Chapitre 1

Sur la représentation des états épistémiques et la révision itérée

1.1. Introduction

Depuis la proposition d'Alchourrón, Gärdenfors et Makinson [ALC 85] pour donner un cadre formel au problème de la révision de la connaissance, la plupart des travaux ont adopté l'identification des états epistémiques à des théories (ou à des formules dans le cas fini, voir [KAT 91]). Or ce type de représentation n'est pas très adéquat pour traiter la riche dynamique de la connaissance, comme l'ont bien illustré Darwiche et Pearl dans [DAR 97].

Il y a eu neanmoins des travaux où la représentation est plus riche, en particulier les fonctions ordinales conditionnelles de Spohn [SPO 87]. Ce travail a été prolongé par Williams *et al.* [WIL 94, WIL 95]. Dans ces travaux il n'y a pas eu de caractérisation des opérateurs de révision en termes de postulats de rationalité ni de théorème de représentation. C'est dans ce sens que vont les travaux de Boutilier [BOU 93, BOU 96], Nayak *et al.* [NAY 94, NAY 96], Lehmann [LEH 95], Konieczny et Pino Pérez [KON 00].

Les postulats AGM ne permettent pas d'assurer un bon comportement du processus d'itération de la révision parce qu'ils ne permettent pas d'assurer le maintien des informations conditionnelles. Ces informations conditionnelles sont assez proches des conditionnels (counterfactuals) qui ont déjà été intensément étudiés (voir *e.g.* [LEW 73, STA 68]). Un conditionnel peut être exprimé par une phrase du type : *"Si α était vrai, alors β le serait aussi"*, et il est généralement noté $\alpha > \beta$ ou à la manière d'une probabilité conditionnelle $\beta|\alpha$. Les conditionnels sont très proches

---

Chapitre rédigé par Sébastien KONIECZNY et Ramón PINO PÉREZ.

de la révision de la connaissance, ce lien a été souligné par de nombreux auteurs [BOU 92a, BOU 92b, LEV 88], on peut d'ailleurs interpréter les relations d'inférence rationnelles $\alpha \mid\!\sim \beta$ comme des conditionnels, et la relation entre relations rationnelles et révision est bien connue [MAK 89]. Ce lien est illustré par le test de Ramsey [RAM 31], énoncé par Stalnaker [STA 68] de la façon suivante :

> *"First add the antecedent (hypothetically) to your stock of beliefs ; second make whatever adjustments are required to maintain consistency (without modifying the hypothetical belief in the antecedent) ; finally, consider whether or not the consequent is true."*

C'est-à-dire que pour tester si le conditionnel $\beta|\alpha$ appartient à la base de connaissance φ, il suffit de réviser la base de connaissance par α et voir si β est dans le résultat :

$$\beta|\alpha \ \text{ ssi } \ \varphi \circ \alpha \vdash \beta \qquad \textbf{Test de Ramsey}$$

Il serait souhaitable que la révision par une nouvelle information change les connaissances de l'agent, mais, autant que possible, ne modifie pas les informations conditionnelles de l'agent (c'est-à-dire les informations du genre "si j'apprends telle chose, je serais disposé à penser que telle autre chose est vraie") qui permettent de coder la stratégie de révision de l'agent. Le problème avec le modèle AGM est qu'il ne permet pas d'assurer le maintien de ces informations conditionnelles.

Dans ce chapitre nous allons donner tout d'abord une présentation succincte des travaux les plus marquants dans la dynamique de la révision. Ensuite nous donnons une notion syntaxique très générale et très simple d'état épistémique. Toutes les notions mentionnées plus haut sont des instances de cette notion générale. Une particularité de cette approche est d'étendre la révision au cadre où la nouvelle information est aussi un état épistémique, et non pas une simple formule.

Un ensemble très compact de postulats de rationalité pour la révision (itérée) est proposé. Ces postulats capturent le bon comportement des opérateurs de révison par rapport à l'itération. Nous donnons aussi des théorèmes de représentation. Un des points intéressants de ces théorèmes de représentation est qu'ils soulignent le caractère universel des pré-ordres totaux[1] entre les interprétations pour interpréter des états épistémiques.

1.2. Bref historique de la dynamique de la révision

Dans cette section nous allons passer en revue les approches les plus marquantes pour traiter la dynamique de l'itération dans le processus de révision.

---

1. un pré-ordre sur A est une relation réflexive et transitive sur A. Un pré-ordre $\leq$ est total ssi $\forall a, b \in A \; a \leq b$ ou $b \leq a$.

1.2.1. *L'approche de Spohn*

Spohn [SPO 87] propose de modéliser l'état épistémique d'un agent par une fonction ordinale conditionnelle (Ordinal Conditional Function ou OCF), qui peut être considérée comme un classement des interprétations.

DÉFINITION 1.1.– *Une fonction ordinale conditionnelle κ est une fonction de l'ensemble des mondes possibles $\mathcal{W}$ vers la classe des ordinaux telle que au moins un monde est associé à 0.*

L'ordinal $\kappa(\omega)$ associé à un monde possible ω peut être vu comme le degré d'incrédulité (degree of disbelief) de ce monde dans l'état épistémique représenté par l'OCF. Cette fonction sur les mondes possibles peut être directement reliée aux propositions de la façon suivante : $\kappa(\varphi) = \min_{\omega \models \varphi} \kappa(\omega)$

Une formule φ est crue pour un état épistémique représenté par κ si $\kappa(\varphi) = 0$. Sinon le degré d'incrédulité de φ est $\kappa(\varphi)$. Cette notion permet non seulement de différencier les formules qui ne sont pas crues dans l'état épistémique courant (en effet on peut dire que la formule ayant le plus petit degré d'incrédulité est la plus vraisemblable dans l'état actuel). Mais elle permet également d'établir une distinction entre les formules crues. On définit le degré de confiance (degree of firmness) d'une formule de la façon suivante : φ est crue avec une confiance α relativement à l'OCF κ si et seulement si

- soit $\kappa(\varphi) = 0$ et $\alpha = \kappa(\neg\varphi)$,
- ou $\kappa(\varphi) > 0$ et $\alpha = -\kappa(\varphi)$.

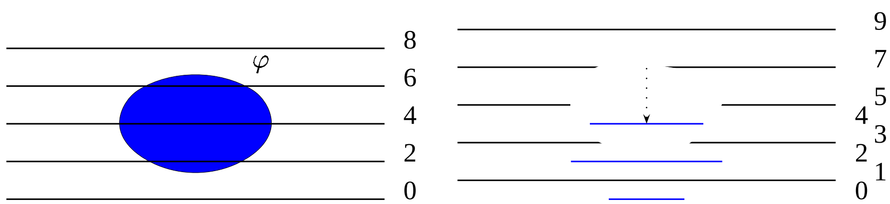
La révision d'un OCF définie par Spohn est appelée (φ, α)-conditionnalisation de κ, où κ est l'OCF courant, φ est la nouvelle information et α est le degré de confiance de la nouvelle information. Intuitivement, ce degré de confiance exprime la vraisemblance de la nouvelle information, plus cette valeur est élevée, plus la nouvelle information est fiable. Le résultat de la conditionnalisation est un nouvel OCF où la nouvelle information est crue avec une confiance de α.

DÉFINITION 1.2.– *Soient un OCF κ, une formule φ, un ordinal α, la (φ, α)-conditionnalisation de κ est l'OCF $\kappa_{\varphi,\alpha}$ satisfaisant l'équation suivante :*

$$\kappa_{\varphi,\alpha}(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(\varphi) & \textit{si } \omega \models \varphi \\ \kappa(\omega) - \kappa(\neg\varphi) + \alpha & \textit{si } \omega \models \neg\varphi \end{cases}$$

Où $a - b$ représente l'unique ordinal c tel que $b + c = a$.

