Conditionnement en Logique Possibiliste à Intervalles

Compatible-based Conditioning in Interval-based Possibilistic Logic

Salem Benferhat Amélie Levray Karim Tabia

Univ Lille Nord de France,
F-59000 Lille, France UArtois,
CRIL - CNRS UMR 8188,
F-62300 Lens, France

{benferhat,levray,tabia}@cril.fr

Résumé :

La logique possibiliste à intervalles est un formalisme flexible étendant la logique possibiliste standard tel que chaque expression logique est associée à un sous-intervalle de $[0, 1]$. Ce papier se concentre sur le problème important que représente le conditionnement dans les cadres possibilistes à intervalles. La première partie de ce papier propose un ensemble de propriétés naturelles à satisfaire. Nous donnons ensuite une définition naturelle et sûre du conditionnement dans les distributions possibilistes à intervalles. Elle consiste à appliquer le conditionnement standard sur l'ensemble de toutes les distributions compatibles associées. La seconde partie de ce papier fournit l'équivalent syntaxique du calcul du conditionnement quand les distributions sont encodées de manière compacte à l'aide de bases de connaissances possibilistes à intervalles. Nous montrons que le conditionnement à intervalles a la même complexité que le conditionnement de bases possibilistes standards.

Mots-clés :

Logique possibiliste à intervalles, conditionnement.

Abstract:

Interval-based possibilistic logic is a flexible setting extending standard possibilistic logic such that each logical expression is associated with a sub-interval of $[0, 1]$. This paper focuses on the fundamental issue of conditioning in the interval-based possibilistic setting. The first part of the paper first proposes a set of natural properties that an interval-based conditioning operator should satisfy. We then give a natural and safe definition for conditioning an interval-based possibility distribution. This definition is based on applying standard $\min$-based or product-based conditioning on the set of all associated compatible possibility distributions. The second part of the paper provides an equivalent syntactic computation of interval-based conditioning when interval-based distributions are compactly encoded by means of interval-based possibilistic knowledge bases. We show that interval-based conditioning is achieved without extra computational cost comparing to conditioning standard possibilistic knowledge bases.

Keywords:

Interval-based possibilistic logic, conditioning.

1 Introduction

Les représentations de l'incertain basées sur les intervalles sont des formalismes bien connus pour encoder, raisonner et prendre des décisions en présence d'informations incomplètes, de croyances imprécises, d'intervalles de confiance, ou d'informations multisources [3, 12]. Dans ce papier, nous travaillons sur la logique possibiliste à intervalles [1], elle étend la logique possibiliste [9] de sorte que l'information incertaine est décrite à l'aide d'intervalles de degrés possibilistes au lieu d'un seul degré de certitude associé aux formules. Les applications ciblées par ce travail sont celles traitant des informations encodées par des intervalles comme l'analyse de robustesse.
La logique possibiliste à intervalles est un formalisme récemment développé et est seulement définie pour des situations statiques. Aucune forme de conditionnement n'a été proposée pour mettre à jour les connaissances actuelles. Le conditionnement et les changements de croyances en général sont des tâches importantes dans la conception de systèmes intelligents. Le conditionnement en lui-même concerne la mise à jour des croyances actuelles lorsqu'une nouvelle information sûre est disponible. Dans le cadre possibiliste standard, il existe plusieurs travaux [5, 6, 7, 8, 11] traitant du conditionnement.
Dans [1], les auteurs traitent des problèmes

d'inférence dans le cadre des possibilités à intervalles mais ne s'intéressent pas à la question du conditionnement. Dans ce papier [1], nous traitons du conditionnement des distributions possibilistes à intervalles ainsi que des bases de connaissances possibilistes à intervalles. Les principales contributions sont i) la proposition d'un ensemble de propriétés naturelles que l'opérateur de conditionnement doit satisfaire, ii) la proposition d'une définition naturelle du conditionnement d'une distribution de possibilités à intervalles et l'étude de ses propriétés dans le cadre possibiliste qualitatif et quantitatif, et pour finir, iii) nous proposons la contrepartie syntaxique du conditionnement appliqué aux bases de connaissances possibilistes à intervalles. Le conditionnement proposé n'entraîne pas de coût de calcul supplémentaire.

2 Rappel sur la logique possibiliste

Nous considérons un langage propositionnel fini. Notons Ω l'ensemble fini d'interprétations et ω un élément de Ω. ϕ et ψ dénotent des formules propositionnelles, et $\omega \models \phi$ signifie que ω est un modèle de ϕ. La théorie des possibilités est un cadre pour le traitement de l'incertain très répandu, particulièrement adapté pour représenter et raisonner avec des informations incomplètes et incertaines [3, 4]. L'un des concepts les plus importants est celui de distribution de possibilités π qui assigne à chaque interprétation un degré dans l'intervalle $[0,1]$. Les degrés de possibilités sont interprétés soit i) *qualitativement* où seul l'ordre des valeurs est important, ou ii) *quantitativement* où l'échelle possibiliste $[0,1]$ est numérique. En théorie des possibilités, la mesure possibiliste est aussi un concept important, elle se note $\Pi(\phi)$ où ϕ représente un événement (ensemble de plusieurs interprétations) et est définie par : $\Pi(\phi) = \max\{\pi(\omega) : \omega \in \Omega,\ \omega \models \phi\}$.

