Une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement pré-ordonnées

Safa Yahi[1], Salem Benferhat[1], Sylvain Lagrue[1],
Mariette Sérayet[2], Odile Papini[2]

[1] Université Lille-Nord de France,
Artois, F-62307 Lens, CRIL, F-62307 Lens
CNRS UMR 8188, F-62307 Lens
{yahi,benferhat,lagrue}@cril.univ-artois.fr

[2] LSIS-CNRS UMR 6168,
Université de la Méditerranée, ESIL,
163 av. de Luminy - 13288 Marseille Cedex 09. France
{serayet,papini}@esil.univmed.fr

Résumé : L'inférence lexicographique à partir de bases de croyances totalement pré-ordonnées, est intéressante d'un point de vue théorique, pratique et psychologique. Par ailleurs, les bases de croyances partiellement pré-ordonnées offrent plus de flexibilité afin de représenter efficacement des connaissances incomplètes. Dans cet article, nous proposons une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement pré-ordonnées qui étend l'inférence lexicographique classique. Nous proposons deux définitions équivalentes. La première, assez naturelle, consiste à appliquer l'inférence lexicographique classique sur toutes les bases totalement pré-ordonnées compatibles. La seconde revient à appliquer l'inférence classique sur les sous-bases cohérentes qui sont préférées par rapport à une nouvelle relation de préférence lexicographique. De plus, nous présentons une caractérisation sémantique de l'inférence proposée, nous montrons qu'elle satisfait les propriétés du système P et qu'elle est plus productive que les extensions possibiliste et celle basée sur l'inclusion.

Mots-clés : Raisonnement en présence d'incohérence, pré-ordre partiel, Inférence lexicographique.

1 Introduction

En Intelligence Artificielle, le raisonnement en présence d'incohérence est un problème important que l'on rencontre dans diverses situations telles que le raisonnement tolérant les exceptions, la révision de croyances, la fusion d'informations provenant de sources multiples, éventuellement conflictuelles, le raisonnement incertain ou en présence d'informations incomplètes, etc. Dans ce cas, l'inférence classique ne peut être directement appliquée puisqu'à partir d'une base incohérente, on peut déduire n'importe quoi. Différentes approches ont été proposées pour raisonner en présence d'incohérence. Certaines consistent à affaiblir la relation d'inférence à l'instar des logiques paraconsistantes da Costa (1974), d'autres affaiblissent les croyances disponibles telles que les approches basées sur la restauration de la cohérence qui sont assez populaires. La plupart des approches basées sur la restauration de la cohérence Resher & Manor (1970) sont définies à partir de bases de croyances totalement pré-ordonnées comme l'inférence possibiliste Dubois *et al.* (1994), l'inférence linéaire Nebel (1994), l'inférence basée sur l'inclusion Brewka (1989) et l'inférence lexicographique Benferhat *et al.* (1993); Lehmann (1995). Par ailleurs, les bases de croyances partiellement pré-ordonnées offrent plus de flexibilité pour représenter efficacement des connaissances incomplètes, et permettent d'éviter de comparer des informations qui sont incomparables. En effet, dans de nombreuses applications, la relation de priorité associée aux croyances disponibles n'est que partiellement définie, et astreindre l'utilisateur à rajouter des priorités afin de les pré-ordonner d'une manière totale pourrait conduire à inférer des conclusions indésirables.

Cette flexibilité a motivé la définition de nouvelles approches basées sur la restauration de la cohérence qui sont dédiées aux bases de croyances partiellement pré-ordonnées, et ce, en général, par extension de celles qui sont définies dans le cadre totalement pré-ordonné. Par exemple, on peut citer l'extension de l'inférence possibiliste proposée dans Benferhat *et al.* (2004b) et l'extension de l'inférence basée sur l'inclusion donnée par Junker & Brewka (1989). Néanmoins, aucune extension n'a été proposée pour l'inférence lexicographique bien qu'elle soit dotée de propriétés intéressantes d'un point de vue théorique et pratique. En fait, elle est plus productive que l'inférences possibiliste et l'inférence basée sur l'inclusion. En outre, dans une étude psychologique réalisée dans Benferhat *et al.* (2004a) dans le contexte du raisonnement par défaut, il a été prouvé qu'elle est la plus intéressante par rapport aux autres relations d'inférence considérées dans la même étude.