Nous allons illustrer le comportement des opérateurs de Spohn sur la figure 1.1. Nous ferons de même pour les opérateurs des sections suivantes. Ces figures représentent des pré-ordres totaux (lorsqu'il s'agit d'OCF, comme ici, un ordinal indique l'ordinal associé aux interprétations de ce niveau). Les interprétations ne sont pas représentées mais les lignes dénotent les “niveaux” du pré-ordre et il faut donc imaginer les interprétations distribuées sur chacun de ces niveaux. Les interprétations les plus



(a) OCF κ (b) $(\varphi, 1)$-conditionnalisation de κ

Figure 1.1. *Fonction Ordinale Conditionnelle*

crédibles (et donc les niveaux de crédibilité maximum) sont celles représentées le plus bas.

La nouvelle information est représentée figure 1.1(a) par la zone grisée et les contraintes imposées par les opérateurs de conditionnalisation illustrées dans la figure 1.1(b). C'est-à-dire que l'interclassement des modèles de la nouvelle information et celui de ses contre-modèles sont préservés, et on effectue une "descente" des modèles par rapport aux contre-modèles pour que le degré de confiance en la nouvelle information soit α (ici 1).

Il est clair que les opérateurs définis par Spohn satisfont les postulats de la révision AGM (si $\alpha \neq 0$) et ceux de la contraction AGM (si $\alpha = 0$), et que l'information ordinale supplémentaire permet de définir des notions plus subtiles que celles dont on dispose dans le cadre AGM classique [GÄR 88]. Mais le principal inconvénient de cette proposition est qu'elle nécessite un degré de confiance pour la nouvelle information. Pour quelques applications cette mesure est fournie par le système d'information mais pour la plupart des applications on ne dispose pas de cette information numérique sur la fiabilité de la nouvelle information.

Dans les cas où l'on ne peut attacher une telle information numérique à la nouvelle information il semble qu'il n'existe que deux solutions dans l'esprit des OCF. Spohn présente ces deux solutions comme des cas limites de son approche et critique ces deux approches. Puis il présente ses OCF comme le choix intermédiaire. Ces deux solutions sont d'une part la révision naturelle de Boutilier, qui a déjà été largement étudiée [BOU 93, BOU 96], mais d'autre part l'autre cas limite n'a jamais été étudié plus sérieusement. En fait l'autre cas limite correspond à l'opérateur de révision avec mémoire basique qui sera présenté à la section 1.4.

1.2.2. *L'approche de Darwiche et Pearl*

La caractérisation AGM n'est pas suffisamment contraignante pour appréhender la révision itérée. Darwiche et Pearl [DAR 94, DAR 97] ont reformulé les postulats de Katsuno et Mendelzon [KAT 91] en termes d'états épistémiques. Pour Darwiche et Pearl un état épistémique est un objet abstrait, représentant les croyances d'un agent, dont on peut extraire la connaissance actuelle.

Plus précisément à chaque état épistémique Φ est associée une base de connaissance $Bel(\Phi)$ qui est une formule propositionnelle et qui représente les connaissances de Φ. Les modèles d'un état épistémique Φ sont les modèles de sa base de connaissance associée $mod(\Phi) = mod(Bel(\Phi))$.

Pour alléger les notations on abrégera $Bel(\Phi) \vdash \mu$, $Bel(\Phi) \wedge \mu$ et $\omega \models Bel(\Phi)$ respectivement par $\Phi \vdash \mu$, $\Phi \wedge \mu$ et $\omega \models \Phi$.

Dans cette section, nous appellerons donc état épistémique un tel objet. Darwiche et Pearl ne précisent pas plus la nature de cet état épistémique mais il est possible de décrire un état épistémique comme un couple (base de connaissance, ensemble conditionnel) où la base de connaissance sera obtenue par l'opérateur de "projection" Bel et l'ensemble conditionnel représente l'information conditionnelle (*i.e.* l'enracinement épistémique, le pré-ordre total sur les interprétations, l'ensemble de conditionnels...) qui code la stratégie de révision.

On dispose de deux sortes d'équivalences entre états épistémiques :

– Une équivalence "faible" qui indique une identité statique entre les états épistémiques, c'est-à-dire que leurs bases de connaissance sont logiquement équivalentes mais après une révision par une même information il n'y a *a priori* aucune relation entre les états épistémiques résultats.

– Une équivalence "forte" qui indique une identité dynamique entre états épistémiques, dans le sens où leurs bases de connaissance sont logiquement équivalentes et après une révision par une même information les bases de connaissance associées aux deux nouveaux états épistémiques seront également logiquement équivalentes.

En d'autres termes l'équivalence faible dénote l'équivalence des bases de connaissance alors que l'équivalence forte dénote l'équivalence des stratégies de révision. On appellera simplement équivalence l'équivalence faible et égalité l'équivalence forte, ceci est traduit plus formellement dans la définition suivante.

DÉFINITION 1.3.– *Deux états épistémiques sont équivalents, noté $\Phi \leftrightarrow \Phi'$, si et seulement si leurs bases de connaissance sont des formules équivalentes $Bel(\Phi) \leftrightarrow Bel(\Phi')$. Deux états épistémiques Φ et Φ' sont égaux, noté $\Phi = \Phi'$, si et seulement si ils sont identiques.*

Les postulats AGM pour états épistémiques sont les suivants :

Soient un état épistémique Φ et une formule μ dénotant la nouvelle information. $\Phi \circ \mu$ représente l'état épistémique résultat de la révision de Φ par μ. L'opérateur $\circ$ est un opérateur de révision s'il satisfait les propriétés suivantes :

(R*1) $\Phi \circ \mu \vdash \mu$

(R*2) Si $\Phi \wedge \mu$ est consistant, alors $\Phi \circ \mu \leftrightarrow \Phi \wedge \mu$

(R*3) Si μ est consistant, alors $\Phi \circ \mu$ est consistant

(R*4) Si $\Phi_1 = \Phi_2$ et $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$, alors $\Phi_1 \circ \mu_1 \leftrightarrow \Phi_2 \circ \mu_2$

(R*5) $(\Phi \circ \mu) \wedge \varphi \vdash \Phi \circ (\mu \wedge \varphi)$

(R*6) Si $(\Phi \circ \mu) \wedge \varphi$ est consistant, alors $\Phi \circ (\mu \wedge \varphi) \vdash (\Phi \circ \mu) \wedge \varphi$

Cette formulation ressemble beaucoup à celle de Katsuno et Mendelzon. La principale différence est que l'on travaille avec des états épistémiques au lieu de bases de connaissance. Au niveau des postulats, seul (R*4) est plus faible que sa contrepartie usuelle. C'est en fait le seul postulat où l'on utilise la partie conditionnelle des états épistémiques. Voir [DAR 97, FRI 96] pour plus de détails sur la motivation de cette définition.

Il existe également un théorème de représentation montrant comment ces opérateurs peuvent être caractérisés en termes de familles de pré-ordres sur les interprétations. Avant de donner cette caractérisation sémantique il est nécessaire de définir ce qu'est un assignement fidèle dans le cadre des états épistémiques.

