Table des matières

Préliminaires

Ensembles, relations et pré-ordres

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Une relation binaire sur E est un sous-ensemble de $E \times E$, *i.e.* un ensemble de couples (x,y) avec $x,y \in E$.

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur $E \times E$, est dite :

- *réflexive* si pour tout x de E, $x\mathcal{R}x$.
- *transitive* si pour tout x,y,z de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.
- *totale* si pour tout x,y de E, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
- *symétrique* si pour tout x,y de E, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$.
- *anti-symétrique* si pour tout x,y de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$.
- *modulaire* si pour tout x,y,z de E, si $x\not\mathcal{R}y$, $y\not\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}x$, alors $z\mathcal{R}y$.
- *acyclique* si pour tout $x_1, \ldots ,x_n$ de E, on n'a pas $x_1 \ \mathcal{R} \ x_2 \ \mathcal{R} \ldots \mathcal{R} \ x_n \ \mathcal{R} \ x_1$.

Une relation qui n'est pas totale est dite *partielle*. Un *pré-ordre* est une relation réflexive et transitive sur $E \times E$. Une *relation d'équivalence* est une relation réflexive, transitive et symétrique sur $E \times E$. Un *ordre* est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive sur $E \times E$. Un *ordre strict* est une relation irréflexive et transitive sur $E \times E$. Soit un pré-ordre $\leq$ défini sur $E \times E$, on définit l'ordre strict $<$ associé, comme $x < y$ si $x \leq y$ et $y \not\leq x$. On définit également la relation d'équivalence $\simeq$ induite par $\leq$, comme $x \simeq y$ si $x \leq y$ et $y \leq x$.

Soient un pré-ordre $\leq$ défini sur $E \times E$ et E' un sous-ensemble de E, on note $\min(E', \leq)$ l'ensemble des éléments minimaux de E' pour $\leq$, *i.e.* $\min(E', \leq) = \{x \in E' : \nexists y \in E' y < x\}$.

Un pré-ordre défini sur E est *bien fondé* si chaque sous-ensemble de E admet un élément minimal.

Logique

Soit $\mathcal{L}$ un langage comprenant un ensemble d'atomes $\mathcal{A} = \{A,B,C, \ldots\}$ et les connecteurs usuels $\neg$ (négation), $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\rightarrow$ (implication) et $\leftrightarrow$ (équivalence). $\perp$ dénote la contradiction et $\top$ la tautologie.

Nous utiliserons une opération de conséquence au sens de Tarski [Tar56] :

Définition 1 *Une* opération de conséquence *sur un langage $\mathcal{L}$ est une fonction $Cn : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$ vérifiant les conditions :*

1. $A \subseteq Cn(A)$ **(inclusion)**

2. *Si* $A \subseteq B$, *alors* $Cn(A) \subseteq Cn(B)$ **(monotonie)**
3. $Cn(A) = Cn(Cn(A))$ **(idempotence)**

Dans la suite du manuscrit on supposera que la relation de conséquence Cn vérifie également les propriétés suivantes :

1. Cn contient les conséquences logiques classiques **(supraclassicalité)**
2. Si $\alpha \in Cn(A)$ alors il existe A' un sous-ensemble fini de A tel que $\alpha \in Cn(A')$ **(compacité)**
3. $\beta \in Cn(A \cup \{\alpha\})$ si et seulement si $\alpha \to \beta \in Cn(A)$ **(déduction)**

On définit alors $A \vdash \alpha$ comme une notation pour $\alpha \in Cn(A)$.

Définition 2 *Une* base de connaissance K *est un ensemble de propositions de* $\mathcal{L}$. *Une base de connaissance est dite* close déductivement *si* $K = Cn(K)$.

Lorsque cela ne sera pas précisé on supposera que les bases de connaissance sont closes déductivement. Dans ce cas les bases de connaissance sont également appelées *théories.* On notera $K_\perp$ la base de connaissance triviale, *i.e.* celle contenant toutes les formules et $K_\top$ la base de connaissance qui ne contient que les tautologies. $\mathcal{K}_\mathcal{L}$ représente l'ensemble des bases de connaissance définies sur $\mathcal{L}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on note simplement $\mathcal{K}$.

Lorsque l'on travaille en logique propositionnelle finie, une base de connaissance K est équivalente à la formule φ qui est la conjonction des formules de K.

On appelle *interprétation* une fonction de $\mathcal{A}$ dans $\{0,1\}$. On notera $\mathcal{W}$ l'ensemble des interprétations de $\mathcal{L}$.

Un *modèle* I d'une formule propositionnelle φ est une interprétation qui rend φ Vrai au sens usuel, ce que l'on note $I \models \varphi$. Un *contre-modèle* d'une formule est une interprétation qui n'est pas modèle de cette formule. On note $Mod(\varphi)$ l'ensemble des modèles de φ, *i.e.* $Mod(\varphi) = \{I \in \mathcal{W} : I \models \varphi\}$. Une formule est *consistante* si elle admet au moins un modèle. Soit M un ensemble d'interprétations, on note $\varphi_{\{M\}}$ la formule (à équivalence logique près) qui a M comme ensemble de modèles.

Première partie

Révision

Chapitre 1

Le cadre AGM

> Pour atteindre la connaissance, ajoute des choses chaque jour.
> Pour atteindre la sagesse, retire des choses chaque jour.
> (Lao Tzu, Tao-te Ching, ch. 48)

La question soulevée par la révision de la connaissance est simple : étant données une connaissance du monde et une nouvelle information, comment incorporer cette nouvelle information dans nos connaissances tout en restant cohérent ? Si la question est simple, la réponse l'est moins...

L'étude de la dynamique des connaissances est nécessaire pour pouvoir utiliser et gérer des connaissances qui par nature sont incertaines et/ou incomplètes.

Le premier système utilisant de telles connaissances que l'on peut citer n'est autre que l'être humain ! Dans la vie de tous les jours, nous utilisons souvent la révision pour "corriger" notre connaissance du monde. Cela est dû au fait qu'en l'absence d'informations précises, nous nous reposons sur des hypothèses qui sont souvent contrariées par des évidences issues de notre observation du monde réel. En fait, la révision est un mécanisme à part entière de nos processus cognitifs.

En informatique ce problème est également de première importance dans tous les domaines où il est nécessaire de raisonner en présence d'incertitudes et, principalement, dans les domaines des bases de données et de l'intelligence artificielle.

En intelligence artificielle, le problème de la révision de la connaissance est fortement lié à celui de l'inférence non monotone. C'est un point clef pour définir des systèmes capables de raisonner en présence d'informations incomplètes et de mener des raisonnements de sens commun.

Dans le cadre logique c'est le paradigme AGM qui s'est imposé. Au lieu de proposer des opérateurs particuliers comme cela a été le cas dans de nombreux travaux [FUV83, FKUV86, Bor85, Dal88a, Win88], Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors et David Makinson ont proposé un ensemble de propriétés logiques que les opérateurs de révision "sensés" doivent satisfaire. Ils ont également montré que les opérateurs satisfaisant ces propriétés pouvaient être construits à partir de méthodes de révision très naturelles. D'ailleurs, depuis, de nombreux théorèmes de représentation ont montré l'équivalence, ou tout au moins les rapports étroits, entre cette caractérisation logique et des méthodes de révision, ou d'autres domaines comme les relations d'inférence non monotones par exemple. C'est cette accumulation de résultats qui a renforcé la caractérisation logique en un véritable cadre de travail.

Bien sûr cette caractérisation n'est pas parfaite et ne peut être appliquée à tous les opérateurs de changement. De nombreuses critiques ont été adressées à l'encontre du cadre AGM. Ces critiques ne remettent pas en compte le cadre en lui-même, sa robustesse étant prouvée par les théorèmes de représentation. Mais elles suggèrent des adaptations ou des généralisations de ce cadre.

1.1 Expansion-Révision-Contraction

Nous allons présenter dans cette section le cadre AGM (Alchourrón, Gärdenfors, Makinson) [AGM85, Gär88] de la révision de la connaissance. Après avoir donné quelques définitions, nous nous intéresserons aux trois types d'opérateurs de changement de la connaissance, à savoir les opérateurs d'expansion, de révision et de contraction. Nous donnerons la caractérisation logique de chacune de ces familles au travers de propriétés logiques. Nous verrons enfin les relations étroites entre ces différents types d'opérateurs.

Les postulats AGM sont donnés sans grande exigence sur la nature des bases de connaissance, on suppose simplement que les bases de connaissance sont des ensembles de formules exprimées dans un certain langage et clos pour une relation de conséquence.

Etant données une base de connaissance K codant les connaissances d'un agent et une information A, il y a trois attitudes possibles pour K vis à vis de A :

- $A \in K$, *i.e.* l'information est dans la base : on dit que A est *acceptée*.
- $\neg A \in K$, *i.e.* la négation de l'information est dans la base : on dit que A est *refusée*.
- $A \notin K$ et $\neg A \notin K$, *i.e.* ni la nouvelle information, ni sa négation ne sont dans la base : on dit que A est *indéterminée* (ou *contingente*).

Gärdenfors [Gär88] définit alors les opérateurs de changement comme des changements d'attitude envers une information. Il y a donc 6 changements d'attitude possibles mais, pour des raisons de symétrie, ils se regroupent en trois catégories :

- lorsque l'on passe de A est indéterminée à A est acceptée ou A est refusée (*i.e.* $\neg A$ est acceptée), on effectue une *expansion*. Cela consiste à ajouter une information à la base de connaissance sans retirer aucune autre information.
- lorsque l'on passe de A est acceptée ou A est refusée à A est indéterminée, on effectue une *contraction*, c'est-à-dire que l'on "supprime" la connaissance à propos de A.
- enfin lorsque l'on passe de A est acceptée à A est refusée, ou symétriquement de A est refusée à A est acceptée, on effectue une révision : la croyance en A est totalement remise en question.

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont proposé une série de postulats qui caractérisent ces trois types d'opérateurs de changement de la connaissance. Ces postulats ont pour but de capturer les propriétés de rationalité que l'on peut attendre de ces changements et sont connus sous le nom de postulats AGM.

1.1.1 Expansion

Typiquement, l'expansion est l'opération qui permet d'ajouter une information à une base de connaissance lorsque celles-ci sont compatibles. Si K est la base de connaissance de départ, l'expansion de K par A est notée $K + A$. Un opérateur d'*expansion* est une fonction $+$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K+1) $K + A$ est une théorie **(clôture)**
(K+2) $A \in K + A$ **(succès)**
(K+3) $K \subseteq K + A$ **(inclusion)**
(K+4) Si $A \in K$, alors $K + A = K$ **(vacuité)**
(K+5) Si $K \subseteq H$, alors $K + A \subseteq H + A$ **(monotonie)**
(K+6) $K+A$ est la plus petite base de connaissance satisfaisant (K+1)-(K+5) **(minimalité)**

L'explication intuitive de ces axiomes est la suivante : (K+1) assure que le résultat de l'expansion est bien une théorie. (K+2) dit que la nouvelle information doit être vraie dans la nouvelle base de connaissance. La motivation du nom expansion peut être expliquée par (K+3) qui certifie que l'on garde toutes les informations de l'ancienne base. (K+4) dit que si la nouvelle information appartient déjà à la base de connaissance alors il n'y a rien à faire pour l'accepter. Le postulat (K+5) exprime la monotonie de l'expansion. Et le dernier postulat (K+6) exprime la minimalité du changement, c'est-à-dire qu'il s'assure que la nouvelle base de connaissance ne contient pas de connaissance non justifiée par l'ajout de la nouvelle information.

Trois conséquences intéressantes de ces postulats sont:

(1) $K + A = K + B$ ssi $B \in K + A$ et $A \in K + B$

Cette propriété exprime une caractérisation de l'équivalence entre deux résultats d'expansion. Si une information A est dans le résultat de l'expansion de la base de connaissance par B et symétriquement si B est une conséquence de l'expansion par A, alors les deux expansions donnent des bases équivalentes.

(2) $(K + A) + B = (K + B) + A$

La propriété (2) exprime la commutativité de l'expansion, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on incorpore les nouvelles informations n'influe pas sur le résultat final.

(3) Si $\neg A \in K$, alors $K + A = K_\perp$

La propriété (3) dit que si l'on effectue une expansion d'une base avec une information qui n'est pas cohérente avec elle, alors le résultat est la base triviale. Une autre remarque intéressante est que si l'on atteint la base triviale, il n'y a aucun moyen d'en sortir en utilisant l'expansion.

Il n'y a qu'un opérateur satisfaisant ces propriétés. En effet, un opérateur qui satisfait les postulats de l'expansion donne comme résultat une base de connaissance qui est l'ensemble des conséquences de la conjonction de la base de connaissance et de la nouvelle information :

Théorème 1 *La fonction d'expansion + satisfait les postulats (K+1)-(K+6) ssi* $K + A = Cn(K \cup A)$.

1.1.2 Révision

Lorsque la nouvelle information contredit la base de connaissance, on ne peut pas utiliser l'expansion pour incorporer celle-ci, sous peine de rendre la base de connaissance inconsistante. Il faut alors abandonner certaines connaissances pour maintenir la consistance de la base. Il est donc évident que ce type de changement ne sera pas monotone (au sens de (K+5)).

Les principales propriétés de rationalité que l'on peut attendre d'un opérateur de révision sont les suivantes :

- La première est évidemment que la nouvelle base de connaissance soit cohérente.
- La seconde est la primauté de la nouvelle information (*primacy of update*), c'est-à-dire que la nouvelle information doit être vraie dans la nouvelle base de connaissance.
- La troisième est la minimalité du changement, c'est-à-dire que la révision doit conserver le maximum de connaissances de l'ancienne base. Ce principe de conservation à été annoncé de la manière suivante dans [Har86] p. 46 :

  > *"When changing beliefs in response to new evidence, you should continue to believe as many of the old beliefs as possible."*

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont proposé une série de postulats qui tentent de capturer logiquement ces propriétés.

Un opérateur de *révision* $*$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui, à une base de connaissance K et une nouvelle information A, associe une nouvelle base de connaissance $K * A$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K*1) $K * A$ est une théorie **(clôture)**
(K*2) $A \in K * A$ **(succès)**
(K*3) $K * A \subseteq K + A$ **(inclusion)**
(K*4) Si $\neg A \notin K$, alors $K + A \subseteq K * A$ **(vacuité)**
(K*5) $K * A = K_\perp$ ssi $\vdash \neg A$ **(consistance)**
(K*6) Si $A \leftrightarrow B$, alors $K * A = K * B$ **(extensionalité)**
(K*7) $K * (A \wedge B) \subseteq (K * A) + B$ **(inclusion conjonctive)**
(K*8) Si $\neg B \notin K * A$, alors $(K * A) + B \subseteq K * (A \wedge B)$ **(vacuité conjonctive)**

L'interprétation de ces postulats est la suivante : (K*1) s'assure que le résultat de la révision est bien une théorie. (K*2) dit que la nouvelle information est vraie dans la nouvelle base de connaissance. Le postulat (K*3) implique que la révision par la nouvelle information ne peut pas ajouter de connaissance qui ne soit une conséquence de la nouvelle information et de la base de connaissance. Et les postulats (K*3) et (K*4) ensembles signifient que, lorsque la nouvelle information n'est pas contradictoire avec l'ancienne base de connaissance, alors la révision de la base de connaissance se résume à l'expansion de cette base. (K*5) exprime le fait que la seule façon d'arriver à une base inconsistante par une révision est de réviser par une information contradictoire. (K*6) dit que le résultat de la révision ne dépend pas de la syntaxe de la nouvelle information.

Ces six postulats sont les postulats de base pour les opérateurs de révision, les deux postulats (K*7) et (K*8) ont été appelés postulats supplémentaires par Gärdenfors et expriment le bon comportement des opérateurs de révision en terme de minimalité de changement. Ils assurent que la révision par une conjonction de deux informations revient à une révision par la première information et une expansion par la seconde dès que cela est possible (*i.e.* dès que la seconde information ne contredit aucune connaissance issue de la première révision).

