Opérateurs de fusion à quota

Patricia Everaere[1] Sébastien Konieczny[2] Pierre Marquis[1]

[1] Centre de Recherche en Informatique de Lens
Université d'Artois - 62300 Lens
{everaere,marquis}@cril.univ-artois.fr

[2] Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
Université Paul Sabatier - 31062 Toulouse
konieczny@irit.fr

Résumé *Nous proposons dans cet article une nouvelle famille d'opérateurs de fusion de croyances, appelés opérateurs à quota. L'idée sur laquelle se base cette famille d'opérateurs est simple : une interprétation est retenue comme modèle du résultat de la fusion si elle satisfait suffisamment de bases de croyances, "suffisamment" étant défini par le quota choisi (un entier naturel). Nous montrons que les opérateurs de fusion à quota ont de bonnes propriétés logiques, une complexité algorithmique plus faible que les opérateurs de fusion usuel et sont résistants aux tentatives de manipulation.*

1 Introduction

Les opérateurs de fusion de croyances ont pour but de déterminer les croyances d'un groupe d'agents à partir des croyances individuelles [21, 18, 19, 14, 15, 16]. La fusion de croyances met en jeu trois notions clés : contrainte d'intégrité, base de croyances et ensemble de croyances. Une contrainte d'intégrité représente une information à laquelle doit obéir le résultat de la fusion (par exemple un ensemble de contraintes physiques, de règles, de lois, etc.). Une base de croyances représente les informations fournies par un agent et un ensemble de croyances regroupe les bases de croyances du groupe d'agents considéré. Formellement, ces notions sont représentées comme suit dans notre cadre :

- une *contrainte d'intégrité* μ est une formule propositionnelle cohérente ;
- une *base de croyances* K est un ensemble fini et cohérent de formules propositionnelles, interprété conjonctivement ;
- soient $K_1, \ldots, K_n$, n bases de croyances (non nécessairement distinctes), on appelle *ensemble de croyances* le multi-ensemble E constitué de ces n bases de croyances : $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$.

Le résultat de la fusion de E sous la contrainte μ, noté $\triangle_\mu(E)$, est une base de croyances (vue aussi comme une formule ou un ensemble d'interprétations lorsque cela est possible sans perte de généralité).

Nous proposons dans cet article une nouvelle famille d'opérateurs de fusion, les opérateurs de fusion à quota. L'idée sur laquelle se base cette famille d'opérateurs est simple : il s'agit de considérer le résultat de la fusion comme une élection des meilleures interprétations parmi les interprétations disponibles (selon les contraintes d'intégrité mises en jeu dans la fusion). Intuitivement, on définit un quota k, un entier naturel représentant le nombre minimal de bases de croyances à satisfaire, et le résultat de la fusion est l'ensemble des modèles qui satisfont au moins k bases.

Nous montrons l'intérêt de cette nouvelle famille d'opérateurs en considérant successivement leurs propriétés logiques, leur complexité et leur résistance à la manipulation. Ainsi, nous présentons d'abord une étude des proprités logiques des opérateurs de fusion à quota, dont les conclusions montrent la rationalité. Nous présentons ensuite une étude de la complexité algorithmique de l'inférence de la fusion à quota. Alors que la complexité de l'inférence pour les opérateurs de fusion usuels est typiquement complète pour les classes Θ_2^p ou Δ_2^p du premier niveau de la hiérarchie polynomiale [12, 13], voire même complète pour Π_2^p pour certains opérateurs à sélection de formules [6, 20], l'inférence est seulement complète pour $\mathsf{BH}(2)$ lorsque les opérateurs de fusion à quota sont utilisés (contrairement aux problèmes complets des classes Θ_2^p ou Δ_2^p qui ne peuvent être résolus avec un nombre constant - indépendant de l'entrée - d'appels à un oracle NP - sous les hypothèses usuelles de la théorie de la complexité -, les problèmes de $\mathsf{BH}(2)$ ne nécessitent qu'au plus deux appels à un tel oracle pour être résolus). Une autre caractéristique importante des opérateurs de fusion de croyances (le problème est similaire pour la fusion de buts) est d'être capable de résister à la manipulation de la part des agents. En effet, il n'est pas toujours possible de supposer que les agents participant au processus de fusion sont honnêtes, dans le sens où ils déclarent leurs croyances véritables : il peut être très tentant pour un agent rationnel et doté d'un minimum de capacités de calcul de mentir sur ses croyances si cela lui permet d'atteindre un résultat qui lui est plus favorable. Intuitivement, "plus favorable" signifie ici plus proche des croyances de l'agent : si le groupe adhère aux croyances de l'agent, les décisions ultérieures du groupe, prises à partir du résultat de la fusion, seront certainement plus proches des décisions que l'agent aurait prises seul. Le problème de la manipulation est encore plus saillant lorsque les informations à fusionner ne sont pas des croyances mais des buts. Il est difficile à croire dans ce cas que des agents ayant des buts propres ne tentent pas d'infléchir les buts du groupe. La propriété de résistance à la manipulation est donc importante. Dans [8, 7], nous avons montré que, dans le cas général, la plupart des opérateurs de fusion usuels sont manipulables. Il faut souvent imposer d'importantes restrictions pour atteindre des résultats de non-manipulabilité. Or, de ce point de vue également, les opérateurs de fusion à quota se distinguent : nous montrons dans la suite de l'article qu'ils sont non manipulables.