DÉFINITION 1.4.– *Une fonction qui associe à chaque état épistémique Φ un pré-ordre total $\leq_\Phi$ sur les interprétations est un assignement fidèle si et seulement si :*

1) Si $\omega \models \Phi$ et $\omega' \models \Phi$, alors $\omega \simeq_\Phi \omega'$

2) Si $\omega \models \Phi$ et $\omega' \not\models \Phi$, alors $\omega <_\Phi \omega'$

3) Si $\Phi_1 = \Phi_2$, alors $\leq_{\Phi_1} = \leq_{\Phi_2}$

A présent il est possible de reformuler le théorème de représentation de Katsuno et Mendelzon [KAT 91] en termes d'états épistémiques (*cf* [DAR 97]) :

THÉORÈME 1.1.– *Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats (R*1)-(R*6) si et seulement si il existe un assignement fidèle ($\Phi \rightsquigarrow \leq_\Phi$) tel que :*

$$mod(\Phi \circ \mu) = \min(mod(\mu), \leq_\Phi)$$

Il faut noter ici que ce théorème ne contraint que les connaissances du nouvel état épistémique et ne donne aucune information sur la partie conditionnelle.

Une forte limitation des postulats de la révision AGM est qu'ils imposent de trop faibles contraintes sur l'itération du processus de révision. Darwiche et Pearl

[DAR 94, DAR 97] ont proposé des postulats pour la révision itérée. Le but de ces postulats est de garder le plus possible de connaissances conditionnelles de l'ancienne base de connaissance. En plus des postulats (R*1)-(R*6), un opérateur de révision doit satisfaire les postulats suivants :

(C1) Si $\alpha \vdash \mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \leftrightarrow \Phi \circ \alpha$

(C2) Si $\alpha \vdash \neg\mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \leftrightarrow \Phi \circ \alpha$

(C3) Si $\Phi \circ \alpha \vdash \mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \vdash \mu$

(C4) Si $\Phi \circ \alpha \nvdash \neg\mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \nvdash \neg\mu$

L'explication des postulats est la suivante : (C1) dit que si deux informations sont incorporées successivement et si la deuxième implique la première alors incorporer seulement la seconde donnerait la même base de connaissance. (C2) dit que lorsque deux informations contradictoires arrivent, la seconde seule donnerait le même résultat. (C3) dit qu'une information doit être gardée si l'on effectue une révision par une information qui, étant donnée la base de connaissance, implique la première. (C4) dit qu'aucune information ne peut contribuer à son propre rejet.

Darwiche et Pearl ont donné un théorème de représentation pour leurs postulats.

THÉORÈME 1.2.– *Soit un opérateur de révision qui vérifie (R*1)-(R*6). L'opérateur vérifie (C1)-(C4) si et seulement si l'opérateur et l'assignement fidèle correspondant vérifient :*

(CR1) *Si $\omega \models \mu$ et $\omega' \models \mu$, alors $\omega \leq_\Phi \omega'$ ssi $\omega \leq_{\Phi \circ \mu} \omega'$*

(CR2) *Si $\omega \models \neg\mu$ et $\omega' \models \neg\mu$, alors $\omega \leq_\Phi \omega'$ ssi $\omega \leq_{\Phi \circ \mu} \omega'$*

(CR3) *Si $\omega \models \mu$ et $\omega' \models \neg\mu$, alors $\omega <_\Phi \omega'$ seulement si $\omega <_{\Phi \circ \mu} \omega'$*

(CR4) *Si $\omega \models \mu$ et $\omega' \models \neg\mu$, alors $\omega \leq_\Phi \omega'$ seulement si $\omega \leq_{\Phi \circ \mu} \omega'$*

Les conditions (CR1)-(CR4) posent des relations sur les pré-ordres totaux avant et après révision. (CR1) impose que l'interclassement des modèles de la nouvelle information est préservé. (CR2) impose la même condition sur les contre-modèles de la nouvelle information, c'est-à-dire que le classement relatif des modèles et contre-modèles est préservé. (CR3) et (CR4) disent qu'après révision le classement entre modèles et contre-modèles peut être modifié mais simplement en faveur des modèles. C'est-à-dire que la révision augmente la crédibilité des modèles de la nouvelle information.

Dans [DAR 94] les postulats (C1)-(C4) ont d'abord été donnés comme complément aux postulats usuels (R1)-(R6) [KAT 91]. Freund et Lehmann [FRE 94] ont montré que (C2) est inconsistant avec les postulats AGM. De plus Lehmann [LEH 95]

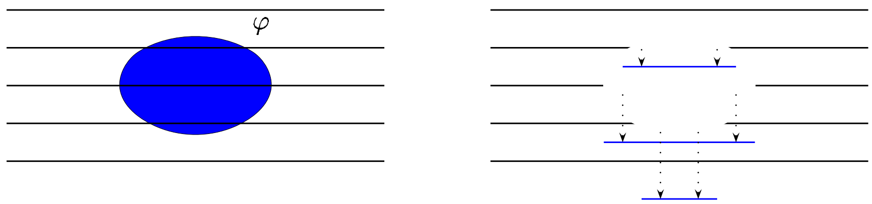


Figure 1.2. *Révision Darwiche et Pearl*

a montré que les postulats (C1) et (R1)-(R6) impliquent (C3) et (C4). Dans [DAR 97], Darwiche et Pearl ont reformulé leurs postulats (et les postulats AGM) en termes d’états épistémiques ((R*1)-(R*6)) et ont de ce fait enlevé cette contradiction et ces redondances.

Notons que, bien que le cadre utilisé par Darwiche et Pearl soit moins riche que celui de Spohn car moins qualitatif (pré-ordres totaux plutôt que OCF), les opérateurs de conditionnalisation de Spohn peuvent être vus comme un cas particulier des opérateurs de Darwiche et Pearl, puisque dans le cas de la conditionnalisation la “descente” des modèles est normée : les degrés de confiance relatifs entre modèles (et ceux entre contre-modèles) sont conservés par la conditionnalisation, mais pas par les opérateurs de Darwiche et Pearl (ceci est illustré figure 1.2).

Bien que la proposition de Darwiche et Pearl semble être la plus aboutie en matière de révision itérée, elle souffre de quelques défauts. Elle est en effet à la fois trop et pas assez contraignante. Nous verrons dans l’exemple 1.6 que les contraintes imposées par le postulat (C2) sont trop fortes. L’exemple suivant montre que, d’un autre coté, les postulats de Darwiche et Pearl ne contraignent pas suffisamment la révision itérée [NAY 96] :

EXEMPLE.– Je crois que Tweety est un oiseau qui chante. Mais, comme il n’y a pas de forte corrélation entre le fait de chanter et celui d’être un oiseau, je suis tout de même prêt à penser que Tweety chante même s’il s’avère que Tweety n’est pas un oiseau. De même si l’on m’apprend que Tweety ne chante pas, je penserai tout de même que Tweety est un oiseau.

Supposons à présent que j’apprenne que Tweety n’est pas un oiseau et ensuite qu’il ne chante pas. Avec ce scénario il est raisonnable de s’attendre à ce que ma nouvelle connaissance soit que Tweety est un animal qui n’est pas un oiseau et qui ne chante pas.

Mais cela n’est pas garanti par les postulats Darwiche and Pearl.

1.2.3. *Autres approches*

La révision naturelle : Boutilier propose [BOU 93, BOU 96] un opérateur de *révision naturelle* dont le but est d'avoir de bonnes propriétés en ce qui concerne l'itération. Cet opérateur peut être considéré comme accomplissant un changement minimal dans le pré-ordre associé aux états épistémiques : lorsque l'agent incorpore une nouvelle information, il considère les modèles minimaux de la nouvelle information pour le pré-ordre correspondant à l'ancien état épistémique. Et le pré-ordre associé au nouvel état épistémique est exactement le même que l'ancien, la seule différence est que les modèles minimaux de la nouvelle information sont les nouveaux modèles minimaux pour le pré-ordre (voir figure 1.3).