Dans cet article, nous proposons une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement pré-ordonnées qui étend l'inférence lexicographique classique. Deux définitions équivalentes sont proposées. La première, assez naturelle, consiste à appliquer l'inférence lexicographique classique sur toutes les bases totalement pré-ordonnées compatibles. Quand à la seconde, elle revient à appliquer l'inférence classique sur les sous-bases cohérentes qui sont préférées par rapport à une nouvelle relation de préférence lexicographique. De plus, nous présentons une caractérisation sémantique de l'inférence proposée et nous montrons qu'elle satisfait les propriétés du système P.

L'article s'articule comme suit. Après une section préliminaire qui fixe les notations et rappelle l'inférence lexicographique classique, nous présentons en Section 3 la première définition de l'inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement pré-ordonnées. Celle-ci consiste à appliquer l'inférence lexicographique classique sur toutes les bases totalement pré-ordonnées compatibles. La Section 4 présente une nouvelle relation de préférence lexicographique entre les sous-bases cohérentes d'une base de croyances partiellement pré-ordonnées. Nous proposons ensuite, en Section 5, la deuxième définition de l'inférence lexicographique qui revient à appliquer l'inférence classique sur les sous-bases cohérentes qui sont préférées, puis nous montrons l'équivalence des deux définitions. La caractérisation sémantique de l'inférence lexicographique est présentée en Section 6 ainsi que quelques propriétés, en particulier, nous montrons qu'elle satisfait les propriétés du système P avant de conclure en Section 7.

2 Préléminaires

2.1 Notations

Soit V un ensemble fini de variables propositionnelles, notées par les lettres romaines miniscules $a, b, \ldots$ Le langage propositionnel, noté PL_V, est construit à partir de V, de $\{\top, \bot\}$ pour la tautologie et la contradiction respectivement, et des connecteurs usuels $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$. Les formules de PL_V sont notées par les lettres grecques $\phi, \varphi, \psi, \ldots$ La relation d'inférence classique est notée $\vdash$. Soit Σ un ensemble fini de formules, l'ensemble de toutes les bases cohérentes de Σ est noté $CONS(\Sigma)$ et l'ensemble des toutes ses bases maximales (par rapport à l'inclusion ensembliste) cohérentes est noté $MCONS(\Sigma)$. L'ensemble des interprétations est noté $\mathcal{W}$. Soit ϕ une formule propositionnelle, $Mod(\phi)$ représente l'ensemble des modèles de ϕ.

Un pré-ordre partiel $\preceq$ sur un ensemble fini A est une relation binaire réflexive et transitive. $a \preceq b$ exprime que a est au moins aussi préféré que b. Un ordre strict $\prec$ sur A est une relation binaire irreflexive et transitive. $a \prec b$ signifie que a est strictement préféré à b. Il est défini comme suit : $a \prec b$ si et seulement si $a \preceq b$ est vérifié alors que $b \preceq a$ ne l'est pas. L'équivalence, notée par $\approx$, est définie par $a \approx b$ si et seulement si $a \preceq b$ et $b \preceq a$. De plus, nous définissons l'incomparabilité, notée $\sim$, par $a \sim b$ si et seulement si ni $a \preceq b$ ni $b \preceq a$ ne sont vérifiés. L'ensemble des éléments minimaux de A par rapport à $\prec$, noté $Min(A, \prec)$, est défini par : $Min(A, \prec) = \{a \in A, \nexists b \in A : b \prec a\}$. Un pré-ordre total $\leq$ sur un ensemble fini A est une relation binaire réflexive et transitive telle que $\forall a, b \in A$, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

2.2 Un bref rappel sur l'inférence lexicographique classique

Une base de croyances totalement pré-ordonnées $(\Sigma, \leq)$ est un ensemble Σ de formules logiques classiques muni d'un pré-ordre total $\leq$ reflétant la relation de priorité existant entre les formules. $(\Sigma, \leq)$ peut être donnée sous forme d'une base stratifiée $(\Sigma, \leq) = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ telle que les formules dans la strate S_i sont plus prioritaires que celles de la strate S_j pour $j > i$, avec $1 \leq i \leq m$, et $1 \leq j \leq m$.

De nombreuses approches basées sur la restauration de la cohérence ont été développées afin de raisonner à partir de bases de croyances totalement pré-ordonnées. Selon l'analyse de Pinkas & Loui (1992), l'inférence basée sur la restauration de cohérence est un processus à deux étapes qui consiste à générer dans un premier temps les sous-bases cohérentes préférées, puis à appliquer l'inférence classique sur certaines d'entre elles. Parmi ces approches, on peut citer l'inférence possibiliste Dubois *et al.* (1994), l'inférence basée sur l'inclusion Brewka (1989) et l'inférence lexicographique Benferhat *et al.* (1993); Lehmann (1995) autour de laquelle s'articule cet article.

