mathbf{K} = \mathbf{B}_\infty$) est une modalité* $\mathsf{KD45}$ *(restreinte aux formules plates) ; en particulier, $\mathbf{B_i}(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \mathbf{B_i}\varphi \wedge \mathbf{B_i}\psi$ est valide dans* $\mathsf{KD45}_G$.
2. *de plus, $\mathbf{K}\varphi \rightarrow \varphi$ est valide dans* $\mathsf{KD45}_G$ *; $\mathbf{K} = \mathbf{B}_\infty$ est donc une modalité* $\mathsf{S5}$ *;*
3. *pour tout i, $\mathbf{K}\varphi \rightarrow \mathbf{B_i}\varphi$ et pour tout $i \geq j$, $\mathbf{B_i}\varphi \rightarrow \mathbf{B_j}\varphi$ sont valides dans* $\mathsf{KD45}_G$.

2.3 Combinaison de fonctions conditionnelles ordinales et combinaison d'atomes doxastiques graduels

On va maintenant définir un connecteur de *combinaison* de fonctions conditionnelles ordinales, et, par isomorphisme, d'atomes doxastiques graduels. Ce connecteur[2] facilite amplement la définition des opérateurs de révision et de progression introduites dans les parties 3.1 et 3.2.

Commençons par montrer que pour tout atome doxastique graduel, il existe une OCF *minimale* qui le satisfait. Cette propriété n'est rien d'autre qu'une transposition presque immédiate du principe de minimum de spécificité en logique possibiliste [10]. Voir [11] pour une discussion entre les transformations entre OCF et distributions de possibilité, ainsi qu'entre les opérateurs de révision associés.

Définition 2 (OCF minimale) *Etant donné un atome doxastique graduel* $\Phi = \bigwedge \mathbf{B_i}\varphi_i$*, on définit l'OCF* $\kappa^\star_\Phi$ *par :*

$$\forall s \in S \ \kappa^\star_\Phi(s) = \min_{\kappa \models \Phi} \kappa(s)$$

Proposition 3

1. *pour toute OCF* κ*,* $\kappa \models \Phi$ *si et seulement si* $\kappa \geq \kappa^\star_\Phi$ *(a fortiori, on a* $\kappa^\star_\Phi \models \Phi$*) ;*
2. $\kappa^\star_\Phi(s) < i$ *ssi* $s \models \varphi_i$*.*

Définition 3 (combinaison d'*OCF*)

$$\forall s \in S, (\kappa_1 \oplus \kappa_2)(s) = \kappa_1(s) + \kappa_2(s) - \min_S(\kappa_1 + \kappa_2)$$

si $\min_S(\kappa_1 + \kappa_2) < \infty$ *(sinon,* $\kappa_1 \oplus \kappa_2$ *n'est pas définie).*

On vérifie aisément que lorsqu'elle est définie, $\kappa_1 \oplus \kappa_2$ est bien une OCF.

Définition 4 (combinaison d'*ADG*) *Soit* κ *une* OCF*.* $\kappa \models \Phi \oplus \Psi$ *ssi* $\kappa \geqslant \kappa^\star_\Phi \oplus \kappa^\star_\Psi$

Voici quelques propriétés importantes de $\oplus$:

Proposition 4

1. $B_i\varphi \oplus B_j\varphi \equiv B_{i+j}\varphi$ *;*
2. $B_i\varphi \oplus B_j\neg\varphi \equiv \begin{cases} B_{i-j}\varphi & si\ i > j \\ B_{j-i}\neg\varphi & si\ j > i \\ \top & si\ i = j \end{cases}$ *;*
3. $\Phi \oplus \Psi \equiv \Psi \oplus \Phi$ *;*
4. $\Phi \oplus (\Psi \oplus \Xi) \equiv (\Phi \oplus \Psi) \oplus \Xi)$ *;*
5. $\Phi \oplus \top \equiv \Phi$ *;* $\Phi \oplus \bot \equiv \bot$

Notons que $\oplus$ n'est pas idempotent : $\Phi \oplus \Phi$ n'est généralement pas équivalent à Φ.

On peut montrer que l'opérateur $\oplus$ de combinaison d'OCF correspond, à un isomorphisme près, à la combinaison de Dempster ainsi que (renormalisation mise à part) à la combinaison "produit" de distributions de possibilité (voir [3], section 3.4 – et aussi [5]). Mais cela nous entraînerait trop loin, alors que ce n'est pas l'objet principal de cet article.

[2]Attention, ce n'est cependant pas un véritable connecteur dans la mesure où il n'est défini qu'entre des ADG et non pas entre des formules quelconques.

3 Actions et progression

De façon générale, une action a à la fois des effets sur l'état du monde – effets dits *ontiques* – et des effets sur les croyances de l'agent – effets dits *doxastiques* – qui peuvent être dans certains cas tout-à-fait décorrélés des effets ontiques, comme les effets des actions *purement doxastiques*[3] (actions de perception pure, en anglais "sensing actions") : une action purement doxastique n'a *aucun effet sur l'état du monde* (elle laisse ce dernier inchangé) et n'a pour but que d'apporter à l'agent de nouvelles croyances sur cet état du monde. À l'inverse, les actions *purement ontiques* n'apportent aucun feedback à l'agent et n'ont comme effet sur ses croyances que la projection *a priori* des effets ontiques escomptés de l'action sur son ancien état de croyance.

