

Théorie des Jeux

Notes de cours autorisées. Notation donnée à titre indicatif.

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Fureur de vivre (3pts)

Deux conducteurs (A et B) dirigent leur voiture l'une contre l'autre dans une rue trop étroite pour qu'elles puissent se croiser sans provoquer d'accident. Si un conducteur ralentit tandis que l'autre garde la même vitesse, il perd la face: il obtient alors une utilité de 0 et son adversaire obtient 4. Si les deux ralentissent en même temps alors le jeu se termine en égalité et les deux obtiennent une utilité de 2. Si aucun ne ralentit alors l'accident arrive et chacun obtient une utilité de -2.

Question 1. Donnez l'ensemble des joueurs et l'ensemble des stratégies de chaque joueur.

Question 2. Donnez la forme stratégique de ce jeu.

Question 3. Donnez les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu.

Exercice 2 : Jeu sous forme stratégique (5 pts)

Soit le jeu sous forme stratégique suivant :

		Joueur 2		
		t	u	v
Joueur 1	x	3,4	8,0	7,2
	y	1,6	9,7	7,2
	z	0,0	6,1	7,2

Question 1. Ce jeu comporte-t-il un/des équilibre(s) de Nash ? Si oui lequel/lesquels ?

Question 2. Ce jeu comporte-t-il des stratégies strictement/faiblement dominées ? Si oui lesquelles ?

Question 3. Quels sont les profils qui en dominent d'autres au sens de Pareto ? Quels sont les maximaux au sens de Pareto (c'est-à-dire l'ensemble des profils non strictement dominés au sens de Pareto)?

Question 4. Quel est le niveau de sécurité de chacun des joueurs ?

Question 5. Donnez quelle sera d'après vous l'issue de ce jeu. Expliquez.

Question 6. Donnez le jeu sous forme extensive correspondant.

Exercice 3 : Equilibres de Nash (5pts)

Soit le jeu sous forme normale suivant :

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	g	1,1	1,1
	d	-1,-1	2,0

Question 1. Quelles sont les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs (en stratégies pures) ?

Question 2. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ?

Question 3. Quelles sont les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs (en stratégies mixtes) ?

Question 4. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies mixtes ?

Exercice 4 : Jeu sous forme stratégique (4 pts)

Soit le jeu sous forme stratégique suivant :

		Joueur 2	
		t	u
Joueur 1	a	x,y	2,0
	b	1,2	3,6

Question 1. Dire, pour chacune des conditions suivantes, quelles sont les valeurs nécessaires pour x et/ou y pour qu'elle soit vérifiée.

- a. Le profil (a,t) est un équilibre de Nash.
- b. Le profil (a,t) Pareto-domine tous les autres.
- c. La stratégie a est strictement dominée par la stratégie b .
- d. Le profil (b,u) est obtenu comme résultat d'une élimination itérative des stratégies dominées.
- e. Le niveau de sécurité du joueur 1 est maximal.

Exercice 5 : Jeu de Partage (3pts)

Deux joueurs peuvent se partager 10 euros. Ils annoncent simultanément une quantité demandée s_1 et s_2 où $s_1, s_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Si $s_1 + s_2 \leq 10$ alors chaque joueur i reçoit la quantité s_i qu'il a demandé. Si au contraire $s_1 + s_2 > 10$ alors ils ne reçoivent rien.

Question 1. Quels sont les profils non Pareto dominés ?

Question 2. Quels sont les équilibres de Nash de ce jeu ?

MASTER I
ECONOMIE GESTION ADMINISTRATION
mention Finance Intermédiée

Session d'examen de Novembre 2005

Tout document autorisé

Notation donnée à titre indicatif

Théorie des jeux
S. Konieczny

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Les Cinq Pirates (4 pts)

Cinq Pirates trouvent un trésor de 100 pièces d'or. Ils sont tous de force différente, appelons 1 le pirate le plus fort, 2 le suivant, . . . et 5 le pirate le moins fort. Le pirate le plus fort (1) propose une répartition des pièces entre les cinq pirates. Si une majorité stricte est contre cette répartition, le pirate qui a proposé la répartition est jeté par dessus-bord et meurt (ce qui est bien entendu pire que de ne recevoir aucune pièce), sinon la répartition est adoptée. Si la répartition est adoptée le jeu se termine et on distribue l'argent comme convenu, sinon le processus continue et c'est au pirate suivant de proposer une répartition entre les pirates restants. On itère ce processus jusqu'à ce qu'une répartition soit adoptée. On suppose que:

- les pirates sont rationnels. En particulier, ils feront les choix qui leur apporteront le plus de pièces, et ils préféreront ne rien recevoir plutôt que de mourir.
- un pirate ne votera contre une répartition que si ce vote lui rapportera strictement plus (les pirates ne tuent pas leurs congénères pour le plaisir).

Le problème est de trouver quelle sera la répartition adoptée par les pirates (et donc les stratégies optimales des cinq pirates).

Question 1. Donnez la solution du jeu (répartition adoptée et équilibre de Nash) s'il ne reste que 2 pirates (i.e. si les 3 premiers pirates ont été jetés par dessus-bord).

