Sur les fonctions ordinales conditionnelles transfinies

Sébastien Konieczny
CNRS - CRIL
Université d'Artois, Lens
konieczny@cril.fr

Résumé

Les Fonctions Ordinales Conditionnelles (OCF) sont l'un des cadres prédominants pour définir des opérateurs de changement de croyances. Dans son article original Spohn définit les OCF comme des fonctions de l'ensemble des mondes vers l'ensemble des ordinaux. Mais dans les articles suivants (de Spohn et des autres auteurs) les OCF sont justes des fonctions de l'ensemble des mondes vers l'ensemble des entiers naturels (avec éventuellement $+\infty$). L'utilisation d'ordinaux transfinis dans ce cadre n'a jamais été étudié. Cet article se propose d'aborder cette question. Nous étudions la généralisation d'opérateurs de transmutation utilisant les ordinaux transfinis. L'utilisation de ces ordinaux transfinis permet de représenter plusieurs "niveaux de croyances" qui apparaissent naturellement dans les applications réelles. Ces niveaux de croyances peuvent être considérés comme une généralisation du cadre usuel à deux niveaux de croyances, connaissances versus croyances, ou base de règles versus base de faits, issu des systèmes experts.

Mots Clef

Représentation des connaissances, Révision de croyances, OCF.

Abstract

Ordinal Conditional Functions (OCFs) are one of the predominant frameworks to define belief change operators. In his original paper Spohn defines OCFs as functions from the set of worlds to the set of ordinals. But in subsequent paper by Spohn and others, OCFs are just used as functions from the set of worlds to natural numbers (plus eventually $+\infty$). The use of transfinite ordinals in this framework has never been studied. This paper opens this way. We study generalisations of transmutations operators to transfinite ordinals. Using transfinite ordinals allows to represent different "levels of beliefs", that naturally appear in real applications. This can be viewed as a generalisation of the usual "two levels of beliefs" framework : knowledge versus beliefs ; or rules base versus facts base, issued from expert systems works.

Keywords

Knowledge Representation, Belief Revision, OCF

1 Introduction

Les Fonctions Ordinales Conditionnelles (OCF) [16] sont l'un des cadres prédominants pour représenter les états épistémiques et définir des opérateurs de changement de croyances (voir par exemple [16, 18, 4, 11, 15]).

La simplicité de leur définition explique leur succès : un OCF est une fonction qui associe un ordinal à chaque monde. Plus cet ordinal est petit, plus le monde est plausible aux yeux de l'agent. Cette représentation d'état épistémique est plus expressive que celle utilisant des préordres totaux sur les mondes, qui est la représentation canonique pour les opérateurs de révision AGM classiques [13, 4]. Le rôle fondamental des OCF pour définir des opérateurs de révision est attesté par le fait que les opérateurs de conditionalisation d'OCF de Spohn [16] sont souvent utilisés pour illustrer les travaux sur la révision itérée [4, 11].

Dans son article original Spohn définit les OCF comme des fonctions de l'ensemble des mondes vers l'ensemble des ordinaux. Mais dans les articles suivants de Spohn [17] et des autres auteurs, les OCF ne sont plus que des fonctions de l'ensemble des mondes vers l'ensemble des entiers naturels (avec éventuellement $+\infty$). Cette restriction est naturelle, puisqu'elle est généralement suffisante pour représenter les états épistémiques des agents et pour définir des opérateurs de changement de croyances.

Mais il est étrange que dans ces travaux utilisant des OCF il n'ait jamais été étudié ce que l'utilisation d'ordinaux transfinis pouvait apporter à la représentation d'états épistémiques, et ses conséquences sur la définition des opérateurs de révision.

Le but de cet article est d'étudier les OCF transfinis, c'est-à-dire les OCFS qui utilisent les ordinaux transfinis. Très grossièrement les ordinaux transfinis permettent de décrire plusieurs "niveaux d'infinis". D'un point de vue de la représentation, cela permet d'encoder différent "niveaux de croyances", c'est-à-dire des croyances plus ou moins fortes/plausibles, où les croyances les plus fortes apparaissent comme des contraintes d'intégrité pour les croyances plus faibles.

Lorsqu'on utilise des OCF qui sont définis sur la restriction $\langle$ entiers naturels $\cup \{+\infty\}\rangle$, les mondes qui sont associés à $+\infty$ représentent des croyances indiscutables que l'on ne peut remettre en question[1], qui sont alors habituellement appelées connaissances.

La question de déterminer si les connaissances existent ou pas est une question philosophique difficile. Quel agent peut avoir des croyances indiscutables ? Comment un agent peut-il être sûr que ce qu'il "sait" (croit) est absolument vrai ? Il semble que cela est inaccessible à tout agent humain ou artificiel[2], donc parler de connaissances pour un agent humain ou artificiel n'est rien de plus qu'une manière pratique de décrire des croyances qui sont beaucoup plus enracinées/plausibles que d'autres. Mais à l'intérieur de ces croyances très enracinées il y en a très certainement certaines plus enracinées que d'autres. Donc ne disposer que d'un seul niveau $+\infty$ pour représenter les croyances fortement enracinées semble clairement ne pas être suffisant. Il semble naturel de souhaiter représenter des différences d'enracinement parmi ces croyances fortement enracinées.