Par souci de simplification, on supposera que les actions sont soit purement doxastiques, soit purement ontiques. Cette hypothèse n'induit pas de perte de généralité, puisque toute action complexe (ontique et doxastique) peut être décomposée en deux actions, l'une étant purement ontique, l'autre purement doxastique (voir [16]). On étudiera donc séparément ces deux types d'actions.

Dans la suite de l'article, on suppose fixé un ensemble d'actions $A = A_O \cup A_D$, où A_O (resp. A_D) est l'ensemble des actions ontiques (resp. doxastiques) disponibles.

3.1 Actions doxastiques

3.1.1 Observations

Une *action doxastique* est définie par les observations possibles qu'elle peut apporter à l'agent. Les plus simples sont les *tests élémentaires*, qui donnent comme feedback la valeur de vérité d'une formule. Plus généralement, les actions doxastiques peuvent avoir plusieurs résultats possibles, qui ne sont pas nécessairement exclusifs (on peut prendre pour exemple l'ensemble des observations "oui", "non", "je ne sais pas"). Plus généralement encore, les résultats possibles peuvent ne pas être fiables, et par conséquent être associés à un certain degré de fiabilité. Une action épistémique est alors décrite par les observations qu'elle peut apporter et leurs degré de fiabilité. Définissons d'abord de façon rigoureuse la notion d'observation avant de passer à la suite.

Définition 5 *Une* observation complexe *est un atome doxastique graduel* $obs = \mathbf{K}o \wedge \mathbf{B_n}o_n \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}o_1$ *(par convention de notation on pose* $o_\infty = o$*). S'il existe un entier* k *tel que l'on ait* $o_i \equiv o_k$ *pour tout* $i < k$ *et* $o_i \equiv \top$ *pour tout* $i > k$ *alors* obs *est une observation* simple *; si de surcroît on a* $k = \infty$*, c'est-à-dire si* $o_i \equiv o$ *pour tout* i*, alors* obs *est une observation* fiable.

[3] Dans la littérature sur les approches logiques de la planification en environnement partiellement observable, on parle généralement d'actions *épistémiques* plutôt que doxastiques, puisqu'on fait en général l'hypothèse que les croyances de l'agent sont fiables, donc sont des connaissances.

Une observation fiable est équivalente à une formule de la forme $\mathbf{K}o$ et apporte par conséquent une croyance certaine (donc une connaissance) sur l'état du monde. Une observation simple est équivalente à une formule de la forme $\mathbf{B_k}o_k$ et correspond à une observation induisant une croyance en un fait unique o_k, dont le degré de fiabilité est k. En pratique, presque toutes les observations seront simples, mais on ne peut toutefois pas se passer des observations complexes (d'autant plus que la décomposition d'une observation complexe n'est pas aussi évident qu'il ne paraît).

Voici un exemple d'observation complexe. *Supposons que l'agent entend un matin à la radio le message "en raison d'un mouvement de grève le trafic aérien à Toulouse-Blagnac sera très fortement perturbé aujourd'hui ; à l'heure actuelle, aucun départ prévu". L'agent, qui a un justement un billet pour un vol à 11 h, estime que cette observation non seulement apporte la connaissance (fiable) que la situation sera perturbée, mais aussi une croyance très forte pour que l'agent ne parte pas à l'heure prévue, et enfin une croyance moins forte pour qu'il ne puisse pas du tout partir de la journée. L'observation o est ici, par exemple,* $\mathbf{K}perturbations \wedge \mathbf{B_2}\neg(part - 11h) \wedge \mathbf{B_1}\neg(part - aujourd'hui)$.

3.1.2 Effet d'une observation sur un ADG

Commençons par le cas général. La prise en compte d'une observation complexe nécessite de combiner l'état de croyance qu'elle induit avec l'état de croyance antérieur, associé à l'ADG Φ.

Définition 6 (Effet d'une observation complexe sur un (ADG)) *Soit* $\Phi = \mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{B_n}\varphi_n \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}\varphi_1$ *un ADG et* $obs = \mathbf{K}o \wedge \mathbf{B_n}o_n \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}o_1)$ *une observation. L'effet de obs sur* Φ *est la combinaison de* Φ *avec* o*, c'est-à-dire* $\Phi \oplus obs$.

Le résultat suivant montre comment calculer la combinaison à partir de l'expression (syntaxique) des ADG.

Proposition 5 *On a* $\Phi \oplus obs \equiv \mathbf{B_1}\varphi'_p \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_m}\varphi'_{p+m-1} \wedge \mathbf{K}\varphi'$ *avec*

$\varphi' = \varphi \wedge o$

$\varphi'_i = (\varphi_1 \wedge o_i) \vee (\varphi_2 \wedge o_{i-1}) \vee \ldots \vee (\varphi_i \wedge o_1)$ *où*

p est le plus petit i tel que $\varphi'_i \neq \bot$

m est le plus petit i tel que $\varphi'_{p+i-1} \equiv \varphi \wedge o$.