Katsuno et Mendelzon [KM91b] ont proposé une formulation équivalente des postulats AGM lorsque les bases de connaissance sont exprimées dans un langage propositionnel fini.

Soient deux formules propositionnelles φ et μ, φ dénotant la base de connaissance et μ la nouvelle information. $\varphi \circ \mu$ dénote la formule résultat de la révision de φ par μ. L'opérateur $\circ$ est un opérateur de révision s'il vérifie les postulats suivants :

(R1) $\varphi \circ \mu \vdash \mu$
(R2) Si $\varphi \wedge \mu$ est consistant alors $\varphi \circ \mu \leftrightarrow \varphi \wedge \mu$
(R3) Si μ est consistant alors $\varphi \circ \mu$ est consistant
(R4) Si $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ et $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ alors $\varphi_1 \circ \mu_1 \leftrightarrow \varphi_2 \circ \mu_2$
(R5) $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi \vdash \varphi \circ (\mu \wedge \phi)$
(R6) Si $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi$ est consistant alors $\varphi \circ (\mu \wedge \phi) \vdash (\varphi \circ \mu) \wedge \phi$

Soit un opérateur de révision $*$ sur des théories et $\circ$ un opérateur de révision sur des bases de connaissance propositionnelles. Si $Cn(\varphi) = K$, on dit que l'opérateur $*$ correspond à l'opérateur $\circ$ si $K * A = Cn(\varphi \circ A)$.

Théorème 2 *Soit un opérateur de révision $*$ et son opérateur $\circ$ correspondant. Alors $*$ satisfait les postulats $(K * 1) - (K * 8)$ si et seulement si $\circ$ vérifie les postulats $(R1) - (R6)$.*

1.1.3 Contraction

On nomme contraction le type de changement intervenant lorsque l'on rétracte une information d'une base de connaissance mais qu'aucune nouvelle information n'est ajoutée. Typiquement, lors d'une contraction, on passe donc de l'attitude "A est acceptée" ou "A est refusée" à "A est indéterminée". On peut donner un exemple d'utilisation de la contraction lorsque l'on mène des raisonnements hypothétiques. On utilise l'expansion pour se rendre compte des conséquences qu'aurait tel ou tel fait sur nos connaissances. Puis on utilise la contraction pour retrouver la base de connaissance initiale.

Dans ce cas nous sommes confrontés aux mêmes exigences de minimalité de changement que pour la révision, c'est-à-dire que, lorsque l'on contracte par une information, on ne veut supprimer de la base de connaissance que ce qui est nécessaire pour ne plus impliquer l'information.

Un opérateur de *contraction* $\div$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$, qui rejette l'information A de la base de connaissance K et a comme résultat la base de connaissance $K \div A$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K÷1) $K \div A$ est une théorie **(clôture)**
(K÷2) $K \div A \subseteq K$ **(inclusion)**
(K÷3) Si $A \notin K$, alors $K \div A = K$ **(vacuité)**
(K÷4) Si $\nvdash A$, alors $A \notin K \div A$ **(succès)**

(K÷5) Si $A \in K$, alors $K \subseteq (K \div A) + A$ **(restauration)**
(K÷6) Si $A \leftrightarrow B$, alors $K \div A = K \div B$ **(préservation)**
(K÷7) $(K \div A) \cap (K \div B) \subseteq K \div (A \wedge B)$ **(intersection)**
(K÷8) Si $A \notin K \div (A \wedge B)$, alors $K \div (A \wedge B) \subseteq K \div A$ **(conjonction)**

(K÷1) assure que le résultat de la contraction est bien une théorie. (K÷2) garantit que lors de la contraction aucune nouvelle information n'est ajoutée à la base de connaissance. (K÷3) dit que si l'information A n'est pas acceptée par K, il n'y a rien à faire pour retirer A de K. Le postulat (K÷4) assure le succès de la contraction, c'est-à-dire que si A n'est pas une tautologie, alors la contraction réussira. Le postulat (K÷5) assure que la contraction de K par A suivie de l'expansion par A redonne la théorie K comme résultat (l'inclusion inverse de (K÷5) étant une conséquence de (K÷1)-(K÷4)). (K÷6) dit que le résultat de la contraction ne dépend pas de la syntaxe de l'information.

Ces six postulats sont les postulats de base pour les opérateurs de contraction. (K÷7) et (K÷8) sont appelés postulats supplémentaires pour la contraction. (K÷7) dit que si une information est à la fois dans la contraction par A et dans la contraction par B alors elle doit être dans la contraction par la conjonction $A \wedge B$. (K÷8) exprime la minimalité du changement pour la conjonction.

1.1.4 Identités

L'expansion permet d'ajouter une nouvelle information à la base de connaissance, la contraction permet de retirer une information de la base, et la révision permet de modifier une information. Il semblerait alors possible d'exprimer une révision comme étant une contraction suivie d'une expansion [Gär88] :

$K * A = (K \div \neg A) + A$ **(Identité de Levi)**

On a donc une définition de la révision en fonction de la contraction et de l'expansion. Le théorème suivant montre que les opérateurs définis grâce à l'identité de Levi sont bien des opérateurs de révision.

Théorème 3 *Si l'opérateur de contraction ÷ satisfait (K÷1)-(K÷4) et (K÷6) et l'opérateur d'expansion + satisfait (K+1)-(K+6), alors l'opérateur de révision ∗ défini par l'identité de Levi satisfait (K*1)-(K*6). De plus, si (K÷7) est satisfait, alors (K*7) est satisfait pour la révision ainsi définie, et si (K÷8) est satisfait, alors (K*8) est satisfait pour la révision ainsi définie.*

Remarque 1 *Il est important de noter que (K÷5) n'intervient pas dans ce résultat. En effet ce postulat,* restauration, *est le plus critiqué en ce qui concerne la contraction (cf section 1.3.1). Mais les réserves émises sur ce postulat n'affectent donc en rien les opérateurs de révision.*

De la même manière, on a la correspondance inverse, c'est-à-dire que si on dispose d'un opérateur de révision, il est possible de définir un opérateur de contraction. Cette définition est connue sous le nom d'identité de Harper.

$K \div A = K \cap (K * \neg A)$ **(Identité de Harper)**

L'idée assez naturelle de cette identité est que les informations présentes dans la contraction de K par A sont celles n'ayant rien à voir avec la véracité de A, *i.e.* celles présentes à la fois dans K et dans la révision de K par $\neg A$.

Théorème 4 *Si l'opérateur de révision $*$ satisfait (K*1)-(K*6), alors l'opérateur de contraction $\div$ définie par l'identité de Harper satisfait (K$\div$1)-(K$\div$6). De plus, si (K*7) est satisfait, alors (K$\div$7) est satisfait pour la contraction ainsi définie, et si (K*8) est satisfait, alors (K$\div$8) est satisfait pour la contraction ainsi définie.*

Le point intéressant à remarquer est que, bien que les postulats caractérisant ces changements soient indépendants (on ne se réfère pas à la contraction dans les postulats de la révision et vice-versa), il existe une véritable correspondance entre révision et contraction.

Il est donc possible de définir un opérateur de révision à partir d'un opérateur de contraction et vice-versa. On peut donc étudier indifféremment les propriétés de l'un ou de l'autre.

1.2 Théorèmes de représentation

La caractérisation de la révision (et de la contraction) donnée à la section précédente n'est qu'un ensemble de propriétés logiques qui tentent de capturer les conditions de rationalité que l'on peut attendre de ces opérateurs. En tant que telle, cette caractérisation n'est donc qu'un ensemble de postulats et sa justification peut donc sembler un peu faible. Pourquoi cet ensemble de postulats se justifierait-il plus qu'un autre?

Il se trouve que les opérateurs obéissant à la caractérisation donnée par C. Alchourrón, P. Gärdenfors et D. Makinson correspondent à des méthodes de révision (contraction) naturelles. Ces méthodes sont basées sur des "ordres de préférences" sur les croyances, dénotant qu'aux yeux de l'agent une proposition est plus crédible qu'une autre. Et ce sont les croyances les plus crédibles qui sont sélectionnées comme nouvelle base de connaissance. La différence entre les opérateurs réside dans la "métrique" choisie pour construire l'ordre de préférences.

Ces résultats d'équivalence entre opérateurs de révision AGM et ces méthodes de révision, donnent des définitions *constructives* des opérateurs de révision et c'est pour cela qu'on les nomme théorèmes de représentation.

Les trois premières méthodes présentées, les *fonctions de contraction par intersection partielle*, les *enracinements épistémiques* et la *contraction sûre*, reposent sur l'existence d'un pré-ordre entre formules qui marque la crédibilité relative de celles-ci et sert à déterminer les informations les moins importantes de la base de connaissance qui pourront être éliminées pour maintenir la cohérence lors de la révision.

Ensuite une méthode de révision basée sur un pré-ordre sur les mondes possibles (*Assignement Fidèle* ou *système de sphères*) exprime la révision comme une sélection des modèles minimaux de la nouvelle information suivant cette mesure de confiance sur les mondes.

Enfin, les deux derniers résultats ne sont pas des définitions d'opérateurs de révision mais ils montrent le rapport étroit entre le domaine de la révision AGM et d'autres domaines "indépendants".

Premièrement il existe une correspondance entre opérateurs de révision et certaines relations d'inférence non monotones. Cette correspondance a fait dire à Gärdenfors que relations d'inférence et opérateurs de révision n'étaient que les deux faces d'une même pièce de monnaie.

Ensuite on peut montrer également le lien étroit entre opérateurs de révision et la logique possibiliste. Cette logique permet de raisonner qualitativement en présence d'incertitude et/ou d'imprécision.

C'est cet ensemble de correspondances, illustré figure 1.1, entre révision AGM, diverses méthodes de révision et d'autres domaines du raisonnement en présence d'incertitude qui montre la robustesse de cette caractérisation logique. Puisque remettre en cause la caractérisation proposée par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson revient alors à remettre en cause la rationalité de ces différentes méthodes et le bien fondé des domaines connexes.

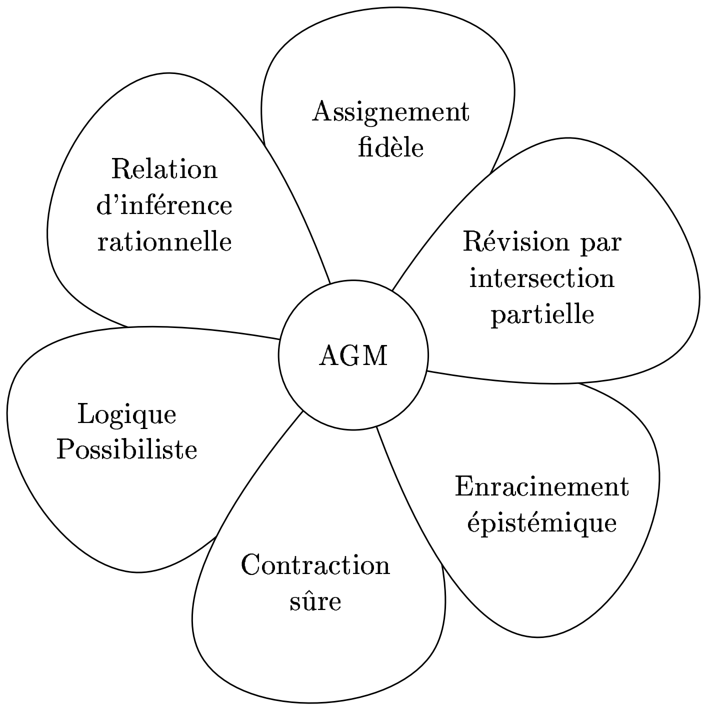

FIG. 1.1 – *Théorèmes de représentation*

1.2.1 Contraction par intersection partielle

Nous allons définir dans cette section des opérateurs de contraction à partir d'ensembles maximaux consistants de formules.

On définit d'abord l'ensemble $K \perp A$, qui est l'ensemble des sous-théories maximales de K qui n'impliquent pas A.

Définition 3 *Soient une théorie K et une proposition A. $K \perp A$ est l'ensemble de tous les K'*

qui vérifient :

1. $K' \subseteq K$
2. $K' \nvdash A$
3. *Si* $K' \subsetneq K'' \subseteq K$ *alors* $K'' \vdash A$

Une façon naturelle de définir la contraction est alors de considérer l'intersection de toutes les sous-théories maximales de K qui n'impliquent pas A.

Définition 4 *La fonction de* contraction par intersection totale *(full meet contraction)* $\div_f$ *est définie comme*

$$K \div_f A = \begin{cases} Cn(\bigcap(K \perp A)) & \text{si } K \perp A \text{ n'est pas vide, et} \\ K \div_f A = K & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème est que cette contraction est trop drastique : lorsque l'on effectue une contraction par A, le résultat est l'ensemble des formules de K qui sont conséquences logiques de $\neg A$. Cela pose un problème pour la révision puisque l'on a le résultat suivant [AM82] :

Théorème 5 *Si une fonction de révision* $*$ *est définie à partir d'une fonction de contraction par intersection totale au moyen de l'identité de Levi, alors pour chaque proposition* A *telle que* $\neg A \in K$, *on a* $K * A = Cn(A)$.

Ce résultat indique donc que, pour chaque révision sévère (*i.e.* par une information inconsistante avec la base de connaissance) que l'on effectuera, cela "effacera" l'ancienne connaissance. Ce résultat n'est donc pas intuitivement suffisant pour l'opérateur de révision correspondant par l'identité de Levi. La fonction de contraction par intersection totale doit plutôt être considérée comme une limite inférieure pour les fonctions de contraction. C'est-à-dire que chaque opérateur de contraction raisonnable doit contenir le résultat de cette dernière.

Une solution pour obtenir des opérateurs moins drastiques est de ne pas considérer l'ensemble de toutes les sous-théories maximales, mais simplement certaines d'entre elles. Une fonction de sélection choisit alors certaines de ces sous-théories. Intuitivement, il faut interpréter cette sélection comme le choix des "meilleures" sous-théories pour un certain critère. Ceci motive les définitions suivantes :

Définition 5 *Soit une théorie* K, *une* fonction de sélection γ *est une fonction qui associe à chaque proposition* A *l'ensemble* $\gamma(K \perp A)$, *qui est un sous-ensemble non vide de* $K \perp A$ *si celui-ci n'est pas vide et* $\gamma(K \perp A) = \{K\}$ *sinon.*

Définition 6 *Une fonction de* contraction par intersection partielle *(partial meet contraction)* $\div$ *est définie comme*

$$K \div A = Cn(\bigcap \gamma(K \perp A))$$

On peut noter que la fonction de contraction par intersection totale est un cas particulier de fonction de contraction par intersection partielle (lorsque la fonction de sélection garde $K \perp A$ en entier). L'autre cas limite, lorsque la fonction de sélection ne garde qu'un seul élément de l'ensemble $K \perp A$, est appelé fonction de contraction à *choix maximal* (*maxichoice*) [AM82].

Les résultats suivants montrent la correspondance entre opérateurs de contraction par intersection partielle et la caractérisation AGM [AGM85].

Théorème 6 *Soit un opérateur $\div$, $\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle si et seulement si $\div$ satisfait les postulats (K$\div$1)-(K$\div$6).*

Définition 7 *Une fonction de sélection γ est* relationnelle *si et seulement si pour tout K il existe une relation $\leq$ sur K^2 telle que*

$$\gamma(K\perp A) = \{K' \in K\perp A \mid K' \leq K'', \forall\ K'' \in K\perp A\}$$

Si $\leq$ est une relation transitive alors γ est dite relationnelle transitive *(transitively relational).*

Une fonction de contraction par intersection partielle est relationnelle (respectivement relationnelle transitive) si et seulement si elle est définie à partir d'une fonction de sélection qui est relationnelle (respectivement relationnelle transitive).

Théorème 7 *Soit un opérateur $\div$, $\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle relationnelle transitive si et seulement si $\div$ satisfait les postulats (K$\div$1)-(K$\div$8).*

Un résultat intéressant est que dans ce cas la fonction est totale (Une fonction de sélection est *totale* si elle est définie à partir d'une relation totale).