Cette distinction entre connaissances et croyances rappelle la représentation habituellement utilisée en système expert et en automatique, qui divise l'état épistémique de l'agent entre une base de règles (correspondant aux connaissances) qui est un ensemble de croyances fortement enracinées décrivant le comportement du système, et une base de faits (correspondant aux croyances), qui est un ensemble d'observations faites par l'agent (par l'intermédiaire de capteurs par exemple).

Pour illustrer cela prenons comme exemple la représentation de l'état épistémique d'un médecin. Le médecin possède une base de règles, qui représente son expertise médicale, et une base de faits, qui représente les symptômes qu'il observe chez un patient particulier (cela peut-être des analyses médicales, des observations visuelles, etc.).

Pour la plupart des applications cette représentation est clairement suffisante. Elle est également suffisante pour illustrer des discussions intéressantes sur le statut de la révision itérée de croyances :

Dans la plupart des articles la révision itérée de croyances est présentée comme le processus permettant d'incorporer dans les croyances de l'agent des informations successives. Il est alors facile de penser que ces informations successives représentent des informations de plus en plus récentes. Et il est vrai qu'un agent doit être capable de manipuler ce type d'information. Mais les opérateurs de révision itérée [4] ne sont pas le bon outils dans ce cas. Ces opérateurs ne sont pas destinés à incorporer des informations de plus en plus récentes, mais des informations de plus en plus fiables. Ce sujet est le point de départ de deux articles intéressants [10, 5], où il est entre autres clairement expliqué que si l'on souhaite incorporer des informations de plus en plus récente, l'outil adéquat est la fusion de croyances prioritaires. Intuitivement si l'ordre d'incorporation des informations dépend simplement de leur ordre d'arriver, mais qu'elles peuvent avoir des fiabilités variables, alors il faut sauvegarder ces informations avec leur degré de fiabilité respectif, et fusionner toutes ces informations.

Dans [5] Didier Dubois identifie trois types de révision différentes. Nous ne discuterons que deux de ces types. Le premier est celui dont nous venons de discuter ci-dessus, il s'agit d'incorporer des informations de plus en plus récentes. Cela correspond au cas où la base de règles ne change pas, et où la base de faits augmente. Supposons par exemple que le médecin reçoivent successivement différentes analyses médicales (qui ont des fiabilité différentes). L'incorporation de ces faits changera peut être les croyances du médecin à propos de la maladie du patient, mais cela ne modifiera pas son expertise médicale. Ce cas peut être manipulé à l'aide des opérateurs classiques de révision AGM [1, 8, 13] si toutes les informations sont cohérentes entre elles (ce qui est le cas si le monde n'évolue pas (hypothèse usuelle en révision de croyances, sinon il faut utiliser des opérateurs de mise à jour [12, 9]), et que les capteurs sont fiables (par exemple si il s'agit d'observations visuelles directes)). Si les observations ne sont pas cohérentes entre elles (par exemples si les capteurs/sources ne sont pas complètement fiables), alors il faut utiliser des opérateurs de fusion prioritaires proposés dans [10] à cette fin.

Le deuxième type de révision identifié par Didier Dubois correspond au cas où c'est la base de règles de l'agent qui doit être modifié. Supposons par exemple que notre médecin se rende à un congrès scientifique et qu'il apprenne de nouveaux protocoles à propos d'une maladie particulière, il doit donc changer sa base de règles. Dans ce cas l'opération adéquate est la révision itérée à la Darwiche et Pearl [4] : une information plus fiable doit être incorporée aux croyances actuelles. En fait les exemples typiques de révision itérée DP devraient être des exemples de changement de théories scientifiques plutôt que des exemples de la vie de tous les jours avec des observations d'oiseaux...

Il y a quelques années un très intéressant article de Friedman et Halpern a déjà discuté des problèmes et dangers de définir de nouveaux opérateurs de changement sans spécifier leur cas d'applications spécifiques [7]. Les articles de Didier Dubois [5] et de Delgrande-Dubois-Lang [10] sont un intéressant rappel de cette discussion pour la révision itérée.

Donc, pour résumer la vue présentée dans [5], considérons que l'état épistémique de l'agent est représenté par deux bases : une base de règles et une base de faits. La base de règles étant plus importante/fiable/enracinée que la base de faits. Alors les deux types de révision sont définis selon la base qui doit être révisée. La première pour la base de faits, la deuxième pour la base de règles.

Nous pensons que l'on peut pousser ce processus un peu plus loin. Il n'y a pas de raison objective de se limiter à seulement deux bases, et il peut être nécessaire d'utili-

[1] Dans ce cas les OCF peuvent être vus comme une sémantique à la logique possibiliste [6].