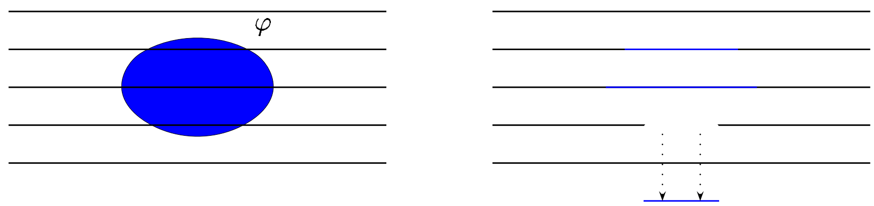


Figure 1.3. *Révision naturelle*

Ceci est un cas particulier des opérateurs de Darwiche et Pearl (c'est l'opérateur de Darwiche et Pearl accomplissant un changement minimal du pré-ordre). Cet opérateur est le seul à satisfaire les propriétés (R*1)-(R*6) et la propriété de *minimisation absolue* (CB) suivante :

(CB) Si $\Phi \circ \psi \vdash \neg\mu$, alors $(\Phi \circ \psi) \circ \mu \leftrightarrow \Phi \circ \mu$

Mais Darwiche et Pearl ont montré que cette minimisation excessive se payait par une insécurité des connaissances [DAR 97] :

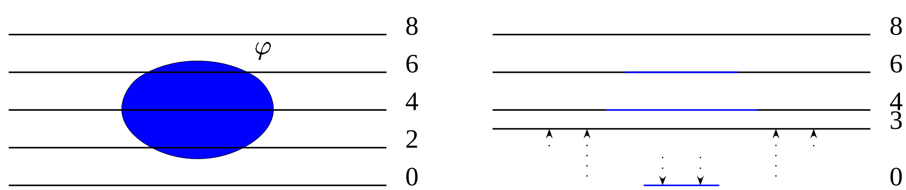
EXEMPLE.– Je rencontre un étrange animal qui semble être un oiseau, je crois donc que cet animal est un oiseau. Cet animal se rapproche et je vois que cet animal est rouge, je pense donc que cet animal est rouge. Un expert en animaux étranges passe par là et m'apprend qu'en fait cet animal n'est pas un oiseau mais un mammifère. Je révise donc mes croyances et pense à présent que cet animal est un mammifère. Que dois-je croire à propos de la couleur de l'animal ?

D'après l'opérateur de révision naturelle, on ne peut plus croire que l'animal est rouge (il suffit de prendre $\Phi = \top \circ oiseau$, $\mu = \neg oiseau$ et $\psi = rouge$). Bien que la couleur et l'espèce de l'animal ne soient *a priori* absolument pas liées, l'ordre dans lequel on apprend ces informations les "conditionne" en quelque sorte pour l'opérateur de révision naturelle.

Dans l'exemple ci-dessus on illustre bien le fait que, pour l'opérateur de révision naturelle, la croyance "l'animal est rouge" dépend de la croyance "l'animal est un oiseau", puisque remettre en cause cette dernière invalide la première. Alors que si l'on avait appris la couleur de l'animal avant d'avoir les informations sur son espèce, on aurait maintenu cette information sur sa couleur.

On peut illustrer ce problème directement sur la condition (CB) puisque lorsque $\Phi \circ \psi \vdash \neg\mu$, cette condition semble supposer que l'incompatibilité entre μ et $\Phi \circ \psi$ provient de ψ alors que μ peut très bien être parfaitement compatible avec ψ mais incompatible avec Φ.

Transmutations : Williams [WIL 94] reprend les OCF de Spohn comme moyen de représenter les états épistémiques et donne d'autres opérations de modifications de ces OCF. Williams nomme transmutation toute transition d'un état épistémique à un autre. Plus exactement la (φ, α)-transmutation de κ est un nouvel OCF $\kappa^*(\varphi, \alpha)$ tel que le degré de croyance (voir section 1.2.1) de φ est α. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Williams pour la définition technique.



(a) OCF κ (b) $(\varphi, 3)$-ajustement de κ

Figure 1.4. *ajustement*

Elle définit aussi les ajustements qui sont un type de transmutation élémentaire. Il est important de noter que d'après Williams un ajustement est une transmutation qui induit un changement minimal dans l'OCF, c'est-à-dire qu'il obéit au principe de changement minimal. L'idée défendue ici est donc similaire à celle justifiant l'opérateur de révision naturelle de Boutilier. La différence est que le cadre est plus quantitatif (l'ajustement nécessite un degré de confiance en la nouvelle information) et que l'opération d'ajustement permet d'effectuer une révision, une contraction ou une restructuration[2], suivant la valeur du degré de confiance.

Révision rangée : Lehmann [LEH 95] propose des postulats pour les opérateurs de révision qui sont sensés assurer de bonnes propriétés en ce qui concerne l'itération. Sa proposition est basée sur la notion de séquences de révisions qui jouent le rôle d'états épistémiques. Les postulats de Lehmann, contrairement aux postulats de Darwiche et Pearl, ne sont pas donnés comme une extension des postulats AGM, bien que Lehmann affirme dans [LEH 95] qu'ils capturent les postulats AGM. Lehmann donne également une caractérisation sémantique de ces opérateurs sous forme de modèles rangés (widening ranking models).

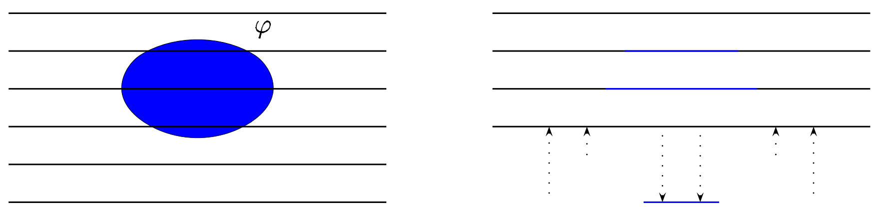


Figure 1.5. *révision rangée*

Une critique que l'on peut adresser à ce modèle est que – dans le cas fini – à partir d'un certain moment toute révision sévère (*i.e.* non compatible avec la connaissance actuelle) par une information φ a comme résultat cette information φ. C'est-à-dire que l'on atteint comme cas limite l'opérateur de révision par intersection totale (*full meet revision*), qui est considéré comme insatisfaisant pour une opération de révision. Ceci s'explique très facilement à partir de la figure 1.5, puisque chaque révision sévère fait disparaître tous les niveaux situés entre le premier niveau de l'ancien pré-ordre et le premier niveau où apparaissent des modèles de la nouvelle information (toutes les interprétations comprises entre ces deux niveaux deviennent équivalentes). Donc à partir d'un certain nombre d'itérations, on obtient simplement deux niveaux : le premier composé des modèles de la connaissance actuelle et le second comprenant tous les autres modèles.

2. une restructuration est une transformation de l'état épistémique qui ne modifie pas la base de connaissance associée. Cela permet de rendre une formule plus ou moins crèdible sans modifier les connaissances de l'agent (Voir [WIL 94]).

Révision à mémoire : Konieczny et Pino Pérez ont proposé dans [KON 00] des opérateurs de révision à mémoire. En fait, ils y donnent une notion syntaxique constructive d'état épistémique. Les postulats proposés et la représentation sont le point de départ pour l'approche plus générale qui sera présentée dans la section suivante et qui a été d'abord proposée dans [BEN 00].