Preuve Montrons d'abord que $Mod(\varphi'_j) = \{s \mid \kappa^\star_\Phi(s) + \kappa^\star_{obs}(s) < j\}$. Soit s tel que $\kappa^\star_\Phi(s) + \kappa^\star_{obs}(s) < j$, on a alors $\kappa^\star_\Phi(s) < j - \kappa^\star_{obs}(s)$, d'où $s \models \varphi_{i-\kappa^\star_{obs}(s)}$ (cf proposition). De plus, d'après la proposition 3, $s \models o_{\kappa^\star_{obs}(s)+1}$. Donc $s \models \varphi'_j$. Réciproquement, soit $s \in Mod(\varphi'_j)$, $s \models \varphi'_j$. Il existe alors, par construction de φ'_j, u et v tels que $u + v = j + 1$ et $s \models \varphi_u \wedge o_v$. Ce qui implique (d'après la proposition 3) que $\kappa^\star_\Phi(s) < u$ et $\kappa^\star_{obs}(s) < v$, c'est à dire $\kappa^\star_\Phi(s) + \kappa^\star_{obs}(s) < j$.

Cette propriété nous montre d'abord que $\min_S(\kappa + \kappa_{obs}) = p - 1$, et ensuite que $Mod(\varphi'_{p+i-1}) = \{s \mid \kappa(s) + \kappa_{obs}(s) < p + i - 1\}$, c'est à dire $Mod(\varphi'_{p+i-1}) = \{s \mid \kappa(s) + \kappa_{obs}(s) - \min_S(\kappa + \kappa_{obs}) < i\} = \{s \mid \kappa^\star_\Phi \oplus \kappa^\star_{obs}(s) < i\}$.

Ceci montre que $\kappa^{\star}_{\Phi'} = \kappa^{\star}_{\Phi} \oplus \kappa^{\star}_{obs}$. On a donc l'équivalence $\mathbf{K}\varphi' \wedge \mathbf{B_m}\varphi'_{p+m-1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}\varphi'_p \equiv \Phi \oplus \mathbf{K}o \wedge \mathbf{B_r}o_r \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}o_1$.

$\diamondsuit$

L'expression sémantique (immédiate d'après la partie 2.3 de la révision d'un ADG Φ (correspondant de façon univoque à un état de croyance κ) par une observation *obs* (correspondant de façon univoque à un état de croyance κ_{obs}) est tout simplement $\kappa(s|obs) = \kappa(s) + \kappa_{obs}(s) - min_S(\kappa + \kappa_{obs})$, c'est-à-dire $\kappa(.|obs) = \kappa \oplus \kappa_{obs}$.

Examinons quelques cas particuliers.

Si $obs = \mathbf{K}o$ est une observation fiable alors la combinaison devient une *révision* par o, c'est-à-dire un conditionnement par o au sens de Spohn :

$$\kappa(s|obs) = \begin{cases} +\infty & \text{si } s \models \neg o \\ \kappa(s) - min\{\kappa(s')|s' \models o\} = \kappa(s) - \kappa(o) & \text{si } s \models o \end{cases}$$

Détaillons maintenant l'expression de $\Phi \oplus obs$ lorsque $\Phi = \mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{B_1}\varphi_1$ et $obs = \mathbf{K}o \wedge \mathbf{B_1}o_1$:

cas 1 : $\varphi_1 \wedge o_1$ **cohérent**

$$\Phi \oplus obs = \mathbf{K}\varphi \wedge o) \wedge \mathbf{B_2}((\varphi \wedge o_1) \vee (\varphi_1 \wedge o)) \wedge \mathbf{B_1}(\varphi_1 \wedge o_1)$$

cas 2 : $\varphi_1 \wedge o_1$ **incohérent et** $(\varphi \wedge o_1) \vee (\varphi_1 \wedge o)$ **cohérent**

$$\Phi \oplus obs = \mathbf{K}\varphi \wedge o) \wedge \mathbf{B_1}((\varphi \wedge o_1) \vee (\varphi_1 \wedge o))$$

cas 3 : $(\varphi \wedge o_1) \vee (\varphi_1 \wedge o)$ **incohérent et** $\varphi \wedge o$ **cohérent.**

$$\Phi \oplus obs = \mathbf{K}(\varphi \wedge o)$$

cas 4 : $\varphi \wedge o$ **incohérent.**

$$\Phi \oplus obs = \perp$$

Exemple 1 *Une personne A perdue à un croisement décide de demander son chemin aux passants. Ceux-ci répondent toujours lorsqu'ils sont certains mais on sait très bien que certains d'entre eux (rares tout de même) donnent quand même une indication même s'ils n'en sont pas certains. Comme A n'a pas envi de se tromper, il décide de demander à plusieurs passants.*

Soit x une des directions à prendre et $\neg x$ l'autre. L'ensemble des variables est $VAR = \{x\}$ et l'ensemble des états est $S = \{x,\ \neg x\}$