Le reste de l'article est organisé comme suit. Au paragraphe 2, nous posons quelques définitions de base. Nous définissons les opérateurs de fusion à quota au paragraphe 3, et nous présentons leurs propriétés logiques au paragraphe 4. Nous analysons leur complexité au paragraphe 5 et démontrons leur non-manipulabilité au paragraphe 6. Nous discutons des liens avec d'autres travaux au paragraphe 7, avant de conclure au paragraphe 8. Pour des raisons d'espace, nous ne présentons que les démonstrations de quelques propriétés (les moins immédiates).

2 Préliminaires

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$ sur un alphabet fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles. $\top$ désigne la constante booléenne toujours vraie et $\bot$ la constante booléenne toujours fausse.

Une interprétation est une application de $\mathcal{P}$ vers $\{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation ω est un modèle d'une formule $\phi \in \mathcal{L}$ si et seulement si elle la rend vrai au sens usuel. $[\phi]$ dénote l'ensemble des modèles de la formule ϕ, i.e. $[\phi] = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \models \phi\}$. ϕ est cohérente si et seulement si elle possède au moins un modèle. Deux formules sont logiquement équivalentes ($\equiv$) si et seulement si elles possèdent les mêmes modèles.

On note $\bigwedge E$ la conjonction des bases de croyances de E, c'est-à-dire $\bigwedge E = K_1 \wedge \ldots \wedge K_n$. On dit que l'ensemble de croyances E est cohérent, si $\bigwedge E$ est cohérent. L'union sur les multi-ensembles est notée $\sqcup$ et le cardinal d'un ensemble ou d'un multi-ensemble E est noté $\#(E)$.

Deux ensembles de croyances E et E' sont équivalents (noté encore $E \equiv E'$ par abus d'écriture) si et seulement si il existe une bijection f entre les deux ensembles telle que $\forall K \in E \; f(K) \equiv K$.

3 Opérateurs à quota

La famille des opérateurs de fusion à quota se définit comme suit :

Définition 1 *Soient k un entier naturel, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un ensemble de croyances, et μ une contrainte d'intégrité. On note $\triangle_{\mu,k}$ l'opérateur de fusion à quota k défini par :*

$$[\triangle_{\mu,k}(E)] = \begin{cases} \{\omega \in [\mu] \mid \forall K_i \in E \; \omega \models K_i\} & \textit{si non vide,} \\ \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Pour l'essentiel, cette définition traduit formellement l'idée exposée en introduction : les modèles de la base de croyances résultat de la fusion à quota k de l'ensemble de croyances E sous les contraintes μ sont les modèles qui satisfont au moins k bases de croyances de E. Néanmoins, dans le cas où il n'y a aucun conflit pour la fusion, c'est-à-dire lorsque $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, le résultat de la fusion est simplement cette conjonction.

De cette définition découle immédiatement la caractérisation suivante :

Proposition 1 *Soient k un entier naturel, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un ensemble de croyances, et μ une contrainte d'intégrité.*

$$\triangle_{\mu,k}(E) \equiv \triangle_{\top,k}(E) \wedge \mu.$$

Cette propriété est une conséquence des propriétés **(IC7)** et **(IC8)** (voir paragraphe 4). Elle montre que changer les contraintes n'intervient pas sur le fait qu'une interprétation est plus intéressante qu'une autre pour l'ensemble de croyances E. Lorsqu'un opérateur vérifie ces propriétés, les contraintes ne servent donc bien qu'à contraindre le résultat de la fusion (il n'y a pas d'interférence entre l'étape d'évaluation des interprétations et l'étape de restriction).

Il est aisé de montrer que les opérateurs de fusion à quota possèdent aussi une "définition syntaxique", i.e., pour laquelle le résultat de la fusion est donné directement par une formule (équivalente mais pas simplement identique à la disjonction des interprétations caractérisant le résultat de la fusion d'un point de vue sémantique). Soit

$$\ulcorner n_k \urcorner = \{C \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid \#(C) = k\}.$$

On a la caractérisation syntaxique suivante en terme de sous-ensembles préférés (i.e. les sous-ensembles[1] cohérents de formules de l'union (multi-ensembliste) des bases de E qui sont maximaux pour une certaine relation de préférence, voir par exemple [5]) :

Proposition 2 *Soient k un entier naturel, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un ensemble de croyances, et μ une contrainte d'intégrité.*

$$\triangle_{\mu,k}(E) \equiv \begin{cases} \bigwedge E \wedge \mu & \textit{si cohérent,} \\ (\bigvee\limits_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge\limits_{j \in C} K_j)) \wedge \mu & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Cette caractérisation montre que les sous-ensembles préférés de E sont ceux comportant k bases et qui sont cohérents avec μ (les $\bigwedge_{j \in C} K_j$ qui ne sont pas cohérents avec μ n'ont aucun effet sur le résultat de la fusion puisque la conjonction de $\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner}(\bigwedge_{j \in C} K_j)$ avec μ conduit à les laisser de côté). Cette caractérisation montre aussi que l'inférence réalisée est *sceptique* : une formule α est considérée comme conséquence de la fusion si et seulement si cette formule est conséquence logique de chaque sous-ensemble préféré de E, une fois conjoint avec μ. En fait, on pourrait également choisir comme définition de $\ulcorner n_k \urcorner = \{C \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid \#(C) \geq k\}$ puisque seuls les sous-ensembles les plus faibles logiquement comptent.