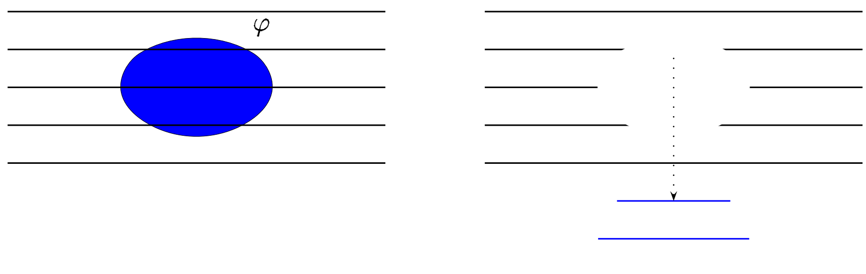


Figure 1.6. *Opérateur de révision à mémoire basique*

L'opérateur présenté sur la figure 1.6 est un opérateur à mémoire particulier. Il est l'opérateur à mémoire le plus simple à définir et est appelé opérateur à mémoire basique. Les autres opérateurs de cette famille ont un comportement plus complexe.

Cinématique des enracinements épistémiques : Un opérateur de révision étant équivalent à un enracinement épistémique (voir [GÄR 88]), Nayak, Foo, Pagnucco et Sattar ont proposé des opérateurs de révision opérant directement sur ces enracinements épistémiques [NAY 94, NAY 96]. C'est-à-dire qu'ils modélisent un état épistémique par un enracinement épistémique et un opérateur de révision définit donc des transitions entre enracinements épistémiques.

Le problème avec la caractérisation logique de Nayak *et al.* est qu'ils ne considèrent pas d'états épistémiques, ils ne travaillent qu'avec des bases de connaissance. Sous peine d'incohérence de la caractérisation logique, il faut alors supposer que deux opérateurs de révision apparaissant successivement dans un même postulat sont des opérateurs de révision différents, ce qui en quelque sorte code l'état épistémique au niveau de l'opérateur de révision. C'est-à-dire que si dans un postulat apparaît $(K * A) * B$ il faut comprendre $(K * A) *^{|A} B$, où $*^{|A}$ est le nouvel opérateur de révision.

1.3. États épistemiques, axiomes et représentation

Tout d'abord nous donnons une définition syntaxique très générale des états épistémiques. Nous donnerons ensuite des postulats de rationalité et des théorèmes de représentation.

DÉFINITION 1.5.– *Un espace épistémique $\mathcal{E}$ est un triplet $\langle E, \pi, F\rangle$ où E est un ensemble, F est l'ensemble des formules de la logique propositionnelle construites sur un ensemble fini de variables et π est une fonction de E dans F. Les éléments de E seront appelés des états épistémiques. Les éléments de F seront appelés des* observables *et π est la fonction de projection ; ainsi si $\Phi \in E$, $\pi(\Phi)$ est la partie observable de Φ.*

On doit noter que cette idée est déjà implicite dans les travaux de Darwiche et Pearl et de Lehmann [DAR 97, LEH 95] dans lesquels la fonction de projection est appelée Bel.

A partir de maintenant, on utilisera les lettres grecques majuscules pour dénoter les états épistémiques. Le symbole $\vdash$ dénotera la relation classique de conséquence logique. $\mathcal{W}$ dénotera l'ensemble des interprétations. Lorsque ϕ est une formule propositionnelle $Mod(\phi)$ dénotera l'ensemble de ses modèles classiques.

Nous voulons donner des postulats de rationalité pour une classe d'opérateurs de changement qui capturent la dynamique du processus d'itération. Au niveau syntaxique un opérateur est une fonction $\circ$ qui envoie des couples d'états épistémiques dans un nouvel état épistémique, *i.e.* $\circ : E \times E \longrightarrow E$. Nous verrons que E, π et $\circ$ peuvent être interprétés de très diverses façons.

L'ensemble de postulats suivants sera appelé AREE (Axiomes de Révision par des États Épistémiques).

(REE*1) $\pi(\Phi \circ \Psi) \vdash \pi(\Psi)$

(REE*2) Si $\pi(\Phi) \wedge \pi(\Psi)$ est consistant, alors $\pi(\Phi \circ \Psi) \leftrightarrow \pi(\Phi) \wedge \pi(\Psi)$

(REE*3) Si $\pi(\Psi)$ est consistant, alors $\pi(\Phi \circ \Psi)$ est consistant

(REE*4) Si $\pi(\Psi_1) \leftrightarrow \pi(\Psi_2)$, alors $\pi(\Phi \circ \Psi_1) \leftrightarrow \pi(\Phi \circ \Psi_2)$

(REE*It) $\pi((\Phi \circ \Theta) \circ \Gamma) \leftrightarrow \pi(\Phi \circ (\Theta \circ \Gamma))$

Remarquons que les axiomes (REE*1)-(REE*4) sont la généralisation naturelle des postulats AGM (R1)-(R4) au cas où la nouvelle information est un état épistémique. L'axiome (REE*It), appelé l'axiome d'itération, est une généralisation des postulats AGM (R5) et (R6) (dans le cas fini)[KAT 91]. Cet axiome, qui exprime une sorte d'associativité au niveau des observables, va aussi capturer la priorité forte de la nouvelle information. Par ailleurs, il va garantir le bon comportement des opérateurs qui le satisfont par rapport au processus d'itération. Son nom d'axiome d'itération, est dû justement au fait qu'il implique les principaux postulats de l'itération proposés par Darwiche et Pearl [DAR 97]. Nous analyserons cela en détail dans la section 1.4.

PROPOSITION 1.1.– *L'axiome (REE*It) plus les axiomes (REE*1)-(REE*4) impliquent les axiomes suivants :*

(REE*5) $\pi(\Phi \circ \Psi) \wedge \pi(\Theta) \vdash \pi(\Phi \circ \Gamma)$ *avec* $\pi(\Gamma) \leftrightarrow \pi(\Psi \circ \Theta)$

(REE*6) *Si* $\pi(\Phi \circ \Psi) \wedge \pi(\Theta)$ *est consistant, alors* $\pi(\Phi \circ \Gamma) \vdash \pi(\Phi \circ \Psi) \wedge \pi(\Theta)$ *avec* $\pi(\Gamma) \leftrightarrow \pi(\Psi \circ \Theta)$.

(REE*Conj) *Si* $\pi(\Theta) \wedge \pi(\Gamma)$ *est consistant, alors quel que soit l'état épistémique* Θ' *tel que* $\pi(\Theta') \leftrightarrow \pi(\Theta) \wedge \pi(\Gamma)$ *on a* $\pi((\Phi \circ \Theta) \circ \Gamma) \leftrightarrow \pi(\Phi \circ \Theta')$

Les axiomes (REE*5) et (REE*6) sont la généralisation directe des axiomes AGM (R5)-(R6) usuels. Remarquons que l'axiome (REE*Conj) dit que si nous révisons séquentiellement par deux états épistémiques dont la conjonction des observables est consistante, alors la partie observable du résultat coïncide avec la partie observable du résultat la de révision par un état épistémique dont la partie observable est la conjonction des observables des états épistémiques. Cette propriété est proche du postulat *Conjunction* proposé par Nayak *et al.* [NAY 96] (voir aussi Spohn [SPO 87]). Néanmoins (REE*Conj) est plus faible que la propriété *Conjunction* car la conclusion de la première impose seulement l'équivalence entre les observables tandis que la conclusion de la seconde impose l'égalité des états épistémiques.

DÉFINITION 1.6.– *Soit* $\langle E, \pi, F \rangle$ *un espace épistémique. Une fonction* $\circ : E \times E \longrightarrow E$ *est appelée un* opérateur de révision par états épistémiques *lorsqu'elle satisfait* AREE.