Une base possibiliste $K = \{(\varphi_i, \alpha_i) : i = 1, .., n\}$ est un ensemble de formules possibilistes, où φ_i est une formule propositionnelle et α_i est un poids associé à la formule φ_i représentant son degré de certitude. Chaque tuple (φ_i, α_i) peut être vu comme une contrainte qui restreint l'ensemble des interprétations possibles. Si une interprétation ω ne satisfait pas φ_i alors son degré de possibilités est égal à $1 - \alpha_i$. Étant donnée une base possibiliste K, on peut générer une unique distribution de possibilités où les interprétations satisfaisant toutes les formules de K ont le degré de possibilités le plus élevé, alors que les autres interprétations sont préordonnées selon la formule la plus certaine qu'elles falsifient. De manière plus formelle : $\forall \omega \in \Omega$, $\pi_K(\omega) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \forall (\varphi_i, \alpha_i) \in K, \omega \models \varphi_i; \\ 1 - \max\{\alpha_i : (\varphi_i, \alpha_i) \in K \text{ et } \omega \not\models \varphi_i\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

3 Rappels sur la logique possibiliste à intervalles

Cette section nous donne un bref rappel sur la logique possibiliste à intervalles [1] où l'incertitude n'est plus décrite par des valeurs uniques mais par des intervalles de degrés possibles. On utilise des intervalles fermés inclus dans $[0,1]$ pour encoder l'incertitude associée aux formules ou interprétations. Si I est un intervalle, alors on note par $\underline{I}$ et $\overline{I}$ sa borne inférieure et supérieure respectivement. Quand tous les intervalles I associés aux interprétations (resp. aux formules) sont des singletons (autrement dit $\underline{I} = \overline{I}$), on se réfère aux distributions standard (resp. aux bases possibilistes standard).

3.1 Distributions de possibilités à intervalles

Rappelons la définition d'une distribution à intervalles :

Définition 1. *Une distribution de possibilités à intervalles, notée $I\pi$, est une fonction de Ω vers $\mathcal{I}$. $I\pi(\omega) = I$ signifie que le degré de possibilités de ω est un des éléments de I. $I\pi$ est dite normalisée si $\exists \omega \in \Omega$, telle que $\overline{I\pi}(\omega) = 1$.*

1. Cet article est une version française et écourtée d'un article à paraître dans la conférence IJCAI'15.

Une distribution de possibilités à intervalles peut être vue comme une famille de distributions de possibilités compatibles, définie comme suit :

Définition 2. *Soit $I\pi$ une distribution de possibilités à intervalles. Une distribution de possibilités normalisée π est dite compatible avec $I\pi$ si et seulement si $\forall\omega\in\Omega$, $\pi(\omega)\in I\pi(\omega)$.*

On note par $\mathcal{C}(I\pi)$ l'ensemble de toutes les distributions de possibilités compatibles avec $I\pi$.

Soit $I\pi$, le degré de possibilités à intervalles d'une formule ϕ est défini par : $\underline{I\Pi}(\phi)$=min$\{\Pi(\phi)$:$\pi\in\mathcal{C}(I\pi)\}$ et $\overline{I\Pi}(\phi)$=max$\{\Pi(\phi)$: $\pi\in\mathcal{C}(I\pi)\}$

3.2 Distribution de possibilités à intervalles associée à une base

La représentation syntaxique de la logique possibiliste à intervalles généralise la notion de base possibiliste à la notion de base possibiliste à intervalles.

Définition 3. *Une base possibiliste à intervalles, notée IK, est un ensemble de formules associées à des intervalles : IK=$\{(\phi, I), \phi\in\mathcal{L}$ et I est un sous-intervalle de $[0,1]\}$.*

Comme dans le cadre standard, une base de connaissances possibiliste à intervalles *IK* est aussi une représentation compacte d'une distribution de possibilités à intervalles $I\pi_{IK}$ [1].

Définition 4. *Soit IK une base possibiliste à intervalles. Alors :*

$$I\pi_{IK}(\omega) = \left[\underline{I\pi}_{IK}(\omega), \overline{I\pi}_{IK}(\omega)\right]$$

où :

$$\underline{I\pi}_{IK}(\omega) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \forall(\varphi, I) \in IK,\ \omega \models \varphi \\ 1 - \max\{\overline{I} : (\varphi, I) \in IK, \omega \not\models \varphi\} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\overline{I\pi}_{IK}(\omega) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \forall(\varphi, I) \in IK,\ \omega \models \varphi \\ 1 - \max\{\underline{I} : (\varphi, I) \in IK, \omega \not\models \varphi\} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La définition 4 étend celle donnée par l'équation 1 lorsque $\overline{I}$=$\underline{I}$.

Dorénavant, on notera *DPI* pour parler de distributions de possibilités à intervalles et *BPI* pour parler de base possibiliste à intervalles.