[2] Sous l'hypothèse de son existence, le seul agent qui pourrait disposer de vraies connaissances serait un dieu.

ser plus de deux niveaux de croyances. Nous souhaitons donc définir autant de bases que nécessaires, et chacune de ces bases pourra être révisée (autant que possible) indépendamment des autres.
Retournons au médecin de notre exemple. On ne peut pas restreindre les croyances de cet agent à simplement une base d'expertise médicale, et une base de faits sur son patient. Cet agent peut avoir d'autres croyances bien plus enracinées que son expertise médicale, comme l'arithmétique de base par exemple. On a donc au moins trois "niveaux de croyances" : l'arithmétique, qui est bien plus enracinée que l'expertise médicale, qui est bien plus enracinée que les faits à propos du patient.
C'est ce genre de situations que les fonctions ordinales conditionnelles transfinies permettent de représenter et de manipuler.
Dans la section suivante nous proposons un bref rappel sur les ordinaux, et dans la section 3 nous donnons les définitions de base de la théorie des fonctions ordinales conditionnelles. Ensuite dans la section 4 nous définissons les fonctions ordinales conditionnelles transfinies, qui permettent de représenter différents niveaux de croyances dans un OCF. Dans la section 5 nous montrons comment définir un OCF transfini à partir d'un ensemble d'OCF classiques qui représentent les différents niveaux de croyances. Dans la section 6 nous discutons de la révision d'OCF transfinis, et nous définissons les transmutations relatives, qui permettent de localiser le changement au niveau de croyances concerné. Finalement nous concluons dans la section 7.

2 Ordinaux

En théorie des ensembles les entiers naturels peuvent être définis à partir des ensembles :

0 = {} (l'ensemble vide)

1 = { {} } = {0}

2 = { {}, { {} } } = {0, 1}

3 = {{}, { {} }, { {}, { {} } }} = {0, 1, 2}

4 = { {}, { {} }, { {}, { {} } }, {{}, { {} }, { {}, { {} } }} }= {0, 1, 2, 3}

etc.

Donc chaque entier naturel peut être vu comme un ensemble bien ordonné, et l'ordre naturel sur les entiers est donné par l'inclusion des ensembles correspondants ($\alpha < \beta$ ssi $\alpha \in \beta$).
Une définition possible des ordinaux est qu'un ensemble S est un ordinal si et seulement si S est strictement bien ordonné pour l'inclusion ensembliste et si chaque élément de S est également un sous ensemble de S.
Donc, en partant de 0 ($\{\}$), et en utilisant un opérateur successeur on peut construire l'ensemble des ordinaux :

Définition 1 *Les ordinaux sont définis inductivement par :*
- *L'ensemble vide, noté* 0*, est un ordinal.*
- *Si* α *est un ordinal, alors* $\alpha+1 = \alpha\cup\{\alpha\}$ *est un ordinal.*
- *Si A est un ensemble d'ordinaux, alors* $\bigcup_{\alpha\in A} \alpha$ *est un ordinal.*

Les ordinaux correspondant aux entiers naturels sont les ordinaux finis. L'existence d'ordinaux transfinis est assuré par l'axiome de l'infini. Le premier ordinal transfini est noté ω. Il correspond à l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Mais il est possible de définir un successeur à cet ordinal ω. On peut donc définir $\omega + 1$, $\omega + 2$, etc. jusqu'à $\omega + \omega = \omega.2$.
Si l'on décrit ω comme l'ensemble $\{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$, avec $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, alors $\omega + 1$ peut être vu comme l'ensemble $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0\}$, avec $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < b_0$. Voir la figure 1 pour une représentation graphique de ω^2.
On peut donc similairement définir $\omega.3$, $\omega.4$, etc. Et l'ordinal qui est l'ensemble de tous ces ordinaux est noté ω^2, etc. Nous n'utiliserons pas d'ordinaux plus grand que ω^2 dans cet article.
Les ordinaux $\omega, \omega.2, \omega.3, \ldots, \omega^2, \ldots$, qui n'ont pas de prédécesseur, sont appelés ordinaux limites. β est un ordinal limite si il n'existe pas d'ordinal α tel que $\alpha + 1 = \beta$.
Nous pouvons à présent définir l'addition sur les ordinaux.

Définition 2 *L'addition sur les ordinaux* $\alpha + \beta$ *est défini inductivement par :*
- $\alpha + 0 = \alpha$,
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ [3],
- *si* β *est un ordinal limite alors* $\alpha+\beta$ *est la limite de* $\alpha+\gamma$ *pour tout* $\gamma < \beta$.

Cette définition coïncide avec l'addition usuelle (sur les entiers) lorsque l'on travaille avec des ordinaux finis. Mais avec des ordinaux transfinis l'addition n'est plus commutative. Il est par exemple facile de voir que $3 + \omega = \omega$ est différent de $\omega + 3$ qui est le successeur du successeur du successeur de ω.

3 Fonctions ordinales conditionnelles

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$ défini à partir d'un ensemble fini de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et des connecteurs standards.
Un monde (interprétation) I est une fonction de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$.
Une interprétation I est un modèle d'une formule $\varphi \in \mathcal{L}$ si elle la rend vraie.
$mod(\varphi)$ dénote l'ensemble des modèles de la formule φ, i.e., $mod(\varphi) = \{I \in \mathcal{W} \mid I \models \phi\}$. Nous noterons $\mathcal{O}$ l'ensemble des ordinaux.

Définition 3 *Une Fonction Ordinale Conditionnelle (OCF)* κ *est une fonction de l'ensemble des mondes* $\mathcal{W}$ *vers l'ensemble des ordinaux* $\mathcal{O}$ *telle qu'au moins un monde est associé à* 0*.*

[3] On rappelle que "+ 1" dénote le successeur d'un ordinal.