Initialement les croyances de A sont "vides", ce qui se traduit par une OCF identiquement nulle $\kappa_0 = 0$ ou un ADG $\Phi_0 = \mathbf{K}\top$

Lorsque A exécute l'action « demander son chemin », deux « observations »sont possibles : $obs_1 \equiv \mathbf{B_1}x$ et $obs_2 \equiv \mathbf{B_1}\neg x$. On a les OCF suivantes $\kappa^{\star}_{obs_1} = \{(x,0); (\neg x,1)\}$ et $\kappa^{\star}_{obs_2} = \{(x,1); (\neg x,0)\}$

De manière évidente, $\kappa_0 \oplus \kappa^\star_{obs_1} = \{(x,0);(\neg x,1)\}$ *et* $\Phi_0 \oplus \Phi_{obs_1} = \mathbf{B_1}x$ *et* $\kappa_0 \oplus \kappa^\star_{obs_2} = \{(x,1);(\neg x,0)\}$ *et* $\Phi_0 \oplus \Phi_{obs_2} = \mathbf{B_1}\neg x$

La proposition 3.1.2 avec obs_1 *nous donne :*
$\varphi' = \top \wedge \top = \top$
$\varphi'_1 = \top \wedge x = x$
$\varphi'_2 = (\top \wedge \top) \vee (\top \wedge x) = \top$
on a ici $p = 1$ *et* $p + m - 1 = 1$ *d'où* $\Phi_0 \oplus \Phi_{obs_1} = \mathbf{B_1}x \wedge \mathbf{K}\top = \mathbf{B_1}x$.

Supposons que la première « observation »est obs_1*, la croyance de A est alors définie par l'OCF* $\kappa_1 = \{(x,0);(\neg x,1)\}$ *ou par l'ADG* $\Phi_1 = \mathbf{B_1}x$.
La deuxième observation (quand A demande son chemin à un autre passant) peut de nouveau être obs_1 *ou* obs_2.
Dans le cas de obs_1 : $\kappa_2 = \kappa_1 \oplus \kappa^\star_{obs_1} = \{(x,0);(\neg x,2)\}$ *et* $\Phi_2 = \Phi_1 \oplus \Phi_{obs_1} = \mathbf{B_2}x$
L'utilisation de la proposition 5 nous conduit à :
$\varphi' = \top \wedge \top = \top$
$\varphi'_1 = x \wedge x = x$
$\varphi'_2 = (x \wedge \top) \vee (\top \wedge x) = x$
$\varphi'_3 = (x \wedge \top) \vee (\top \wedge \top) \vee (\top \wedge x) = \top$
on a ici $p = 1$ *et* $p + m - 1 = 2$ *d'où* $\Phi_1 \oplus \Phi_{obs_1} = \mathbf{B_2}x \wedge \mathbf{K}\top = \mathbf{B_2}x$.

Dans le cas de obs_2 : $\kappa_2 = \kappa_1 \oplus \kappa^\star_{obs_2} = \{(x,0);(\neg x,0)\}$ *et* $\Phi_2 = \Phi_1 \oplus \Phi_{obs_1} = \mathbf{K}\top$. *(on revient à la croyance initiale)*
La proposition 3.1.2 nous donne :
$\varphi' = \top \wedge \top = \top$
$\varphi'_1 = x \wedge \neg x = \bot$
$\varphi'_2 = (x \wedge \top) \vee (\top \wedge \neg x) = \top$
on a ici $p = 2$ *et* $p + m - 1 = 1$ *d'où* $\Phi_1 \oplus \Phi_{obs_2} = \mathbf{B_1}\top \wedge \mathbf{K}\top = \mathbf{K}\top$.

On peut montrer par ailleurs (à l'aide d'une démonstration par récurrence) que Φ_n*, l'état de croyances de A au bout de* n *demandes, est soit* $\mathbf{B_q}x$ *(dans le cas ou le nombre de réponses* x *est de* q *supérieur a celui de réponses* $\neg x$ *), soit* $\mathbf{B_q}\neg x$ *(dans le cas contraire) soit* $\mathbf{K}\top$ *(dans le cas où il y a égalité des deux nombres de réponses possibles).*

On voit à la lumière de l'exemple 1 que les observations *renforcent* les croyances a priori lorsqu'elle sont cohérentes avec elles[4].

Enfin, on voit également que l'hypothèse cruciale qui sous-tend la règle de combinaison choisie est l'*indépendance* entre les informations apportées par dif-

[4]Ce comportement doit être distingué de ce qui se passe avec les "transmutations" et "ajustements" [29], où il s'agit seulement de forcer que le nouvel état de croyance satisfasse une contrainte de la forme $\kappa(\varphi) = i$. En théorie des probabilités, les deux règles correspondantes sont les règles de Jeffrey (sans renforcement implicite) et de Pearl (voir [9] pour une dicussion comparative.

férentes occurrences d'actions doxastiques (ainsi, dans l'exemple 1, les sources interrogées à chaque fois que l'action de demander son chemin est exécutée sont considérées comme indépendantes[5]

3.1.3 Progression d'un ADG par une action doxastique

Une action doxastique α, comme une action épistémique dans [18], est définie par l'ensemble des observations $obs^1, \ldots, obs^p$ qu'elle peut fournir, où chaque obs^k est un ADG. On notera $\alpha = \{obs^1,\ obs^2, \ldots, obs^p\}$. Dans l'exemple 1, l'action de demander son chemin est définie par $\{\mathbf{B_1}x,\ \mathbf{B_1}\neg x\}$.