4 Propriétés du conditionnement à intervalles

En théorie des possibilités standard, le conditionnement se rapporte à la mise à jour des connaissances actuelles encodées par une distribution π lorsqu'une nouvelle information (évidence) est observée. Il existe plusieurs définitions du conditionnement possibiliste [5, 6, 7, 8, 11]. Dans le cadre quantitatif, le conditionnement [13] est défini par :

$$\pi(\omega_i|_*\phi) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega_i)}{\Pi(\phi)} & \text{si } \omega_i \models \phi\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Le conditionnement dans le cadre qualitatif est quant à lui défini par [8] :

$$\pi(\omega_i|_m\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega_i)\text{=}\Pi(\phi) \text{ et } \omega_i \models \phi\,; \\ \pi(\omega_i) & \text{si } \pi(\omega_i)< \Pi(\phi) \text{ et } \omega_i \models \phi\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

Lorsque $\Pi(\phi)$=0, on a alors $\forall\omega\in\Omega$, $\pi(\omega|_\diamond\phi)$=1 dans les deux cadres.

Cette section donne les propriétés naturelles qu'un opérateur de conditionnement est supposé satisfaire quand des *DPI* sont utilisées. En premier, fixons les valeurs de $I\pi(.|\phi)$ dans les cas où $I\pi$ est une *DPI* dégénérée (ce qui veut dire que $\overline{I\Pi}(\phi)$=0 ou $\underline{I\Pi}(\phi)$=0). Si $\overline{I\Pi}(\phi)$=0 alors, par convention, comme avec une distribution de possibilités standard, $\forall\omega\in\Omega$, $I\pi(\omega|\phi)$=$[1,1]$. De la même manière, si $\underline{I\Pi}(\phi)$=0 (et $\overline{I\Pi}(\phi)$>0) alors $\forall\omega\in\Omega$, $I\pi(\omega|\phi)$=$\begin{cases} [0,0] & \text{si } I\pi(\omega)\text{=}[0,0] \text{ et } \omega \not\models \phi\,; \\ [0,1] & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans le reste de ce papier, nous considérons que $I\pi$ n'est pas dégénérée par rapport à ϕ. A savoir, nous supposons que $\underline{I\Pi}(\phi)$>0. Ainsi, dans un cadre à intervalles, un opérateur de conditionnement devrait satisfaire les propriétés acceptables suivantes :

(IC1) $I\pi(.|\phi)$ doit être une *DPI*.

(IC2) $\forall\omega\in\Omega$, si $\omega\not\models\phi$ alors $I\pi(\omega|\phi)$=$[0,0]$.

(IC3) $\exists\omega\in\Omega$ tel que $\omega\models\phi$ et $\overline{I\pi}(\omega|\phi)$=1.

(IC4) Si $\forall\omega\not\models\phi$, $I\pi(\omega)$=$[0,0]$ alors $I\pi(.|\phi)$=$I\pi$.

(IC5) $\forall\omega\in\Omega$, si $\omega\models\phi$ et $I\pi(\omega)$=$[0,0]$ alors $I\pi(\omega|\phi)$=$[0,0]$.

(IC6) $\forall\omega\models\phi$ et $\forall\omega'\models\phi$, si $\overline{I\pi}(\omega)$<$\underline{I\pi}(\omega')$ alors $\overline{I\pi}(\omega|\phi)$<$\underline{I\pi}(\omega'|\phi)$.

(**IC7**) $\forall\omega\models\phi$, $\forall\omega'\models\phi$, et $I\pi(\omega)$=$I\pi(\omega')$ alors $I\pi(\omega|\phi)$= $I\pi(\omega'|\phi)$.

La propriété **IC1** établit simplement que le résultat du conditionnement d'une *DPI* doit être une *DPI*. La propriété **IC2** requiert que lorsqu'une nouvelle information sûre ϕ est observée alors toute interprétation qui est un contre-modèle de ϕ doit être impossible. La propriété **IC3** établit qu'il existe au moins une distribution compatible π' de $I\pi(.|\phi)$ où $\Pi'(\phi)$=1. La propriété **IC4** nous dit que si ϕ est déjà totalement acceptée (c'est à dire, tous les contre-modèles de ϕ sont déjà impossible) alors $I\pi(.|\phi)$ doit être identique à $I\pi$. La propriété **IC5** indique que les interprétations impossibles (même si elles sont modèles de ϕ) restent impossibles après conditionnement. Les propriétés **IC6** et **IC7** expriment le principe de changement minimal. **IC6** expose que l'ordre relatif entre les modèles de ϕ doit être préservé après le conditionnement. **IC7** établit que les modèles égaux doivent rester égaux après le conditionnement.

5 Conditionnement sémantique à base de compatibles

5.1 Définition et analyse des propriétés

Cette section nous fournit une définition naturelle et prudente du conditionnement d'une *DPI* en utilisant l'ensemble des distributions compatibles. Plus précisément, conditionner une *DPI* revient à appliquer le conditionnement (quantitatif ou qualitatif) standard sur l'ensemble des distributions de possibilités compatibles $\mathcal{C}(I\pi)$ associées à $I\pi$. A savoir,

Définition 5. *Le conditionnement basé sur les compatibles d'une DPI est défini par : $\forall\omega\in\Omega$, $I\pi(\omega|_\diamond\phi)$=$\{\pi(\omega|_\diamond\phi)\ :\ \pi\ \in\ \mathcal{C}(I\pi)\}$, où $|_\diamond$ est soit $|_*$ soit $|_m$ donné par les Equations* (2)*, respectivement* (3) .

