

Une heuristique de branchement dirigée vers les formules Horn renommables quantifiées

FLORIAN LETOMBE
CRIL, CNRS FRE 2499

3 juin 2005

Le problème QBF

- ▶ Généralisation de SAT
- ▶ Problème PSPACE-complet canonique
- ▶ Nombreuses applications en IA : planification, raisonnement non monotone, inférence paraconsistante, abduction, etc

- ▶ Complexité élevée
- ▶ Une solution possible : les classes polynomiales
- ▶ Instances de ces classes polynomiales difficiles pour les prouveurs QBF actuels

Restrictions traitables de *QBF*

Formule de Horn Quantifiée

Formule Horn Renommable Quantifiée

Algorithme de reconnaissance

L'heuristique Δ

Définition

Exemple

Résultats expérimentaux

Méthodologie

Jeux d'essai polynomiaux

Jeux d'essai de l'évaluation QBF 2004

Conclusion & perspectives

QBF : définition formelle

Définition (QBF)

Une QBF Π est une expression de la forme

$$Q_1 X_1 \dots Q_n X_n \Phi, \quad (n \geq 0)$$

- ▶ $X_1 \dots X_n$ ensembles de variables propositionnelles
- ▶ Φ une formule propositionnelle sur ces variables
- ▶ $Q_i (0 \leq i \leq n)$ un quantificateur existentiel \exists ou universel \forall

Validité d'une *QBF*

Existence d'une stratégie gagnante dans un jeu contre la nature

Exemple

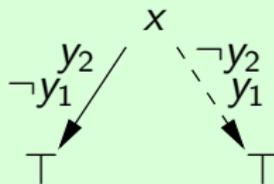
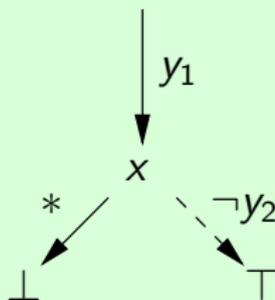
$$\exists y_1 \forall x \exists y_2$$

$$[(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$

 \neq

$$\forall x \exists y_1, y_2$$

$$[(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$



Prouveur à la DPLL

Exemple

$$\forall x \exists y_1, y_2 [(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$

Prouveur à la DPLL

Exemple

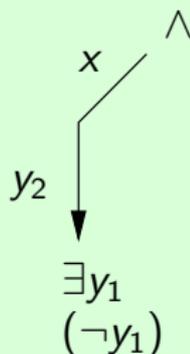
$$\forall x \exists y_1, y_2 [(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$

$$\begin{array}{c}
 \wedge \\
 \swarrow \\
 x \\
 \searrow \\
 \exists y_1, y_2 \\
 (y_1 \vee y_2) \wedge \\
 (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge \\
 (y_2)
 \end{array}$$

Prouveur à la DPLL

Exemple

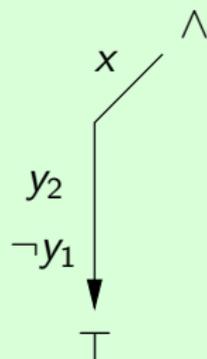
$$\forall x \exists y_1, y_2 [(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$



Prouveur à la DPLL

Exemple

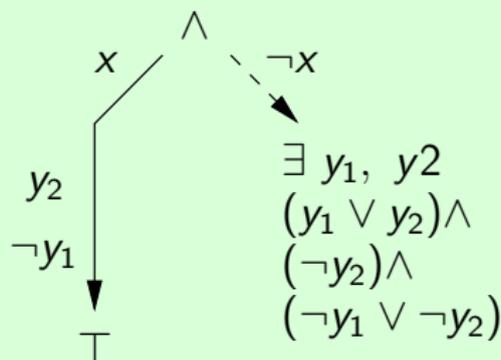
$$\forall x \exists y_1, y_2 [(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$