La progression d'un état de croyance par une action (purement) doxastique découle du fait que l'action n'a pas d'effets ontiques (elle ne change pas l'état du monde) et que son effet est la révision de l'ancien état de croyance par l'observation. D'où la définition

Définition 7 *Soit une action doxastique* $\alpha = \{obs^1,\ obs^2, \ldots, obs^p\}$.
- *si* Φ *est un ADG alors* $Prog(\Phi, \alpha) = (\Phi \oplus obs^1) \vee \ldots \vee (\Phi \oplus obs^p)$ *;*
- *si* $\Phi = \Phi_1 \vee \ldots \Phi_m$ *est une disjonction d'ADG alors* $Prog(\Phi, \alpha) = \bigvee_{i=1}^m Prog(\Phi_i, \alpha) = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^p (\Phi_i \oplus obs^j)$.

Dans l'exemple 1, on a $Prog(\Phi_0, \alpha) = \mathbf{B_1}x \vee \mathbf{B_1}\neg x$.

3.2 Actions ontiques

3.2.1 Point de vue sémantique

Dans ce qui suit, on suppose l'agent dans un état de croyance matérialisé par κ son *OCF*, ou par Φ son *ADG*. On notera la progression de l'état de croyance par l'action α avec un opérateur $\star$. $\Phi' = \Phi \star \alpha$, $\kappa' = \kappa \star \alpha$.

Etant donné une action α et un état s, la famille d'OCF $\{\kappa_\alpha(.|s), s \in S\}$ quantifie l'incertitude concernant la dynamique de l'action α, c'est-à-dire les résultats possibles de α selon l'état de départ : $\kappa_\alpha(s'|s)$ est le degré d'exceptionnalité de l'obtention de l'état s' lorsqu'on a effectué l'action α dans l'état s. Pour tout $s \in S$, $\kappa_\alpha(.|s)$ est une OCF ; on a donc, pour tout $s \in S$, $\min_{s' \in S} \kappa_\alpha(s'|s) = 0$.

Définition 8 (progression de κ par une action ontique) $\kappa \star \alpha = \kappa'$ *telle que*

$$\kappa'(s') = \min_{s \in S} \{\kappa(s) + \kappa_\alpha(s'|s)\}$$

κ' est bien une OCF : en effet, la normalisation de κ ainsi que celle de $\kappa_\alpha(.|s)$ impliquent que $\min_{s' \in S} \{\min_{s \in S} \{\kappa(s) + \kappa_\alpha(s'/s)\}\} = 0$, c'est-à-dire $min_S \kappa' = 0$.

[5] Si elles étaient dépendantes, il faudrait le formaliser en introduisant une variable supplémentaire, qui aurait pour effet de bloquer le renforcement.

Exemple 2 *Considérons deux cubes A et B initialement posés sur une table. Pour simplifier, on suppose que l'on n'a qu'une seule variable :* $x =$ (A *est sur* B). *Un robot peut effectuer l'action α : « prendre le cube A s'il n'est pas déjà sur B, et le poser sur le cube B ». Si A est déjà sur B, l'action n'a aucun effet; si A n'est pas sur B, l'action réussit normalement (c'est-à-dire que x devient vrai), et exceptionnellement elle échoue (et x reste faux); c'est-à-dire :*
$\kappa_\alpha(x|x) = 0$; $\kappa_\alpha(\neg x|x) = \infty$; $\kappa_\alpha(x|\neg x) = 0$; $\kappa_\alpha(\neg x|\neg x) = 1$.
Si l'état initial est $\mathbf{K}\top$ *, c'est à dire* $\kappa = \{(x, 0), (\neg x, 0)\}$*, alors on a* $\kappa \star \alpha = \kappa' = \{(x, 0), (\neg x, 1)\}$
et $\kappa' \star \alpha = \kappa'' = \{(x, 0), (\neg x, 2)\}$.

Plus généralement, après avoir exécuté n fois l'action α on obtient $\mathbf{B_n}x$, c'est-à-dire qu'on est certain au degré n que A est sur B. L'explication intuitive est que après ces n exécutions de α, A n'est toujours pas sur B si et seulement si chaque occurrence de α a échoué, ce qui se produit avec un degré d'exceptionnalité de n.

L'exemple 2 montre que comme pour les actions doxastiques, l'hypothèse sous-jacente est l'indépendance entre les résultats des différentes occurrences des actions.

3.2.2 Point de vue syntaxique

Soit α une action purement ontique. Si on ne considérait que des connaissances (et non des croyances graduelles), α pourrait être décrite par une théorie d'action Σ_α d'un langage d'action propositionnel (comme dans [18]).