Illustrons sur quelques exemples le comportement des opérateurs de fusion à quota.

[1] Il s'agit ici des multi-ensembles inclus dans l'union multi-ensembliste des bases de E.

Exemple 1 *Considérons l'ensemble de croyances suivant* $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ *avec* $K_1 = \{a \wedge \neg c\}, K_2 = \{b \wedge c\}$ *et* $K_3 = \{\neg a\}$, *et la contrainte d'intégrité* $\mu = \neg a \wedge b$. $\bigwedge E$ *n'est pas cohérent, donc pas cohérent avec* μ.

- $\Delta_{\mu,1}(E) \equiv [(a \wedge \neg c) \vee (b \wedge c) \vee \neg a] \wedge (\neg a \wedge b) \equiv \neg a \wedge b$.
- $\Delta_{\mu,2}(E) \equiv [(a \wedge \neg c \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg a) \vee (b \wedge c \wedge \neg a)] \wedge (\neg a \wedge b) \equiv \neg a \wedge b \wedge c$.
- $\Delta_{\mu,3}(E) \equiv \bot$.
- *Si* $k > 3$, *alors il n'existe aucun sous-ensemble* C *de* $\{1, 2, 3\}$ *de taille supérieure à* k *donc* $\Delta_{\mu,k}(E) \equiv \bot$.

4 Propriétés logiques

Plusieurs travaux ont proposé des ensembles de propriétés logiques (ou postulats de rationalité) pour caractériser les "bons" opérateurs de fusion [21, 18, 14, 15, 16]. Nous considérons ici les postulats des opérateurs de fusion contrainte définis et motivés dans [15].

Définition 2 $\triangle$ *est un opérateur de* fusion contrainte *si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :*

(IC0) $\triangle_\mu(E) \models \mu$.

(IC1) *Si* $\mu \not\models \bot$, *alors* $\triangle_\mu(E) \not\models \bot$.

(IC2) *Si* $\bigwedge E \wedge \mu \not\models \bot$, *alors* $\triangle_\mu(E) \equiv \bigwedge E \wedge \mu$.

(IC3) *Si* $E_1 \equiv E_2$ *et* $\mu_1 \equiv \mu_2$, *alors* $\triangle_{\mu_1}(E_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(E_2)$.

(IC4) *Si* $K \models \mu$ *et* $K' \models \mu$, *alors* $\triangle_\mu(\{K, K'\}) \wedge K \not\models \bot \Rightarrow \triangle_\mu(\{K, K'\}) \wedge K' \not\models \bot$.

(IC5) $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \models \triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) *Si* $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \not\models \bot$, *alors* $\triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2)$.

(IC7) $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$.

(IC8) *Si* $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \not\models \bot$, *alors* $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \triangle_{\mu_1}(E)$.

La famille des opérateurs à quota vérifie la plupart de ces postulats, comme le montre la propriété suivante.

Proposition 3 *Les opérateurs* $\triangle_{\mu,k}$ *vérifient les propriétés* **(IC0)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)** *et* **(IC8)**. *Ils ne vérifient pas les propriétés* **(IC1)** *et* **(IC6)**.

Preuve:
Ce qui concerne **(IC1)**, **(IC2)** et **(IC3)** est relativement facile à prouver.
(IC4) est vérifié : on doit montrer que si $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$, alors $\triangle_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1 \not\models \bot \Rightarrow \triangle_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2 \not\models \bot$.
Posons $E = \{K_1, K_2\}$. On suppose que $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$. Deux cas sont possibles :

- $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est cohérent. Alors $\triangle_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$. Comme $\triangle_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent, le postulat est vérifié.
- $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ n'est pas cohérent. Alors $[\triangle_{\mu,k}(\{K_1, K_2\})] = \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$. Selon les valeurs de k :

- $k \geq 3$: il est impossible d'atteindre le quota car $\#(E) = 2$, donc $\triangle_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv \perp$ et **(IC4)** est trivialement vérifié.
- $k = 2$: il est impossible d'atteindre le quota car $\#(E) = 2$ et par hypothèse $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu \models \perp$. **(IC4)** est donc également trivialement vérifié.
- $k = 1$: les interprétations sélectionnées sont celles qui satisfont au moins une base de croyances (et les contraintes), le résultat est donc équivalent à $(K_1 \vee K_2) \wedge \mu$, donc $\triangle_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ qui équivaut à K_2 est cohérent, donc **(IC4)** est encore vérifié.

(IC5) est vérifié : pour prouver **(IC5)**, on va tout d'abord énoncer un lemme utile à la démonstration (on omettra sa preuve).

Lemme 4 *Soient E, E' et F trois ensembles de croyances. Si $E' = E \sqcup F$, alors :*
- *si $\bigwedge E' \wedge \mu$ est cohérent, $\triangle_{\mu,k}(E') \models \triangle_{\mu,k}(E)$.*
- *si $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors $\triangle_{\mu,k}(E) \models \triangle_{\mu,k}(E')$.*

Pour **(IC5)**, il faut prouver que $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \models \triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2)$.