Théorème 8 *Soit une fonction de contraction par intersection partielle $\div$, $\div$ est relationnelle transitive si et seulement si elle est transitive et totale.*

Le fait qu'un opérateur de contraction AGM (et donc par dualité un opérateur de révision AGM) corresponde à une famille de pré-ordres totaux, résultat qui transparaît au travers des théorèmes ci-dessus, est le point clef qui permet la définition des théorèmes de représentation présentés dans cette section. En effet, ces théorèmes montrent que les opérateurs vérifiant les postulats AGM correspondent à des méthodes de changement basés sur les préférences (les pré-ordres totaux) de l'agent.

1.2.2 Enracinements épistémiques

La principale préoccupation, lorsque l'on effectue une révision (ou une contraction), est de sélectionner les formules que l'on peut enlever de la base de connaissance. Un principe évident de rationalité nous demande de retirer les formules les moins importantes. Il faut donc construire une sorte d'ordre entre les formules suivant leur importance vis à vis de la base. On appelle un tel ordre enracinement épistémique (epistemic entrenchment). En fait, on peut voir la base de connaissance comme un ensemble de "couches", plus une formule appartient à une couche profonde, plus elle est importante. Lorsque l'on a un changement à effectuer à l'intérieur de la base, ce sont les formules appartenant aux couches les plus superficielles que l'on enlève de la base.

Soient deux formules A et B, la notation $A \leq B$ signifie "B est au moins aussi enraciné que A". $\leq$ est un *enracinement épistémique* s'il satisfait les propriétés suivantes [Gär88] :

(EE1) Si $A \leq B$ et $B \leq C$, alors $A \leq C$ **(transitivité)**
(EE2) Si $A \vdash B$, alors $A \leq B$ **(domination)**

(EE3) $A \leq A \wedge B$ ou $B \leq A \wedge B$ **(conjonction)**
(EE4) Si $K \neq K_\perp$, $A \notin K$ ssi $\forall B\ A \leq B$ **(minimalité)**
(EE5) Si $B \leq A\ \forall B$, alors $\vdash A$ **(maximalité)**

(EE1) demande que la relation d'enracinement épistémique soit transitive. (EE2) dit que si une formule est logiquement plus forte qu'une autre alors elle est moins retranchée. (EE3) assure que pour abandonner la formule $A \wedge B$, il suffit d'abandonner A ou B. (EE4) exprime que les minimaux pour la relation sont les formules qui ne sont pas dans K. Inversement, les formules les plus retranchées sont les tautologies, ce que dit (EE5).

Un enracinement épistémique correspond à un opérateur de contraction [Gär88] :

Théorème 9 *Une fonction de contraction* $\div$ *satisfait* $(K \div 1) - (K \div 8)$ *si et seulement si il existe* $\leq$ *satisfaisant (EE1)-(EE5), où* $B \leq A$ *ssi* $B \notin K \div A \wedge B$.

Ce qui, grâce à l'identité de Levi, donne une équivalence entre enracinements épistémiques et opérateurs de révision. De manière plus constructive, on peut définir un opérateur de révision à partir d'un enracinement épistémique de la façon suivante :

Théorème 10 *Soit un enracinement épistémique* $\leq$. *L'opérateur* $*$ *défini par*

$$B \in K * A \text{ ssi soit } (A \to \neg B) < (A \to B), \text{ soit } \vdash \neg A$$

est un opérateur de révision AGM.

1.2.3 Contraction sûre

La méthode de contraction sûre a été proposée par Alchourrón et Makinson [AM85], et elle est basée sur la notion de sécurité des connaissances. Intuitivement, une connaissance est en sécurité lors d'une contraction si elle ne peut être blâmée d'impliquer l'information par laquelle on effectue la contraction.

On définit tout d'abord ce qu'est une sous-théorie minimale de K impliquant A.

Définition 8 *Un ensemble* K' *est une* sous-théorie minimale *de* K *impliquant* A *si et seulement si*

i. $K' \subseteq K$
ii. $K' \vdash A$
iii. Si $K'' \subsetneq K'$, *alors* $K'' \nvdash A$

Etant donnée une théorie K, on définit une hiérarchie sur les éléments de K à l'aide d'une relation acyclique :

Définition 9 *Etant donnée une relation acyclique* $<$ *sur une théorie* K, *un élément* B *est en sécurité (safe) vis à vis de* A *si et seulement si* B *n'est pas un élément minimal (pour* $<$*) d'une sous-théorie minimale de* K *qui implique* A.

Un élément B de K est en sécurité vis à vis de A s'il ne peut être blâmé d'impliquer A, c'est-à-dire qu'étant donnée une sous-théorie minimale de K impliquant A, soit cet élément n'appartient pas à cette sous-théorie, soit il y a un élément C de cette sous-théorie qui est plus "blâmable", *i.e.* $C < B$.

L'ensemble des éléments de K qui sont en sécurité vis à vis de A sont notés K/A.

Définition 10 *La fonction de* contraction sûre *(safe contraction) d'une théorie K, étant donnée une hiérarchie $<$, est l'ensemble des conséquences de K/A, i.e. $K \div A = Cn(K/A)$.*

Théorème 11 *Une fonction de contraction sûre satisfait les postulats (K÷1)-(K÷6).*

Nous n'avons pour l'instant pas exigé grand chose de la relation $<$. On peut se demander s'il est possible de satisfaire (K÷7) et (K÷8) en augmentant les conditions sur la relation $<$.

Nous allons définir quelques propriétés sur la relation $<$. Les deux premières disent en quelque sorte que la relation est "compatible" avec la relation de conséquence. La dernière est une version faible de la propriété de totalité.

Définition 11 *On dit que $<$* continue $\vdash$ vers le haut *(continues up) sur la théorie K si et seulement si pour tout A,B,$C \in K$, si $A < B$ et $B \vdash C$, alors $A < C$.*

On dit que $<$ continue $\vdash$ vers le bas *(continues down) sur la théorie K si et seulement si pour tout A,B,$C \in K$, si $A \vdash B$ et $B < C$, alors $A < C$.*

On dit que $<$ est virtuellement totale *(virtually connected) sur la théorie K si et seulement si pour tout A,B,$C \in K$, si $A < B$, alors $A < C$ ou $C < B$.*

Théorème 12 *Soit une théorie K. Une fonction de contraction sûre définie à partir d'une hiérarchie $<$ qui continue $\vdash$ vers le haut (ou vers le bas) sur K satisfait (K÷7).*

Théorème 13 *Soit une théorie K. Une fonction de contraction sûre définie à partir d'une hiérarchie $<$ qui est virtuellement totale et qui continue $\vdash$ vers le haut et vers le bas sur K satisfait (K÷8).*

Alchourrón et Makinson [AM86] ont donné un théorème de représentation pour ces opérateurs dans le cas fini.

Théorème 14 *Soit une théorie K. $\div$ est une fonction de contraction sûre définie à partir d'une hiérarchie $<$ qui continue $\vdash$ vers le haut et vers le bas sur K si et seulement si $\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle relationnelle sur K.*

Théorème 15 *Soit une théorie K. $\div$ est une fonction de contraction sûre définie à partir d'une hiérarchie $<$ qui est virtuellement totale et qui continue $\vdash$ vers le haut et vers le bas sur K si et seulement si $\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle relationnelle transitive sur K.*

1.2.4 Assignement fidèle et système de sphères

Dans les sections précédentes, les relations de préférences associées aux opérateurs de révision à travers les théorèmes de représentation étaient des pré-ordres sur les formules (ou ensembles de formules). Katsuno et Mendelzon [KM91b] ont montré que les opérateurs de révision correspondaient également à des pré-ordres sur les interprétations. Cette idée peut

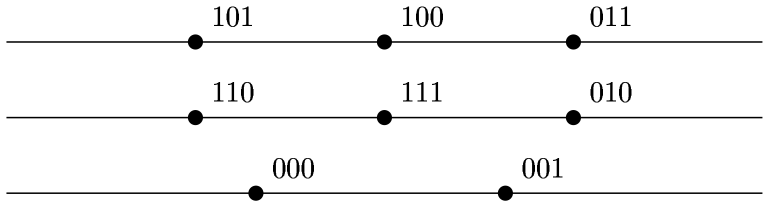

FIG. 1.2 – *Exemple de pré-ordre associé à φ*

être attribuée à Grove [Gro88] qui, avec son système de sphères, avait donné une sémantique similaire aux opérateurs de révision.

La proposition de Katsuno et Mendelzon a été faite dans le cadre propositionnel fini, mais peut être étendue à toutes bases de connaissance, puisqu'elle peut être vue comme un cas particulier du système de Sphères de Grove (*cf* [Gro88]).

Définition 12 *Un* assignement fidèle *est une fonction qui associe à chaque base de connaissance φ un pré-ordre $\leq_\varphi$ sur les interprétations tel que :*

1. *Si $I \models \varphi$ et $J \models \varphi$, alors $I \simeq_\varphi J$*
2. *Si $I \models \varphi$ et $J \not\models \varphi$, alors $I <_\varphi J$*
3. *Si $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, alors $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$*

C'est-à-dire que les modèles de φ sont tous équivalents pour l'ordre associé et sont strictement préférés aux contre-modèles.

Intuitivement, l'ordre associé à une base de connaissance représente l'état épistémique de l'agent, c'est-à-dire ses connaissances (les modèles de la base) et ses croyances (préférences). Plus une interprétation est petite pour l'ordre, plus elle est préférée par l'agent, c'est-à-dire plus l'agent la considère crédible.

Lorsque l'on effectue une révision, ce sont alors les interprétations de la nouvelle information les plus crédibles pour l'état épistémique courant qui forment la nouvelle base de connaissance. Ceci est décrit formellement dans le théorème de représentation suivant :

Théorème 16 *Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats (R1)-(R6) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de connaissance φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ tel que $Mod(\varphi \circ \mu) = \min(Mod(\mu), \leq_\varphi)$.*

Supposons que l'on travaille avec un langage composé de trois variables propositionnelles a,b,c considérées dans cet ordre pour les valuations. On notera 100 l'interprétation (1,0,0), c'est-à-dire celle qui rend a à Vrai et b et c à Faux. Soient I et J deux interprétations. L'interprétation I est plus petite que J pour le pré-ordre associé à la base de connaissance φ (*i.e.* $I <_\varphi J$) si elle apparaît à un niveau inférieur. I et J sont équivalentes pour φ ($I \simeq_\varphi J$) si elles apparaissent à un même niveau. Considérons par exemple le pré-ordre de la figure 1.2.4. Ce pré-ordre est associé à la base de connaissance qui a comme modèles (0,0,0) et (0,0,1), c'est-à-dire à la formule (à équivalence logique près) $\varphi = \neg a \wedge \neg b$.

Ce pré-ordre représente les préférences de l'agent, puisque ici (0,1,0) par exemple apparaît à un niveau inférieur que (0,1,1), ce qui peut-être interprété comme le fait que l'agent trouve (0,1,0) plus crédible que (0,1,1) au vu de ses connaissances actuelles.

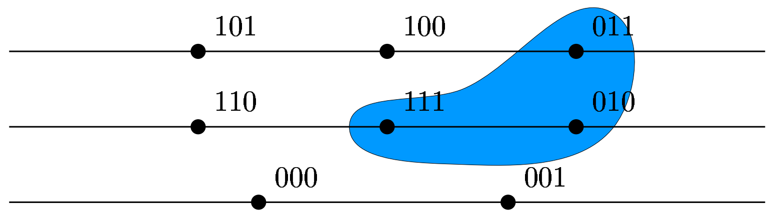

FIG. 1.3 – *Révision de φ par μ*

Supposons que l'on révise φ par $\mu = \varphi_{\{(0,1,1),(0,1,0),(1,1,1)\}}$, comme représenté dans la figure 1.2.4, le résultat de la révision est, d'après le théorème de représentation, la formule (à équivalence logique près) dont l'ensemble des modèles est l'ensemble des modèles minimaux de la nouvelle information pour le pré-ordre associé à φ, donc ici $\varphi \circ \varphi_{\{(0,1,1),(0,1,0),(1,1,1)\}} = \varphi_{\{(0,1,0),(1,1,1)\}}$.

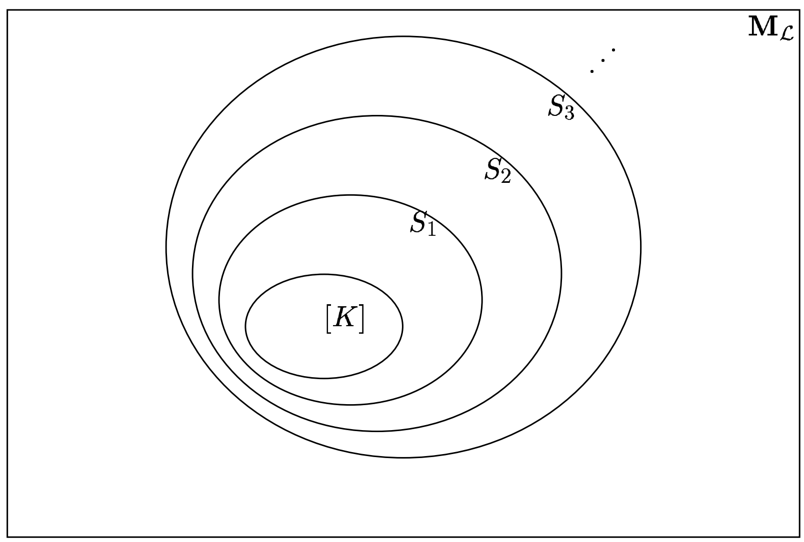

FIG. 1.4 – *Système de sphères centré sur $[K]$*

Grove a donné une sémantique similaire aux opérateurs de révision [Gro88] en termes de système de sphères sur les mondes possibles.

On appelle *monde possible* un sous-ensemble maximal consistant du langage (ce qui, dans le cas fini, s'identifie donc aux interprétations) et on note $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des mondes possibles du langage $\mathcal{L}$.

Une base de connaissance peut alors être représentée par l'ensemble des mondes possibles $[K] \subseteq \mathbf{M}_{\mathcal{L}}$ qui contiennent toutes les formules de K. Plus formellement :

Définition 13 *Soit une base de connaissance K. Si $K = K_{\perp}$ alors $[K] = \emptyset$, sinon*

$$[K] = \{M \in \mathbf{M}_{\mathcal{L}} : K \subseteq M\}$$

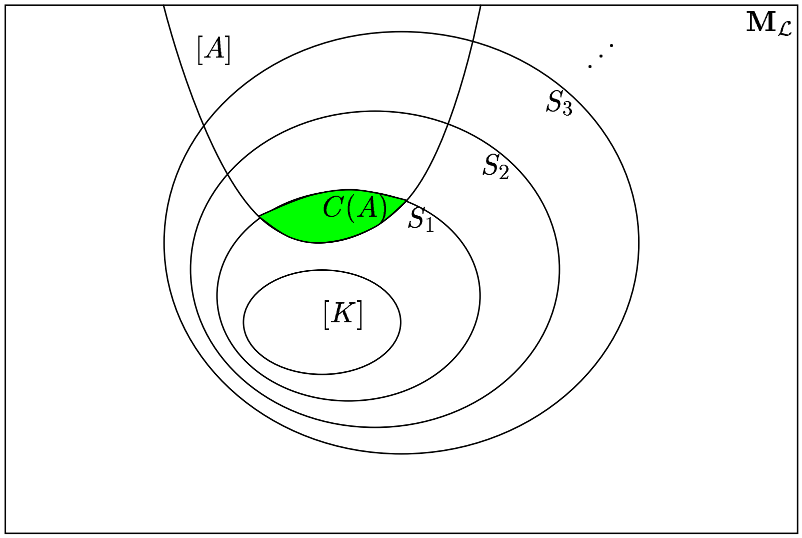

FIG. 1.5 – *Système de sphères centré sur* $[K]$ *: Révision par* A

Ceci donne une véritable correspondance entre bases de connaissance et sous-ensembles de $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}$ puisque l'on peut également, à tout sous-ensemble S de $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}$ associer une base K_S composée de l'ensemble des formules présentes dans tous les mondes possibles de S : $K_S = \bigcap\{M : M \in S\}$.