Il faut donc ici généraliser les théories d'actions de façon à pouvoir traduire le fait que les actions peuvent avoir des effets plus ou moins exceptionnels. Pour cela, on étend comme d'habitude le langage de la manière suivante : chaque variable propositionnelle x de VAR est dupliquée en x_t et x_{t+1} (représentant x respectivement avant et après l'exécution de l'action) ; on désigne par VAR_t (resp. VAR_{t+1} l'ensemble des variables x_t (resp. x_{t+1}) pour $x \in VAR$. Une théorie d'action est alors un atome doxastique graduel de ce langage étendu : $\Sigma_\alpha = \mathbf{K}r \wedge \mathbf{B_n}r_n \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}r_1$, où les r_i sont des "règles de passage" pour l'action α.

Posons $S_t = 2^{VAR_t}$ et $S_{t+1} = 2^{VAR_{t+1}}$. Les règles ci-dessus sont alors définies par :

$$r_i = Form\{(s'_{t+1}, s_t) \mid \kappa_\alpha(s'_{t+1}|s_t) < i\}$$

On considère Φ_t la formule Φ où l'on a remplacé chaque variable x par x_t.

Définition 9 (progression d'un ADG par une action ontique) *Si* $\Phi = \mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{B_n}\varphi_n \ldots \wedge \mathbf{B_1}\varphi_1$ *est un ADG et X est un sous-ensemble des variables apparaissant dans Φ, alors* $Forget(X, \Phi) = \mathbf{K}forget(X, \varphi) \wedge \mathbf{B_n}forget(X, \varphi_n) \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}forget(X, \varphi_1)$*, où* $forget(X, \psi)$ *est le résultat de l'oubli de X dans* *la formule propositionnelle ψ [23, 20]*[6]*. Compte tenu de toutes les notations précédentes on pose :*

$$Prog(\Phi, \alpha) = Forget(VAR_t, \Phi_t \oplus \Sigma_\alpha)$$

La proposition suivante montre que la définition (syntaxique) de la progression d'un ADG par une action ontique correspond bien à la définition (sémantique) de la progression d'une OCF par une action ontique.

Proposition 6

$$\kappa_{Prog(\Phi,\alpha)} = \kappa \star \alpha$$

Exemple 3 *Reprenons l'exemple 2 :* $\Sigma_\alpha = \mathbf{K}(x_t \rightarrow x_{t+1}) \wedge \mathbf{B_1} x_{t+1}$ *et* $\Phi = \mathbf{B_1} x$.
$\Phi_t \oplus \Sigma_\alpha) = \mathbf{K}\varphi \wedge \mathbf{B_n}\varphi_n \wedge \ldots \wedge \mathbf{B_1}\varphi_1$
où
$\varphi = \top \wedge (x_t \rightarrow x_{t+1})$
$\varphi_1 = x_t \wedge x_{t+1}$
$\varphi_2 = (x_t \wedge (x_t \rightarrow x_{t+1})) \vee (\top \wedge x_{t+1})$
$\varphi_3 = (x_t \wedge (x_t \rightarrow x_{t+1})) \vee (\top \wedge (x_t \rightarrow x_{t+1})) \vee (\top \wedge x_{t+1})$
$\varphi_4 = (x_t \wedge (x_t \rightarrow x_{t+1})\wedge) \vee (\top \wedge (x_t \rightarrow x_{t+1})) \vee (\top \wedge (x_t \rightarrow x_{t+1})) \vee (\top \wedge x_{t+1})$

après simplifications

$\varphi = x_t \rightarrow x_{t+1}$
$\varphi_1 = x_t \wedge x_{t+1}$
$\varphi_2 = x_{t+1}$
$\varphi_3 = x_t \rightarrow x_{t+1}$
$\varphi_4 = \varphi_3$
$\varphi_i = \varphi_3$ *pour tout* $i > 2$

$$Forget(VAR_t, Prog(\Phi_t, \Sigma_\alpha)) = \mathbf{K}\top \wedge \mathbf{B_1} x_{t+1} \wedge \mathbf{B_2} x_{t+1} = \mathbf{B_2} x_{t+1}$$

4 Plans et programmes à base de croyances

Pour des raisons de place, nous ne développons cette partie que très partiellement. Les *plans* sont définis inductivement comme suit :

- le plan vide λ est un plan ;
- toute action (ontique ou doxastique) est un plan ;
- si π et π' sont des plans alors $\pi; \pi'$ est un plan ;
- si π et π' sont des plans et Φ un ADG, alors `if` Φ `then` π `else` π' est un plan.

[6]Rappelons que $forget(X, \psi)$ est défini inductivement par (i) $forget(\{x\}, \psi) = \psi_{x \leftarrow \top} \vee \psi_{x \leftarrow \bot}$; (ii) $forget(X \cup \{x\}, \psi) = forget(\{x\}, forget(X, \psi))$.

Un plan est donc un programme sans boucles dont les conditions de branchement sont *doxastiquement interprétables* : l'agent peut décider s'il *croit* (à un degré donné) qu'une formule est vraie, tandis qu'il ne peut en général pas décider si une formule objective donnée est vraie dans le monde réel. On appellera un tel plan *programmes à base de croyances* par analogie avec les *plans à base de connaissances (knowledge-based programs)* de [12] et [25].