Une des clés dans notre premier théorème de représentation est la construction du pré-ordre lexicographique associé à deux pré-ordres. Ceci est fait précisément par la définition suivante :

DÉFINITION 1.7.– *Soient* $\leq_1$ *et* $\leq_2$ *deux pré-ordres totaux sur* $\mathcal{W}$*. On définit le pré-ordre total* $\leq_{lex(\leq_1,\leq_2)}$ *par* $\omega_1 \leq_{lex(\leq_1,\leq_2)} \omega_2$ *ssi* $\omega_1 <_1 \omega_2$ *ou (*$\omega_1 =_1 \omega_2$ *et* $\omega_1 \leq_2 \omega_2$*).*

THÉORÈME 1.3.– *Soit* $\langle E, \pi, F \rangle$ *un espace épistémique. Soit* $\circ : E \times E \longrightarrow E$ *une fonction.* $\circ$ *est un opérateur de révision par état épistémique ssi pour chaque état épistémique* Ψ *on peut associer un pré-ordre total* $\leq'_\Psi$ *tel que :*
(i) $\pi(\Psi) = min(\leq'_\Psi)$ *si* $\pi(\Psi)$ *est consistant.*
(ii) $\pi(\Psi \circ \Phi) = min(\leq_{lex(\leq'_\phi,\leq'_\Psi)})$ *si* $\pi(\Phi)$ *est consistant.*

L'implication de droite à gauche (la partie *si*) est une vérification assez simple. Pour l'implication de gauche à droite (la partie *seulement si*), la clé est la définition de la fonction $\Psi \mapsto \leq'_\Psi$. Ceci est fait dans la définition suivante :

DÉFINITION 1.8.– *Soit* $\langle E, \pi, F \rangle$ *un espace épistémique et soit* $\circ$ *un opérateur de révision par état épistémique. Pour chaque état épistémique* Ψ *on définit un pré-ordre total sur les interprétations,* $\leq'_\Psi$*, de la façon suivante :*

$$\omega_1 \leq'_{\Psi} \omega_2 \;\Leftrightarrow\; \omega_1 \models \pi(\Psi \circ \Theta)$$

avec $mod(\pi(\Theta)) = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Remarquons que c'est grâce à l'axiome (REE*4) que $\leq'_{\Psi}$ est bien défini, c'est-à-dire que si Θ et Θ' sont tels que $mod(\pi(\Theta)) = \{\omega_1, \omega_2\} = mod(\pi(\Theta'))$ alors $\pi(\Psi \circ \Theta) = \pi(\Psi \circ \Theta')$.

Une fois que nous avons cette définition il n'est pas difficile de prouver les propriétés (i) et (ii) du théorème.

Une différence importante entre ce théorème et les théorèmes de représentation bien connus pour la révision, c'est que le théorème précédent ne permet pas de construire l'opérateur $\circ$ à partir des pré-ordres $\leq'_{\Psi}$. Dans ce sens c'est un théorème de représentation faible. Mais, par ailleurs, il est suffisamment puissant pour donner, avec n'importe quelle représentation des états épistémiques, une représentation concrète des observables via les pré-ordres $\leq'_{\Psi}$. De plus, un autre aspect important de ce théorème est le processus de calcul des observables de l'état épistémique nouveau via le pré-ordre lexicographique.

Un reproche que l'on pourrait aussi faire à ce théorème est que l'on n'a pas nécessairement $\Psi \circ \Phi = \leq_{lex(\leq'_{\phi}, \leq'_{\Psi})}$, même si l'interprétation des états épistémiques sont des pré-ordres totaux. Néanmoins si on exige un tout petit plus de rationalité de la part de l'opérateur, l'égalité est satisfaite.

DÉFINITION 1.9.– *Soit* $\langle E, \pi, F\rangle$ *un espace épistémique tel que les éléments de l'ensemble* E *sont des pré-ordres totaux tels que pour chaque* $\leq_{\Phi} \in E$, $\pi(\leq_{\Phi}) = \varphi$ *avec* $Mod(\varphi) = min(\leq_{\Phi})$. *Soit* $\circ : E \times E \longrightarrow E$ *un opérateur.* $\circ$ *est appelé rationnel si l'égalité suivante est satisfaite :*

$$Mod(\pi(\leq_{\Psi} \circ \leq_{\Phi})) = min(Mod(\pi(\leq_{\Phi})), \leq_{\Psi})$$

Pour cette classe d'opérateurs nous avons la représentation suivante

THÉORÈME 1.4.– *Soit* $\circ$ *un opérateur rationnel et* $\leq_{\Psi}$, $\leq_{\Phi}$ *deux états épistémiques. Alors* $\circ$ *est un opérateur de révision par état épistémique ssi*

$$\leq_{\Psi} \circ \leq_{\Phi} = \leq_{lex(\leq_{\Phi}, \leq_{\Psi})}$$

1.4. Comportement des postulats AREE pour l'itération

Dans cette section nous étudions le comportement des opérateurs de révision par état épistémique par rapport à l'itération. Pour ce faire nous commençons par adapter les postulats de Darwiche et Pearl [DAR 94, DAR 97] à notre cadre formel, c'est-à-dire lorsque la nouvelle information est aussi un état épistémique.

Les postulats pour la révision iterée par états épistémiques sont les suivants :

(C1*) Si $\pi(\Phi) \vdash \pi(\Gamma)$ alors $\pi((\Psi \circ \Gamma) \circ \Phi) \leftrightarrow \pi(\Psi \circ \Phi)$

(C2*) Si $\pi(\Phi) \vdash \neg\pi(\Gamma)$ alors $\pi((\Psi \circ \Gamma) \circ \Phi) \leftrightarrow \pi(\Psi \circ \Phi)$

(C3*) Si $\pi(\Psi \circ \Phi) \vdash \pi(\Gamma)$ alors $\pi((\Psi \circ \Gamma) \circ \Phi) \vdash \pi(\Gamma)$

(C4*) Si $\pi(\Psi \circ \Phi) \nvdash \neg\pi(\Gamma)$ alors $\pi((\Psi \circ \Gamma) \circ \Phi) \nvdash \neg\pi(\Gamma)$

Soient $\langle E, \pi, F\rangle$ et $\circ$ un espace épistémique et un opérateur rationnel comme dans la définition 1.9. Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de l'ensemble E. On définit $\circ_{\mathcal{C}}$ comme la restriction de $\circ$ à $E \times \mathcal{C}$. Par exemple si $\mathcal{C}$ est la classe des pré-ordres totaux à au plus deux niveaux $\circ_{\mathcal{C}}$ est l'opérateur de révision à mémoire basique défini dans [KON 00]. Pour cet opérateur nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.5.– *Supposons que $\circ_{\mathcal{C}}$ est un opérateur de révision rationnel par état épistémique. alors $\circ_{\mathcal{C}}$ satisfait (C1*-C4*) ssi les éléments de $\mathcal{C}$ sont les pré-ordres totaux qui ont au plus deux niveaux.*

Plus généralement nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 1.6.– *Un opérateur de révision par état épistémique satisfait les postulats (C1*), (C3*) and (C4*). Mais (C2*) n'est généralement pas satisfait.*

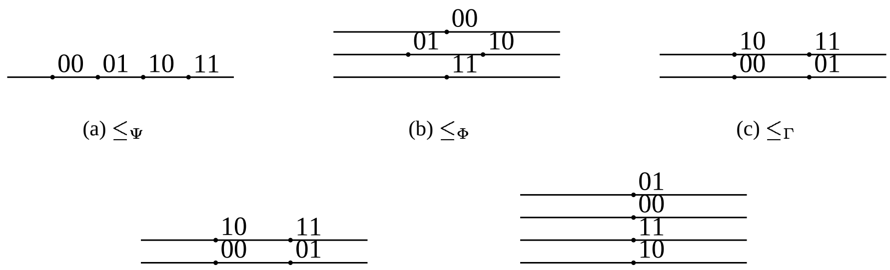
Remarquons que par les théorèmes 1.5, 1.6 et le fait que l'on peut avoir des pré-ordres totaux avec plus de deux niveaux, l'opérateur de révision rationnel par état épistémique ainsi construit sur E satisfait (C1*), (C3*) et (C4*) mais ne satisfait pas (C2*).