En prenant $E = E_1$ et $E' = E_1 \sqcup E_2$, le lemme 4 donne que si $\bigwedge E_1 \wedge \mu$ est incohérent alors $\triangle_{\mu,k}(E_1) \models \triangle_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2)$. Idem en remplaçant E_1 par E_2 par symétrie.

Par conséquent, si $\bigwedge E_1 \wedge \mu$ est incohérent ou $\bigwedge E_2 \wedge \mu$ est incohérent, on a forcément $\triangle_{\mu,k}(E_1) \wedge \triangle_{\mu,k}(E_2) \models \triangle_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2)$, par monotonie de la déduction logique. Ainsi **(IC5)** est vérifié.

Le seul cas restant est le cas où $\bigwedge E_1 \wedge \mu$ est cohérent et $\bigwedge E_2 \wedge \mu$ est cohérent. On a alors $\triangle_{\mu,k}(E_1) \equiv \bigwedge E_1 \wedge \mu$ et $\triangle_{\mu,k}(E_2) \equiv \bigwedge E_2 \wedge \mu$ par définition de l'opérateur de fusion. Par conséquent, $\triangle_{\mu,k}(E_1) \wedge \triangle_{\mu,k}(E_2) \equiv \bigwedge E_1 \wedge \bigwedge E_2 \wedge \mu$. Or, l'opérateur de fusion avec quota vérifie pour tout ensemble de croyances E la propriété $\bigwedge E \wedge \mu \models \triangle_{\mu,k}(E)$ (ceci est facile à prouver vu la définition de cet opérateur). Un choix de $\bigwedge E$ logiquement équivalent à $\bigwedge E_1 \wedge \bigwedge E_2$ permet de conclure pour le cas restant que **(IC5)** est aussi vérifié.

(IC6) n'est pas vérifié comme le montre le contre-exemple suivant. $E_1 = \{\{a\}, \{a\}, \{\neg a\}\}$, $E_2 = \{\{a\}, \{a\}, \{\neg a\}\}$ et $\mu = \top$. On a alors $\triangle_{\mu,2}(E_1) \equiv a$ et $\triangle_{\mu,2}(E_2) \equiv a$, donc la conjonction de ces deux bases est cohérente. En revanche, $\triangle_{\mu,2}(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$, qui n'implique donc pas $\triangle_{\mu,2}(E_1)$.

(IC7) est vérifié : il faut montrer que $\triangle_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E)$.

Si $\bigwedge E \wedge \mu_1$ est cohérent, alors $\triangle_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 \equiv \bigwedge E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2$ et comme on a toujours $\bigwedge E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2 \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E)$, **(IC7)** est vérifié de façon triviale.

Sinon $\bigwedge E \wedge \mu_1$ n'est pas cohérent et on a

$$[\triangle_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2] = \{\omega \in [\mu_1] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\} \cap [\mu_2]$$

Si $\bigwedge E \wedge \mu_1$ n'est pas cohérent, alors $\bigwedge E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2$ n'est pas cohérent et on a

$$[\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2, k}(E)] = \{\omega \in [\mu_1 \wedge \mu_2] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$$

Donc $\triangle_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 \equiv \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2, k}(E)$, et **(IC7)** est vérifié.

(IC8) est vérifié : il faut montrer que si $\triangle_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E) \models \triangle_{\mu_1,k}(E)$.

Si $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$ est cohérent, alors $\mu_1 \wedge \bigwedge E$ l'est aussi et on a $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E) \equiv \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$. Par conséquent, $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E) \models \triangle_{\mu_1,k}(E)$, et **(IC8)** est vérifié.

Si $\mu_1 \wedge \bigwedge E$ est incohérent, alors $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$ l'est aussi. Dans ce cas,

$$[\triangle_{\mu_1,k}(E)] = \{\omega \in [\mu_1] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$$

Comme $[\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E)] = \{\omega \in [\mu_1 \wedge \mu_2] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$, on a

$$\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E) \models \triangle_{\mu_1,k}(E)$$

et **(IC8)** est vérifié.

Enfin, reste le cas où $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$ est incohérent et où $\mu_1 \wedge \bigwedge E$ est cohérent. Dans ce cas, $\triangle_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 \equiv \mu_1 \wedge \bigwedge E \wedge \mu_2$ n'est pas cohérent, donc **(IC8)** est vérifié de façon triviale.

$\square$

Les opérateurs de fusion à quota ont donc de bonnes propriétés logiques. Seules deux des propriétés des opérateurs de fusion contrainte ne sont pas vérifiées : **(IC1)** car le résultat de la fusion à quota peut être incohérent et **(IC6)** car de nouvelles interprétations atteignant le quota lorsqu'on joint les 2 ensembles peuvent affaiblir le résulat de la fusion.

Il serait possible de satisfaire **(IC1)** en demandant que, dans le cas où aucun modèle ne satisfait le quota, le résultat soit l'ensemble des contraintes d'intégrité. Cette définition conduirait à un opérateur qui ne satisferait plus la propriété **(IC5)**. Or, celle-ci est très importante en ce qui concerne l'agrégation. Elle correspond à une condition de Pareto, qui est considérée comme une condition minimale de rationalité pour l'agrégation en théorie du choix social [1, 9, 2]. Pour cette raison, nous ne considérons pas plus avant un tel opérateur.