La préférence lexicographique entre les sous-bases cohérentes d'une base de croyances totalement pré-ordonnées est définie comme suit :

Définition 1
Soit une base de croyances totalement pré-ordonnées $(\Sigma, \leq) = S_1 \cup \ldots \cup S_m$. Soient A et B deux sous-bases cohérentes de Σ. Alors, (i) $A <_{lex} B$ ssi $\exists i$, $1 \leq i \leq m$ tel que $|S_i \cap A| > |S_i \cap B|$ [1] et $\forall j$, $j < i$, $|S_j \cap B| = |S_j \cap A|$, (ii) $A =_{lex} B$ ssi $\forall i$, $1 \leq i \leq m : |S_i \cap A| = |S_i \cap B|$.

Dans la suite, l'ensemble de toutes les sous-bases cohérentes lexicographiquement préférées de Σ est noté $Lex(\Sigma, \leq)$ et $Lex(\Sigma, \leq) = Min(CONS(\Sigma), <_{lex})$. On peut facilement vérifier que chaque élément de $Lex(\Sigma, \leq)$ est une sous-base maximale cohérente de $(\Sigma, \leq)$. L'inférence lexicographique à partir de $(\Sigma, \leq)$ est donnée par la définition suivante :

Définition 2
Soit $(\Sigma, \leq)$ une base de croyances totalement pré-ordonnées et soit ψ une formule propositionnelle. ψ est une conséquence lexicographique de $(\Sigma, \leq)$, notée $\Sigma \vdash_{lex} \psi$, si et seulement si ψ est une conséquence classique de toute sous-base cohérente lexicographiquement préférée de $(\Sigma, \leq)$. Plus formellement : $(\Sigma, \leq) \vdash_{lex} \psi$ ssi $\forall B \in Lex(\Sigma, \leq) : B \vdash \psi$.

L'inférence basée sur l'inclusion, notée par $\vdash_{incl}$, est définie de façon analogue en remplaçant la comparaison basée sur la cardinalité par celle basée sur l'inclusion : $A <_{incl} B$ ssi $\exists i$, $1 \leq i \leq m$ tel que $(S_i \cap B) \subset (S_i \cap A)$ et $\forall j$, $j < i$, $(S_j \cap B) = (S_j \cap A)$.

Enfin, l'inférence possibiliste, notée par $\vdash_\pi$, revient à appliquer l'inférence classique à la base classique $\{\bigcup_{i=1}^{s-1} S_i\}$, où s est le plus petit indice tel que $\bigcup_{i=1}^{s} S_i$ est incohérente.

3 Une première définition de l'inférence lexicographique

Nous rappelons, dans un premier temps, la notion de bases totalement pré-ordonnées compatibles avec une base de croyances partiellement pré-ordonnées. Intuitivement, une base de croyances totalement pré-ordonnées $(\Sigma, \leq)$ est dite compatible avec une base de croyances partiellement pré-ordonnées $(\Sigma, \preceq)$ si et seulement si le pré-ordre total $\leq$ étend le pré-ordre partiel $\preceq$. Plus formellement : (i) $\forall \varphi, \phi \in \Sigma$: si $\varphi \preceq \phi$ alors $\varphi \leq \phi$, (ii) $\forall \varphi, \phi \in \Sigma$: si $\varphi \prec \phi$ alors $\varphi < \phi$.

Par la suite, l'ensemble de toutes les bases de croyances totalement pré-ordonnées compatibles avec $(\Sigma, \preceq)$ est noté $\mathcal{C}(\Sigma, \preceq)$.

Nous définissons maintenant une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement pré-ordonnées, et ce en s'appuyant sur la notion de bases de croyances totalement pré-ordonnées compatibles comme suit :

Définition 3
Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et soit ψ une formule propositionnelle. ψ est une conséquence $\mathcal{C}$-lexicographique de $(\Sigma, \preceq)$, notée $(\Sigma, \preceq$

[1] $|A|$ dénote le nombre de formules de A.

) $\vdash^{\mathcal{C}}_{lex} \psi$, si et seulement si ψ est une conséquence lexicographique classique de chaque base de croyances totalement pré-ordonnées compatible avec $(\Sigma, \preceq)$. Plus formellement : $(\Sigma, \preceq) \vdash^{\mathcal{C}}_{lex} \psi$ ssi $\forall (\Sigma, \leq) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq) : (\Sigma, \leq) \vdash_{lex} \psi$.