Grove s'intéresse alors à un système de sphères centré sur $[K]$. Cette construction est inspirée de la sémantique proposée par Lewis pour les conditionnels [Lew73].

Définition 14 *Un* système de sphères centré sur $[K]$ *est une collection de sous-ensembles* $\mathbf{S}$ *de* $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}$ *qui vérifient les conditions suivantes :*

- **(S1)** *Si* $S, S' \in \mathbf{S}$, *alors* $S \subseteq S'$ *ou* $S' \subseteq S$
- **(S2)** $[K] \in \mathbf{S}$
- **(S3)** *Si* $S \in \mathbf{S}$, *alors* $[K] \subseteq S$
- **(S4)** $\mathbf{M}_{\mathcal{L}} \in \mathbf{S}$
- **(S5)** *Si* A *est une formule et si* $[A]$ *intersecte une sphère de* $\mathbf{S}$, *alors il existe une sphère minimale qui intersecte* $[A]$

La condition (S1) dit que $\mathbf{S}$ est totalement ordonné par $\subseteq$. Les conditions (S2) et (S3) disent que $[K]$ est le plus petit élément de $\mathbf{S}$ (pour $\subseteq$). (S4) assure que le plus grand élément de $\mathbf{S}$ est l'ensemble de tous les mondes possibles. (S5) dit que si une sphère $[A]$ intersecte une sphère de $\mathbf{S}$ (ce qui arrive dès que $[A] \neq \emptyset$) alors il existe une sphère, notée S_A, intersectant $[A]$ et plus petite que toutes les sphères intersectant $[A]$. On note alors $C(A) = [A] \cap S_A$ les mondes possibles de cette sphère minimale satisfaisant A, c'est-à-dire les mondes les plus proches de $[K]$. Si $A = \perp$, alors $[A] = \emptyset$ et $C(A) = \mathbf{M}_{\mathcal{L}}$.

L'ensemble des mondes possibles $C(A)$ est alors le résultat de la révision de K par A comme le montre le théorème suivant :

Théorème 17 *Soit une base de connaissance* K. *Il existe un système de sphères* $\mathbf{S}$ *centré sur* $[K]$ *tel que pour toute formule* A, $K * A = K_{C(A)}$ *si et seulement si* $*$ *est un opérateur de révision satisfaisant* $(K * 1) - (K * 8)$.

Ce théorème de représentation peut donc être vu comme une généralisation du théorème de Katsuno et Mendelzon.

1.2.5 Révision et relations d'inférence

Nous allons voir dans cette section que le point commun entre opérateurs de révision et relations d'inférence non monotones ne se limite pas seulement au partage de cette propriété de non monotonie, mais qu'il existe une véritable correspondance entre ces opérateurs et les (bonnes) relations d'inférence. Comme l'a fait remarquer Gärdenfors [Gär90] :

> *"Belief revision and nonmonotonic logic are two sides of the same coin."*

Etudier les relations d'inférence permet donc de trouver des résultats sur les opérateurs de révision et vice-versa.

Relations d'inférence

La logique classique n'est pas adéquate pour modéliser le raisonnement de sens commun. Le problème réside en sa monotonie. De nombreuses logiques, affaiblissements ou surcharges de la logique classique, ont été proposées pour pallier ce "défaut". Ces logiques ont donc été regroupées sous le nom de logiques non monotones. Mais le fait de ne pas satisfaire la propriété de monotonie ne suffit pas à caractériser une logique, et les logiques existantes sont loin d'avoir toutes le même comportement. On a donc étudié les propriétés que l'on pouvait attendre de ces différentes logiques, permettant ainsi d'avoir une catégorisation plus fine. Ces propriétés sont les suivantes [KLM90, LM92, Mak94] :

Définition 15 *Une relation $\mid\!\sim$ est dite préférentielle si elle satisfait les six propriétés suivantes :*

$$\textit{REF}\quad \frac{}{\alpha \mid\!\sim \alpha} \qquad\qquad \textit{LLE}\quad \frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma}{\gamma \mid\!\sim \beta}$$

$$\textit{RW}\quad \frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad\qquad \textit{AND}\quad \frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma}$$

$$\textit{OR}\quad \frac{\alpha \mid\!\sim \gamma \quad \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad\qquad \textit{CM}\quad \frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \gamma \mid\!\sim \beta}$$

Les règles ci-dessus sont la réflexivité (REF), l'équivalence logique à gauche (LLE), l'affaiblissement à droite (RW), le et (AND), le ou (OR), et la monotonie prudente (CM). Ces six règles sont également connues sous le nom de système P.

Définition 16 *Une relation $\mid\!\sim$ est dite rationnelle si elle est préférentielle et satisfait la propriété suivante (monotonie rationnelle) :*

$$\textit{RM}\quad \frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \alpha \not\mid\!\sim \neg\gamma}{\alpha \wedge \gamma \mid\!\sim \beta}$$

Il existe également des propriétés plus fortes que celle de monotonie rationnelle et moins forte que celle de monotonie (voir [BMP97, BP96]).

Les conditions posées sur les relations ne sont pas très fortes, mais elles sont déjà très structurantes puisqu'elles permettent de déduire les propriétés suivantes [KLM90, LM92, Mak94] :

Théorème 18 *Si $\mid\sim$ est une relation préférentielle alors $\mid\sim$ satisfait les propriétés suivantes :*

$$S \quad \frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \rightarrow \gamma} \qquad\qquad CUT \quad \frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma \quad \alpha \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma}$$

Si $\mid\sim$ est une relation rationnelle alors $\mid\sim$ satisfait les propriétés suivantes :

$$DR \quad \frac{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma \quad \alpha \not\mid\sim \gamma}{\beta \mid\sim \gamma} \qquad\qquad NR \quad \frac{\alpha \mid\sim \beta \quad \alpha \wedge \gamma \not\mid\sim \beta}{\alpha \wedge \neg\gamma \mid\sim \beta}$$

Les règles ci-dessus sont la règle de Shoham (S), la coupure (CUT), la disjonction rationnelle (DR) et la négation rationnelle (NR).

Les propriétés du système P semblent être les propriétés minimales exigibles d'une relation pour la considérer comme une relation d'inférence. Ajouter la règle de monotonie rationnelle permet également d'obtenir des propriétés intéressantes pour une relation d'inférence tout en restant non monotone. L'intérêt de ces deux familles de relations est qu'elles disposent toutes deux d'une sémantique claire.

Définition 17 *Une structure $\mathcal{M}$ est un triplet $\langle S,i, \prec\rangle$ où S est un ensemble d'objets quelconques (appelés états), $\prec$ est un ordre strict (i.e. une relation transitive et irréflexive) sur S et i est une fonction (la fonction d'interprétation) qui associe un monde à chaque état i.e. $i \;:\; S \longrightarrow \mathcal{W}$.*

Soit une formule α, on définit $Mod_{\mathcal{M}}(\alpha) = \{s \in S \;:\; i(s) \models \alpha\}$ et $\min_{\mathcal{M}}(\alpha) = \min(Mod_{\mathcal{M}}(\alpha), \prec)$.

Définition 18 *Soit une structure $\mathcal{M} = \langle S,i, \prec\rangle$ et soit $T \subseteq S$. On dit que T est* smooth *s'il satisfait la propriété suivante :*

$$\forall\ s \in T \setminus \min(T, \prec)\ \exists\ s' \in \min(T, \prec)\ t.q.\ \ s' \prec s$$

On dit que $\mathcal{M}$ est un modèle préférentiel *si $Mod_{\mathcal{M}}(\alpha)$ est smooth pour toute formule α.*

On peut associer une relation d'inférence à tout modèle préférentiel de la manière suivante :

Définition 19 *Soit un modèle préférentiel $\mathcal{M} = \langle S,i, \prec\rangle$. La relation d'inférence $\mid\sim_{\mathcal{M}}$ est définie par :*

$$\alpha \mid\sim_{\mathcal{M}} \beta \ ssi\ \min_{\mathcal{M}}(\alpha) \subseteq Mod_{\mathcal{M}}(\beta)$$

Et Kraus, Lehmann et Magidor [KLM90] ont prouvé le théorème de représentation suivant :

Théorème 19 *$\mid\!\sim$ est une relation préférentielle si et seulement si il existe un modèle préférentiel $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$ tel que $\mid\!\sim_{\mathcal{M}} \; = \; \mid\!\sim$. Si le langage est fini, on peut choisir un S fini.*

L'intuition derrière ce théorème de représentation est qu'un agent (*i.e.* un ensemble d'assertions conditionnelles $\alpha \mid\!\sim \beta$) dispose d'un pré-ordre partiel (une préférence) sur les états possibles du monde. Un état s est plus petit qu'un état s' si s est préféré à s' pour cet agent. Un agent inférera β de α si tous les états possibles préférés qui satisfont α satisfont également β.

On dit que $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$ est un *modèle rangé* si c'est un modèle préférentiel et si $\prec$ est modulaire [1].

En d'autres termes, un modèle est rangé si l'on peut ranger ses états par niveaux.

Lehmann et Magidor [LM92] ont montré le théorème de représentation suivant pour les relations rationnelles :

Théorème 20 *Une relation d'inférence $\mid\!\sim$ est rationnelle si et seulement si il existe un modèle rangé $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$ tel que $\mid\!\sim_{\mathcal{M}} = \; \mid\!\sim$.*

C'est-à-dire que l'on peut représenter une relation rationnelle par son modèle rangé :

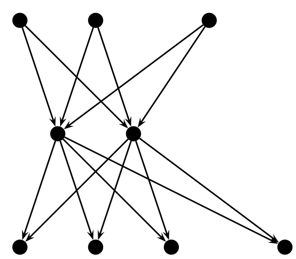

FIG. 1.6 – *Représentation d'un modèle rangé*

Sur la figure 1.6 est représenté un modèle rangé. Les points représentent les éléments de S et les flèches $\bullet_s \leftarrow \bullet_{s'}$ dénotent la relation $s \prec s'$.

Dans ce cas, la relation i est injective [Fre93, BMP97, PU99], c'est-à-dire que deux états différents correspondent à deux interprétations différentes. On peut alors remarquer que cette représentation est très proche des pré-ordres sur les interprétations des assignements fidèles (*cf* figure 1.2.4). La seule différence est que les pré-ordres des assignements fidèles sont totaux et donc deux interprétations à un même niveau sont équivalentes, alors que pour les modèles rangés, on utilise des ordres stricts modulaires et deux états à un même niveau sont incomparables.

Lorsque l'on regarde de plus près ces deux représentations, on peut donc entrevoir la correspondance entre relations rationnelles et opérateurs AGM que nous allons établir dans la section suivante.

1. si $x \not\prec y$, $y \not\prec x$ et $z \prec x$, alors $z \prec y$.

Correspondance relations d'inférence - opérateurs de révision

On peut définir une famille de relations rationnelles à partir d'un opérateur de révision de la façon suivante [MG89] :

Théorème 21 *Soient un opérateur de révision $*$ et une base de connaissance K. Si on définit la relation $\mid\!\sim_K$ comme suit :*

$$\alpha \mid\!\sim^*_K \beta \textit{ ssi } \beta \in K * \alpha$$

Alors $\mid\!\sim^*_K$ est une relation rationnelle qui satisfait la règle suivante, nommée préservation de la consistance :

$$\textit{Si } \alpha \mid\!\sim^*_K \bot, \textit{alors } \alpha \vdash \bot$$

Gärdenfors et Makinson ont également donné un résultat sur la construction inverse [MG89] :

Théorème 22 *Soit $\mid\!\sim$ une relation rationnelle qui préserve la consistance, il existe une base de connaissance K et un opérateur $*$ tels que $\mid\!\sim \; = \; \mid\!\sim^*_K$.*

A partir de ces résultats on peut donner un théorème de représentation qui exprime la correspondance entre un opérateur de révision et une famille de relations rationnelles :
On dit qu'une base de connaissance K correspond à une relation rationnelle $\mid\!\sim$ si $K = \{\alpha : \top \mid\!\sim \alpha\}$.

Théorème 23 *Un opérateur $*$ est un opérateur de révision si et seulement si à chaque base de connaissance K correspond une relation rationnelle $\mid\!\sim^*_K$ qui préserve la consistance telle que*

$$\alpha \mid\!\sim^*_K \beta \textit{ ssi } \beta \in K * \alpha$$

1.2.6 Logique possibiliste

La logique possibiliste [DLP94, Lan91, Zad78] permet de modéliser de manière assez naturelle les informations imprécises et/ou incertaines. Cette distinction entre imprécision et incertitude, importante lorsque l'on tente de modéliser la connaissance d'un agent, est impossible à faire dans un cadre probabiliste.
Très grossièrement, on peut décrire la logique possibiliste comme un ensemble de formules auxquelles est attachée une information quantitative représentant la crédibilité de chaque formule.

Soit une relation $\geq_c$ sur les formules, $A \geq_c B$ signifie “A est au moins aussi certain que B”. $\geq_c$ est une *relation de nécessité qualitative* si elle vérifie les propriétés suivantes [Dub86, DP91] :

(D1) $A \geq_c A$ **(réflexivité)**
(D2) $A \geq_c B$ ou $B \geq_c A$ **(totalité)**
(D3) Si $A \geq_c B$ et $B \geq_c C$, alors $A \geq_c C$ **(transitivité)**
(D4) $\top >_c \bot$ **(non trivialité)**
(D5) $\top \geq_c A$ **(certitude de la tautologie)**
(D6) Si $A \geq_c B$, alors $A \wedge C \geq_c B \wedge C$ **(stabilité conjonctive)**

Les conditions (D1)-(D3) expriment le fait que $\geq_c$ est un pré-ordre total. (D4) dit que les tautologies sont plus crédibles que les contradictions. Cette condition qui est la seule à contenir un ordre strict assure donc qu'il y a au moins 2 niveaux de certitudes, empêchant ainsi la trivialité $A \simeq_c B \; \forall A,B$. (D5) assure que les tautologies sont parmi les formules les plus crédibles. (D6) exprime le $\geq_c$ est stable pour la conjonction. C'est-à-dire que si A est plus crédible que B, avoir une information supplémentaire C ne doit pas nous faire changer d'avis.

Une *mesure de nécessité* est une fonction $N : \mathcal{L} \longrightarrow [0,1]$ telle que :

- $N(\bot) = 0$,
- $N(\top) = 1$,
- $N(A \wedge B) = \min(N(A),N(B))$.

Une telle fonction associe donc à une proposition une mesure de nécessité et non pas un degré de véracité puisque $N(A) = 0$ n'indique pas que A est forcément fausse mais qu'elle ne bénéficie d'aucun support.

Il existe une notion duale à cette mesure de nécessité qu'est la mesure de possibilité :

Une *mesure de possibilité* est une fonction $\Pi : \mathcal{L} \longrightarrow [0,1]$ telle que :

- $\Pi(\bot) = 0$,
- $\Pi(\top) = 1$,
- $\Pi(A \vee B) = \max(\Pi(A),\Pi(B))$.

Ces deux mesures sont interdéfinissables : $\Pi(A) = 1 - N(\neg A)$.

Une fonction f de $\mathcal{L}$ vers [0,1] est dite compatible avec une relation $\geq_X$ sur $\mathcal{L}$ si et seulement si $A \geq_X B \Leftrightarrow f(A) \geq f(B)$.

Le résultat suivant donne alors la correspondance entre ces opérations quantitatives et la mesure qualitative [Dub86] :

Théorème 24 *Une relation de nécessité qualitative est compatible avec f si et seulement si f est une mesure de nécessité.*

Ces relations de nécessité qualitative sont très proches des enracinements épistémiques, comme l'interprétation intuitive de ces deux relations pouvait le laisser le supposer [DP91] :

Théorème 25 *L'ensemble d'axiomes (D2),(D3),(D5) et (D6) est équivalent à (EE1)-(EE4).*

La seule différence entre états épistémiques et relations de nécessité qualitative est que pour les premiers, on demande $\top > A$ (EE5), alors que les seconds n'imposent que $\top \geq_c A$ (D4).