Prouveur à la DPLL

Exemple

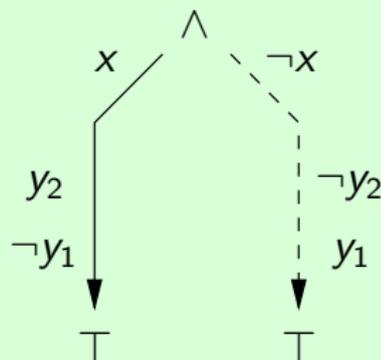
$$\forall x \exists y_1, y_2 [(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$



Prouveur à la DPLL

Exemple

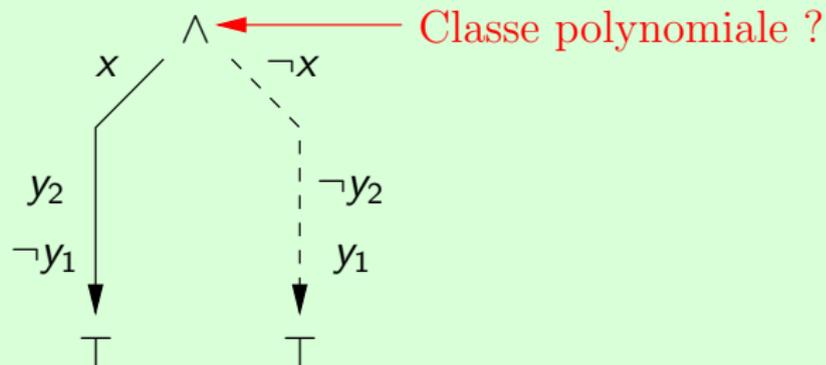
$$\forall x \exists y_1, y_2 [(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$



Prouveur à la DPLL

Exemple

$$\forall x \exists y_1, y_2 [(y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (y_2 \vee \neg x)]$$



Classes Polynomiales

- ▶ Beaucoup étudié depuis longtemps dans la communauté SAT
 - ▶ Aspvall *et al.* 1979
 - ▶ Del Val 2000
- ▶ Étudié récemment pour QBF (Gent & Rowley 2002)
- ▶ Deux étapes :
 - ▶ Reconnaissance polynomiale
 - ▶ Résolution polynomiale
- ▶ Exemples de classes polynomiales : Krom, Horn, Horn renommable, ...

QHF : définition

Définition (QHF)

- ▶ Clause de Horn : clause comprenant au plus un littéral positif
- ▶ QHF : QBF dont la matrice ne contient que des clauses de Horn

Exemple

$$\Pi_1 = \forall a, b \exists c, d \forall e [(a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg d)]$$

ren $QH\mathcal{F}$: définitionDéfinition (ren $QH\mathcal{F}$)

- ▶ Renommer = changer la polarité d'un littéral
- ▶ Une formule est Horn renommable ssi il existe un renommage uniforme de ses variables tq sa matrice devienne Horn après renommage

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

$$\Pi_1 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg d)]$$

Π_2 est Π_1 dans laquelle on a renommé b et c

Reconnaissance de formules Horn renommables

Définition (\Rightarrow et $CLOS(I)$)

- ▶ $I \Rightarrow t$ ssi il existe une clause $C \in \Phi$ tq $I \in C$, $\neg t \in C$ et $I \neq \neg t$
- ▶ $CLOS(I)$ désigne l'ensemble $\{t / I \Rightarrow^* t\}$

Si $CLOS(I)$ est contradictoire (contient un littéral et son contraire) et $I \in R$, alors R n'est pas fermé

Proposition (*Proposition 1.1 de Hébrard 1994*)

Un renommage R est Horn si et seulement s'il est fermé, i.e. pour tout $I \in R$, $CLOS(I) \subseteq R$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