Le conditionnement donné dans la Définition 5 est dit prudent dans le sens où il prend en compte toutes les distributions compatibles à l'opposé d'un approche où serait utilisée un ensemble arbitraire de distributions compatibles. Il est à noter que l'idée de conditionnement basé sur les compatibles est en quelque sorte similaire au conditionnement d'ensembles credaux [10] et réseaux crédaux [2] où le concept d'ensembles convexes fait référence à l'ensemble des compatibles qui composent l'ensemble crédal.

La première question importante du conditionnement défini ci-dessus est de savoir si la distribution résultante est une *DPI*, c'est à dire, de savoir si la première propriété **IC1** est satisfaite ou non. Le résultat est différent selon qu'on utilise le condtionnement qualitatif ou le conditionnement quantitatif. Dans le cas du conditionnement qualitatif, l'Observation 1 établit que le résultat du conditionnement (en utilisant la Définition 5) ne guarantit pas une *DPI*.

Observation 1 Soit $|_m$ l'operateur de conditionnement (donné par l'Equation 3). Alors, il existe une *DPI*, une formule propositionnelle ϕ, et une interprétation ω telles que $I\pi(\omega|_m\phi)$ n'est pas un intervalle.

Exemple 1 (Contre-exemple)**.** *Soient $I\pi$ la DPI normalisée de la Table 1 et ϕ=a la nouvelle information. À partir de la Table 1, on*

$\omega\in\Omega$	$I\pi(\omega)$	$\omega\in\Omega$	$I\pi(\omega\vert_m\phi)$
ab	[.7, .9]	ab	[1, 1]
$a\neg b$	[.4, .7]	$a\neg b$	[.4, .7]$\cup\{1\}$
$\neg ab$	[.8, 1]	$\neg ab$	[0, 0]
$\neg a\neg b$	[.4, .7]	$\neg a\neg b$	[0, 0]

Tableau 1 – Contre-exemple de l'Observation 1.

remarque que $I\pi(a\neg b|_m\phi)$ n'est pas un intervalle. En effet, pour chaque compatible π, si $\pi(a\neg b)\in[.4, .7[$ alors $\pi(a\neg b|_m\phi)\in[.4, .7[$. Ou alors, pour chaque compatible où $\pi(a\neg b)$=.7 on a soit $\pi(a\neg b|_m\phi)$=.7 (si $\pi(ab)$>.7) soit $\pi(a\neg b|_m\phi)$=1. Ainsi, $\pi(a\neg b|_m\phi)$=[.4, .7]$\cup\{1\}$ ce qui n'est pas à un intervalle.

Contrairement au conditionnement qualitatif, en utilisant le conditionnement quantitatif (cf. Equation 2), la distribution résultante nous donne une *DPI*.

Proposition 1. *Soit $I\pi$ une DPI, soient ϕ la nouvelle évidence, et $|_*$ le conditionnement quantitatif standard donné par l'Equation 2. Alors $\forall\omega\in\Omega$, $I\pi(\omega|_*\phi)$=[$\min_{\pi\in\mathcal{C}(I\pi_{IK})}(\pi(\omega|_*\phi))$, $\max_{\pi\in\mathcal{C}(I\pi_{IK})}(\pi(\omega|_*\phi))$] est un intervalle.*

Par la suite, on considère seulement le conditionnement quantitatif. Ainsi, on simplifie les notations de $I\pi(.|_*\phi)$ et $\pi(.|_*\phi)$ par $I\pi(.|\phi)$ et $\pi(.|\phi)$ respectivement. La proposition suivante établit que le conditionnement de la Définition 5 satisfait les propriétés **IC1-IC7**.

Proposition 2. *Soit $I\pi$ une DPI normalisée, soit ϕ une nouvelle information telle que $\underline{I\Pi}(\phi)>0$. Alors la DPI mise à jour à l'aide de la Définition 5 satisfait les propriétés **IC1-IC7**.*

5.2 Calcul des bornes inférieures et supérieures de $I\pi(.|\phi)$

L'objectif maintenant est de déterminer les bornes inférieures et supérieures de $I\pi(.|\phi)$. Pour cela, commençons par un cas particulier de *DPI* $I\pi$ où chaque compatible $\pi\in\mathcal{C}(I\pi)$, ϕ est acceptée (autrement dit, $\Pi(\phi)>\Pi(\neg\phi)$). Dans ce cas, le calcul de $I\pi(.|\phi)$ est immédiat :

Proposition 3. *Soient $I\pi$ une DPI et ϕ une formule propositionnelle telle que $\overline{I\Pi}(\phi)=1$ et $\overline{I\Pi}(\neg\phi)<1$. Alors*
- S'il existe une unique interprétation $\omega^*\in\Omega$ telle que $\omega^*\models\phi$ et $\overline{I\pi}(\omega^*)=1$ alors

$$I\pi(\omega|\phi)=\begin{cases}[1,1] & \textit{si } \omega=\omega^* \\ I\pi(\omega) & \textit{si } \omega\neq\omega^* \textit{ et } \omega\models\phi \\ [0,0] & \textit{sinon.}\end{cases}$$

- Sinon, $\forall\omega\in\Omega$,

$$I\pi(\omega|\phi)=\begin{cases}I\pi(\omega) & \textit{si } \omega\models\phi \\ [0,0] & \textit{sinon } (\omega\not\models\phi)\end{cases}$$

Considérons, maintenant le cas, plus complexe, où $\overline{I\Pi}(\neg\phi)=1$, c'est à dire qu'il existe au moins une distribution compatible π dans laquelle ϕ n'est pas acceptée. Les deux propositions suivantes donnent les bornes de l'intervalle selon qu'il existe une unique ou plusieurs interprétations ayant la borne supérieure égale à $\overline{I\Pi}(\phi)$.