5 Complexité

Etant donné un entier naturel k fixé, on considère le problème de décision suivant MERGE-QUOTA$_k$:

- **Entrée :** un triplet $\langle E, \mu, \alpha \rangle$ où $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ est un ensemble de croyances, $\mu \in \mathcal{L}$ une contrainte d'intégrité, et $\alpha \in \mathcal{L}$ une requête.
- **Question :** est-ce que $\Delta_{\mu,k}(E) \models \alpha$ est vérifié ?

Nous avons obtenu la proposition suivante :

Proposition 5 MERGE-QUOTA$_k$ *est* BH(2)*-complet.*

Preuve:

- Appartenance : nous avons montré précédemment que dans le cas où $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, le résultat $\Delta_{\mu,k}(E)$ de la fusion équivaut à $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu$ où $\ulcorner n_k \urcorner = \{C \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid \#(C) = k\}$. Pour cette raison, l'algorithme suivant résout le problème posé.

  si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent
  alors retourner($\bigwedge E \wedge \mu \models \alpha$)
  sinon retourner($(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu \models \alpha$)

  Le test de cohérence de $\bigwedge E \wedge \mu$ nécessite un appel à un oracle NP, alors que les tests d'implication des parties "alors" et "sinon" de l'algorithme sont dans coNP et chacun peut donc être résolu à l'aide d'un appel à un oracle NP. On notera ici que, dans le cas "sinon", la formule $(\bigvee_{c \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu$ qui équivaut par définition à $\Delta_{\mu,k}(E)$ peut être calculée en temps $\mathcal{O}(|E|^k + |\mu|)$, donc en temps polynomial en la taille de l'entrée du problème puisque k est fixé indépendamment de l'entrée. Comme deux appels à un oracle NP suffisent à résoudre le problème, l'appartenance à $\mathsf{BH}(2)$ s'ensuit.
- Difficulté : on considère la réduction fonctionnelle polynomiale f depuis SAT-UNSAT (problème $\mathsf{BH}(2)$-complet canonique) vers MERGE-QUOTA$_1$. Soient ϕ, ψ deux formules de $\mathcal{L}$ que l'on peut supposer sans variable commune (sans perte de généralité). On calcule en temps polynomial $f(\langle \phi, \psi \rangle) = \langle E, \mu, \alpha \rangle$ avec
  - $E = \{\{\phi \vee new\}, \{\neg new \wedge (\neg \phi \vee \psi \vee new')\}$,
  - $\mu = \top$,
  - $\alpha = new'$

  où new et new' sont deux nouvelles variables de $\mathcal{P}$, i.e. n'apparaissant pas dans ϕ ou ψ.
  On vérifie que $\langle \phi, \psi \rangle \in$ SAT-UNSAT si et seulement si $f(\langle \phi, \psi \rangle) \in$ MERGE-QUOTA$_1$. Ainsi, si ϕ est incohérent alors $\Delta_{\top,1}(E) \equiv \top$ n'a pas new' pour conséquence logique ; si ϕ est cohérent alors $\Delta_{\top,1}(E) \equiv \bigwedge E \equiv \neg new \wedge \phi \wedge (\psi \vee new')$ est cohérent mais n'implique new' que si ψ est contradictoire. Dans le cas où $k > 1$, on construit une réduction similaire en faisant figurer dans le multi-ensemble E k occurrences de $\{\phi \vee new\}$ et k occurrences de $\{\neg new \wedge (\neg \phi \vee \psi \vee new')\}$, ce qui conduit à ne pas changer le résultat de la fusion $\Delta_{\top,1}(E)$ ci-dessus, et donc à garder l'équivalence qui traduit l'existence d'une réduction polynomiale.

□

On remarquera que la $\mathsf{BH}(2)$-difficulté du problème est obtenue dans le cas restreint où la requête est une variable propositionnelle et il n'y a pas de contrainte d'intégrité ($\mu = \top$). Elle n'est avérée toutefois que lorsque $k < \#(E)$. En effet, pour toute instance du problème vérifiant $k \geq \#(E)$, MERGE-

QUOTA_k est "seulement" coNP-complet. Cela se montre facilement par cas. Dans le cas où $k = \#(E)$, on a $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \equiv \bigwedge E$, donc les parties "alors" et "sinon" de l'algorithme précédent coïncident et celui-ci se simplifie en "retourner($\bigwedge E \wedge \mu \models \alpha$)", un test de déduction logique (coNP-complet). Dans le cas où $k > \#(E)$, on a $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \equiv \bot$ et donc la partie "sinon" de l'algorithme précédent se simplifie en "retourner($\top$)" ; or, lorsque $\bigwedge E \wedge \mu$ est incohérent, la valeur de "retourner($\bigwedge E \wedge \mu \models \alpha$)" équivaut aussi à $\top$, donc les parties "alors" et "sinon" de l'algorithme précédent coïncident et celui-ci se simplifie finalement en "retourner($\bigwedge E \wedge \mu \models \alpha$)", un simple test de déduction logique, encore une fois.