▶ $\text{CLOS}(\neg a) = \{\neg a\}$

▶ $\text{CLOS}(a) = \{a\}$

▶ Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

► $\text{CLOS}(\neg a) = \{\neg a\}$

► $\text{CLOS}(a) = \{a\}$

► Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

► $\text{CLOS}(\neg a) = \{\neg a, c, e\}$

► $\text{CLOS}(a) = \{a\}$

► Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

- ▶ $\text{CLOS}(\neg a) = \{a, \neg a, c, d, e\}$
- ▶ $\text{CLOS}(a) = \{a\}$
- ▶ Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

▶ $\text{CLOS}(\neg a) = \{a, \neg a, c, d, e\} \equiv \perp$

▶ $\text{CLOS}(a) = \{a\}$

▶ Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

▶ $\text{CLOS}(\neg a) = \{a, \neg a, c, d, e\} \equiv \perp$

▶ $\text{CLOS}(a) = \{a\}$

▶ Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

- ▶ $\text{CLOS}(\neg a) = \{a, \neg a, c, d, e\} \equiv \perp$
- ▶ $\text{CLOS}(a) = \{a, \neg b, d, e\}$
- ▶ Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

- ▶ $\text{CLOS}(\neg a) = \{a, \neg a, c, d, e\} \equiv \perp$
- ▶ $\text{CLOS}(a) = \{a, \neg b, \neg c, d, e\}$
- ▶ Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Exemple

$$\Pi_2 = \forall a, b \exists c, d \forall e$$

$$[(a \vee b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)]$$

- ▶ $\text{CLOS}(\neg a) = \{a, \neg a, c, d, e\} \equiv \perp$
- ▶ $\text{CLOS}(a) = \{a, \neg b, \neg c, d, e\}$
- ▶ Un Horn renommage possible pour Π_2 est $\{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Définitions

Définition (*Distance de contradiction de Horn renommabilité d'un littéral l*)

$$\delta_l = \begin{cases} 0 & \text{si } \nexists v | l \Rightarrow v \\ 1 & \text{si } l \Rightarrow t \text{ et } l \Rightarrow \neg t \\ 1 + \min(\{\delta_v | l \Rightarrow v\}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

PARCOURS EN LARGEUR

Définition (Δ)

- ▶ $\Delta_x = 1024 \times \delta_x \times \delta_{\neg x} + \delta_x + \delta_{\neg x}$;
- ▶ la variable x est choisie si $x \in X_1$ et, $\forall y \in X_1$,
($x \neq y \Rightarrow \Delta_x \leq \Delta_y$) ;
- ▶ le littéral x est enfin choisi si $\delta_x > \delta_{\neg x}$, $\neg x$ sinon.

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 0$:

► $\text{CLOS}(a) =$

$\{a\}$

► Littéraux à traiter :

$a,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 1$:

► $\text{CLOS}(a) =$

$\{a\}$

► Littéraux à traiter :

$a,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 1$:

► $\text{CLOS}(a) =$

$\{a, \neg c, \neg d\}$

► Littéraux à traiter :

$\neg c, \neg d,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 2$:

► $\text{CLOS}(a) =$

$\{a, \neg c, \neg d\}$

► Littéraux à traiter :

$\neg c, \neg d,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 2$:

► $\text{CLOS}(a) = \{a, \neg b, \neg c, \neg d, f\}$

► Littéraux à traiter : $\neg d, \neg b, f,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 2$:

► $\text{CLOS}(a) = \{a, \neg b, \neg c, \neg d, f\}$

► Littéraux à traiter : $\neg b, f,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 3$:

► $\text{CLOS}(a) = \{a, \neg b, \neg c, \neg d, f\}$

► Littéraux à traiter :

f ,

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 3$:

► $\text{CLOS}(a) =$
 $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, \neg e, f\}$

► Littéraux à traiter :

$f, \neg e,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 3$:

- ▶ $\text{CLOS}(a) = \{a, \neg b, \neg c, \neg d, e, \neg e, f\}$
- ▶ Littéraux à traiter : $\neg e,$