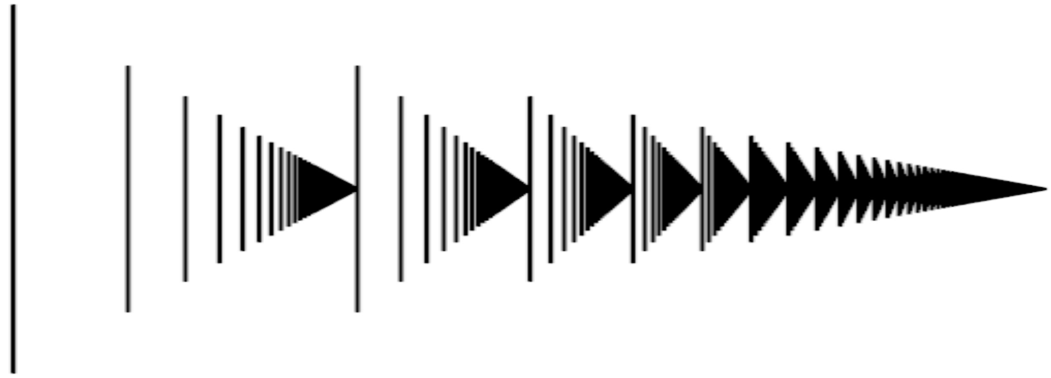

FIG. 1 – Représentation graphique de l'ordinal ω^2. Chaque trait correspond à un ordinal de la forme $\omega.m + n$ (Figure issue de Wikipedia)

Le sens associé à un OCF est simple : l'ordinal associé à un monde dénote sa plausibilité. Plus cet ordinal est grand, moins ce monde est plausible. On appelle cet ordinal le *degré d'implausibilité* de ce monde. En particulier les mondes qui sont associé à 0 sont les mondes les plus plausibles, c'est-à-dire les mondes qui sont actuellement crus. Cela signifie que si l'on utilise les OCF pour représenter l'état épistémique d'un agent, la base de croyances φ associée à cet état épistémique $\varphi = Bel(\kappa)$ est défini par ces mondes : $mod(\varphi) = \{I \mid \kappa(I) = 0\}$. L'ensemble des OCF est noté $\mathcal{K}$.
Voir l'exemple 3 pour des exemples d'OCF.
Le degré d'implausibilité peut être facilement étendu aux formules (ensembles de mondes).

Définition 4 *Le degré d'implausibilité d'une formule φ est le degré d'implausibilité minimum de ses modèles : $\kappa(\varphi) = \min_{I \models \varphi} \kappa(I)$.*

On peut alors définir le degré d'acceptation d'une formule.

Définition 5 *Une formule φ est acceptée (pour un OCF κ) si $\kappa(\varphi) = 0$.*
Le degré d'acceptation d'une formule acceptée φ est $d_\kappa(\varphi) = \kappa(\neg\varphi)$.

On peut à présent définir les opérateurs de changement des OCF comme des fonctions modifiant le degré d'acceptation d'une formule :

Définition 6 *Une* Transmutation *[18] est une fonction qui, étant donnés un OCF κ, une formule φ et un degré d'acceptation α, produit un nouvel OCF $\kappa * (\varphi, \alpha)$ tel que φ est accepté avec le degré $d_{\kappa*(\varphi,\alpha)}(\varphi) = \alpha$.*

On peut définir beaucoup d'opérateurs de transmutation différents. Le problème est de satisfaire les conditions des transmutations tout en gardant un maximum des informations de l'ancien OCF. Tout comme pour les opérateurs de révision de croyances AGM, il y a plusieurs façon de définir cette minimalité du changement. Les deux méthodes les plus utilisées sont la conditionalisation [16] et l'ajustement [18].

Définition 7 *La (φ, α)-conditionalisation de κ est un nouvel OCF $\kappa *_C (\varphi, \alpha)$ défini par*

$$(\kappa *_C (\varphi, \alpha))(I) = \begin{cases} -\kappa(\varphi) + \kappa(I) & \text{si } I \models \varphi \\ (-\kappa(\neg\varphi) + \kappa(I)) + \alpha & \text{si } I \models \neg\varphi \end{cases}$$

où $-\beta + \alpha$ représente l'ordinal γ tel que $\beta + \gamma = \alpha$.

La conditionalisation bouge l'ensemble des modèles de φ. L'ajustement ne bouge que les modèles les plus plausibles de φ (certains autres modèles bougent également si nécessaire).

Définition 8 *Le (φ, α)-ajustement de κ est un nouvel OCF $\kappa *_A (\varphi, \alpha)$ défini par*

$$(\kappa *_A (\varphi, \alpha))(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa(I) = \kappa(\varphi) \\ \alpha & \text{si } I \models \neg\varphi \text{ et } \kappa(I) < \alpha \\ \kappa(I) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ajustement peut être vu comme la contrepartie pour les OCF de la révision naturelle de Boutilier dans le cadre de la révision itérée AGM/DP [3].