Proposition 4. *Soit $I\pi$ une DPI telle que $\overline{I\Pi}(\neg\phi)=1$. S'il existe plus d'une interpretation modèle de ϕ qui a sa borne supérieure égale à $\overline{I\Pi}(\phi)$, alors $\forall\omega\in\Omega$:*

$$I\pi(\omega|\phi)=\begin{cases}\left[\frac{\underline{I\pi}(\omega)}{\overline{I\Pi}(\phi)},\min\left(1,\frac{\overline{I\pi}(\omega)}{\underline{I\Pi}(\phi)}\right)\right] & \textit{si } \omega\models\phi \\ [0,0] & \textit{sinon}\end{cases}$$

La proposition suivante concerne le cas particulier où il n'existe qu'une seule interprétation ω^*, modèle de ϕ, telle que $\overline{I\pi}(\omega^*)=\overline{I\Pi}(\phi)$. Dans ce cas, en comparaison avec la Proposition 4, seule la borne inférieure de l'interprétation ω^* change. Plus précisement,

Proposition 5. *Soit $I\pi$ une DPI $\overline{I\Pi}(\neg\phi)=1$. Supposons qu'il existe une unique interprétation ω^*, modèle de ϕ, telle que $\overline{I\pi}(\omega^*)=\overline{I\Pi}(\phi)$.*
- Si $\omega\neq\omega^*$ alors $I\pi(\omega|\phi)$ est défini de la même manière que dans la Proposition 4, ie :

$$I\pi(\omega|\phi)=\begin{cases}\left[\frac{\underline{I\pi}(\omega)}{\overline{I\Pi}(\phi)},\min\left(1,\frac{\overline{I\pi}(\omega)}{\underline{I\Pi}(\phi)}\right)\right] & \textit{si } \omega\models\phi \\ [0,0] & \textit{sinon}\end{cases}$$

- Si $\omega=\omega^*$, soit $secondbest(I\pi)=\max\{\overline{I\pi}(\omega') : \omega'\models\phi \text{ et } \overline{I\pi}(\omega')\neq\overline{I\Pi}(\phi)\}$. Alors :

$$I\pi(\omega|\phi)=\begin{cases}[1,1] & \textit{si } secondbest(I\pi)=0 \\ \left[\min(1,\frac{\underline{I\pi}(\omega)}{secondbest(I\pi)}),1\right] & \textit{sinon}\end{cases}$$

La section suivante nous donne la contrepartie syntaxique du conditonnement à bases de compatibles.

6 Caractérisation syntaxique du conditionnement

Étant donnée une base à intervalles IK et une nouvelle information ϕ, conditionner au niveau syntaxique revient à modifier la base IK en IK_ϕ telle que la *DPI* induite par IK_ϕ, $I\pi_{IK_\phi}$ est égale à la distribution conditionnée $I\pi(.|\phi)$ comme le montre la Figure 1. Le but de cette section est alors de calculer la nouvelle *BPI*, dénotée pour simplifier IK_ϕ, telle que :

$$\forall\omega\in\Omega, I\pi_{IK}(\omega|\phi)=I\pi_{IK_\phi}(\omega),$$

où $I\pi_{IK_\phi}$ est la distribution associée à IK_ϕ (calculée à l'aide de la Définition 4), et $I\pi_{IK}(.|\phi)$ est le résultat du conditionnement de $I\pi_{IK}$ en

$$\begin{tikzcd} IK \arrow[rr, "\text{Définition 5}"] \arrow[d, "\text{Conditionnement syntaxique avec } \phi"'] & & I\pi_{IK} \arrow[d, "\text{Conditionnement sémantique (Prop. 4 et 5)}"] \\ IK_{\phi} \arrow[r, "\text{Définition 5}"] & I\pi_{IK_{\phi}} \overset{?}{=} & I\pi_{IK}(.|\phi) \end{tikzcd}$$

Figure 1 – Équivalence des conditionnementq syntaxique et sémantique.

utilisant le conditionnement à base de compatibles de la section précédente (cf. Propositions 4 et 5).

Afin d'arriver à ce résultat, il nous faut fournir les méthodes permettant de modifier directement la base de connaissances IK ie. :

- vérifier si $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$=0 (resp. $\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)$=0) ou non,
- vérifier si $\overline{I\Pi}_{IK}(\neg\phi)=1$ ou non,
- calculer $\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)$ et $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$,
- calculer $secondbest(I\pi_{IK})$,
- vérifier s'il existe une unique interprétation ω^* telle que $\overline{I\pi}(\omega^*)=\overline{I\Pi}(\phi)$, et pour finir
- calculer IK_{ϕ}.