Exemple

$$\Pi_3 = \forall a, b \exists c, d \forall e \exists f$$

$$\left[\begin{array}{cccc} a & \vee & c & \vee & d \\ b & \vee & \neg c & \vee & \neg f \\ a & \vee & c & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg d \\ a & \vee & d & & \\ \neg a & \vee & b & \vee & \neg c \\ c & \vee & \neg d & \vee & \neg f \\ \neg a & \vee & \neg b & \vee & e \\ c & \vee & \neg e & \vee & f \end{array} \right]$$

Niveau $\delta_a = 3$:

► $\text{CLOS}(a) =$
 $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, e, \neg e, f\} \equiv \perp$

► Littéraux à traiter :

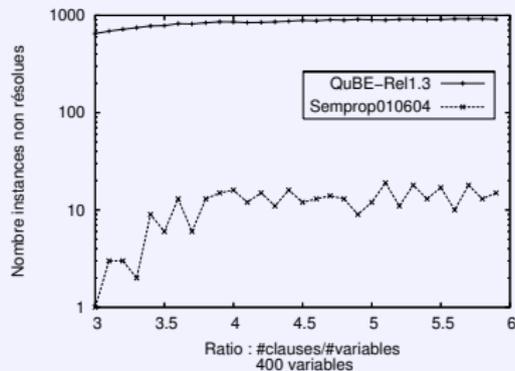
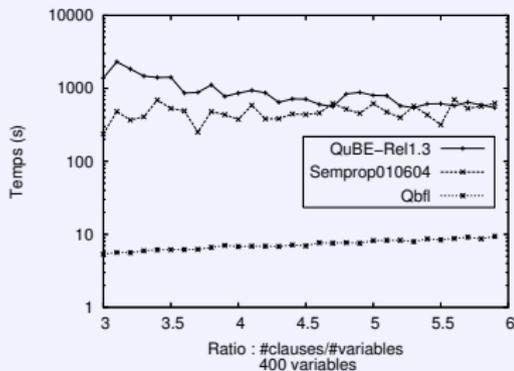
- ▶ PIV 3GHz, 512 MB de RAM, Linux Fedora
- ▶ Qbfl : notre prouveur, version 1.7
(<http://www.cril.univ-artois.fr/~letombe/qbfl>)
 - ▶ Extension de DPLL
 - ▶ Utilise Limmat (1.3) comme oracle SAT (vainqueur compétition SAT 2002)
 - ▶ Reconnaissance de ren $QHFs$
 - ▶ Diverses heuristiques dont Δ
- ▶ QuBE-Rel : Giunchiglia *et al.* 2001, version 1.3
(<http://www.star.dist.unige.it/~qube>)
- ▶ Semprop : Letz 2002, version 010604
(<http://www4.in.tum.de/~letz/semprop>)

Génération aléatoire d'instances de classes polynomiales

- ▶ QHF s et $renQHF$ s générées aléatoirement
- ▶ 2 générateurs
(<http://www.cril.univ-artois.fr/~letombe/qbfg>)
- ▶ QHF : pour chaque clause
 - ▶ taille aléatoire
 - ▶ choix aléatoire du littéral positif
 - ▶ choix des littéraux négatifs restants
- ▶ $renQHF$:
 - ▶ nombre aléatoire de variables à renommer
 - ▶ choix aléatoire des variables à renommer
 - ▶ mêmes autres paramètres que QHF s
- ▶ Préfixe $\forall X \exists Y, 2 < |X| < 2/3 \# V$