4 OCF transfinis

Le but de ce travail est d'encoder différents "niveaux de croyances" dans un même OCF. Ces niveaux de croyances doivent être strictement hiérarchisés, afin d'assurer qu'une croyance appartement à un certain niveau de croyances sera considérée comme une contrainte d'intégrité par les croyances des niveaux de croyances inférieurs. Illustrons cela sur un exemple de conducteur de voiture.

Exemple 1 *Les croyances les plus enracinées de l'agent sont les croyances sur les phénomènes physiques, qui composent sont plus haut niveau de croyances :*
- *La route est glissante (sl) si et seulement si elle est enneigé (sn) ou gelée (f) : ($sl \leftrightarrow sn \vee f$).*

Les règles de comportement routier forment le deuxième niveau de croyances :

– *Si la route est glissante, alors adopter une vitesse modérée (m) : ($sl \rightarrow m$).*
– *Si il y a des travaux (w), alors adopter une vitesse modérée ($w \rightarrow m$).*

La première règle étant plus importante/enracinée/crue que la deuxième (nous associerons un degré de 2 à la première règle et un degré de 1 à la deuxième).
Finalement le plus bas niveau de croyances est composé des faits qui décrivent les croyances de l'agent à propos de la situation actuelle :

– *La route est enneigée (sn).*
– *Il n'y a pas de travaux ($\neg w$). La route n'est pas gelée ($\neg f$).*

La croyance que la route est enneigée est plus importante/enracinée/crue que le fait que la route est gelée. Nous associerons un degré de 5 au fait que la route est enneigé, et un degré de 2 aux autres faits. Les nombres reflètent en un sens l'intensité des croyances de l'agent.

Nous allons donc utiliser des ordinaux transfinis afin de représenter ces différents niveaux de croyances dans un même OCF. L'idée est d'utiliser les ordinaux limites comme "frontières" entre les niveaux de croyances.

Définition 9 *Un OCF Transfini est un OCF κ tel que pour chaque monde I soit $\kappa(I) = 0$ ou il existe m tel que $\omega.(m-1) < \kappa(I) < \omega.m$, et il existe au moins un monde I' tel que $\kappa(I') > \omega$.*
m est appelé le niveau de croyances de I, et est noté $\lambda^\kappa(I)$. Si $\kappa(I) = 0$, alors $\lambda^\kappa(I) = 1$.
Le niveau de croyances d'une formule, noté $\lambda^\kappa(\varphi)$, est le niveau de croyances minimum de ses modèles : $\lambda^\kappa(\varphi) = \min_{I \models \varphi} \lambda^\kappa(I)$.

Donc un OCF transfini qui correspond à l'exemple du conducteur est par exemple :

Exemple 2 *Commençons par introduire notre représentation des OCF. L'ordinal à la gauche de la ligne correspond à celui qui est associé aux mondes sur la droite. Les symboles propositionnels sont considérés dans l'ordre suivant pour les interprétations ($f\ sn\ sl\ w\ m$). La notation $*$ représente l'ensemble des mondes où $*$ peut être remplacé par 0 ou 1, par exemple $1*1$ représente l'ensemble $\{101, 111\}$.*
κ :

$\omega.2+1$	$\{001**, 010**, 100**, 110**\}$
$\omega+2$	$\{10110, 01110, 01100, 10100, 11100, 11110\}$
$\omega+1$	$\{00010\}$
5	$\{00000, 00001, 00011, 10111, 10101\}$
2	$\{11101, 11111, 01111\}$
0	$\{01101\}$

Cet OCF représente l'information présentée par les règles de l'exemple 1. Donc dans cet exemple les mondes qui sont associés à l'ordinal 0 sont les mondes qui satisfont toutes les formules de tous les niveaux de croyances. Les mondes qui sont associés à 2 ou 5 sont les mondes qui satisfont les deux niveaux de croyances les plus importants, les mondes associés à 2 étant plus plausibles que ceux associés à 5. Les mondes qui sont associés à $\omega+1$ et $\omega+2$ satisfont le niveau de croyances le plus important. Et les mondes associés à $\omega.2+1$ sont ceux qui ne satisfont pas le niveau de croyances le plus important.

5 Construire un OCF transfini à partir d'un ensemble d'OCF classiques

Il est possible de construire un OCF transfini à partir d'un ensemble d'OCF classiques[4], chaque OCF classique représentant un niveau de croyances différent.

Définition 10 *Soient n OCF classiques $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ représentant respectivement le premier (moins important) ..., dernier (plus important) niveau de croyances. Alors κ est l'OCF transfini défini inductivement par $\kappa(I) = \kappa_{\kappa_1,\ldots,\kappa_n}(I)$:*
– $\kappa_\emptyset(I) = 0$
– $\kappa_{\kappa_1,\ldots,\kappa_n}(I) = \begin{cases} \omega.(n-1) + \kappa_n(I) & \textit{si } \kappa_n(I) > 0 \\ \kappa_{\kappa_1,\ldots,\kappa_{n-1}}(I) & \textit{sinon} \end{cases}$

Pour illustrer cela sur l'exemple du conducteur, cela revient à considérer trois OCF classiques, représentant les trois niveaux de croyances :

Exemple 3 *Le premier niveau, contenant les faits, est encodé par κ_1. Le deuxième contenant les règles de comportement est représenté par κ_2. Le dernier, contenant les règles physiques, est représenté par κ_3.*

κ_1 :

5	$\{*0***\}$
2	$\{111**, 01111, 01110, 01010, 01011, 110**\}$
0	$\{01*0*\}$

κ_2 :

2	$\{**1*0\}$
1	$\{**010\}$
0	$\{**000, **001, **011, **101, **111\}$

κ_3 :

1	$\{001**, 010**, 100**, 110**\}$
0	$\{000**, 101**, 011**, 111**\}$

Il est facile de vérifier qu'à partir de $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ et de la construction de la definition 10, on obtient le κ de l'exemple 2.