6.1 Vérifier si $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$=0 (resp. $\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)$=0) ou non

Rappelons qu'une *DPI* où $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)=0$ exprime une contradiction forte avec la nouvelle information ϕ.

Proposition 6. *Soit IK une BPI et $I\pi_{IK}$ sa distribution associée. Alors,*

i) $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)=0$ *ssi* $\{\psi : (\psi,I)\in IK \text{ et } I=[1,1]\}\cup\{\phi\}$ *est inconsistante. Dans ce cas,* $IK_{\phi}=\emptyset$.

ii) $\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)=0$ *ssi* $\{\psi : (\psi,I)\in IK \text{ et } \overline{I}=1\} \cup \{\phi\}$ *est inconsistant. Dans ce cas,* $IK_{\phi}=\{(\phi,[1,1]),(\neg\phi,[0,1])\}$.

Dans la suite, on suppose que IK est telle que ϕ est quelque peu possible, ainsi sa *DPI* associée $I\pi_{IK}$ aussi (ie. $\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)>0$).

6.2 Vérifier si $\overline{I\Pi}_{IK}(\neg\phi)\neq 1$ ou non

Cette sous-section montre comment vérifier de manière syntaxique si l'information ϕ est acceptée ou non, à savoir si $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)=1$ ou pas.

Proposition 7. *Soient IK une BPI et $I\pi_{IK}$ sa DPI associée. Alors :* $\overline{I\Pi}_{IK}(\neg\phi)\neq 1$ *ssi* $\{\psi : (\psi,I)\in IK \text{ et } \underline{I}>0\} \cup \{\neg\phi\}$ *est inconsistant. Dans ce cas :* $IK_{\phi}=IK\cup\{(\phi,[1,1])\}$.

6.3 Calcul de $\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)$ et $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$

Le calcul de $\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)$ et $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$ se réduit au calcul du degré d'inconsistance de deux bases possibilistes standard comme le stipule la proposition suivante :

Proposition 8. *Soit IK une BPI. Soient* $\underline{IK}=\{(\psi,\underline{I}) : (\psi,I)\in IK\}$ *et* $\overline{IK}=\{(\psi,\overline{I}) : (\psi,I)\in IK\}$. *Alors :*

$\underline{I\Pi}_{IK}(\phi)=1-Inc(\overline{IK}\cup\{(\phi,1)\})$ *et*
$\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)=1-Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})$.

Dans la proposition 8, $Inc(K)$ est le degré d'inconsistence de la base possibiliste standard K et il est défini avec la notion de α-coupe comme suit :

$$Inc(K)=\begin{cases} 0 & \text{If } K_0 \text{ est consistant} \\ \max\{\alpha : K_{\alpha} \text{ est inconsistant}\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

et K_{α} est défini par $K_{\alpha}=\{\varphi : (\varphi,\beta)\in K \text{ et } \beta\geq\alpha\}$.

6.4 Test d'unicité des modèles de ϕ ayant une borne supérieure égale à $\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$

Nous avons besoin de montrer comment tester syntaxiquement s'il existe une seule interprétation ω^*, modèle de ϕ, tel que $\overline{I\pi}_{IK}(\omega^*)=\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$. Si une seule interprétation ω^*, modèle de ϕ, tel que $\overline{I\pi}_{IK}(\omega)=\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$ alors ω est modèle de $\Phi=\{\psi : (\psi,I)\in IK$ et $\underline{I}>Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})\}\cup\{\phi\}$. De plus, si quelque $\omega'\neq\omega$, $\overline{I\pi}_{IK}(\omega')<\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$ alors cela veut dire que ω' falsifie au moins une formule de $\Phi\cup\{\phi\}$. En outre, supposons qu'il existe une seule interprétation ω^* de ϕ tel que $\overline{I\pi}_{IK}(\omega^*)=\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$. Nous voulons savoir si $\forall\omega'\neq\omega^*$, $I\pi(\omega')=[0,0]$. Il suffit de vérifier que toute formule de $\{\psi : (\psi,I)\in IK \text{and } \underline{I}>Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})\}$ est associée à l'intervalle I=[1,1]. Les principaux résultats de cette section sont récapitulés dans la proposition ci-après :

Proposition 9. *Soit IK une BPI. Soit $I\pi_{IK}$ la distribution de possibilités associée à IK. Soit Φ=$\{\psi : (\psi, I)\in IK$ et $\underline{I}>Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})\}\cup\{\phi\}$. Alors :*

- *$\Phi\cup\{\phi\}$ admet un seul modèle ssi il existe une seule interprétation ω^*, modèle de ϕ, tel que $\overline{I\pi}_{IK}(\omega^*)$=$\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$.*
- *$\Phi\cup\{\phi\}$ admet un seul modèle et chaque formule dans Φ a comme intervalle [1,1] ssi il existe ω^* modèle de ϕ tel que $\overline{I\pi}(\omega^*)$=$\overline{I\Pi}_{IK}(\phi)$ et $\forall\omega'\neq\omega^*$, $I\pi(\omega')$=$[0,0]$.*