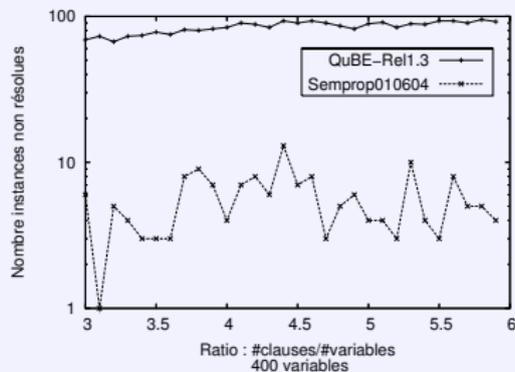
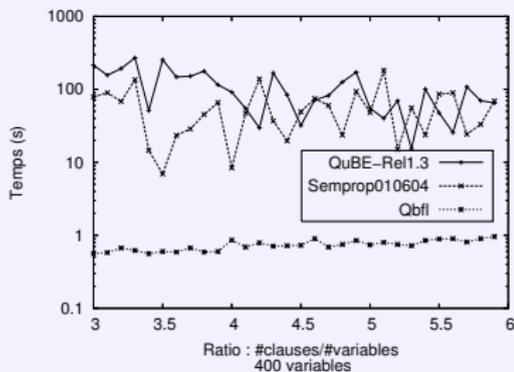
QHF_s

- ▶ 1000 instances générées par point
- ▶ Temps cumulé sur les instances résolues
- ▶ TimeOut : 60 s
- ▶ 400 variables
- ▶ 1200 à 2360 clauses



renQHFs

- ▶ 100 instances
- ▶ Temps cumulé sur les instances résolues
- ▶ TimeOut : 60 s
- ▶ 400 variables
- ▶ 1200 à 2360 clauses



Description

- ▶ Jeux d'essai disponibles sur <http://www.qbflib.org/benchmarks.html>
- ▶ G. Pan : 9 types de 21 jeux d'essai valides et 9 faux (378 instances)
- ▶ Autres types d'instances :
 - ▶ A. Ayari (72)
 - ▶ C. Castellini (169)
 - ▶ M. Mneimneh et K. A. Sakallah (202)
 - ▶ J. Rintanen (67)
 - ▶ C. Scholl et B. Becker (64)
- ▶ Total : 952 instances
- ▶ TimeOut : 900 s

Instances de G. Pan

Type d'instance	Jeroslow-Wang				Horn rennomable Δ			
	%résolus		%RH		%résolus		%RH	
	k*_n	k*_p	k*_n	k*_p	k*_n	k*_p	k*_n	k*_p
k_branch_n/p	4.76	4.76	25.26	24.56	9.52	4.76	9.29	9.33
k_d4_n/p	4.76	9.52	13.25	26.33	4.76	14.28	5.63	25.34
k_dum_n/p	4.76	4.76	11.69	11.71	23.80	14.28	11.51	11.40
k_grz_n/p	0	0	-	-	61.90	0	11.94	-
k_lin_n/p	9.52	9.52	20.00	11.88	9.52	19.04	24.26	8.65
k_path_n/p	9.52	14.28	5.47	7.43	14.28	19.04	12.12	7.64
k_ph_n/p	23.80	19.04	2.66	10.06	23.80	19.04	11.73	6.89
k_poly_n/p	9.52	4.76	0	12.91	14.28	9.52	6.66	11.04
k_t4p_n/p	4.76	0	11.37	-	4.76	4.76	26.62	26.02
Total v/f	7.93	7.40	11.21	14.98	18.51	11.64	13.30	13.28
Total	7.67		13.09		15.07		13.29	

Conclusion

- ▶ Mise en évidence des problèmes des prouveurs QBF actuels sur des instances polynomiales
- ▶ Utilisation pratique de restrictions traitables de QBF dans des prouveurs
- ▶ Distance de contradiction δ
- ▶ Amélioration significative de $Qbfl$ sur certaines instances QBF

Perspectives

Théorique :

- ▶ Étude d'autres classes polynomiales (AAAI'05)
- ▶ Algorithme de détection de ces classes
- ▶ Algorithme de résolution de ces classes

Pratique :

- ▶ Validation de l'heuristique
- ▶ Intégrer de nouvelles classes polynomiales à Qbfl
- ▶ Analyse plus complète des instances

Questions ?