6 Réviser les OCF Transfinis

Bien sûr, puisque les OCF transfinis sont une sous-classe des OCF, on peut donc utiliser la conditionalisation usuelle (ou l'ajustement ou tout autre transmutation) directement sur les OCF transfinis.

[4]Nous appellerons *OCF classiques* les OCFS où tous les ordinaux associés aux mondes sont strictement inférieurs à ω. On appellera également *OCF contraints* les OCF où tous les ordinaux associés aux mondes sont inférieurs ou égaux à ω.

Mais cela peut poser des problèmes puisque la conditionalisation autorise de changer le degré d'acceptation d'une formule en tout autre nouveau degré.
Cette liberté peut poser problème pour les OCF transfinis, puisque cela signifie que cela autorise de travailler sur plusieurs niveaux de croyances, tout comme si il n'y avait qu'un seul niveau. Dans ce cas cela signifie que la représentation des différents niveaux de croyances est inutile. Il serait en particulier possible alors de définir un OCF classique (à partir d'une bijection avec l'OCF transfini) ayant exactement le même comportement pour les transmutations/conditionalisation (à la bijection prés).
Cela montre que nous avons besoin d'une opération de conditionalisation (et plus généralement de transmutation) qui permet de localiser les changements à chaque niveau de croyances.
Voyons à présent comment définir de tels opérateurs. On appellera dorénavant transmutation absolue (respectivement conditionalisation absolue) les transmutations usuelles (respectivement la conditionalisation usuelle). Et nous définissons à présent les transmutations relatives.
Tout d'abord il peut être utile d'illustrer ce que les OCF transfinis signifient pour chaque niveau de croyances. Cela se fait par l'intermédiaire des projections.

Définition 11 *Soit un OCF transfini κ composé de n niveaux de croyances. La i-projection de κ (projection de κ sur le $i$ème niveau de croyances), noté $\kappa_{\downarrow i}$, est défini par :*

$$\kappa_{\downarrow i}(I) = \begin{cases} \omega & \text{si} \quad \omega.i<\kappa(I) \\ \kappa(I) & \text{si} \quad \omega.(i-1)<\kappa(I)<\omega.i \\ 0 & \text{si} \quad \kappa(I)<\omega.(i-1) \end{cases}$$

Voyons ce que donnent ces projections sur l'exemple :

Exemple 4 *Du point de vue du niveau de croyances le plus important, la projection donne juste :*
$\kappa_{\downarrow 3}$:

1	$\{001**, 010**, 100**, 110**\}$
0	$\{000**, 101**, 011**, 111**\}$

Les mondes associés à 0 dans ce troisième niveau de croyances pourront être discriminés par les niveaux inférieurs.
Pour le deuxième niveau de croyances, le troisième niveau de croyances apparaît comme des contraintes d'intégrité qui ne peuvent pas être remises en question, donc tous les mondes qui ne sont pas associés à 0 par le (la projection du) troisième niveau sont alors des mondes impossibles. La projection donne donc :
$\kappa_{\downarrow 2}$:

ω	$\{001**, 010**, 100**, 110**\}$
2	$\{01100, 10100, 11100, 11110, 10110, 01110\}$
1	$\{00010\}$
0	$\{00000, 00001, 00011, 10111, 10101, 11101, 11111, 01111, 01101\}$

Pour le premier niveau, tous les niveaux supérieurs apparaissent comme des contraintes d'intégrité. La projection est alors :
$\kappa_{\downarrow 1}$:

ω	$\{001**, 010**, 100**, 110**, 00010, 10110, 01110, 01100, 10100, 111*0\}$
5	$\{00000, 00001, 00011, 10111, 10101\}$
2	$\{11101, 11111, 01111\}$
0	$\{01101\}$

Ces projetions donnent une idée de comment on peut réviser un OCF transfini. Une transmutation relative ne modifiera que la projection (niveau de croyances) correspondante. Donc si le niveau de croyances d'une formule est i, alors le changement de son degré d'acceptation ne changera que l'information de ce $i$ème niveau de croyances.
Définissons ces transmutations relatives formellement.