6 Manipulabilité

Comme nous l'avons expliqué en introduction, la résistance à la manipulation est une propriété importante pour les opérateurs de fusion de croyances (ou de buts). Or, la plupart des opérateurs connus sont manipulables [8, 7]. Nous allons montrer dans ce paragraphe les bons résultats des opérateurs de fusion à quota à cet égard. Nous avons tout d'abord besoin de présenter quelques définitions [8].

Définition 3 (opérateur manipulable)
Un opérateur de fusion Δ est manipulable pour un indice de satisfaction *i si et seulement si il existe une contrainte d'intégrité μ, un ensemble de croyances $E = \{K_1, K_2, ..., K_n\}$, une base de croyances K et une base de croyances K' tels que*

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

Parmi les indices de satisfaction définis dans [8], le plus fort est l'indice probabiliste i_p (ce qui signifie que si la manipulation est impossible pour cet indice, elle est aussi impossible pour les autres). Nous présentons tout de même les deux indices drastiques définis dans [8] car leur définition purement logique est plus neutre que la définition probabiliste du troisième indice. En effet, s'intéresser à la proportion de modèles d'un agent présents dans le résultat de la fusion suppose que l'on utilisera ensuite ce résultat pour prendre une décision (choix d'un modèle parmi les modèles du résultat de la fusion). Soient K et K_Δ deux bases de croyances :

Définition 4 (indice drastique faible)

$$i_{d_f}(K, K_\Delta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } K \wedge K_\Delta \textit{ est cohérent} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Définition 5 (indice drastique fort)

$$i_{d_F}(K, K_\Delta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } K_\Delta \models K \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Définition 6 (indice probabiliste)
On définit l'indice de satisfaction probabiliste $i_p(K, K_\Delta)$ *comme la probabilité d'obtenir un modèle de* K *en faisant un tirage uniforme d'un modèle de* K_Δ*. On a donc :*

$$i_p(K, K_\Delta) = \frac{\#([K] \cap [K_\Delta])}{\#([K_\Delta])}.$$

Dans le cas où $\#([K_\Delta]) = 0$*, on pose* $i_p(K, K_\Delta) = 0$*.*

Proposition 6 *Les opérateurs de fusion à quota ne sont pas manipulables pour* i_p *(ils ne le sont donc pas non plus pour* i_{d_f} *et* i_{d_F}*).*

Preuve:
Par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier naturel k et une contrainte d'intégrité μ tels que $\triangle_{\mu,k}$ soit manipulable pour i_p. On peut donc trouver un ensemble de croyances $E = \{K_2, ..., K_n\}$, deux bases de croyances K et K' tels que $i_p(K, \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})) < i_p(K, \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}))$. On a donc :

$$\frac{\#([K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})])}{\#([\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})])} < \frac{\#([K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})])}{\#([\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})])} \qquad (1)$$

Deux cas sont possibles pour l'expression de $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$:
<u>cas 1 :</u> $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ est cohérent. Alors $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\}) \equiv \bigwedge E \wedge K \wedge \mu$. Donc tous les modèles de $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$ sont des modèles de K, ce qui implique que $i_p(K, \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})) = 1$ est maximale : on ne peut avoir manipulabilité dans ce cas.
<u>cas 2 :</u> $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ n'est pas cohérent. Alors $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\}) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$, où $K_1 = K$ et $E = \{K_2, ..., K_n\}$.

- Si $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$ est cohérent, alors deux cas sont possibles pour l'expression de $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$:
  - $\bigwedge E \wedge K' \wedge \mu$ est cohérent. Alors $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}) \equiv \bigwedge E \wedge K' \wedge \mu$. Aucun modèle de K n'est un modèle de $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$. En effet, dans le cas contraire, il existerait ω vérifiant $\omega \models K$ et $\omega \models \bigwedge(E \sqcup \{K'\}) \wedge \mu$. Alors on aurait $\omega \models \bigwedge(E \sqcup \{K\}) \wedge \mu$ ce qui est absurde puisque $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ n'est pas cohérent et n'a donc aucun modèle. Donc $[K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})] = \emptyset$ et $i_p(K, \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}) = 0$, ce qui interdit la manipulabilité pour i_p.
  - $\bigwedge E \wedge K' \wedge \mu$ n'est pas cohérent. On a

    $$\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K'_j)) \wedge \mu,$$

    où $K'_1 = K'$ et $K'_i = K_i$ pour $i > 1$.
    Si $\omega \models K$ et $\omega \not\models \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$, alors ω ne satisfait pas μ ou ω satisfait strictement moins de $k-1$ bases K_i pour $i > 1$. Dans les deux cas, ω ne peut satisfaire $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$ puisqu'il satisfait au plus $k-1$ bases de $E \sqcup \{K'\}$ ou qu'il ne satisfait pas μ.