6.5 Calcul de $secondbest(IK)$

Rappellons que $\underline{IK}$=$\{(\psi,\underline{I})\ :\ (\psi,I)\in IK\}$ et que $secondbest(IK)$ est calculé uniquement s'il existe exactement une interprétation ω^*, modèle de ϕ, tel que $\overline{I\Pi}(\phi)$=$\overline{I\pi}(\omega^*)$. Pour définir $secondbest(I\pi_{IK})$, soit $\mathcal{L}$=$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ les différents niveaux de pondération dans $\underline{IK}$ avec $\alpha_1>\ldots>\alpha_n$. Définissons $(A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n})$ comme la partition bien ordonnée WOP (well ordered partition) associée à $\underline{IK}$, obtenue comme suit :

$$A_{\alpha_i} = \{(\psi,\beta) : (\psi,\beta)\in \underline{IK} \text{ et } \beta=\alpha_i\}. \qquad (5)$$

A_{α_i} est le sous-ensemble de $\underline{IK}$ composé des formules associées à un degré égal à α_i. Alors :

Proposition 10. *Supposons qu'il existe une seule interprétation ω^*, modèle de ϕ, tel que $\overline{I\Pi}_{IK_\phi}(\phi)$=$\overline{I\pi}_{IK_\phi}(\omega^*)$. Soit $(A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2},\ldots,A_{\alpha_n})$ le WOP associé à $\underline{IK}$, ou A_{α_i} sont donnés par l'Equation 5. Définissons $secondbest(IK)$=$1-\min\{\alpha_i : \alpha_i>Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})$ et A_{α_i} est une formule non-tautologique$\}$. Alors $secondbest(IK)$=$secondbest(I\pi_{IK})$.*

6.6 Calcul de IK_ϕ

Donnons maintenant la contrepartie syntaxique du calcul de IK_ϕ au cas ou $\overline{I\Pi}_{IK}(\neg\phi)$=1. Afin de simplifier les notations, nous convenons ce qui suit :

i) $\overline{\alpha}$=1-$\frac{1-\overline{I}}{1-Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})}$
ii) $\underline{\alpha}$=1-$\frac{1-\underline{I}}{1-Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})}$
iii) 2α=1-$\frac{1-\overline{I}}{secondbest(IK)}$
iv) Φ=$\{\psi : (\psi,I)\in IK$ et $\underline{I}>Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})\}$

Les deux propositions suivantes donnent la contrepartie syntaxique du calcul de IK_ϕ selon que $\Phi\cup\{\phi\}$ admet plusieurs modèles ou non :

Proposition 11 (Cas général : $\Phi\cup\{\phi\}$ a plus d'un modèle)**.** *Supposons que $\Phi\cup\{\phi\}$ a plus d'un modèle alors : IK_ϕ=$\{(\phi,[1,1])\}\cup\{(\psi,[\max(0,\underline{\alpha}),\overline{\alpha}])\ :\ (\psi,I)\in IK$, et $\underline{I}\geq Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})\}$.*

Proposition 12 (Cas particulier : $\Phi\cup\{\phi\}$ admet exactement un seul modèle)**.** *Supposons que $\Phi\cup\{\phi\}$ admet un seul modèle.*

1. *Si chaque formule de Φ a un intervalle égal à [1,1], alors : IK_ϕ=$\{(\psi,[1,1]) :(\psi,[1,1])\in IK$ et $Inc(\underline{IK}\cup\{\phi,1\})<1\}\cup\{(\phi,[1,1])\}$.*
2. *S'il y a une formule dans Φ avec un intervalle différent de [1,1] alors IK_ϕ=$\{(\phi,[1,1])\}\cup\{(\psi,[\max(0,\underline{\alpha}),\overline{\alpha}]):(\psi,I)\in IK$, et $\underline{I}>Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})\}\cup\{(\psi,[0,\max(0,2\alpha)])\ :\ (\psi,I)\in IK$, et $\underline{I}$=$Inc(\underline{IK}\cup\{(\phi,1)\})>0\}$.*

Il est à noter que l'item 1 correspond au cas où $secondbest(IK)$=0. L'Algorithme 1 récapitule les principales étapes du calcul de IK_ϕ.

L'intérêt du conditionnement proposé est qu'il :
i) étend le conditionnement standard de la théorie des possibilités (en effet si tous les intervalles I associés aux interprétations, sont des singletons alors $\forall\omega\in\Omega$, $I\pi(\omega|\phi)$= $[\pi(\omega|\phi)$,$\pi(\omega|\phi)]$ où π est l'unique distribution compatible associés à $I\pi$).
ii) Lorsque les formules de IK sont sous forme clausale, le calcul du conditionnement d'une base possibiliste à intervalles a la même complexité que celle du conditionnement d'une base de connaissances possibiliste standard. En effet, pour les bases de connaissances possibilistes standards K, la tâche la plus coûteuse est le calcul de $Inc(K)$ qui peut être réalisé en temps en $O(\log_2(m).SAT)$ ou SAT est un test de satisfiabilité d'un ensemble de clauses propositionnelles et m est le nombre de niveaux de pondérations différents dans K.