Définition 12 *Soit un OCF transfini κ composé de n niveaux de croyances. Soit α un ordinal $\alpha < \omega$. Soit la transmutation (absolue) $*$. Alors la transmutation relative $\circledast$ est définie par :*

$$(\kappa \circledast (\varphi,\alpha))(I) = \begin{cases} \kappa(I) \\ \quad \text{si } \kappa^o(I) = \omega \\ \kappa(I) \\ \quad \text{si } \kappa^o(I) = 0 \text{ et } \lambda^\kappa(I) < \lambda^\kappa(\varphi) \\ \mathbf{B}(\kappa, \lambda^\kappa(\varphi)-1)+1 \\ \quad \text{si } \kappa^o(I) = 0 \text{ et } \lambda^\kappa(I) = \lambda^\kappa(\varphi) \\ \omega.\lambda^\kappa(\varphi) + \kappa^o(I) \\ \quad \text{sinon} \end{cases}$$

où
– $\kappa^o = \kappa_{\downarrow \lambda^\kappa(\varphi)} * (\varphi, \alpha)$
– $\mathbf{B}(\kappa, i) = \max_{\{I|\lambda^\kappa(I)=i\}} \kappa(I)$, *si* $i > 0$
– $\mathbf{B}(\kappa, 0) = -1$

L'idée principale de cette définition est de localiser le changement au niveau de croyances concerné. C'est le but de κ^o, qui effectue la transmutation seulement sur la projection du niveau concerné. Le résultat est ensuite incorporé dans l'OCF transfini entier κ, grâce aux quatre points de la définition. Le premier point assure que les mondes des niveaux supérieurs ne sont pas affectés par le changement. Le second point dit similairement que les mondes qui sont dans des niveaux inférieurs, et qui ne sont pas concernés par le changement au niveau supérieur, ne bougent pas pendant la transmutation. Le quatrième point encode simplement le changement au niveau de croyances concerné. La partie la plus intéressante de la définition est le troisième point, qui dit que si certains mondes sont rendus possibles (i.e. tels que $\kappa^o(I) = 0$) après la modification du niveau concerné, ces mondes doivent être "libérés" par ce niveau et affectés aux niveaux inférieurs. Le problème est alors de savoir où les mettre exactement dans ces niveaux inférieurs. Afin d'assurer un changement minimal pour ces niveaux, on doit tenter de modifier le moins possible leur structure. Cela peut être fait en affectant les mondes libérés la moins grande plausibilité au sein du niveau immédiatement inférieur (c'est le but de la fonction $\mathbf{B}$, qui trouve la

plausibilité des mondes les moins plausibles d'un niveau de croyances donné).
Voyons cela sur un exemple :

Exemple 5 *Supposons que le conducteur change de voiture. Sa toute nouvelle voiture dispose d'un système d'assistance à la conduite, ce qui lui fait retirer de ses règles de comportement la règle $sl \rightarrow m$. Afin de réaliser cette contraction, on effectue la 0-conditionalisation de l'OCF.*
$\kappa \circledast_C (sl \rightarrow m, 0)$ *:*

$\omega.2+1$	$\{001**, 010**, 100**, 110**\}$
$\omega+1$	$\{00010\}$
6	$\{10110, 01110, 01100, 10100, 11100, 11110\}$
5	$\{00000, 00001, 00011, 10111, 10101\}$
2	$\{11101, 11111, 01111\}$
0	$\{01101\}$

Un point intéressant à noter est qu'après cette conditionalisation relative, le conditionnel $sl \rightarrow m$ est encore valide dans l'OCF transfini $\kappa \circledast_C (sl \rightarrow m, 0)$. Mais ce n'est plus une formule du deuxième niveau de croyances (i.e. $[\kappa \circledast_C (sl \rightarrow m, 0)]_{\downarrow 2}$). C'est à présent une formule du premier niveau de croyances. Donc un nouveau changement au premier niveau de croyances est maintenant susceptible de supprimer ce conditionnel de l'état épistémique de l'agent, alors que ce n'était pas possible auparavant puisque les croyances du deuxième niveau de croyances ne peuvent pas être affectés par les changements qui interviennent au premier niveau.
On peut noter qui si l'on souhaiter enlever réellement ce conditionnel de l'état épistémique de l'agent, cela doit être fait par plusieurs contractions (relatives) :

Exemple 6 $(\kappa \circledast_C (sl \rightarrow m, 0)) \circledast_C (sl \rightarrow m, 0)$ *:*

$\omega.2+1$	$\{001**, 010**, 100**, 110**\}$
$\omega+1$	$\{00010\}$
5	$\{00000, 00001, 00011, 10111, 10101\}$
2	$\{11101, 11111, 01111\}$
0	$\{01101, 10110, 01110, 01100, 10100, 11100, 11110\}$

Sur cet exemple on obtient $(\kappa \circledast_C (sl \rightarrow m, 0)) \circledast_C (sl \rightarrow m, 0) = \kappa *_C (sl \rightarrow m, 0)$, mais ce n'est pas toujours le cas.
Comme expliqué en introduction, cela a également du sens d'utiliser différents opérateurs de révision (transmutation) pour les différents niveaux de croyances. Par exemple pour le niveau le moins important, qui contient habituellement les informations factuelles, on peut utiliser des opérateurs plus drastiques, puisque une perte d'information à ce niveau n'est pas très important (comparé aux niveaux supérieurs).
Cela signifie que l'on peut avoir besoin d'opérateurs de changement plus adaptatifs. Il est donc possible de définir des opérateurs de transmutation relative où l'opérateur utilisé (κ^o) dépend du niveau concerné par le changement :