Donc, pour les enracinements épistémiques, il est demandé que les seules formules maximales soient les tautologies, alors que pour les relations de nécessité qualitative, il est simplement demandé que les tautologies soient parmi les formules maximales.

Cette différence est nécessaire en logique possibiliste pour pouvoir coder des contraintes d'intégrité, c'est-à-dire des connaissances dont on est absolument sûr et que l'on ne veut pas voir remises en cause.

1.3 Critiques de la révision AGM

Nous avons vu à la section précédente que les postulats AGM correspondaient à un ensemble de méthodes de révision tout à fait intuitives. Nous avons vu également les rapports étroits entre révisions et d'autres domaines proches mais développés indépendamment tels que les relations d'inférence non monotones et la logique possibiliste. Ces postulats semblent donc disposer de justifications suffisantes en ce qui concerne leur fondement. D'un autre coté, aucun de ces postulats ne semble à l'abri d'une critique concernant telle ou telle situation. Pris individuellement, tous ces postulats sont critiquables et ils ont tous (ou presque) été critiqués. Le fait de critiquer ces postulats ne remet pas en cause le cadre édifié par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson mais suggère des modifications ou des généralisations pour faire face à des cas de figure particuliers. Nous allons voir dans cette section les principales critiques qui ont été adressées à l'encontre des postulats AGM et les réponses apportées.

Le postulat AGM qui a fait couler le plus d'encre est sans aucun doute le postulat (K÷5), plus connu sous le nom de recovery (restauration). Ce postulat, bien que facilement critiquable intuitivement, semble nécessaire car, si l'on travaille avec des bases de connaissance closes déductivement, alors on ne peut pas définir d'opérateur acceptable ne satisfaisant pas *restauration*.

Cette constatation est l'une des motivations pour travailler avec des bases de connaissance non closes déductivement. Cette approche est détaillée section 1.3.2.

Une autre faiblesse du cadre AGM classique est qu'il ne prend pas suffisamment en compte l'itération du processus de révision. C'est-à-dire que les postulats AGM ne contraignent pas suffisamment deux révisions successives, et cela pose des problèmes de rationalité pour l'itération.

Dernièrement, le postulat de succès a été critiqué. En effet, nous n'avons pas toujours une confiance absolue en la nouvelle information et il peut être intéressant de disposer d'opérateurs n'incorporant pas forcément la nouvelle information telle quelle dans la base de connaissance. Hansonn [Han97] a appelé ces opérateurs, opérateurs de semi-révision.

Enfin, une dernière remarque est que les postulats AGM ne caractérisent pas tous les types d'opérateurs de changement de la connaissance. En particulier, une distinction importante a été faite entre opérateurs de révision et opérateurs de mise à jour [KM91a, KW85]. Les premiers opérant une évolution des connaissances (incomplètes) à propos d'un monde statique, les seconds répercutant une évolution du monde sur les connaissances (obsolètes).

1.3.1 Restauration

Le plus critiqué des postulats AGM a sans doute été le postulat (K÷5), plus connu sous le nom de restauration (recovery) :

(K÷5) Si $A \in K$, alors $K \subseteq (K \div A) + A$ **(restauration)**

Ce postulat demande que lorsque l'on effectue la contraction d'une base K par une formule A suivie de l'expansion par cette même formule A, on doit retrouver alors la base de connaissance de départ K (l'inclusion inverse de (K÷5) étant une conséquence de (K÷2)).

Cette propriété semble naturelle puisqu'elle exprime la notion de changement minimal. Elle demande que la contraction par A n'enlève que le nécessaire pour ne plus impliquer A.

Mais des contre-exemples et des arguments contre ce postulat ont été donnés dans de nombreux travaux (voir par exemple [Han91b, Fuh91, Nie91, LR91]). Pour illustrer le problème soulevé par ce postulat, considérons l'exemple suivant donné par Hansson dans [Han91b] :

Exemple 1 *J'apprends dans un livre que Cléopâtre avait un fils et une fille. J'ajoute donc à l'ensemble de mes connaissances p et q dénotant respectivement le fait que Cléopatre avait un fils et une fille. Un ami m'apprend que le livre que je lisais n'était pas un livre d'histoire mais un roman. Je dois donc revoir mes connaissances sur la maternité de Cléopatre et supprime donc de mes connaissances le fait que Cléopatre avait un enfant $p \vee q$. Peu après, dans un livre d'histoire j'apprends que Cléopatre avait un enfant, j'ajoute donc a mes connaissances $p \vee q$. Dois-je ajouter à mes connaissances que Cléopatre avait un fils et une fille (ce qu'impose restauration) ?*

Il semble donc que restauration induise un comportement plus que discutable pour les opérateurs de contraction AGM. Même Makinson reconnaît dans [Mak87] que :

> *"[recovery is] the only one among the six [(K÷1)-(K÷6)] that is open to query from the point of view of acceptability under its intended reading."*

Ce problème est interne à la contraction et cette critique de *restauration* n'affecte en rien la révision AGM puisque, comme noté à la remarque 1, ce postulat n'intervient pas lorsque l'on définit un opérateur de révision à partir d'un opérateur de contraction et de l'identité de Levi. Lorsque l'on définit un opérateur de contraction comme base d'un opérateur de révision on peut donc laisser de côté ce postulat. Mais le problème se pose lorsque l'on étudie les opérateurs de contraction en tant que tels.

Makinson nomme opérateurs d'*effacement* (withdrawal) les opérateurs satisfaisant les postulats (K÷1)-(K÷4) et (K÷6), c'est-à-dire tous les postulats de base sauf *restauration*. Le problème est que *restauration* était le principal postulat de base en ce qui concerne le principe de conservation. Donc les opérateurs de withdrawal pêchent de ce point de vue, comme noté par Hansson [Han91a], un opérateur de withdrawal peut obéir à la propriété suivante :

$$K \div A = Cn(\emptyset) \quad \forall A \in K$$

Ce qui enlève de la base de connaissance des informations qui n'ont rien à voir avec la formule que l'on efface.

Dans [Han91b], Hansson explore les différentes manières d'affaiblir *restauration* afin de retrouver ce principe de conservation. Il propose alors le postulat de conservation du noyau (core-retainment) :

Si $A \in K$ et $A \notin K \div B$, alors $\exists K'$ tel que $K' \subset K$ et $B \notin Cn(K')$ et $B \in Cn(K' \cup \{A\})$ **(conservation du noyau)**

Cette propriété dit que si une formule n'est plus dans la base de connaissance après la contraction, c'est qu'elle contribuait à produire l'information que l'on voulait effacer. Ce postulat semble tout a fait raisonnable et moins fort que *restauration* pourtant [Han91b] :

Théorème 26 *Soit $\div$ un opérateur opérant sur une base de connaissance close déductive ment K. $\div$ est un opérateur de contraction par intersection partielle si et seulement si il satisfait $(K\div 1)$, $(K\div 2)$, $(K\div 4)$, $(K\div 6)$ et conservation du noyau.*

Donc, lorsque l'on travaille avec des bases closes déductivement, *conservation du noyau* est équivalent à *restauration* ! Le problème est que les postulats de withdrawal et la propriété de conservation du noyau semblent intuitivement difficilement critiquables. Comme l'écrit Hansson [Han91a] :

> *"Since it does not seem sensible for [a withdrawal operator] to violate core-retainment or any of [$(K\div 1)$-$(K\div 4)$ and $(K\div 6)$], a reasonable withdrawal (contraction) operator without the recovery postulate does not seem possible in the AGM framework. The* **pertinacity of the recovery property** *is a prominent feature of the AGM framework."*

Cette persistance de *restauration* dans le cadre de bases de connaissance closes déductivement est une des raisons qui ont poussé vers l'étude d'opérateurs de révision opérant sur des bases non closes déductivement. Nous appelons de tels opérateurs des opérateurs de révision syntaxique. Ceux-ci sont présentés plus en détail section suivante.

Eduardo Fermé a étudié dans le détail les implications de *restauration* pour les différentes méthodes de construction d'opérateurs de contraction (postulats, contractions par intersection partielle, enracinements épistémiques, contraction sûre et système de sphères) [Fer99a, Fer99b].

1.3.2 Révision syntaxique

Le cadre AGM requiert de travailler avec des bases de connaissance closes déductivement (bien que ce ne soit pas nécessaire pour tous les résultats). Bien que travailler avec des bases de connaissance closes déductivement est une idéalisation compréhensible pour développer une théorie de la révision, ce choix est discutable d'un point de vue algorithmique aussi bien que philosophique.

Du point de vue algorithmique, si l'on veut implanter un système de révision, travailler avec des bases closes déductivement semble simplement impossible d'un point de vue complexité.

Et, comme noté dans [Neb94] par Nebel, même si l'on suppose que l'on représente les bases de connaissance par des ensembles finis de formules équivalents logiquement aux bases de connaissance, les méthodes de révision usuelles (enracinement épistémique, révision par intersection partielle,...) utilisent des relations sur l'ensemble de toutes les formules d'une théorie close déductivement, ce qui pose des problèmes de représentation.

D'un point de vue philosophique il semble justifiable, lorsque l'on considère une base de connaissance A, de faire une distinction entre les informations qui ont été explicitement ajoutées dans la base de connaissance, ce qui forme le noyau de la base, et les informations dérivées de ce noyau $Cn(A) \setminus A$, qui ne sont dans la base que comme des effets des informations du noyau. Il s'agit, en quelque sorte, de considérer les informations du noyau comme plus retranchées (au sens de l'enracinement épistémique) que les informations dérivées. Considérons l'exemple suivant donné par Hansson dans [Han91a] (voir aussi [Han89]) :

Exemple 2 *Nous sommes un jour férié et je me promène dans une ville qui compte deux fast-food. Je vois quelqu'un passer en mangeant un hamburger, j'en déduis donc qu'un des deux fast-food est ouvert $a \vee b$. En me dirigeant vers l'un des fast-food je vois de loin que l'éclairage de celui-ci fonctionne, j'en déduis donc que ce restaurant est ouvert a. Mes connaissances à ce moment peuvent être représentées par la base de connaissance $\{a, a \vee b\}$. Néanmoins, en arrivant à ce fast-food je lis une affiche indiquant que le restaurant est fermé aujourd'hui. L'éclairage ne fonctionnait que pour une personne faisant le nettoyage. La révision de ma base de connaissance doit donc contenir $\neg a$ mais également $a \vee b$ car j'ai toujours de bonnes raisons de penser que l'un des restaurants est ouvert.*

Imaginons à présent un scénario similaire, je me promène dans la ville mais ne croise pas de mangeur de hamburger. Lorsque je vois les lumières du fast-food ouvertesm, ma base de connaissance est alors $\{a\}$. Lorsque je lis l'affiche m'annonçant que le restaurant est fermé, je n'ai aucune raison de penser $a \vee b$, c'est-à-dire que l'un des deux restaurants est ouvert.

Cet exemple illustre le fait qu'il peut être nécessaire de faire une distinction entre deux bases de connaissance (ici $\{a\}$ et $\{a, a \vee b\}$), bien que leur clôture déductive soit la même.

Le fait de donner une plus grande importance aux informations explicites, c'est-à-dire aux informations ayant un support direct, semble rapprocher cette idée de l'approche fondamentaliste de la révision. On oppose généralement ce que l'on appelle l'*approche cohérente*, qui considère les connaissances comme ne formant qu'un seul bloc, tel que le fait le cadre AGM, à l'*approche fondamentaliste*, qui considère les connaissances et leurs justifications, tel que les *truth-maintenance systems* [Doy79, dK86]. Les deux approches sont justifiables et elles sont en fait très liées [Doy92] (voir aussi [Neb89, del97]). Ces révisions syntaxiques semblent être un compromis entre ces deux approches. On s'autorise une distinction entre les informations explicites et implicites mais il n'y a pas de liste de justifications pour chaque information.

La solution est alors de développer des méthodes de révision opérant sur des bases de connaissance non closes déductivement. Ce problème a principalement été traité par Fuhrmann [Fuh91], Hansson [Han91a, Han91b, Han93] et Nebel [Neb89, Neb91, Neb94]. Hansson et Nebel appellent *belief set* une base de connaissance close déductivement et *belief base* une base non nécessairement close. Le problème posé alors est que les opérateurs ainsi définis n'obéissent plus au principe d'indépendance de syntaxe (K*6). C'est pour cette raison que nous appelons cela le cadre syntaxique.

Voir [Han91a] pour un inventaire détaillé des avantages de ces révisions syntaxiques. En particulier travailler avec des bases non closes déductivement fait gagner en expressivité, puisque deux bases $\{a\}$ et $\{a, a \vee b\}$ logiquement équivalentes (*i.e.* équivalentes statiquement), n'auront pas le même comportement après révision, elles ne sont donc pas forcément équivalentes dynamiquement. Il est intéressant de remarquer que l'on a une distinction similaire entre équivalence statique et dynamique dans le cadre de la révision itérée (*cf* section 2.1.1).

Un autre avantage des bases de connaissance non closes déductivement est que, dans ce cadre, il y a plusieurs bases inconsistantes. En effet, le problème lorsque l'on travaille avec des théories est qu'il n'y a qu'une seule base inconsistante, celle qui contient toutes les formules. Et lorsque l'on introduit une inconsistance "locale" (*i.e.* a et $\neg a$), cela "contamine" toute la base, interdisant toute réparation ultérieure. En revanche, lorsque l'on travaille avec des bases non closes déductivement, il y a plusieurs bases inconsistantes, par exemple la base $\{a,b,c,d,e,\neg a\}$ est différente de la base $\{a,\neg b,\neg c,\neg d,\neg e,\neg a\}$, alors que $Cn(\{a,b,c,d,e,\neg a\}) = Cn(\{a,\neg b,\neg c,\neg d,\neg e,\neg a\})$. Cette nuance permet de définir des opérateurs utilisant des bases de connaissance temporairement inconsistantes en évitant des trivialités [Han93].

Hansson nomme ses travaux sur les opérateurs de changement de bases de connaissance non closes déductivement *Belief Base Dynamics* (BBD). Hansson (re)définit les notions de contraction et de révision dans le cadre des BBD. Il inclut également dans sa caractérisation la notion de supersélecteurs qui sont des fonctions qui associent à chaque base de connaissance une fonction de sélection. Cette définition, proche des idées exposées au chapitre 3 permet donc également de supporter la révision itérée.

Une autre généralisation que supporte le cadre BBD est que la nouvelle information peut être un ensemble de formules, et non pas une seule formule comme dans le cadre AGM usuel. Mais, pour simplifier, on peut supposer que la nouvelle information est une formule unique. Voir [Han91a, Han89] pour plus de détails sur la révision/contraction par des ensembles de formules. Dans ce cas on définit naturellement $K \bot A$ comme étant l'ensemble des sous-ensembles maximaux de K qui n'impliquent aucun des éléments de A. De même, il faut définir ce qu'est la négation d'un ensemble de formules :

Définition 20 *Soit A un ensemble fini de formules. On définit $\neg A$ par la formule :*
- $\neg\emptyset = \bot$
- *Si A est un singleton, $A = \{a\}$, alors $\neg A = \neg a$*
- *Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $\neg A = \neg a_1 \vee \dots \vee \neg a_n$*

Nous allons présenter la caractérisation de Hansson [Han91a, Han93] mais il nous faut d'abord définir les supersélecteurs (appelés également *two-place selection functions* [Han93])

Définition 21 *Un* supersélecteur *est une fonction f qui associe à chaque base de connaissance K une fonction de sélection $f(K) = \gamma_K$.*
Un supersélecteur f est unifié *si et seulement si pour toutes bases de connaissance K_1 et K_2 :*

$$\text{Si } K_1 \bot A_1 = K_2 \bot A_2 \neq \emptyset, \text{ alors } (f(K_1))(K_1 \bot A_1) = (f(K_2))(K_2 \bot A_2)$$

Cette notion de supersélecteur unifié exige donc une certaine rationalité dans la définition de cette fonction. Un supersélecteur est relationnel (respectivement relationnel transitif) si et seulement si l'ensemble des fonctions de sélection qu'il associe aux bases de connaissance sont relationnelles (resp. relationnelles transitives).