L'exemple suivant, nous montre que (C2*) n'est pas satisfait. Là nous considèrerons que E est l'ensemble des pré-ordres sur les interprétations donnés par la distance de Hamming[3] à partir des observations φ : le premier niveau est $Mod(\varphi) = Mod(\pi(\leq_\Psi))$, le deuxième niveau les interprétations à distance 1 du premier niveau et en général le $n+1$-ième niveau sera constitué des interprétations à distance n du premier niveau.

EXEMPLE.– Considérons un circuit composé d'un additionneur et d'un multiplieur. Nous n'avons initialement aucune information à propos de ce circuit, soit Ψ tel que $\pi(\Psi) = \top$. Nous apprenons que l'additionneur et le multiplieur fonctionnent, en considérant que les deux variables propositionnelles $adder\_ok$ et $multiplier\_ok$ dénotent respectivement que l'additionneur (resp. le multiplieur) fonctionne, *i.e.* $\pi(\Phi) = adder\_ok \wedge multiplier\_ok$. Quelqu'un teste alors le circuit et il s'avère que l'additionneur ne fonctionne pas correctement, *i.e.* $\pi(\Gamma) = \neg adder\_ok$. On donc $\pi(\Gamma) \vdash \neg\pi(\Phi)$ mais $\pi((\Psi \circ \Phi) \circ \Gamma) \leftrightarrow \neg adder\_ok \wedge multiplier\_ok$ tandis que $\pi(\Psi \circ \Gamma) \leftrightarrow \neg adder\_ok$. L'application de (C2*) devrait conduire à $\pi((\Psi \circ \Phi) \circ \Gamma) \equiv \neg adder\_ok$, c'est-à-dire à *oublier* que le multiplieur fonctionne !

On trouve figure 1.7 les pré-ordres qui correspondent à ces états épistémiques. L'interprétation 01 dénote que $adder\_ok$ est faux et que $multiplier\_ok$ est vrai, etc.

3. La distance de Hamming (ou de Dalal [DAL 88]) entre deux interprétations est le nombre de variables propositionnelles pour lesquelles elles diffèrent.



(a) $\leq_\Psi$ (b) $\leq_\Phi$ (c) $\leq_\Gamma$

(d) $\leq_{\Psi\circ\Gamma}$ (e) $\leq_{\Psi\circ\Phi\circ\Gamma}$

Figure 1.7. *Exemple*

Deux interprétations sont équivalentes pour l'état épistémique Φ ($\omega \simeq_\Phi \omega'$) si elles se trouvent au même niveau. Une interprétation ω est meilleure que ω' ($\omega <_\Phi \omega'$) si ω se trouve dans un niveau inférieur à celui de ω'.

Le problème avec le postulat (C2*) est qu'il impose, lorsqu'une observation précédente est partiellement remise en doute, de ne pas tenir compte du tout de cette information. Ce comportement semble un peu excessif. Dans l'exemple, l'information μ est remise en question par α, il faut donc également remettre en question la partie de μ non remise en cause par α. Imaginons une application où la nouvelle information est composée d'une conjonction de dizaines de formules, si l'une d'entre elles est ultérieurement remise en cause, cela doit-il nous faire "perdre" l'information contenue dans les autres formules ? Lehmann [LEH 95], dont les opérateurs ont le même comportement, illustre ceci par la remarque suivante dont il attribue l'idée à P. Y. Schobbens.

> *"Suppose an agent learns, first, a long conjunction $a \wedge b \wedge \ldots \wedge z$ and then its negation $\neg a \vee \neg b \vee \ldots \vee \neg z$. Postulate (I7)* [4] *implies it will forget about the first information, since it has been contradicted by the second one. But one could argue that this is not the right thing to do. Granted, the first information is incorrect, but it could be almost correct. If one makes this assumption, upon receiving the second information, one will conclude that few components, perhaps only one, of the conjunction are false, most of them still believed to hold true. This analysis distinguishes, I think two kinds of [revisions]. In the first one, one retracts a proposition because the source from which it has been obtained is now known*

4. Un des postulats de Lehmann pour l'itération.

> *to be unreliable. In this case, there is no reason to suppose the proposition is approximatively correct. In the second kind of [revisions], one retracts a proposition because some new information came to contradict it. In this case, one may have reason to believe the proposition is still approximatively correct. This distinction should lead to two different sets of postulates for [revisions]."*

L'hypothèse sous-jacente de (C2*) est que chaque information est produite par une source et que remettre en question la véracité d'une information remet en question la confiance en cette source. C'est une condition qui peut être utile pour certaines applications mais, outre le fait que Darwiche et Pearl ne mentionnent pas ce comportement dans leur article, cette hypothèse semble trop forte dans un cadre général.

1.5. Conclusion

Deux choses s'imposent des résultats des sections 1.3 et 1.4. Tout d'abord le caractère universel des pré-ordres totaux sur les interprétations comme représentation des états épistémiques. Ceci, joint à son caractère de simplicité, fait que les pré-ordres totaux soient les modèles preférés pour la dynamique de la connaissance. Ensuite, la notion générale d'état épistémique est assez souple pour que l'on puisse considérer des révisions par des états épistémiques comme une généralisation naturelle de la révision où la nouvelle information est une simple formule. En fait la révision d'un état épistémique complexe par une simple formule peut être codée par des révisions avec des préordres à deux niveaux.

Un point important qui se dégage également des sections précédentes est le rôle que joue le postulat d'itération dans la primauté forte de la nouvelle information ainsi que la place du postulat controversé (C2) dans des processus d'itération maniant des informations complexes : dans ce processus (C2) n'a pas lieu d'être.

Enfin, une dernière remarque concerne le cas limite des différents opérateurs présentés. Par cas limite, nous entendons le comportement de ces opérateurs aprés un grand nombre d'itérations. Dans le cas purement qualitatif (*i.e.* lorsque l'on travaille avec des pré-ordres), il existe deux cas limites : soit la représentation sous forme de pré-ordres donne un pré-ordre linéaire (*i.e.* tel qu'il n'existe pas d'interprétations équivalentes), ce qui a pour conséquence que toute révision a comme résultat une base de connaissance complète (composée d'un seul modèle). Quasiment tous les opérateurs mènent à ce cas limite. L'autre cas limite est l'obtention d'un pré-ordre à seulement deux niveaux : le premier composé des modèles de la connaissance actuelle et le second des autres interprétations. Le problème est qu'alors toute révision par une formule φ qui contredit les connaissances actuelles se résume simplement aux conséquences logiques de φ. L'opérateur de révision rangée de Lehmann mène à ce cas limite. Or, on peut interpréter le premier cas limite comme un processus d'apprentissage : en fonction de son expérience passée, l'agent peut avoir un avis très précis de l'état du monde actuel. Alors que le second cas limite dénote une attitude d'oubli, puisque l'agent "oublie" progressivement ses anciennes informations conditionnelles. La question est alors de savoir s'il est possible de définir un opérateur purement qualitatif permettant d'échapper à l'un de ces deux cas limites, comme le fait l'opérateur d'ajustement de Williams[5] dans un cadre plus quantitatif (*i.e.* avec des OCF).

Annexe : preuve du théorème 1.4

PREUVE : Lorsque l'égalité du théorème est satisfaite il facile de vérifier que $\circ$ est un opérateur de révision par état épistémique.