La progression d'une formule doxastique positive par un plan est définie inductivement de façon naturelle (voir [18]). En particulier,

$$Prog(\texttt{if}\,\Psi\,\texttt{then}\,\pi\,\texttt{else}\,\pi',\Phi) = \begin{cases} Prog(\pi,\Phi) & \text{si } \Phi \models \Psi; \\ Prog(\pi',\Phi) & \text{si } \Phi \not\models \Psi \end{cases}$$

Définition 10 *Un problème de planification $\mathcal{P}$ consiste en un ADG Φ_{init} correspondant à l'état de croyance initial de l'agent, un ensemble fini d'actions (doxastiques et ontiques) et un ADG Γ décrivant le but. Un plan π est un* plan valide *pour le problème de planification $\mathcal{P}$ si et seulement si $Prog(\pi,\Phi) \models \Gamma$. Un plan π est* valide *pour $\mathcal{P}$ si et seulement si $Prog(\pi,\Phi) \models_{\mathsf{KD45}g} \Gamma$.*

Ainsi, montrer qu'un plan π est valide pour un problème de planification $\mathcal{P}$ revient à calculer la progression de l'état de croyance initial par π et à montrer que le but est une conséquence logique dans $\mathsf{KD45}g$ du résultat de cette progression.

5 Travaux connexes et conclusion

5.1 Travaux connexes

Comme cet article touche à de nombreuses questions, les travaux en relation n'en sont que plus nombreux. Certains ont déjà été mentionnés dans le corps du texte, notamment en parties 1 et 2. D'autres (notamment en ce qui concerne les liens entre représentation d'actions en logique épistémique ou doxastique et langages d'action et approches logiques de la planification, figurent dans [18]. Nous complétons brièvement en mentionnant quelques autres travaux ayant un rapport important avec l'une des parties de cet article.

5.1.1 Logiques doxastiques graduelles

La construction que nous avons donnée en partie 2 n'est pas d'une grande originalité (même si nous n'avons pas connaissance d'un travail identique). Dans l'esprit, elle est similaire à la définition de bases de croyances stratifiées et en particulier en logique possibiliste [10] où le passage entre états de croyance et atomes doxastiques graduels existe sous une forme analogue. Ces approches peuvent être enrichies par des opérateurs de combinaison : voir notamment [3]. Un lien formel entre OCF et théorie des possibilités figure dans [11]. Enfin, [28] donnent une gradualisation de la logique $\mathsf{KD45}$ différente de la nôtre, où $\mathbf{B_n}\varphi$ exprime que φ est vraie partout sauf dans au plus n mondes.

5.1.2 Révision par des observations incertaines

[8] propose également un modèle pour la prise en compte d'observations non fiables fondé sur les OCF, qui diffère toutefois du nôtre en deux points : les observations ne sont pas associées à des états de croyance graduels (mais ce sont les occurrences des observations elles-mêmes qui sont valuées par un degré d'exceptionnalité), et ils ne donnent pas de méthode syntaxique pour la représentation compacte et le calcul pratique de la révision.

Dans [29] et plusieurs travaux ultérieurs, Williams propose des opérateurs de révision, eux aussi fondés sur les OCF ; ces opérateurs, comme la règle de Jeffrey en théorie des probabilités, consistent à changer de façon minimale un état de croyance de sorte à donner à une formule donnée un degré d'exceptionnalité donné, et elle diffère donc de la règle de révision (permettant un renforcement *implicite* des croyances lorsque l'observation est compatible avec l'état de croyance initial, comme on le voit dans l'exemple 1.

[11] donnent une étude synthétique des règles de révision par des observations incertaines (voir aussi [9]).

5.1.3 Actions ontiques à effets incertains

[15] et [7] donnent des règles de mise-à-jour d'états de croyance représentés par des OCFs dans le cadre du raisonnement sur l'action ; ces règles sont très similaires à la nôtre sur le plan sémantique, mais ni [15] ni [7] n'en étudient les aspects syntaxiques (et ne définissent donc pas d'opérateur de progression). [21] définissent eux aussi un opérateur de mise-à-jour d'états de croyance représentés par des OCFs (tant des points de vue sémantique que syntaxique) mais, cet opérateur, qui est plus ou moins là pour la mise-à-jour ce que sont les transmutations pour la révision, est très différent de celui que nous utilisons ; de plus, les observations ne sont pas prises en compte.

5.2 Travaux futurs

Voici plusieurs pistes de recherche pour la continuation de ce travail :

- la prise en compte de différents niveaux d'exceptionnalité *liés à l'occurrence des observations* (comme dans [8]) et pas seulement de niveaux d'exceptionnalité représentant les corrélations entre les observations et l'état réel du monde ;
- la définition et le calcul d'opérateurs de *régression*, permettant ainsi la génération automatique de plans à base de croyances ;
- à plus long terme, la définition de plans à base de croyances dans un contexte purement probabiliste ;
- également à plus long terme, l'extension de ce travail à plusieurs agents qui entretiennent des croyances mutuelles et graduelles – ce qui nous mènera à donner une version graduelle des logiques épistémiques à plusieurs agents comme celles de [12] (ce qui nous paraît un travail particulièrement novateur).