Un opérateur de contraction par intersection partielle syntaxique est défini exactement comme dans le cadre AGM classique.

Un opérateur de contraction par intersection partielle syntaxique satisfait les conditions suivantes :

(H÷1) $K \div A \subseteq K$ **(inclusion)**

(H÷2) Si $x \in K \setminus (K \div A)$, alors il existe un K' avec $K \div A \subseteq K' \subseteq K$, tel que $A \cap Cn(K') = \emptyset$ et $A \cap Cn(K' \cup \{x\}) \neq \emptyset$ **(pertinence)**

(H÷3) Si $A \cup Cn(\emptyset) = \emptyset$, alors $A \cup Cn(K \div A) = \emptyset$ **(succès)**

(H÷4) Si pour chaque sous-ensemble K' de K on a $A \cup Cn(K') = \emptyset$ si et seulement si $B \cup Cn(K') = \emptyset$, alors $K \div A = K \div B$ **(uniformité)**

(H÷5) Si $A \cup Cn(\emptyset) = \emptyset$, et si chaque élément de B implique un élément de A, alors $K \div A = (K \cap B) \div A$ **(redondance)**

Ces postulats sont une adaptation des postulats AGM dans le cadre de bases de connaissance non closes déductivement. On peut remarquer que la propriété de *pertinence* a déjà été citée section 1.3.1 comme une alternative au controversé postulat de restauration.

Théorème 27 *Un opérateur ÷ est un opérateur de contraction par intersection partielle syntaxique si et seulement si il satisfait (H÷1)-(H÷4).*
Un opérateur ÷ est un opérateur de contraction par intersection partielle syntaxique unifié[2] *si et seulement si il satisfait (H÷1)-(H÷5).*

Pour définir un opérateur de révision à partir d'un opérateur de contraction dans le cadre AGM, nous ne disposons que de l'identité de Levi :

$K * A = (K \div \neg A) + A$ **(Identité de Levi)**

Lorsque l'on veut définir dans le cadre des BBD un opérateur de révision à partir d'un opérateur de contraction on peut bien sûr utiliser la même identité, mais on peut également renverser cette identité [Han93], ce qui est impossible dans le cadre AGM classique car cette définition nécessite de passer par une base $K + A$ potentiellement inconsistante :

$K * A = (K + A) \div \neg A$ **(Identité de Hansson)**

Hansson nomme *révision interne* un opérateur de révision obtenu grâce à l'identité de Levi et *révision externe* un opérateur obtenu grâce à l'identité de Hansson. Plus formellement :

Définition 22 *Un opérateur de* révision par intersection partielle interne *est défini par*

$$K * A = (\cap f(K)(K \perp \neg A)) \cup A$$

Un opérateur de révision par intersection partielle externe *est défini par*

$$K \pm A = \cap f(K \cup A)((K \cup A) \perp \neg A)$$

Nous allons à présent énumérer un ensemble de propriétés pour les opérateurs de révision opérants sur des bases non closes déductivement :

(H*0) $K * A$ est consistant si A est consistant **(consistance)**

2. Un opérateur de contraction est unifié si la fonction de sélection le définissant est unifiée.

(H*1) $K * A \subseteq K \cup A$ **(inclusion)**

(H*2) Si $x \in K \setminus (K * A)$, alors $\exists K'$ tel que $K * A \subseteq K' \subseteq K \cup A$, K' est consistant et $K' \cup \{x\}$ est consistant **(pertinence)**

(H*3) $A \subseteq K * A$ **(succès)**

(H*4) Si, pour tout $K' \subseteq K$, $K' \cup A$ est inconsistant ssi $K' \cup B$ est inconsistant, alors $K \cap (K * A) = K \cap (K * B)$ **(uniformité)**

(H*4w) Si A et B sont inclus dans K et, pour tout $K' \subseteq K$, $K' \cup A$ est inconsistant ssi $K' \cup B$ est inconsistant, alors $K \cap (K * A) = K \cap (K * B)$ **(uniformité faible)**

(H*5) Si A est consistant, et $A \cup \{b\}$ est inconsistant pour chaque $b \in B$, alors $K * A = (K \cup B) * A$ **(redondance)**

(H*6) $K * A = (K \cup A) * A$ **(pré-expansion)**

Le théorème suivant résume les théorèmes de représentation donnés dans [Han93] :

Théorème 28 *Un opérateur $*$ est un opérateur de révision par intersection partielle interne si et seulement si il satisfait (H*0)-(H*4).*
*Un opérateur $*$ est un opérateur de révision par intersection partielle interne unifié si et seulement si il satisfait (H*0)-(H*5).*
*Un opérateur $*$ est un opérateur de révision par intersection partielle externe si et seulement si il satisfait (H*0)-(H*3),(H*4w) et (H*6).*
*Un opérateur $*$ est un opérateur de révision par intersection partielle externe unifié si et seulement si il satisfait (H*0)-(H*3),(H*4w), (H*5) et (H*6).*

Dans [Han98a], Hansson étudie de façon plus systématique les différentes propriétés logiques des opérateurs AGM et BBD et les rapports entre ces approches.

1.3.3 Itération

Une critique envers le cadre AGM est qu'il ne permet pas d'itérer le processus de révision de façon satisfaisante. Si l'on considère la caractérisation logique, les deux seuls postulats qui parlent d'itération sont (K*7) et (K*8). Et si l'on considère les deux méthodes usuelles de construction d'opérateurs de révision, à savoir les fonctions de révision par intersection partielle et les enracinements épistémiques, on se rend compte que lorsque l'on révise la base de connaissance, il n'y a aucune indication sur la nouvelle fonction de sélection ou le nouvel enracinement épistémique à utiliser pour itérer le processus.

Les postulats AGM ne permettent pas d'assurer un bon comportement du processus d'itération de la révision parce qu'ils ne permettent pas d'assurer le maintien des informations conditionnelles.

Ces informations conditionnelles sont assez proches des *conditionnels* (counterfactuals) qui ont déjà été intensément étudiés (voir *e.g.* [Lew73, Sta68]). Un conditionnel peut être exprimé par une phrase du type : *"Si α était vrai, alors β le serait aussi"*, et il est généralement noté $\alpha > \beta$ ou à la manière d'une probabilité conditionnelle $\beta|\alpha$.

Les conditionnels sont très proches de la révision de la connaissance, ce lien a été souligné par de nombreux auteurs [Bou92a, Bou92b, Lev88], on peut d'ailleurs interpréter les relations d'inférence rationnelles $\alpha \mid\!\sim \beta$ comme des conditionnels, et la relation entre relations rationnelles et révision est bien connue (voir [MG89] et section 1.2.5).

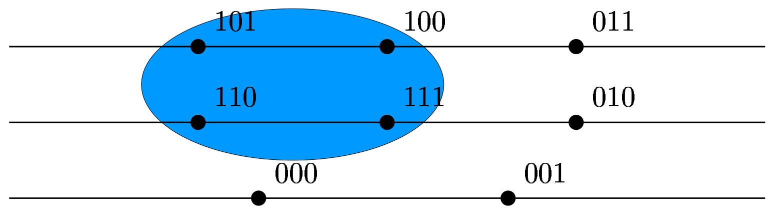

FIG. 1.7 – *Information conditionnelle*

Ce lien est illustré par le *test de Ramsey* [Ram31], énoncé par Stalnaker [Sta68] de la façon suivante :

> *"First add the antecedent (hypothetically) to your stock of beliefs; second make whatever adjustments are required to maintain consistency (without modifying the hypothetical belief in the antecedent); finally, consider whether or not the consequent is true."*

C'est-à-dire que pour tester si le conditionnel $\beta|\alpha$ appartient à la base de connaissance φ, il suffit de réviser la base de connaissance par α et voir si β est dans le résultat :

$\beta|\alpha$ ssi $\varphi \circ \alpha \vdash \beta$ **(Test de Ramsey)**

Pour illustrer ce que l'on appelle informations conditionnelles dans le cadre de la révision, il suffit de considérer le pré-ordre de la figure 1.7. Si l'on nomme respectivement a,b,c les 3 variables propositionnelles, la base de connaissance associée à ce pré-ordre est $\varphi = \neg a \wedge \neg b$.

Si on apprend que a est vrai , les modèles minimaux de la nouvelle information sont $\{1,1,0\}$ et $\{1,1,1\}$ c'est-à-dire que $\varphi \circ a \vdash b$. Donc, si l'on apprend que a est vrai, on en conclura que b est vrai, c'est-à-dire que la base de connaissance φ contient l'information conditionnelle $b|a$.

Il est donc possible de représenter un pré-ordre par l'ensemble des informations conditionnelles correspondantes et la révision de la base de connaissance est alors l'ensemble des "conséquences" de ces conditionnels.

Les conditionnels sont donc une autre manière de coder les croyances (préférences) d'un agent et il serait souhaitable que la révision par une nouvelle information change les connaissances de l'agent, mais, autant que possible, ne modifie pas les croyances de l'agent. Le problème avec le modèle AGM est qu'il ne permet pas d'assurer le maintien de ces croyances. Par exemple avec la révision précédente, tout ce que l'on sait du nouvel état épistémique (le nouveau pré-ordre) de l'agent est que les modèles préférés (les connaissances) seront $\{1,1,0\}$ et $\{1,1,1\}$ mais on n'a aucune condition sur l'interclassement des autres interprétations. Il n'y a donc pas de conservation des informations conditionnelles.

Le fait est que dans le cadre AGM classique on ne s'intéresse pas à une stratégie de révision mais à une seule étape du processus. La question est simplement : étant données une connaissance et une nouvelle évidence, quelle est la nouvelle connaissance incorporant la nouvelle évidence ?

Le problème lorsque l'on veut étudier un système d'information est que ce processus doit pouvoir s'itérer. Et cette itération pose de nouveaux problèmes de rationalité.

Pour montrer que le cadre AGM ne s'intéresse pas à la stratégie de révision, nous allons définir, figure 1.8, un opérateur de révision AGM utilisant le hasard lors du processus de révision.

- Initialiser la table de mémoire à vide.
- Initialiser la base de connaissance à $\top$ et le pré-ordre correspondant est le pré-ordre plat où toutes les interprétations sont équivalentes.
- Enregistrer cette base de connaissance et le pré-ordre correspondant dans la table de mémoire.
- **tant que**(**non** fin_du_monde)
  faire - Acquérir la nouvelle information.
  - Calculer les modèles minimaux de la nouvelle information pour le pré-ordre courant.
  - La nouvelle base de connaissance est la formule (à équivalence logique près) ayant comme modèles ces modèles minimaux.
  - **si** la nouvelle base de connaissance apparait déjà dans la table de mémoire
    alors - le pré-ordre courant est le pré-ordre correspondant à la base.
    sinon - Tirer au sort le nouveau pré-ordre courant [a].
    - Enregistrer la base de connaissance et le pré-ordre correspondant dans la table de mémoire.

[a] *i.e.* définir un pré-ordre où les modèles de la base de connaissance sont minimaux, et où les autres interprétations sont placées aléatoirement.

FIG. 1.8 – *Opérateur de révision AGM aléatoire*

Le fait de calculer aléatoirement les croyances de l'agent d'une révision à l'autre peut faire douter de la rationalité de cet opérateur en ce qui concerne une quelconque stratégie de révision. Pourtant cet opérateur est bien un opérateur AGM, puisque cette procédure construit incrémentalement un assignement fidèle.

La lacune des postulats AGM en ce qui concerne l'itération est que les opérateurs AGM semblent endogènes, car ils associent à une ancienne base de connaissance, une nouvelle base de connaissance de même nature. Mais l'endogénéité n'est qu'apparente, puisque la révision a nécessité une information supplémentaire sur les croyances de l'agent (enracinement épistémique, fonction de sélection, assignement fidèle...) mais ne produit aucune information de ce type. De manière fonctionnelle, si on considère la nouvelle information α comme étiquetant la transition, la révision d'une base de connaissance φ s'interprète comme :

$$(\varphi, \leq_\varphi) \xrightarrow{\alpha} (\varphi \circ \alpha, \, ? \,)$$

où $\leq_\varphi$ représente les croyances (préférences) de l'agent.

D'où la nécessité de considérer l'état épistémique d'un agent non pas comme une unique base de connaissance, mais comme un couple (base de connaissance, croyances), où "croyances" code l'information conditionnelle utilisée pour la révision suivante. En codant ces croyances, on peut donc exprimer des conditions sur les stratégies de révision et leur rationalité.

On peut dire, en quelque sorte, que les opérateurs AGM classiques n'ont pas de mémoire et que l'on peut coder cette mémoire dans les croyances.

Nous verrons aux chapitres 2 et 3 les méthodes proposées pour résoudre les problèmes posés par l'itération.

1.3.4 Semi-révision

Récemment c'est le postulat de succès (K*2) qui a été critiqué [Han97, Mak98, Han98b]. Ce principe, souvent appelé *primauté de la nouvelle information* (*primacy of update*) [Dal88a, Dal88b], dit que la nouvelle information est plus fiable que la base de connaissance actuelle et l'on donne donc une priorité supérieure à cette nouvelle information.

Ce n'est bien sûr pas toujours le cas, et il existe des applications où l'information la plus récente n'est pas forcément la plus fiable. Si on considère que l'agent est un robot et que les nouvelles informations à intégrer sont des observations données par des capteurs. Si ces capteurs sont parfaitement fiables, il n'y a pas de problème à appliquer (K*2). En revanche, si les capteurs ne sont pas fiables, on dispose d'observations plus ou moins douteuses mais qui apportent tout de même des informations sur l'état du monde. Dans ce cas une méthode drastique pourrait être de ne pas tenir compte de cette nouvelle information peu fiable, mais, bien que l'on n'ait pas une confiance absolue en la nouvelle information, elle recelle tout de même un contenu informatif que l'on ne peut généralement pas totalement ignorer.

Dans [Mak98], Makinson propose une opération de révision filtrée (screened revision) qui n'accepte la nouvelle information que si celle-ci est compatible avec un noyau de connaissance qui ne peut être remis en cause par révision.

Plus formellement, il définit une *contraction protégeant* ξ :

$$K \div_{\xi} A = \cap\gamma(K \bot_{\xi} A)$$

où $K \bot_{\xi} A$ est l'ensemble des sous-ensembles maximaux de K qui contiennent $\xi \cap K$ et qui n'impliquent pas A.

L'opérateur de *révision filtrée* $\#_{\xi}$ est alors défini par :

$$K \#_{\xi} A = \begin{cases} Cn((K \div_{\xi} \neg A) \cup \{A\}) & \text{si } A \text{ est consistant avec } \xi \cap K \\ K & \text{sinon} \end{cases}$$

L'information ξ représente donc une connaissance de base qui ne peut être remise en doute. Une révision n'est autorisée que si elle ne remet pas en cause les éléments de $\xi \cap K$. Le problème étant que si $\xi \cap K$ est inconsistant, on ne pourra pas sortir de cette inconsistance par révision.

En généralisant un peu cette idée, Makinson propose alors un opérateur de révision filtrée relationnelle, où la connaissance de base n'est plus une base de connaissance, mais une relation entre formules, $A < B$ signifiant "*a priori* , A est moins crédible que B". L'opérateur de *révision filtrée relationnelle* $\#_<$ est alors défini par :

$$K\#_<A = \begin{cases} K\#_{\{B:A<B\}}A & \text{si } A \text{ est consistant avec } \{B : A < B\} \cap K \\ K & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans [Han97], Hansson propose une série de postulats s'appliquant aux opérateurs de révision n'obéissant pas au postulat de succès. Il appelle ces opérateurs les opérateurs de *semi-révision*. Il s'intéresse plus particulièrement aux opérateurs travaillant avec des bases de connaissance non closes déductivement.