Pour établir la reciproque, supposons que $\circ$ est un opérateur de révision par état épistémique. Nous voulons voir que l'équation du théorème 1.4 est satisfaite, *i.e.*

$$w \leq_{\Phi\circ\Psi} w' \text{ ssi } \begin{cases} w <_\Psi w' \text{ or} \\ w \simeq_\Psi w' \text{ and } w \leq_\Phi w' \end{cases}$$

Pour ce faire nous allons prouver quelques faits.

Fait 1. $w <_\Psi w' \quad \Rightarrow \quad w <_{\Phi\circ\Psi} w'$

Si ce n'était pas le cas, on aurait $w' \leq_{\Phi\circ\Psi} w$. Prenons Γ avec $mod(\pi(\Gamma)) = \{w, w'\}$. Alors, par la propriété de rationalité de l'opérateur $\{w'\} \subseteq mod(\pi((\Phi \circ \Psi) \circ \Gamma))$. Par un argument similaire on a $mod(\pi(\Psi \circ \Gamma)) = \{w\}$. A nouveau, par la propriété de rationalité de l'opérateur on a $mod(\pi(\Phi \circ (\Psi \circ \Gamma))) = \{w\}$ ce qui est en contradiction avec le postulat (REE*It).

Fait 2. $w \simeq_\Psi w' \text{ and } w \leq_\Phi w' \quad \Rightarrow \quad w \leq_{\Phi\circ\Psi} w'$

Si ce n'était pas le cas, on aurait $w' <_{\Phi\circ\Psi} w$. Prenons Γ avec $mod(\pi(\Gamma)) = \{w, w'\}$. Alors, par la propriété de rationalité de l'opérateur on a que $mod(\pi((\Phi \circ \Psi) \circ \Gamma)) = \{w'\}$. Par un argument similaire on a $mod(\pi(\Psi \circ \Gamma)) = \{w, w'\}$. A nouveau, par la propriété de rationalité de l'opérateur on a $mod(\pi(\Phi \circ (\Psi \circ \Gamma))) \supseteq \{w\}$ ce qui est en contradiction avec le postulat (REE*It).

Fait 3. $w \leq_{\Phi\circ\Psi} w' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w <_\Psi w' \text{ or} \\ w \simeq_\Psi w' \text{ and } w \leq_\Phi w' \end{cases}$

Supposons que l'on n'a pas $w <_\Psi w'$. Alors $w' \leq_\Psi w$. Par le Fait 1 il est impossible que $w' <_\Psi w$ (car on aurait $w' <_{\Phi\circ\Psi} w$ ce qui est une contradiction). Ainsi

5. en effet, selon la valeur du degré de confiance en la nouvelle information, on peut créer ou supprimer des "niveaux" dans le pré-ordre.

nécessairement on a $w \simeq_\Psi w'$. Maintenant, supposons que l'on n'a pas la conclusion voulue, alors on a que $w' <_\Phi w$. Prenons Γ avec $mod(\pi(\Gamma)) = \{w, w'\}$. Alors, par la propriété de rationalité de l'opérateur on a que $mod(\pi(\Psi \circ \Gamma)) = \{w, w'\}$. Par un argument similaire on a $mod(\pi(\Phi \circ (\Psi \circ \Gamma))) = \{w'\}$. Par (REE*It) la dernière égalité nous conduit à $mod(\pi((\Phi \circ \Psi) \circ \Gamma)) = \{w'\}$ ce qui contredit l'hypothèse $w \leq_{\Phi \circ \Psi} w'$. $\square$

1.6. Bibliographie

[ALC 85] ALCHOURRÓN C. E., GÄRDENFORS P., MAKINSON D., « On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions », *Journal of Symbolic Logic*, vol. 50, p. 510-530, 1985.

[BEN 00] BENFERHAT S., KONIECZNY S., PAPINI O., PINO PÉREZ R., « Iterated revision by epistemic states : axioms, semantics and syntax », *Proceedings of the fourteenth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'00)*, p. 13-17, 2000.

[BOU 92a] BOUTILIER C., Conditional logics for default reasoning and belief revision, PhD thesis, University of Toronto, 1992.

[BOU 92b] BOUTILIER C., « Normative, subjunctive and autoepistemic defaults : Adopting the Ramsey test », *Proceedings of the Third International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, p. 685-696, 1992.

[BOU 93] BOUTILIER C., « Revision sequences and nested conditionals », *Proceedings of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, 1993.

[BOU 96] BOUTILIER C., « Iterated Revision and Minimal Change of Conditional Beliefs », *Journal of Philosophical Logic*, vol. 25, n°3, p. 262-305, 1996.

[DAL 88] DALAL M., Updates in propositional databases, Rapport, Rutgers University, 1988.

[DAR 94] DARWICHE A., PEARL J., « On the logic of iterated belief revision », KAUFMANN M., Ed., *Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge : Proceedings of the 1994 Conference (TARK'94)*, p. 5-23, 1994.

[DAR 97] DARWICHE A., PEARL J., « On the logic of iterated belief revision », *Artificial Intelligence*, , n°89, p. 1-29, 1997.

[FRE 94] FREUND M., LEHMANN D., Belief revision and rational inference, Rapport n°TR-94-16, Institute of Comp. Science, The Hebrew University of Jerusalem, 1994.

[FRI 96] FRIEDMAN N., HALPERN J., « Belief revision : a critique », *Proceedings of the Fifth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'96)*, p. 421-431, 1996.

[GÄR 88] GÄRDENFORS P., *Knowledge in flux*, MIT Press, 1988.

[KAT 91] KATSUNO H., MENDELZON A. O., « Propositional knowledge base revision and minimal change », *Artificial Intelligence*, vol. 52, p. 263-294, 1991.

[KON 00] KONIECZNY S., PINO PÉREZ R., « A framework for iterated revision », *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 10, n°3-4, p. 339-367, 2000.

[LEH 95] LEHMANN D., « Belief revision, revised », p. 1534-1540, 1995.

[LEV 88] LEVI I., « Iteration of conditionals and the ramsey test », *Synthese*, vol. 76, p. 49-81, 1988.

[LEW 73] LEWIS D., *Counterfactuals,* Basil Blackwell, 1973.

[MAK 89] MAKINSON D., GÄRDENFORS P., « Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic », *The Logic of Theory Change, Workshop, Konstanz, FRG*, vol. 465 de *LNAI*, p. 185-205, 1989.

[NAY 94] NAYAK A. C., FOO N. Y., PAGNUCCO M., SATTAR A., « Entrenchment kinematics 101 », *Proceedings of the Seventh Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, p. 157-164, 1994.

[NAY 96] NAYAK A. C., FOO N. Y., PAGNUCCO M., SATTAR A., « Changing conditional beliefs unconditionally », *Proceedings of the Sixth Conference of Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK'96)*, Morgan Kaufmann, p. 119-135, 1996.

[RAM 31] RAMSEY F. P., « *Foundations of Mathematics and Other Logical Essays* », Chapitre General Propositions and Causality, p. 237-257, 1931.

[SPO 87] SPOHN W., « Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic states », HARPER W. L., SKYRMS B., Eds., *Causation in Decision, Belief Change, and Statistics*, vol. 2, p. 105-134, 1987.

[STA 68] STALNAKER R. C., « *Ifs* », Chapitre A theory of conditionals, p. 41-55, D. Reidel, Dordrecht, 1968.

[WIL 94] WILLIAMS M. A., « Transmutations of knowledge systems », *Proceedings of the Fourth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, p. 619-629, 1994.

[WIL 95] WILLIAMS M. A., « Iterated theory base change : a computational model », *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, p. 1541 - 1550, 1995.