Définition 13 *Soit un OCF transfini κ avec n niveaux de croyances. Soit un vecteur de n transmutations absolues $\mathcal{A} = \{*_1, \ldots, *_n\}$. Soit α un ordinal $\alpha < \omega$. Alors l'opérateur de transmutation relative adaptative $\circledast^{\mathcal{A}}$correspondant est défini par :*

$$(\kappa \circledast^{\mathcal{A}}(\varphi, \alpha))(I) = \begin{cases} \kappa(I) \\ \quad \textit{si } \kappa^o(I) = \omega \\ \kappa(I) \\ \quad \textit{si } \kappa^o(I) = 0 \textit{ et } \lambda^\kappa(I) < \lambda^\kappa(\varphi) \\ \mathbf{B}(\kappa, \lambda^\kappa(\varphi) - 1) + 1 \\ \quad \textit{si } \kappa^o(I) = 0 \textit{ et } \lambda^\kappa(I) = \lambda^\kappa(\varphi) \\ \omega.\lambda^\kappa(\varphi) + \kappa^o(I) \\ \quad \textit{sinon} \end{cases}$$

où
- $\kappa^o = \kappa_{\downarrow \lambda^\kappa(\varphi)} *_{\lambda^\kappa(\varphi)} (\varphi, \alpha)$
- $\mathbf{B}(\kappa, i) = \max_{\{I | \lambda^\kappa(I) = i\}} \kappa(I)$, *si* $i > 0$
- $\mathbf{B}(\kappa, 0) = -1$

7 Conclusion

Dans cet article nous avons étudié comment représenter et réviser les croyances d'un agent qui sont hiérarchisés au sein de différents niveaux de croyances, où chaque niveau apparaît comme une contrainte d'intégrité pour les niveaux inférieurs. Nous avons montré comment représenté ces niveaux en utilisant des fonction ordinales conditionnelles. C'est la première fois, à notre connaissance, que l'utilisation d'ordinaux transfinis est étudié dans le cadre des OCF. Dans son article original [16] Spohn écrit :

> *"It would be a natural idea to restrict the range of OCFs to the set of natural numbers. In fact, much of the following could thereby be simplified since usual arithmetic is simpler than the arithmetic on ordinals. For the sake of formal generality I do not impose this restriction. But larger ranges may be intuitively needed. For example, it is tempting to use OCFs with larger ranges to represent the stubbornness with which some beliefs are held in the face of seemingly arbitrarily augmentable counter-evidence."*

Dans ce travail nous avons donc proposé une représentation de ces "stubbornly held beliefs", au moyen des niveau de connaissance. Mais nous avons également discuté de l'inadéquation des opérateurs de transmutations (absolues) usuels pour modifier ces OCF transfinis. Nous avons proposé la définition de transmutations relatives qui limitent le changement au niveau concerné.
Nous nous sommes focalisés dans cet article sur le cadre des OCF. Il est intéressant de rappeler à nouveau que les OCF sont très proches de la logique possibiliste [6]. L'utilisation des ordinaux transfinis peut être rapproché également des approches utilisant de l'analyse non-standard dans les cadres probabilistes (ce lien est d'ailleurs évoqué dans l'article de Spohn [16]). Cela est utilisé par exemple

dans le cadre de la théorie des jeux dans [2] et dans le cadre de la décision dans [14].

Références

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[2] L. Blume, A. Brandenburger, and E. Dekel. Lexicographic probabilities and equilibrium refinements. *Econometrica*, pages 81–98, 1991.

[3] C. Boutilier. Iterated revision and minimal change of conditional beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, 25(3) :262–305, 1996.

[4] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89 :1–29, 1997.

[5] D. Dubois. Three scenarios for the revision of epistemic states. *Journal of Logic and Computation*, 18(5) :721–738, 2008.

[6] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.

[7] N. Friedman and J.Y. Halpern. Belief revision : a critique. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'96)*, pages 421–431, 1996.

[8] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT Press, 1988.

[9] A. Herzig and O. Rifi. Update operations : a review. In *Proceedings of the Thirteenth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'98)*, pages 13–17, 1998.

[10] J. Lang J. P. Delgrande, D. Dubois. Iterated revision as prioritized merging. In *Proceedings of the tenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06)*, pages 210–220, 2006.

[11] Y. Jin and M. Thielscher. Iterated belief revision, revised. *Artificial Intelligence*, 171 :1–18, 2007.

[12] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91)*, pages 387–394, 1991.

[13] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.

[14] D. Lehmann. Nonstandard numbers for qualitative decision making. In *Proceedings of the 7th conference on Theoretical aspects of rationality and knowledge (TARK'98)*, pages 161–174, 1998.

[15] T. Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non Classical Logics*, 11(1/2) :59–84, 2001.

[16] W. Spohn. Ordinal conditional functions : A dynamic theory of epistemic states. In W. L. Harper and B. skyrms, editors, *Causation in Decision : Belief Change and Statistics*, pages 105–134. Kluwer, 1988.

[17] W. Spohn. Ranking Functions, AGM Style. *Internet Festschrift for Peter Gärdenfors, Lund*, 1999.

[18] M. A. Williams. Transmutations of knowledge systems. In *Proceedings of the Fourth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 619–629, 1994.