Par similitude aux opérateurs de révision externe (*cf* section 1.3.2) où l'on peut décomposer la révision de K par A en deux étapes :

1. Ajouter A à K,
2. Contracter le résultat par $\neg A$.

On peut donner une définition similaire pour les opérateurs de semi-révision :

1. Ajouter A à K,
2. Rendre le résultat consistant en supprimant des informations de A ou de K.

La différence se trouve donc dans la seconde étape. Lors d'une révision externe on ne supprime que des informations de K pour rétablir la consistance, alors que pour une semi-révision on peut également toucher à A. Cette définition n'est pas généralisable pour des bases closes déductivement, puisque le fait de n'avoir qu'une unique base inconsistante ne permet pas la construction d'opérations de ce genre.

Techniquement, les semi-révisions définies dans [Han97] utilisent pour cette seconde étape ce que Hansson appelle des *consolidations*, c'est-à-dire des contractions par $\perp$. Ces consolidations permettent d'obtenir une base de connaissance consistante à partir d'une base inconsistante. Nous ne détaillerons pas plus ici ces opérateurs. Mais il faut remarquer que la définition de ceux-ci :

1. Union de deux informations
2. Rétablissement de la cohérence

ne semble plus être de la révision mais de la fusion de deux bases de connaissance. En effet, de nombreuses méthodes de fusion suivent ce principe [BKM91, BKMS92, BDL$^+$98]. Il est clair que révision et fusion de la connaissance sont des opérations très proches, et on voit ici a quel point la frontière est floue.

Pour insister sur ce fait, on peut également citer les travaux de Schlechta [Sch98] sur des opérateurs de semi-révision basés sur des distances. Schlechta a également étudié des opérateurs de révision basés sur des distances [SLM96, Sch98]. Intuitivement, le résultat d'une révision de K par A est l'ensemble des modèles de A les plus proches des modèles de K au sens de la distance choisie. Similairement le résultat d'une semi-révision est l'ensemble des interprétations appartenant aux couples composés d'un modèle de K et d'un modèle de A tels que la distance entre ces deux modèles est égale à la distance minimum entre un modèle de K et un modèle de A. Il est alors facile de rapprocher cette définition de semi-révision basée sur une distance des opérateurs de fusion de Liberatore et Schaerf (voir [LS95, LS98] et section 5.2.2).

Fermé et Hansson ont proposé un autre type d'opérateurs de semi-révision, les opérateurs de *révision sélective* [FH99]. Ces opérateurs définissent des révisions où seulement une partie de la nouvelle information est acceptée, c'est-à-dire qu'un opérateur de révision sélective est défini par $K *_f A = K * f(A)$ où f est une fonction, typiquement telle que $f(A) \subseteq A$. Dans [FH99], les propriétés que doit satisfaire cette fonction f pour assurer à ces opérateurs de bonnes propriétés sont étudiées.

Finalement on peut également citer d'autres travaux où la nouvelle information n'est pas toujours acceptée, avec des approches plus quantitatives pour modéliser la confiance en la nouvelle information [Spo87, Wil94, BFH98].

1.3.5 Mise à jour

Katsuno et Mendelzon [KM91a], et avant eux Keller et Winslett [KW85], ont souligné que les postulats AGM ne s'appliquaient pas à tous les types de changements de la connaissance. En effet, les postulats de révision AGM ne s'appliquent qu'à la révision proprement dite et pas à la mise à jour. La différence entre ces deux opérations est qu'une révision permet d'incorporer une connaissance à propos du monde, c'est-à-dire d'améliorer sa connaissance du monde. Alors que la mise à jour permet de reporter un changement apporté au monde, c'est-à-dire d'actualiser sa connaissance du monde.

La révision permet donc de travailler sur un monde statique : l'état du monde ne change pas, c'est notre connaissance à propos de ce monde qui évolue. La mise à jour permet de travailler sur un monde dynamique : l'état du monde change et ces changements sont répercutés sur notre connaissance. Considérons l'exemple suivant pour illustrer ce propos [KM91a] :

Exemple 3 *Supposons que ma base de connaissance décrive deux objets, un livre et un magazine, dans une pièce. Il y a une table dans cette pièce et les objets peuvent être ou non sur la table. La formule l signifie "le livre est sur la table" et m "le magazine est sur la table". Je me rappelle que lorsque j'ai quitté cette pièce pour la dernière fois, il n'y avait qu'un seul objet sur la table, mais je n'ai pas pu voir lequel. Ma base de connaissance est $(l \wedge \neg m) \vee (\neg l \wedge m)$. J'envoie un robot dans cette pièce avec comme instruction de mettre le magazine sur la table. C'est-à-dire que je vais incorporer m à ma base de connaissance. Quelle est alors ma nouvelle base de connaissance ?*

Si on utilise un opérateur de révision pour traiter ce type de changement la nouvelle base de connaissance sera $\neg l \wedge m$, ceci étant une conséquence du postulat de succès $(K*2)$. Mais ce résultat est insatisfaisant, la base de connaissance initiale marquait une incertitude sur l'état du monde, c'est-à-dire que l'on était soit dans l'état $I = l \wedge \neg m$, soit dans l'état $J = \neg l \wedge m$. Le fait d'incorporer m à la base de connaissance avec un opérateur de révision lève cette incertitude et "choisit" l'état J. En quelque sorte, envoyer le robot avec comme instruction de mettre le magazine sur la table nous renseigne sur l'état du monde avant que le robot n'entre dans la pièce !

Alors que la seule chose que nous sachions lorsque le robot entre dans la pièce est qu'à présent le magazine est sur la table, cela ne nous informe pas sur l'état initial de la pièce. La nouvelle base de connaissance doit alors refléter le fait que le magazine est sur la table et que le livre peut ou non être sur la table : $(l \wedge m) \vee (\neg l \wedge m)$.

Katsuno et Mendelzon ont proposé une caractérisation logique des opérateurs de mise à jour ainsi qu'un théorème de représentation en terme de famille de pré-ordres sur les interprétations. Ces opérateurs sont une généralisation de la *Possible Models Approach* (PMA) de Winslett [Win88, Win90].

Soit φ et μ deux formules d'un langage propositionnel fini. φ est la base de connaissance, μ la nouvelle information et $\varphi \diamond \mu$ est une formule qui dénote la nouvelle base de connaissance après mise à jour de φ par μ. $\diamond$ est un opérateur de *mise à jour* s'il satisfait les propriétés suivantes :

(U1) $\varphi \diamond \mu \vdash \mu$
(U2) Si $\varphi \vdash \mu$, alors $\varphi \diamond \mu \leftrightarrow \varphi$
(U3) Si φ et μ sont consistants alors $\varphi \diamond \mu$ est consistant
(U4) Si $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ et $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ alors $\varphi_1 \diamond \mu_1 \leftrightarrow \varphi_2 \diamond \mu_2$
(U5) $(\varphi \diamond \mu) \wedge \phi \vdash \varphi \diamond (\mu \wedge \phi)$
(U6) Si $\varphi \diamond \mu_1 \vdash \mu_2$ et $\varphi \diamond \mu_2 \vdash \mu_1$, alors $\varphi \diamond \mu_1 \leftrightarrow \varphi \diamond \mu_2$
(U7) Si φ est une formule complète, alors $(\varphi \diamond \mu_1) \wedge (\varphi \diamond \mu_2) \vdash \varphi \diamond (\mu_1 \vee \mu_2)$
(U8) $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \diamond \mu \leftrightarrow (\varphi_1 \diamond \mu) \vee (\varphi_2 \diamond \mu)$

Les postulats (U1)-(U5) sont très proches des postulats (R1)-(R5) de la révision. (U2) et (U3) sont une version affaiblie respectivement de (R2) et (R3). Le postulat (R6) a été remplacé par les 3 postulats (U6)-(U8). (U6) dit que, si la mise à jour d'une base par une nouvelle information μ_1 implique μ_2, et si la mise à jour de cette même base par la nouvelle information μ_2 implique μ_1, alors les deux mises à jour donnent le même résultat. (U7) dit que lorsque l'on a une connaissance complète du monde, les modèles communs aux deux mises à jour $\varphi \diamond \mu_1$ et $\varphi \diamond \mu_2$ sont également modèles de $\varphi \diamond (\mu_1 \vee \mu_2)$. Le postulat le plus important de la liste est sans doute (U8), c'est lui qui assure que l'on examine séparément chaque monde possible (modèle) de la base de connaissance.

Katsuno et Mendelzon [KM91a] ont également défini des opérateurs d' *effacement* (erasure) qui sont aux opérateurs de mise à jour ce que les opérateurs de contraction sont aux opérateurs de révision.

Du point de vue sémantique on dispose du théorème de représentation suivant :

Théorème 29 *Un opérateur de mise à jour $\diamond$ satisfait les postulats (U1)-(U8) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de connaissance φ un pré-ordre partiel $\leq_\varphi$ tel que*

$$Mod(\varphi \diamond \mu) = \bigcup_{I \models \varphi} \min(Mod(\mu), \leq_{\varphi_{\{I\}}})$$

Intuitivement, les opérateurs de révision apportent un changement minimal à l'ensemble des mondes possibles (les modèles de la base de connaissance) pour trouver les mondes les plus crédibles au vu de la nouvelle information, alors que les opérateurs de mise à jour apportent un changement minimal à chaque monde possible de façon à tenir compte de la nouvelle information quel que soit l'état dans lequel le monde se trouvait. Donc, en examinant ce théorème et le théorème correspondant pour les opérateurs de révision (théorème 16), on en déduit facilement le résultat suivant :

Théorème 30 *Soit un opérateur de révision $\circ$ satisfaisant les postulats (R1)-(R6), alors l'opérateur $\diamond$ défini par :*

$$\varphi \diamond \mu = \bigvee_{I \models \varphi} \varphi_{\{I\}} \circ \mu$$

est un opérateur de mise à jour satisfaisant (U1)-(U8).

Il est donc possible de définir un opérateur de mise à jour à partir d'un opérateur de révision donné.

Le problème général soulevé par le travail de Katsuno et Mendelzon est celui de l'ontologie des opérateurs de changement de la connaissance. En effet, lorsque l'on définit un type d'opérateurs de changement, il faut soigneusement décrire le type d'applications et les hypothèses faites par ces opérateurs. Il est par exemple utile de spécifier la nature de la nouvelle information : observations, connaissances, croyances... Friedman et Halpern [FH96] ont critiqué ce manque dans le cadre AGM et ont souligné l'importance d'attacher une ontologie à chaque définition d'opérateurs.

La plupart des travaux dans le domaine de la mise à jour étant la définition d'opérateurs pour des applications particulières, le travail de Katsuno et Mendelzon est une tentative de caractérisation logique de ces opérateurs au même titre que celle proposée par AGM dans le cadre de la révision.

Et comme la révision, la caractérisation logique des opérateurs de mise à jour a également subie des critiques (voir par exemple [HR98, DdSCP95, dSC96]). Le problème est que dans ce cadre la caractérisation logique n'a pas été appuyée par un ensemble de théorèmes de représentation. Cette caractérisation est donc, dans ce sens, plus fragile que la caractérisation AGM.

Bibliographie

[AGM85] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[ALP+98] J. J. Alferes, J. A. Leite, L. M. Pereira, H. Przymusinska, and T. C. Przymusinski. Dynamic logic programming. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 98–109. Morgan Kaufmann, 1998.

[AM82] C. E. Alchourrón and D. Makinson. The logic of theory change: Contraction functions and their associated revision functions. *Theoria*, 48:14–37, 1982.

[AM85] C. E. Alchourrón and D. Makinson. On the logic of theory change: Safe contraction. *Studia Logica*, 44:405–422, 1985.

[AM86] C. E. Alchourrón and D. Makinson. Maps between some different kinds of contraction function: the finite case. *Studia Logica*, 45:187–198, 1986.

[Arr63] K. J. Arrow. *Social choice and individual values.* Wiley, New York, second edition, 1963.

[AV91] S. Abiteboul and V. Vianu. Datalog extensions for database queries and updates. *Journal of Computer and System Sciences*, 43:62–124, 1991.

[BCD+93] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proceedings of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–645, 1993.

[BDL+98] S. Benferhat, D. Dubois, J. Lang, H. Prade, A. Saffioti, and P. Smets. A general approach for inconsistency handling and merging information in prioritized knowledge bases. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 466–477, 1998.

[BDP97] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Some syntactic approaches to the handling of inconsistent knowledge bases: a comparative study, part 1: the flat case. *Studia Logica*, 58:17–45, 1997.

[BDP99] S. Benferhat, D. Dubois, and O. Papini. A sequential reversible belief revision method based on polynomials. In *Proceedings of the Sixteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'99)*, 1999.

[BFH98] C. Boutilier, N. Friedman, and J. Y. Halpern. Belief revision with unreliable informations. In *Proceedings of the Fifteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'98)*, 1998.

[BGMS98] B. Bessant, E. Grégoire, P. Marquis, and L. Sais. Combining nonmonotonic reasoning and belief revision : a pratical approach. In *Proceedings of the Interna-*

tional Conference on Artificial Intelligence : Methodology, Systems, Applications (AIMSA'98), pages 115–128. Springer Verlag, 1998. Lecture Notes on Artificial Intelligence 1480.

[BGMS99] B. Bessant, E. Grégoire, P. Marquis, and L. Sais. *Frontiers of belief revision*, chapter Iterated syntax-based revision in a nonmonotonic setting. Kluwer, 1999.

[BJKP97] H. Bezzazi, S. Janot, S. Konieczny, and R. Pino Pérez. Forward chaining and change operators. In *Proceedings of DYNAMICS'97, Workshop on (Trans)Actions and change in logic programming and deductive databases*, Port Jefferson, N.Y., 1997.

[BJKP98] H. Bezzazi, S. Janot, S. Konieczny, and R. Pino Pérez. Analysing rational properties of change operators based on forward chaining. In B. Freitag, H. Decker, M. Kifer, and A. Voronkov, editors, *Transactions and Change in Logic Databases*, Lecture Notes in Computer Science, pages 317–339. Springer Verlag, 1998.

[BKM91] C. Baral, S. Kraus, and J. Minker. Combining multiple knowledge bases. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 3(2):208–220, 1991.

[BKMS92] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8(1):45–71, 1992.

[BKPP] S. Benferhat, S. Konieczny, O. Papini, and R. Pino Pérez. Révision itérée par état épistémique. submitted.

[BKPP99] S. Benferhat, S. Konieczny, O. Papini, and R. Pino Pérez. Révision itérée basée sur la primauté forte des observations. In *Journées Nationales sur les Modèles de raisonnement (JNMR'99)*, Paris, 1999. Electronic proceedings http://www.irit.fr/GDRI3-ModRais/articlesJNMR.html.

[BMP97] H. Bezzazi, D. Makinson, and R. Pino Pérez. Beyond rational monotony: Some strong non-horn rules for nonmonotonic inference relations. *Journal of Logic and Computation*, 7:605–631, 1997.

[Bor85] A. Borgida. Language features for flexible handling of exceptions in information systems. *ACM Transactions on Database Systems*, 10:563–603, 1985.

[Bou92a] C. Boutilier. *Conditional logics for default reasoning and belief revision.* PhD thesis, University of Toronto, 1992.

[Bou92b] C. Boutilier. Normative, subjunctive and autoepistemic defaults: Adopting the ramsey test. In *Proceedings of the Third International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 685–696, 1992.

[Bou93] C. Boutilier. Revision sequences and nested conditionals. In *Proceedings of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, 1993.

[Bou96] C. Boutilier. Iterated revision and minimal change of conditional beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, 25(3):262–305, 1996.

[BP96] H. Bezzazi and R. Pino Pérez. Rational transitivity and its models. In *Proceedings of the Twenty Sixth International Symposium on Multiple-Valued Logics*, pages 160–165. IEEE Computer Society Press, 1996.

[Bre89] G. Brewka. Preferred subtheories: an extended logical framework for default reasoning. In *Proceedings of the Eleventh International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, pages 1043–1048, 1989.

[Cho93] L. Cholvy. Proving theorems in a multi-sources environment. In *Proceedings of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 66–71, 1993.

