

# OPC - Exercices de modélisation

Pour chacun des problèmes suivants, proposez un modèle CSP (c'est-à-dire un réseau de contraintes).

## 1 Coloration de carte

Étant donné une carte et un jeu de  $k$  couleurs, le problème consiste à colorier les différentes régions de la carte en utilisant les  $k$  couleurs tout en évitant que deux régions adjacentes ne soient coloriées de la même couleur.

1. Modéliser sous la forme d'un réseau de contraintes l'instance correspondant à la figure 1.
2. A votre avis, à partir de combien de couleurs peut-on avoir la garantie qu'on sera toujours en mesure de colorier n'importe quelle carte (par exemple, celles des États-Unis — voir la figure 2)?

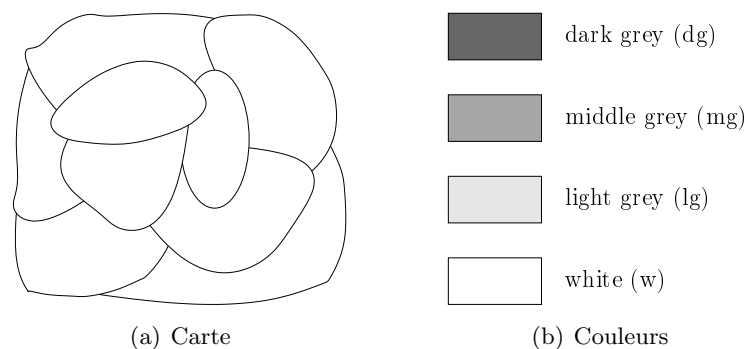


FIGURE 1 – Une carte avec 9 régions à colorier en utilisant 4 couleurs.



FIGURE 2 – Carte des États-Unis.

## 2 Le problème du zèbre

Ce problème est attribué a Lewis Carroll, pasteur logicien et écrivain anglais (auteur de nombreux "puzzles"). On considère cinq maisons alignées,

- toutes de couleurs différentes (rouge, bleu, jaune, blanc, et vert) ;
- dans lesquelles logent cinq professionnels (peintre, sculpteur, diplomate, docteur et violoniste) ;
- de nationalités différentes (anglaise, espagnole, japonaise, norvégienne et italienne) ;
- ayant chacun une boisson favorite (thé, jus de fruits, café, lait et vin) ;
- et des animaux de compagnie différents (chien, escargots, renard, cheval et zèbre).



FIGURE 3 – Qui cohabite avec le zèbre ?

On dispose des faits suivants :

1. l'anglais habite la maison rouge
2. l'espagnol possède un chien
3. le japonais est peintre
4. l'italien boit du thé
5. le norvégien habite la première maison a gauche
6. le propriétaire de la maison verte boit du café
7. la maison verte est a droite de la blanche
8. le sculpteur élève des escargots
9. le diplomate habite la maison jaune
10. on boit du lait dans la maison du milieu
11. le norvégien habite a cote de la maison bleue
12. le violoniste boit du jus de fruit
13. le renard est dans une maison voisine de celle du médecin
14. le cheval est a cote de la maison du diplomate

Il s'agit de trouver la personne qui vit avec le zèbre et le buveur de vin.

1. Modéliser ce problème sous la forme d'un réseau de contraintes.
2. Peut-on éliminer certaines valeurs pour commencer ?

### 3 Série de tous les intervalles

Étant données les 12 hauteurs de notes (c, c#, d, ...), représentées par les nombres 0,1,...,11, il faut trouver une série dans laquelle chaque hauteur apparaît exactement une fois et dans laquelle les intervalles musicaux entre les notes voisines couvrent l'ensemble complet des intervalles du mineur second (1 demi-ton) au majeur septième (11 demi-tons). Cela signifie donc que pour chaque intervalle, il existe un couple de hauteurs voisines entre lesquelles l'intervalle apparaît.

Le problème de trouver une telle série peut être généralisé comme suit. Étant donné un entier positif  $n$ , trouver une séquence  $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$  telle que :

1.  $s$  corresponde à une permutation de  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$
2. la séquence (des intervalles successifs)  $v = (|s_1 - s_0|, |s_2 - s_1|, \dots, |s_{n-1} - s_{n-2}|)$  corresponde à une permutation de  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$

Une séquence  $s$  satisfaisant ces conditions est appelé une série de tous les intervalles de taille  $n$ . Par exemple, pour  $n = 8$ , une solution est :

$$s = (1, 7, 0, 5, 4, 2, 6, 3)$$

puisque cette séquence correspond bien à une permutation de  $\{0, 1, \dots, 7\}$  et que :

$$v = (6, 7, 5, 1, 2, 4, 3)$$

correspond bien à une permutation de  $\{1, \dots, 7\}$ .

### 4 Problème crypto-arithmétique

Un problème crypto-arithmétique est un puzzle mathématique à base de mots tel que chaque lettre joue le rôle d'un chiffre (c'est-à-dire une valeur entre 0 et 9). Il est alors possible d'effectuer des sommes de mots, et le problème est de déterminer quelles valeur permettent ces sommes. Par exemple,

	N O		C R O S S		D O N A L D
+	N O	+	R O A D S	+	G E R A L D
=	Y E S	=	D A N G E R	=	R O B E R T

1. Essayer de trouver une solution à la main au puzzle de gauche.
2. Modéliser sous la forme d'un réseau de contraintes le puzzle du centre.

### 5 Dominos

Un jeu classique de Domino comprend 28 pièces réparties comme suit :

```

0-0
0-1  1-1
0-2  1-2  2-2
0-3  1-3  2-3  3-3
0-4  1-4  2-4  3-4  4-4
0-5  1-5  2-5  3-5  4-5  5-5
0-6  1-6  2-6  3-6  4-6  5-6  6-6
    
```

Un puzzle construit sur le jeu de Domino est défini comme suit. Toutes les pièces ont été réparties sur une structure rectangulaire de 7 lignes sur 8 colonnes, avec aucune pièce ne chevauchant une autre pièce. Pour le puzzle, la position de chaque domino est inconnue. Il s'agit de la retrouver. Un exemple est donné par la figure 4.

Modéliser ce problème sous la forme d'un réseau de contraintes.

0	5	2	2	5	4	6	5
3	6	2	2	4	4	4	1
3	6	1	2	3	4	6	1
0	1	4	3	0	2	2	1
3	5	3	0	3	1	5	6
6	4	0	3	6	0	4	1
1	6	0	0	2	5	5	5

(a) Puzzle Domino

0	5	2	2	5	4	6	5
3	6	2	2	4	4	4	1
3	6	1	2	3	4	6	1
0	1	4	3	0	2	2	1
3	5	3	0	3	1	5	6
6	4	0	3	6	0	4	1
1	6	0	0	2	5	5	5

(b) Solution

FIGURE 4 – Exemple de puzzle Domino.

## 6 Shikaku

Shikaku est un problème logique de la compagnie japonaise Nikoli. Les règles sont les suivantes :  
il faut partitionner la grille en pièces rectangulaires tel que :

- chaque pièce contienne exactement une valeur ;
- la surface d'une pièce soit égale à la valeur contenue.

Un exemple est donné par la figure 5.

Modéliser ce problème sous la forme d'un réseau de contraintes.

9			12		5		
							6
8	6	8					
				6	8	12	
4							
	3		9				4

(a) Puzzle Shikaku

9			12		5		
							6
8	6	8					
				6	8	12	
4							
	3		9				4

(b) Solution

FIGURE 5 – Exemple de puzzle Shikaku.