7 Conclusion

La logique possibiliste à intervalles offre un cadre expressif et puissant pour la

Algorithm 1 Contrepartie syntaxique du conditionnement à base de compatibles

Input: Base possibiliste à intervalles IK et nouvelle évidence ϕ
Output: Nouvelle base possibiliste à intervalles IK_ϕ telle que $\forall\omega\in\Omega$, $I\pi_{IK_\phi}(\omega)=I\pi_{IK}(\omega|\phi)$.

```
Soit A={ψ : (ψ, I)∈IK et I=[1, 1]}∪{φ}
Soit B={ψ : (ψ, I)∈IK et Ī=1}∪{φ}
if A est inconsistant then
    IK_φ=∅ (Prop. 6).
else if B est inconsistant then
    IK_φ={(φ, [1, 1]), (¬φ, [0, 1])} (Prop. 6).
else if {ψ : (ψ, I) ∈ IK} ∪ {¬φ} est inconsistant then
    IK_φ = IK ∪ {(φ, [1, 1])} (Prop. 7).
else if Φ ∪ {φ} admet un seul model then
    if toute formule ψ de Φ a un intervalle égal à [1,1] dans IK_φ then
        IK_φ={(ψ, [1, 1]) : (ψ, [1, 1])∈IK et Inc(IK_)<1} ∪ {(φ, [1, 1])} (Prop. 12).
    else
        IK_φ={(φ, [1, 1])}∪{(ψ, [max(0, α_), ᾱ]):(ψ, I)∈IK, et I_>Inc(IK_ ∪ {(φ, 1)})} ∪ {(ψ, [0, max(0, 2α)]) : (ψ, I)∈IK, and I_=Inc(IK_ ∪ {(φ, 1)}) > 0} (Prop. 12).
    end if
else
    IK_φ={(φ, [1, 1])} ∪ {(ψ, [max(0, α_), ᾱ]) : (ψ, I)∈IK, et I_≥Inc(IK_∪{(φ, 1)})} (Prop. 11).
end if
```

représentation et le raisonnement avec des informations incertaines et incomplètes. A l'origine, ce cadre n'a été prévu que pour les informations à caractère statique et aucune forme de conditionnement n'a été proposée afin de mettre à jour les connaissances et les croyances à la lumière de nouvelles informations. Dans cet article, nous avons montré que le conditionnement peut être abordé d'une manière naturelle et sans coût de calcul supplémentaire. Plus précisément, nous avons proposé un conditionnement à base de compatibles pour les bases de connaissances possibilistes à base d'intervalles. Ce conditionnement reflète la vision d'une base possibiliste à base d'intervalles comme un ensemble de bases compatibles. Nous avons montré que quand le conditionnement qualitatitif à base de l'opérateur $\min$ est appliqué alors le résultat obtenu n'est pas garanti d'être une distribution de possibilités à intervalles alors que si on applique le conditionnement quantitatif basé sur le produit sur l'ensemble des distributions compatibles, cela donne une distribution de possibilités à intervalles. Nous avons fourni les calculs exacts de bornes inférieures et supérieures des intervalles associés à chaque interprétation de la distribution de possibilités a posteriori. Enfin, nous avons proposé une contrepartie syntaxique pour le conditionnement à base de compatibles qui ne nécessite aucun surcoût de calcul par rapport au conditionnement d'une base possibiliste standard.

Références

[1] S Benferhat, J Hué, S Lagrue, and J Rossit. Interval-based possibilistic logic. In *IJCAI 2011, Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence, Barcelona, Catalonia, Spain, July 16-22, 2011*, pages 750–755, 2011.

[2] Fabio G. Cozman. Credal networks. *Artificial Intelligence*, 120(2) :199 – 233, 2000.

[3] D. Dubois. Possibility theory and statistical reasoning. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51 :47–69, 2006.

[4] D Dubois. On various ways of tackling incomplete information in statistics. *Int. J. Approx. Reasoning*, 55(7) :1570–1574, October 2014.

[5] D. Dubois and H. Prade. Bayesian conditioning in possibility theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 92(2) :223 – 240, 1997. Fuzzy Measures and Integrals.

[6] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory and its applications : a retrospective and prospective view. In *Decision Theory and Multi-Agent Planning*, volume 482, pages 89–109. Springer Vienna, 2006.

[7] P. Fonck. A comparative study of possibilistic conditional independence and lack of interaction. *International Journal of Approximate Reasoning*, 16(2) :149–171, 1997.

[8] E. Hisdal. Conditional possibilities independence and non interaction. *Fuzzy Sets and Systems*, pages 283–297, 1978.

[9] J Lang. Possibilistic logic : complexity and algorithms . In *Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning*, volume 5, pages 179–220. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[10] I Levi. *The Enterprise of Knowledge : An Essay on Knowledge, Credal Probability, and Chance*, volume 92. The Mit Press, 1980.

[11] J.F. Huete L.M. De Campos and S. Moral. Possibilistic independence. *Proceedings of EUFIT 95*, 1 :69–73, 1995.

[12] H Nguyen and V Kreinovich. How to fully represent expert information about imprecise properties in a computer system : random sets, fuzzy sets, and beyond : an overview. *International Journal of General Systems*, 43(6) :586–609, 2014.

[13] G Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, 1976.