Cette relation d'inférence est assez naturelle. En effet, la notion de bases de croyances totalement pré-ordonnées compatibles est très intuitive et a été considérée par d'autres auteurs (mais pas par rapport à l'inférence lexicographique) comme l'extension possibiliste donnée par Benferhat *et al.* (2003) et l'extension basée sur l'inclusion proposée par Junker & Brewka (1989). Nous illustrons l'inférence $\mathcal{C}$-lexicographique avec l'exemple suivant que utilisons tout au long de l'article.

Exemple 1
Cet exemple est issu d'une application du projet européen VENUS qui traite de la gestion d'informations archéologiques sous-marines. L'une des tâches concerne la mesure fondée sur la connaissance archéologique et nécessite la fusion d'informations provenant de plusieurs sources. Par exemple, plusieurs agents, munis d'appareils de mesure variés observent des amphores sur un site archéologique. Selon le premier agent, il s'agit d'une amphore Dressel 7 (d) dont la hauteur est 70 cm (h). Selon le second, l'amphore a une lèvre d'un diamètre de 15 cm (r) et une hauteur de 75 cm ($\neg h$). Selon le troisième, le diamètre de l'amphore est de 18 cm ($\neg r$). Le premier agent est moins fiable que les autres et on ne sait pas si le second agent est plus fiable que le troisième. Une autre source d'informations est l'information archéologique sur les amphores de type Dressel 7 qui ont été consignées dans un fichier XML par un quatrième agent qui est moins fiable que les trois autres. Selon le fichier XML, une Dressel 7 a une lèvre d'un diamètre compris entre 9.00 et 15.00 cm et une hauteur comprise entre 50.00 et 70.00 cm ($d \rightarrow r \wedge h$). L'ensemble de formules est $\Sigma = \{d \rightarrow r \wedge h, d, r, \neg h, \neg r, h\}$ et le pre-ordre partiel $\preceq$ sur Σ est donné par la figure 1, où l'arc "$a \rightarrow b$" représente $b \prec a$.

$$\begin{tikzcd}
\neg r & & r \approx \neg h \\
& d \approx h \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& d \rightarrow r \wedge h \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 1 – Le pré-ordre partiel $\preceq$ sur Σ

Les 3 pré-ordres totaux compatibles avec $\preceq$ sont $\leq^1$: $\{\neg r =^1 r,\ \neg r =^1 \neg h,\ r =^1 \neg h,\ \neg r <^1 d,\ r <^1 d,\ \neg h <^1 d,\ d =^1 h,\ d <^1 d \rightarrow r \wedge h\}$, $\leq^2$: $\{\neg r <^2 r,\ \neg r <^2 \neg h,\ r =^2 \neg h,\ r <^2 d,\ \neg h <^2 d,\ d =^2 h,\ d <^2 d \rightarrow r \wedge h\}$, $\leq^3$: $\{r =^3 \neg h,\ r <^3 \neg r,\ \neg h <^3 \neg r,\ \neg r <^3 d,\ d =^3 h,\ d <^3 d \rightarrow r \wedge h\}$. Par manque de place nous ne donnons que les relations entre les sous-bases maximales cohérentes. Cela n'a aucune incidence sur la définition de la conséquence $\mathcal{C}$-lexicographique. L'ensemble des sous-bases maximales cohérentes de Σ est $MCONS(\Sigma) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$ avec $A_1 = \{d \rightarrow r \wedge h, d, r, h\}$, $A_2 = \{d \rightarrow r \wedge h, \neg r, h\}$, $A_3 = \{d \rightarrow r \wedge h, \neg h, \neg r\}$, $A_4 = \{d \rightarrow r \wedge h, r, \neg h\}$, $A_5 = \{d, \neg r, h\}$, $A_6 = \{d, \neg h, \neg r\}$ et $A_7 = \{d, r, \neg h\}$. Les préferences $\leq^1_{lex}$, $\leq^2_{lex}$ et $\leq^3_{lex}$ sur $MCONS(\Sigma)$ par rapport aux bases de croyances compatibles $(\Sigma, \leq^1), (\Sigma, \leq^2)$ et $(\Sigma, \leq^3)$ respectivement sont $\leq^1_{lex}$: $\{A_6 =^1_{lex} A_7,\ A_6 <^1_{lex} A_3,\ A_3 =^1_{lex} A_4,\ A_3 <^1_{lex} A_1,\ A_1 <^1_{lex} A_5,\ A_5 <^1_{lex} A_2\}$, $\leq^2_{lex}$: $\{A_6 <^2_{lex} A_3,\ A_3 <^2_{lex} A_5,\ A_5 <^2_{lex} A_2,\ A_7 <^2_{lex} A_4,\ A_4 <^2_{lex} A_1\}$ et $\leq^3_{lex}$: $\{A_7 <^2_{lex} A_4,\ A_4 <^2_{lex} A_6,\ A_6 <^2_{lex} A_3,\ A_3 <^2_{lex} A_1,\ A_1 <^2_{lex} A_5,\ A_5 <^2_{lex} A_2\}$. Finalement, nous déduisons $\bigcup_{(\Sigma, \leq^i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} Lex(\Sigma, \leq^i) = \{A_6, A_7\} \cup \{A_6\} \cup \{A_7\} = \{A_6, A_7\}$, et par exemple, d est une consequence $\mathcal{C}$-lexicographique de Σ, puisque $A_6 \vdash d$ et $A_7 \vdash d$.