Donc $\omega \not\models \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$, et par conséquent :

$$\#([K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]) \geq \#([K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]). \qquad (2)$$

D'autre part, si $\omega \not\models K$ et $\omega \models \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$, alors il existe au moins k bases de croyances K_i avec $i > 1$ telles que $\omega \models K_i \wedge \mu$. Alors $\omega \models \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$, et par conséquent :

$$\#([\neg K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]) \leq \#([\neg K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]). \qquad (3)$$

Si, pour simplifier, on note
- $x = \#([K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})])$,
- $y = \#([\neg K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})])$,
- $x' = \#([K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})])$,
- $y' = \#([\neg K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})])$,

l'inégalité 1 devient :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y'}.$$

Comme $y \leq y'$ d'après (3), on doit en fait avoir :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y}.$$

On sait d'après (2) que $x \geq x'$, donc on peut écrire que $x' = x - z$, avec $z \geq 0$. On obtient :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x-z}{x+y-z}.$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{(x)(x+y-z)}{(x+y)(x+y-z)} < \frac{(x-z)(x+y)}{(x+y-z)(x+y)},$$

soit :

$$-xz < -(x+y)z,$$

qui équivaut encore à

$$xz > (x+y)z$$

avec x, y, et z positifs, ce qui est absurde.

- Si $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$ n'est pas cohérent alors $\forall\omega \models K$, on a $\omega \not\models \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$. Par conséquent, $\forall\omega \models K$, ω ne satisfait pas μ ou ω satisfait strictement moins de $k-1$ bases K_i pour $i > 1$. Dans les deux cas, ω ne peut satisfaire $\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$ puisqu'il satisfait au plus $k-1$ bases de $E \sqcup \{K'\}$ ou qu'il ne satisfait pas μ.

Donc, $\forall \omega \models K, \omega \not\models \triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$, et par conséquent :

$$\#([K] \cap [\triangle_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$i_p(K, \Delta(E \sqcup \{K'\}) = 0,$$

ce qui contredit encore l'hypothèse de manipulabilité.

□

7 Liens avec d'autres opérateurs de fusion

La famille des opérateurs de fusion à quota induit une suite de bases résultats $(\triangle_{\mu,k}(E))(k > 0)$ qui est monotone pour la déduction logique :

Proposition 7 *Pour tout ensemble de croyances E, toute contrainte d'intégrité μ et tout quota k, on a $\triangle_{\mu,k+1}(E) \models \triangle_{\mu,k}(E)$.*

Chaque fois que le quota k est incrémenté, l'ensemble des croyances du groupe est renforcé logiquement ou reste constant. Comme le cadre d'étude est celui de la logique propositionnelle finie, la suite monotone $(\triangle_{\mu,k}(E))(k > 0)$ converge nécessairement. Pour être plus précis, si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, la convergence est obtenue dès $k = 1$ puisque $\triangle_{\mu,k}(E) \equiv \bigwedge E \wedge \mu$ quelle que soit la valeur de k si cette formule est cohérente. Sinon $\triangle_{\mu,k}(E) \equiv \perp$ dès que $k > \#(E)$ (ce qui montre au passage que la base pour laquelle la suite devient stationnaire n'a pas forcément beaucoup d'intérêt).

Parmi les éléments de cette suite, les valeurs "extrêmes" de k permettent de récupérer des opérateurs de fusion existants : il s'agit des valeurs $k = 0$, $k = 1$ et $k_{max} = max(\{i \leq \#(E) \mid \triangle_{\mu,i}(E) \not\models \perp\})$.

Ainsi l'opérateur $\triangle_{\mu,0}$, qui donne la conjonction des bases (et des contraintes) lorsque celle-ci est cohérente et μ sinon, est appelé opérateur de *fusion par intersection totale* dans [10].

L'opérateur $\triangle_{\mu,1}$, qui donne donc la conjonction des bases (et des contraintes) lorsque celle-ci est cohérente et la disjonction des bases (conjointe avec les contraintes) sinon, est appelé opérateur de *fusion basique*[2] dans [10, 15]. La seule nuance entre $\triangle_{\mu,1}$ et l'opérateur de fusion basique est que $\triangle_{\mu,1}$ donne un résultat incohérent lorsque la disjonction des bases est incohérente avec les contraintes, alors que l'operateur de fusion basique donne μ dans ce cas.

Lorsque $k = k_{max}$, l'opérateur obtenu est un opérateur de fusion contrainte particulier. En effet c'est un opérateur que l'on obtient à partir de la distance drastique à partir des familles $\triangle^{\Sigma}$ et $\triangle^{Gmax}$ [17]. Cet opérateur est le moins évolué des opérateurs de ces familles (dans le sens ou les autres sont définis à partir de distances plus complexes), mais il satisfait toutes les propriétés logiques données à la définition 2 [17] :

[2]Il est également définissable comme un opérateur à sélection de modèles en prenant la distance drastique et l'opérateur d'agrégation max [12].

Proposition 8 *L'opérateur* $\triangle_{\mu,k_{max}}$ *satisfait* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC6)**, **(IC7)**, **(IC8)**.

Cet opérateur est également proche de l'opérateur à sélection de formules $\triangle_{\mu}^{C4}$ fondé sur la cardinalité [3, 4]. Sa définition est la suivante : le résultat de la fusion d'un ensemble de croyances est la disjonction des sous-ensembles cohérents maximaux pour la cardinalité de l'union des bases de croyances de l'ensemble à fusionner. Il s'agit ici de l'union ensembliste (et pas de l'union multi-ensembliste). Evidemment, les deux opérateurs $\triangle_{\mu,k_{max}}$ et $\triangle_{\mu}^{C4}$ donnent des résultats identiques si les bases de croyances de E sont des singletons (ou encore si chaque base de croyances est remplacée par le singleton contenant la conjonction de ses formules avant d'effectuer la fusion) et s'il n'existe pas deux bases de croyances identiques. Il est important de noter que, même si les définitions des deux opérateurs sont proches, $\triangle_{\mu,k_{max}}$ et $\triangle_{\mu}^{C4}$ diffèrent bien en toute généralité et ont des propriétés dissemblables. En particulier, on sait que [11] :

Proposition 9 *L'opérateur* $\triangle_{\mu}^{C4}$ *satisfait* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC7)**, **(IC8)**. *Il ne satisfait pas* **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC6)**.