Question 2. Donnez la solution du jeu s'il ne reste que 3 pirates.

Question 3. Donnez la solution du jeu s'il ne reste que 4 pirates.

Question 4. Donnez la solution du jeu avec les 5 pirates.

Exercice 2 : Jeu à somme nulle (2 pts)

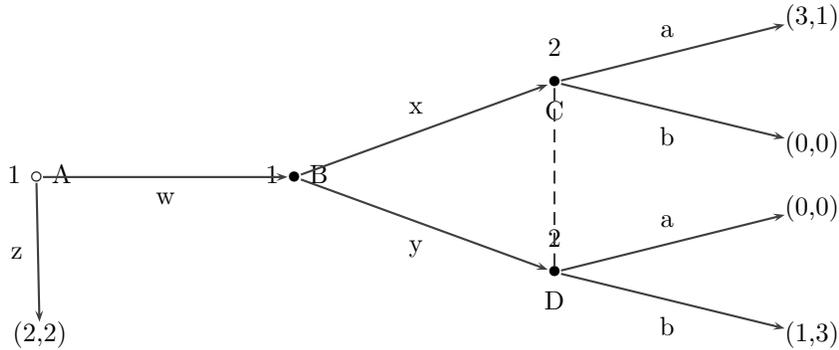
Question 1. Résoudre le jeu suivant:

Joueur 2

		s	t	u	v
Joueur 1	w	0	3	10	3
	x	4	5	8	4
	y	2	-7	9	0
	z	3	9	1	-2

Exercice 3 : Jeu sous forme extensive (5 pts)

Soit le jeu sous forme extensive suivant,



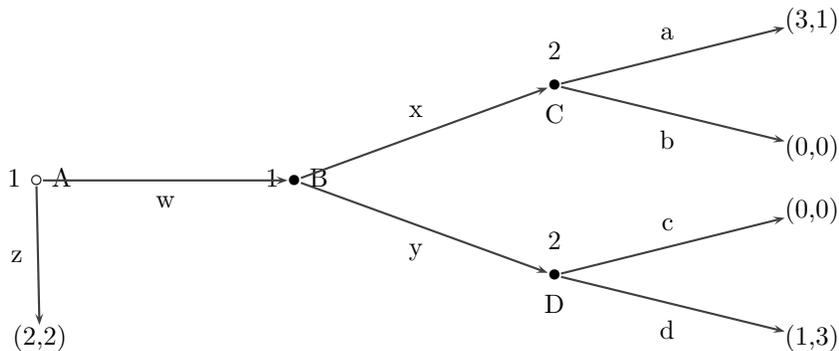
Question 1. Quels sont les sous-jeux de ce jeu ?

Question 2. Quels sont les ensembles de stratégies des deux joueurs ?

Question 3. Ecrire ce jeu sous forme stratégique et donner ses équilibres de Nash (en stratégies pures).

Question 4. Quels sont les équilibres de Nash (en stratégies pures) parfaits en sous jeu ?

Soit le jeu sous forme extensive suivant,



Question 5. Résoudre ce jeu par récurrence à rebours.

Exercice 4 : Equilibres de Nash (4 pts)

Soit le jeu sous forme normale suivant :

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	g	4,3	0,0
	d	-1,-1	3,5

Question 1. Quelles sont les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs en stratégies pures ?

Question 2. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ?

Question 3. Quelles sont les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs en stratégies mixtes ?

Question 4. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies mixtes ?

Exercice 5 : Vente aux enchères (5 pts)

Soit la méthode de ventes aux enchères suivante : Les acheteurs donnent leurs mises (les acheteurs ne connaissent pas les mises des autres acheteurs). Celui qui a donné la meilleure mise remporte l'objet et paye la mise proposée par l'acheteur qui a donné la seconde meilleure mise.

Supposons qu'il n'y ait que deux acheteurs, que ces deux acheteurs estiment l'objet à acheter respectivement à une valeur v_1 et v_2 (c'est-à-dire que l'acheteur i est indifférent entre ne pas acheter l'objet et l'acheter pour un prix v_i), avec $v_1 > v_2$ (l'acheteur 1 est prêt à payer l'objet plus cher que l'acheteur 2). Pour simplifier on supposera que si les deux mises m_1 et m_2 sont égales, c'est l'acheteur 1 qui remporte l'objet.

On peut associer les utilités suivantes pour les acheteurs :

$$u_1(m_1, m_2) = \begin{cases} v_1 - m_2 & \text{si } m_1 \geq m_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad u_2(m_1, m_2) = \begin{cases} v_2 - m_1 & \text{si } m_2 > m_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 1. Donnez les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs.

Question 2. Donnez l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures.