[Cho95] L. Cholvy. Automated reasoning with merged contradictory information whose reliability depends on topics. In *Proceedings of the Third European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU'95)*, 1995.

[Cho98] L. Cholvy. Reasoning about data provided by federated deductive databases. *Journal of Intelligent Information Systems*, 10(1), 1998.

[CMH+94] S. Chawathe, H. Garcia Molina, J. Hammer, K. Ireland, Y. Papakonstantinou, J. Ullman, and J. Widom. The tsimmis project: Integration of heterogeneous information sources. In *Proceedings of IPSJ Conference*, pages 7–18, October 1994.

[Dal88a] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision: preliminary report. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 475–479, 1988.

[Dal88b] M. Dalal. Updates in propositional databases. Technical report, Rutgers University, 1988.

[dC85] Marquis de Condorcet. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris, 1785.

[DdSCP95] D. Dubois, F. Dupin de Saint-Cyr, and H. Prade. Update postulates without inertia. In *Proceedings of the Third European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU'95)*, LNAI 946, pages 162–170, 1995.

[del97] A. del Val. Belief revision and non-monotonic reasoning: Syntactic, semantic, foundational and coherence approaches. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 7:213–240, 1997.

[DFP96] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Refinements of the max-min approach to decision-making in fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, 81:103–122, 1996.

[dK86] J. de Kleer. An assumption-based TMS. *Artificial Intelligence*, 28(2):127–162, 1986.

[DLP94] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3 : Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning, chapter Possibilistic Logic. Oxford Science Publications, 1994.

[DNP94] C. Damasio, W. Nedjdl, and L. M. Pereira. Revise: An extended logic programming system for revising knowledge bases. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 607–618. Morgan Kaufmann, 1994.

[Doy79] J. Doyle. A truth maintenance system. *Artificial Intelligence*, 12(3):231–272, 1979.

[Doy92] J. Doyle. *Belief revision*, chapter Reason maintenance and belief revision: foundations versus coherence theories, pages 29–51. Cambridge University Press, 1992.

[DP91] D. Dubois and H. Prade. Epistemic entrenchment and possibilistic logic. *Artificial Intelligence*, 50:223–239, 1991.

[DP94] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. In Morgan Kaufmann, editor, *Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge: Proceedings of the 1994 Conference (TARK'94)*, pages 5–23, 1994.

[DP97] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89:1–29, 1997.

[dSC96] F. Dupin de Saint-Cyr. *Gestion des croyances et de l'évolutif en logiques pondérées.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1996.

[dSCLS94] F. Dupin de Saint-Cyr, J. Lang, and T. Schiex. Gestion de l'inconsistance dans les cases de connaissances : une approche syntaxique basée sur la logique des pénalités. In *Actes du neuvième congrès Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, 1994.

[Dub86] D. Dubois. Belief structures, possibility theory and decomposable confidence measures on finite sets. *Computers and Artificial Intelligence (Bratislava)*, 5(5):403–416, 1986.

[EG92] T. Eiter and G. Gottlob. On the complexity of propositional knowledge base revision , updates, and counterfactuals. *Artificial Intelligence*, 57(2-3):227, 270 1992.

[Eth88] D. Etherington. *Reasoning with incomplete information.* Morgan Kaufmann, 1988.

[Fer99a] E. Fermé. Five faces of recovery. In H. Rott and M. A. Williams, editors, *Frontiers of Belief Revision.* Kluwer, 1999.

[Fer99b] E. Fermé. *Revising the AGM Postulates.* PhD thesis, University of Buenos Aires, 1999.

[FH96] N. Friedman and J.Y. Halpern. Belief revision: a critique. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'96)*, pages 421–431, 1996.

[FH99] E. Fermé and S. O. Hansson. Selective revision. *Studia Logica*, 63(3):331–342, 1999.

[FKUV86] R. Fagin, G. M. Kuper, J. D. Ullman, and M. Y. Vardi. Updating logical databases. *Advances in Computing Research*, 3:1–18, 1986.

[FL94] M. Freund and D. Lehmann. Belief revision and rational inference. Technical Report TR-94-16, Institute of Computer Science, The Hebrew University of Jerusalem, 1994.

[Fre93] M. Freund. Injective models and disjunctive relations. *Journal of Logic and Computation*, 3:231–247, 1993.

[Fuh91] A. Fuhrmann. Theory contraction through base contraction. *Journal of Philosophical Logic*, 20:175–203, 1991.

[FUV83] R. Fagin, J. D. Ullman, and M. Y. Vardi. On the semantics of updates in databases. In *Proceedings of the 2nd ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on the Principles of Database Systems*, pages 352–365, 1983.

[Gab85] D. M. Gabbay. Theoretical foundations for nonmonotonic reasoning in experts systems. In K. Apt, editor, *Logic and Models of Concurrent Systems.* Springer Verlag, 1985.

[Gär88] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux.* MIT Press, 1988.

[Gär90] P. Gärdenfors. Belief revision and nonmonotonic logic: two sides of the same coin? In *Proceeding of the Ninth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'90)*, pages 768–773, 1990.

[Gef92] H. Geffner. *Default reasoning: Causal and Conditional Theories.* MIT Press, 1992.

[GP96] M. Goldszmidt and J. Pearl. Qualitative probabilities for default reasoning, belief revision, and causal modeling. *Artificial Intelligence*, 84:57–112, 1996.

[Gro88] A. Grove. Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17(157-180), 1988.

[Han89] S. O. Hansson. New operators for theory change. *Theoria*, 55:114–132, 1989.

[Han91a] S. O. Hansson. *Belief base dynamics.* PhD thesis, Uppsala University, 1991.

[Han91b] S. O. Hansson. Belief contraction without recovery. *Studia Logica*, 50(2):251–260, 1991.

[Han93] S. O. Hansson. Reversing the levi identity. *Journal of Philosophical Logic*, 22:637–669, 1993.

[Han97] S. O. Hansson. Semi-revision. *Journal of applied non-classical logic*, 7:151–175, 1997.

[Han98a] S. O. Hansson. *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 3, chapter Revision of belief sets and belief bases, pages 17–75. Kluwer, 1998.

[Han98b] S. O. Hansson. What's new isn't always best. *Theoria*, pages 1–13, 1998. Special issue on non-prioritized belief revision.

[Har86] G. Harman. *Change in view: principles of reasoning.* MIT Press, 1986.

[HR98] A. Herzig and O. Rifi. Update operations: a review. In *Proceedings of the Thirteenth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'98)*, pages 13–17, 1998.

[Kel78] J. S. Kelly. *Arrow impossibility theorems.* Series in economic theory and mathematical economics. Academic Press, New York, 1978.

[Kel88] J. S. Kelly. *Social Choice Theory : An Introduction.* Springer-Verlag, 1988.

[KLM90] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44:167–207, 1990.

[KM91a] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91)*, pages 387–394, 1991.

[KM91b] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.

[Kon96a] S. Konieczny. Révision de la connaissance et coopération. Technical report, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, juillet 1996. Mémoire de DEA.

[Kon96b] S. Konieczny. Vers une modélisation de la coopération. In F. Anceaux and J. M. Coquery, editors, *Actes du sixième Colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive*, pages 227–231, décembre 1996.

[Kon98] S. Konieczny. Operators with memory for iterated revision. Technical report, LIFL, 1998. IT-314.

[KP97] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the difference between arbitration and majority merging. In *4th Workshop on Logic, Language, Information and Computation*, Fortaleza, Brasil, 1997.

[KP98] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[KP99a] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Fusion avec contraintes d'intégrité. In *Journées Nationales sur les Modèles de raisonnement (JNMR'99)*, Paris, 22-23 Mars 1999. Electronic proceedings http://www.irit.fr/GDRI3-ModRais/articlesJNMR.html.

[KP99b] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proceedings of the Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1638, pages 233–244, 1999.

[KW85] A. M. Keller and M. Winslett. On the use of an extended relational model to handle changing incomplete information. *IEEE Transaction on Software Engineering*, SE-11(7):620–633, 1985.

[Lan91] J. Lang. *Logique possibiliste : aspects formels, déduction automatique et applications.* PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse, 1991.

[Leh95] D. Lehmann. Belief revision, revised. In *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1534–1540, 1995.

[Lev88] I. Levi. Iteration of conditionals and the ramsey test. *Synthese*, 76:49–81, 1988.

[Lew73] D. Lewis. *Counterfactuals.* Basil Blackwell, 1973.

[Lib97] P. Liberatore. The complexity of iterated belief revision. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Database Theory (ICDT'97)*, pages 276–290, 1997.

[Lin95] J. Lin. *Frameworks for dealing with conflicting information and applications.* PhD thesis, University of Toronto, 1995.

[LM92] D. Lehmann and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail? *Artificial Intelligence*, 55:1–60, 1992.

[LM98] J. Lin and A. O. Mendelzon. Merging databases under constraints. *International Journal of Cooperative Information System*, 7(1):55–76, 1998.

[LM99] J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. In *Dynamic Worlds: From the Frame Problem to Knowledge Management.* Kluwer, 1999.

[LR91] S. Lindström and W. Rabinowicz. Epistemic entrenchment with incomparabilities and relational belief revision. In A. Furmann and M. Morreau, editors, *The logic of theory change*, pages 93–126. 1991.

[LS95] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration: A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the Second World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, pages 217–228, 1995.

[LS98] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1):76–90, 1998.

[Mak87] D. Makinson. On the status ot he postulate of recovery in the logic of theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 16:383–394, 1987.

[Mak89] D. Makinson. General theory of cumulative inference. In *Non-Monotonic Reasoning*, volume 346 of *Lectures Notes in Artificial Intelligence*, pages 1–18, 1989.

[Mak94] D. Makinson. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume III, chapter General Pattern in nonmonotonic reasoning, pages 35–110. Clarendon Press, Oxford, 1994.

[Mak98] D. Makinson. Screened revision. *Theoria*, pages 14–23, 1998. Special issue on non-prioritized belief revision.

[MG89] D. Makinson and P. Gärdenfors. Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic. In *The Logic of Theory Change, Workshop, Konstanz, FRG*, volume 465 of *LNAI*, pages 185–205, 1989.

[MIR94] R. J. Miller, Y. E. Ioannidis, and R. Ramakrishnan. Schema equivalence in heterogeneous systems: bridging theory and practice. In *Proceedings of the International Conference on Extending Database Technology*, 1994.

[Mou88] H. Moulin. *Axioms of cooperative decision making*. Monograph of the Econometric Society. Cambridge University Press, 1988.

[MT94] V. Marek and M. Truszczynski. Revision specifications by means of programs. In *Proceedings of JELIA'94*. Springer Verlag, 1994. Lecture Notes in Artificial Intelligence.

[MT95] V. Marek and M. Truszczynski. Revision programming, database updates and integrity constraints. In *Proceedings of the Fifth International Conference of Database Theory*, pages 368–382, 1995. Lecture Notes in Computer Science 893.

[Neb89] B. Nebel. A knowledge level analysis of belief revision. In *Proceedings of the First International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'89)*, pages 301–311, 1989.

[Neb91] B. Nebel. Belief revision and default resoning: syntax-based approaches. In *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91)*, pages 417–428, 1991.

[Neb94] B. Nebel. Base revision operations and schemes: semantics, representation, and complexity. In *Proceedings of the Eleventh European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'94)*, pages 341–345, 1994.

[Neb96] B. Nebel. *How hard is it to revise a belief base?* PhD thesis, University of Freiburg, 1996.

[NFPS94] A. C. Nayak, N. Y. Foo, M. Pagnucco, and A. Sattar. Entrenchment kinematics 101. In *Proceedings of the Seventh Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 157–164, 1994.

[NFPS96] A. C. Nayak, N. Y. Foo, M. Pagnucco, and A. Sattar. Changing conditional beliefs unconditionally. In *Proceedings of the Sixth Conference of Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK'96)*, pages 119–135. Morgan Kaufmann, 1996.

[Nie91] R. Niederée. Multiple contraction. a further case against gärdenfors' principle of recovery. In A. Furmann and M. Morreau, editors, *The Logic of Theory Change*, pages 322–334. 1991.

[Par97] V. Pareto. *Cours d'économie politique*. Rouge, Lausanne, 1897.

[Pea90] J. Pearl. System z: a natural ordering of defaults with tractable applications to nonmonotonic reasoning. In *Proceedings of the Third Conference on Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge (TARK'90)*, 1990.

[PU99] R. Pino Pérez and C. Uzcategui. On representation theorems for nonmonotonic inference relation. *Journal of Symbolic Logic*, 1999. To appear.

[Ram31] F. P. Ramsey. *Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, chapter General Propositions and Causality, pages 237–257. 1931.

[Rei80] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13:81–132, 1980.

[Rev93] P. Z. Revesz. On the semantics of theory change: arbitration between old and new information. In *Proceedings of the* 12^{th} *ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*, pages 71–92, 1993.

[Rev97] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2):133–160, 1997.

[Rya91] M. D. Ryan. Defaults and revision in structured theories. In *Proceedings of the Sixth IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'91)*, pages 362–373. Morgan Kaufmann, 1991.

[Rya92] M. D. Ryan. *Ordered Presentations of Theories.* PhD thesis, Imperial College, London, 1992.

[Rya94] M. D. Ryan. Belief revision and ordered theory presentations. In A. Fuhrmann and H. Rott, editors, *Logic, Action and Information.* De Gruyter Publishers, 1994. Also in Proceedings of the Eighth Amsterdam Colloquium on Logic, University of Amsterdam, 1991.

[SAB+] V.S. Subrahmanian, Sibel Adali, Anne Brink, Ross Emery, James J. Lu, Adil Rajput, Timothy J. Rogers, Robert Ross, and Charles Ward. Hermes: Heterogeneous reasoning and mediator system.

[Sav71] L. J. Savage. *The foundations of statistics.* Dover Publications, New York, 1971. Second revised edition.

[Sch98] K. Schlechta. Non-prioritized belief revision based on distances between models. *Theoria*, pages 34–53, 1998. Special issue on non-prioritized belief revision.

[Sen79] A. K. Sen. *Collective Choice and Social Welfare.* Advanced Textbooks in Economics. Elsevier, 1979.

[SK94] P. Smets and R. Kennes. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66(2):191–234, 1994.

[SLM96] K. Schlechta, D. Lehmann, and M. Magidor. Distance semantics for belief revision. In *Proceedings of the Sixth Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK'96)*, pages 137–145, 1996.

[Spo87] W. Spohn. Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic states. In W. L. Harper and B. Skyrms, editors, *Causation in Decision, Belief Change, and Statistics*, volume 2, pages 105–134. 1987.

[Spo90] W. Spohn. A general non-probabilistic theory of inductive reasoning. In *Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 149–158. Elsevier Science, 1990.

[SSU91] A. Silberschatz, M. Stronebraker, and J. D. Ullman. Database systems: Achievements and opportunities. *Communications of the ACM*, 34(10):110–120, 1991.

[Sta68] R. C. Stalnaker. *Ifs*, chapter A theory of conditionals, pages 41–55. D. Reidel, Dordrecht, 1968.

[Sub94] V. S. Subrahmanian. Amalgamating knowledge bases. *ACM Transactions on Database systems.*, 19(2):291–331, 1994.

[Tar56] A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamathematics.* Clarendon Press Oxford, 1956. Papers from 1923 to 1938. Translated by J. H. Woodger.

[Ull88] J. D. Ullman. *Principles of databases and knowledge-base systems.* Computer Science Press, Rockville, MD, 1988.

[WFPS95] M. A. Williams, N. Foo, M. Pagnucco, and B. Sims. Determining explanations using transmutations. In *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 822–830, 1995.

[Wil94] M. A. Williams. Transmutations of knowledge systems. In *Proceedings of the Fourth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 619–629, 1994.

[Win88] M. Winslett. Reasoning about action using a possible model approach. In *Proceedings of the Seventh National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 89–93, 1988.

[Win90] M. Winslett. *Updating logical databases.* Cambridge University Press, 1990.

[Zad78] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis of a theory of possibility. *Fuzzy sets and Systems*, 1:3–28, 1978.