Références

[1] F. Bacchus and R. Petrick. Modelling an agent's incomplete knowledge during planning and execution. In *KR-98*, pages 432–443, 1998.

[2] C. Baral and T. Son. Formalizing sensing actions – a transition function based approach. *Artificial Intelligence*, 125(1–2) :19–91, 2001.

[3] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. *Frontiers in Belief Revision (M.A. Williams and H. Rott, eds.)*, chapter A computational model for belief change and fusing ordered belief bases, pages 109–134. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[4] P. Bertoli, A. Cimatti, M. Roveri, and P. Traverso. Planning in nondeterministic domains under partial observability via symbolic model checking. In *IJCAI-01*, pages 473–478, 2001.

[5] L. Boldrin and C. Sossai. Local possibilistic logic. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 7(3) :309–333, 1997.

[6] B. Bonet and H. Geffner. High-level planning and control with incomplete information using POMDPs. In *AAAI Fall Symp. om POMDPs*, 1998.

[7] C. Boutilier. Generalized update : belief change in dynamic settings. In *Proceedings of the* 14^{th} *International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, volume 2, pages 1550–1556, 1995.

[8] C. Boutilier, N. Friedman, and J. Halpern. Belief revision with unreliable observations. In *Proceedings of the Fifteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-98)*, pages 127–134, 1998.

[9] H. Chan and Darwiche A. On the revision of probabilistic beliefs using uncertain evidence. In *Proceedings of the 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-03)*, 2003.

[10] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In D.M. Gabbay, C.J. Hogger, and J.A. Robinson, editors, *Handbook of logic in Artificial Intelligence and logic programming*, volume 3, pages 439–513. Clarendon Press - Oxford, 1994.

[11] Didier Dubois and Henri Prade. A synthetic view of belief revision with uncertain inputs in the framework of possibility theory. In *Int. J. of Approximate Reasoning*, volume 17, pages 295–324. 1997.

[12] R. Fagin, J. Halpen, Y. Moses, and M. Vardi. *Reasoning about Knowledge.* MIT Press, 1995.

[13] M. Gelfond and V. Lifschitz. Representing action and change by logic programs. *Journal of Logic Programming*, 17 :301–322, 1993.

[14] E. Giunchiglia and V. Lifschitz. An action language based on causal explanation : Preliminary report. In *Proceedings AAAI'98,* pp. 623-630, 1998.

[15] M. Goldszmidt and J. Pearl. Rank-based systems : A simple approach to belief revision, belief update, and reasoning about evidence and actions. In *Proceedings of KR'92*, pages 661–672, 1992.

[16] A. Herzig, J. Lang, D. Longin, and Th. Polacsek. A logic for planning under partial observability. In *AAAI-00*, pages 768–773, 2000.

[17] A. Herzig, J. Lang, and P. Marquis. Planning as abduction. In *Proceedings of the Workshop on Planning under Incomplete Information, held during Ijcai-2001*, 2001.

[18] A. Herzig, J. Lang, and P. Marquis. Action representation and partially observable planning in epistemic logic. In *Proceedings of IJCAI03*, pages 1067–1072, 2003.

[19] H. Katsuno and A.O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Proceedings of KR'91*, pages 387–394, 1991.

[20] J. Lang, P. Liberatore, and P. Marquis. Propositional independence : Formula-variable independence and forgetting. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 18 :391–443, 2003.

[21] J. Lang, P. Marquis, and M.-A. Williams. Updating epistemic states. In Springer-Verlag, editor, *Lectures Notes in Artificial Intelligence 2256 (Proceedings of 14th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence)*, pages 297–308, 2001.

[22] F. Lin. From causal theories to successor state axioms and STRIPS-like systems. In *AAAI-00*, pages 786–791, 2000.

[23] F. Lin and R. Reiter. Forget it ! In *Proceedings of the AAAI Fall Symposium on Relevance*, pages 154–159, New Orleans, 1994.

[24] N. McCain and H. Turner. A causal theory of ramifications and qualifications. In *Proceedings of IJCAI'95*, pages 1978–1984, 1995.

[25] R. Reiter. *Knowledge in Action : Logical Foundations for Specifying and Implementing Dynamical Systems.* MIT Press, 2001.

[26] J. Rintanen. Backward plan construction for planning with partial observability. In *Proc. AIPS-02*, pages 173–182, 2002.

[27] W. Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic states. In William L. Harper and Brian Skyrms, editors, *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, volume 2, pages 105–134. Kluwer Academic Pub., 1988.

[28] W. van der Hoek and J.-J.Ch. Meyer. Graded modalities for epistemic logic. *Logique et Analyse*, 133-134 :251–270, 1991.

[29] M.-A. Williams. Transmutations of knowledge systems. In *Proceedings of KR'94*, pages 619–629, 1994.

[30] M. Winslett. Reasoning about action using a possible models approach. In *Proceedings of the 7^{th} National Conference on Artificial Intelligence*, pages 89–93, St. Paul, 1988.