Le fait de transformer le problème de décision de l'inférence pour les opérateurs à quota en un problème d'optimisation augmente naturellement la complexité du problème. On montre donc facilement que le problème de l'inférence pour l'opérateur $\triangle_{\mu,k_{max}}$ est complet pour Θ_2^p. Même s'il peut être réalisé lors d'une phase de pré-traitement, le calcul du quota maximal k_{max} a un coût non négligeable.

8 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une nouvelle famille d'opérateurs de fusion de croyances, que nous avons appelés opérateurs de fusion à quota. Ces opérateurs peuvent être vus également comme des "conjonctions généralisées", dans le sens où ils donnent un résultat cohérent "plus souvent" que la conjonction logique, mais exactement le même résultat que la conjonction quand celle-ci est cohérente. L'idée est qu'une interprétation est retenue comme modèle du résultat de la fusion, non pas quand elle satisfait toutes les bases de croyances, mais quand elle en satisfait suffisamment, i.e. au moins autant que le quota choisi.

Ces opérateurs offrent un compromis intéressant quand on prend en compte à la fois les propriétés logiques désirables, la complexité algorithmique et la résistance à la manipulation. Ainsi, les opérateurs de fusion à quota ont de bonnes propriétés logiques, preuve de leur rationalité donc de l'intérêt qu'il y a à les utiliser pour agréger des croyances ou des buts. Ils sont particulièrement intéressants d'un point de vue pratique car leur complexité algorithmique est plus faible que celle des opérateurs de fusion usuels. De plus, ils sont non manipulables, ce qui permet donc de les utiliser dans des cas où les agents ne sont pas forcément honnêtes à propos de leurs croyances ou buts. Une fois encore, cette propriété n'est pas partagée par beaucoup d'opérateurs de fusion.

Une généralisation de ce travail consiste à considérer que tous les agents n'ont pas la même importance. Satisfaire un agent apporte un certain nombre de points (dépendant de son importance), et il faut de la même façon atteindre un quota pour qu'une interprétation soit sélectionnée.

Une autre perspective de ce travail est de regarder du côté de la théorie du choix social [1, 9, 2] pour tenter d'exporter des méthodes de votes connues afin de définir de nouveaux opérateurs de fusion.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les relecteurs pour leurs commentaires sur la version préliminaire de ce papier. Patricia Everaere et Pierre Marquis remercient l'IUT de Lens, la Région Nord/Pas-de-Calais et les Communautés Européennes pour leur support.

Références

[1] K. J. Arrow. *Social choice and individual values.* Wiley, New York, second edition, 1963.

[2] K.J. Arrow, A. K. Sen, and K. Suzumura, editors. *Handbook of social choice and Welfare*, volume 1. North-Holland, 2002.

[3] C. Baral, S. Kraus, and J. Minker. Combining multiple knowledge bases. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 3(2) :208–220, 1991.

[4] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8(1) :45–71, 1992.

[5] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proc. of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–645, Chambéry, 1993.

[6] C. Cayrol, M.-C. Lagasquie-Schiex, and Th. Schiex. Nonmonotonic reasoning : from complexity to algorithms. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 22(3–4) :207–236, 1998.

[7] P. Everaere. Manipulabilité des opérateurs de fusion de croyances. Mémoire de DEA. Centre de Recherche en Informatique de Lens - Université d'Artois. `http ://www.irit.fr/recherches/RPDMP/persos/Konieczny/manipulation.html`, 2003.

[8] P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. De la manipulabilité des opérateurs de fusion de croyances. Unpublished. `http ://www.irit.fr/recherches/RPDMP/persos/Konieczny/manipulation.html`, 2003.

[9] J. S. Kelly. *Social Choice Theory : An Introduction*. Springer-Verlag, 1988.

[10] S. Konieczny. *Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance*. PhD thesis, Université de Lille 1, 1999.

[11] S. Konieczny. On the difference between merging knowledge bases and combining them. In *Proceedings of the seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 135–144, 2000.

[12] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Distance-based merging : a general framework and some complexity results. In *Proceedings of the eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 97–108, 2002.

[13] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. DA^2 merging operators. Artificial Intelligence. To appear, 2004.

[14] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[15] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proceedings of the fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, LNAI 1638, pages 233–244, 1999.

[16] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging information under constraints : a qualitative framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[17] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the frontier between arbitration and majority. In *Proceedings of the eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 109–118, 2002.

[18] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1) :76–90, 1998.

[19] J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. In *Dynamic Worlds : From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer, 1999.

[20] B. Nebel. *Belief Revision*, volume 3 of *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, chapter How hard is it to revise a belief base ?, pages 77–145. Kluwer Academic, 1998.

[21] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.