MASTER I
ECONOMIE GESTION ADMINISTRATION
mention Finance Intermédiée

Seconde Session - Juin 2006

Tout document autorisé

Notation donnée à titre indicatif

Théorie des jeux
S. Konieczny

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Equilibres de Nash (5 pts)

Joueur 2

Soit le jeu sous forme normale suivant :

Joueur 1		a	b
	c	3,4	1,1
	d	0,1	2,2

Question 1. Quelles sont les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs en stratégies pures ?**Question 2.** Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ?**Question 3.** Quelles sont les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs en stratégies mixtes ?**Question 4.** Quels sont les équilibres de Nash en stratégies mixtes ?**Exercice 2 : Jeu de Partage** (3 pts)

Deux joueurs peuvent se partager 10 euros. Le premier annonce une quantité demandée $s_1 \in [0, 10]$. Ensuite le second joueur, connaissant la demande du premier joueur, annonce une quantité $s_2 \in [0, 10]$. Si $s_1 + s_2 \leq 10$ alors chaque joueur i reçoit la quantité s_i qu'il a demandée. Si au contraire $s_1 + s_2 > 10$ alors ils ne reçoivent rien. (On suppose que l'utilité de chaque joueur ne dépend que de son gain monétaire).

Question 1. Quels sont les profils non Pareto dominés ?**Question 2.** Quels sont les équilibres de Nash de ce jeu ?**Exercice 3 : Concurrence** (3 pts)

Deux sociétés en concurrence sur un marché doivent décider de leur stratégie commerciale. Les choix sont d'avoir une stratégie agressive (investissements en publicité, rumeurs contre le concurrent,...), ou une stratégie pacifique. Si une des sociétés adopte une stratégie agressive envers l'autre, et que celle-ci adopte une stratégie pacifique, la première arrivera à détourner les clients de sa concurrente et à en capter une partie. Les gains attendus sont de 600 Meuro pour l'entreprise ayant la stratégie agressive et de 100 Meuro pour l'autre. Si les deux adoptent une stratégie agressive, les clients se reporteront sur d'autres produits et les gains seront de 200 Meuro pour chacune des entreprises. Si les deux adoptent une stratégie pacifique, les gains seront de 400 Meuro pour chacune des entreprises.

Question 1. Représenter ce jeu sous la forme adaptée.**Question 2.** Y-a-t-il des stratégies dominées ?**Question 3.** Résoudre ce jeu.

Exercice 4 : Jeu sous forme stratégique (5 pts)

Joueur 2

Soit le jeu sous forme stratégique suivant:

Joueur 1

	t	u	v
x	3,2	4,0	5,1
y	1,0	7,3	2,5
z	2,0	8,5	1,7

Question 1. Ce jeu comporte-t-il des stratégies strictement/faiblement dominées ? Si oui lesquelles ?

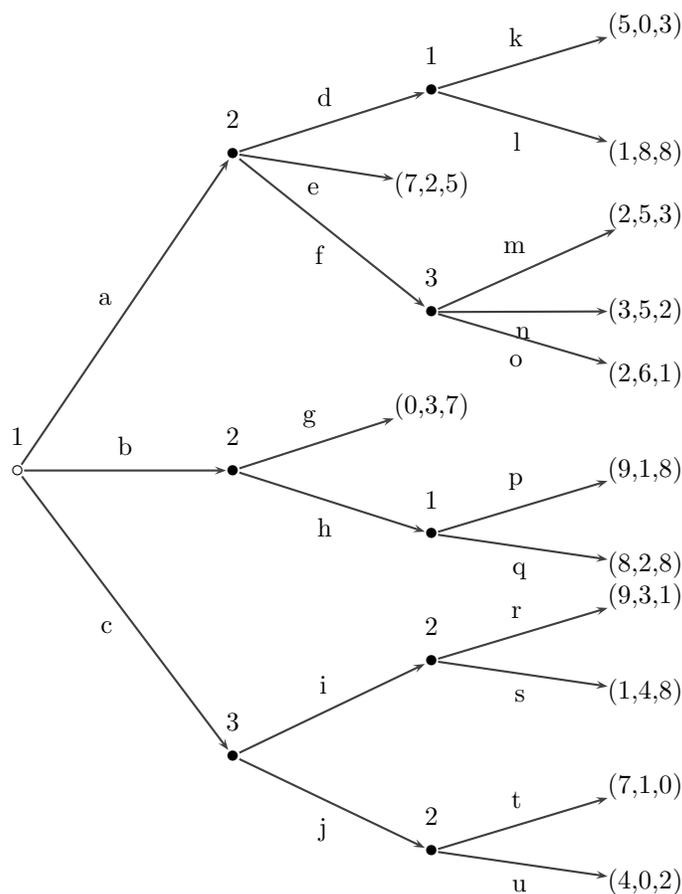
Question 2. Ce jeu comporte-t-il un/des équilibre(s) de Nash ? Si oui lequel/lesquels ?

Question 3. Quels sont les profils qui en dominent d'autres au sens de Pareto ?

Question 4. Quel est le niveau de sécurité de chacun des joueurs ?

Question 5. Donnez le jeu sous forme extensive correspondant.

Exercice 5 : Jeu sous forme extensive (4 pts)



Question 1. Résoudre ce jeu.

Question 2. Donnez l'ensemble des équilibres de Nash parfaits en sous-jeu de ce jeu.