4 Une nouvelle préférence lexicographique

Nous proposons une nouvelle relation de préférence lexicographique entre les sous-bases cohérentes d'une base de croyances partiellement pré-ordonnées. Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées.

Dans un premier temps, nous partitionnons Σ de la façon suivante : $\Sigma = E_1 \cup \ldots \cup E_n$ $(n \geq 1)$ tel que : (i) $\forall i,\ 1 \leq i \leq n$, nous avons $\forall \varphi, \varphi' \in E_i : \varphi \approx \varphi'$, ; (ii) $\forall i,\ 1 \leq i \leq n, \forall j,\ 1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$, nous avons $\forall \varphi \in E_i, \forall \varphi' \in E_j : \varphi \not\approx \varphi'$.

En d'autres termes, chaque sous ensemble E_i représente une classe d'équivalence de Σ par rapport à la relation d'équivalence $\approx$. Nous définissons, ensuite, une relation de préférence entre les classes d'équivalence E_i's, notée par $\prec_s$, comme suit :

Définition 4
Soient E_i et E_j deux classes d'équivalence de Σ par rapport à $\approx$. Alors, $E_i \prec_s E_j$ ssi $\exists \varphi \in E_i, \exists \varphi' \in E_j$ tel que $\varphi \prec \varphi'$.

La relation $\prec_s$ peut être définie d'une manière équivalente par : $E_i \prec_s E_j$ ssi $\forall \varphi \in E_i, \forall \varphi' \in E_j : \varphi \prec \varphi'$. De plus, on peut facilement vérifier que la relation de préférence $\prec_s$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de E_i est un ordre partiel strict. Enfin, $E_i \sim_s E_j$ si et seulement si ni $E_i \prec_s E_j$ ni $E_j \prec_s E_i$ ne sont vérifiés.

Exemple 2
Soit la base de croyances pré-ordonnées $(\Sigma, \preceq)$ de l'Exemple 1. Σ est partitionné comme suit : $\Sigma = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ avec $E_1 = \{\neg r\}$, $E_2 = \{r, \neg h\}$, $E_3 = \{d, h\}$ et $E_4 = \{d \rightarrow r \wedge h\}$. Selon la Définition 4, nous avons : $E_1 \sim_s E_2$, $E_1 \prec_s E_3$, $E_1 \prec_s E_4$, $E_2 \prec_s E_3$, $E_2 \prec_s E_4$ et $E_3 \prec_s E_4$. L'ordre partiel strict $\prec_s$ est illustré dans la Figure 2.

$$\begin{tikzcd} E_1 & & E_2 \\ & E_3 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & E_4 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

FIG. 2 – L'ordre partiel stict $\prec_s$ sur Σ

Nous proposons maintenant une relation de préférence lexicographique entre les sous-bases cohérentes de $(\Sigma, \preceq)$, notée par $\preceq_\triangle$, comme suit :

Définition 5
Soient $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et A et B deux sous-bases cohérentes de Σ. Alors, A est dite lexicographiquement préférée à B, notée $A \preceq_\triangle B$, si et seulement si $\forall i,\ 1 \leq i \leq n$: si $|E_i \cap B| > |E_i \cap A|$ alors $\exists j,\ 1 \leq j \leq n$ tel que $|E_j \cap A| > |E_j \cap B|$ et $E_j \prec_s E_i$.

La proposition suivante décrit quelques propriétés de la relation de préférence $\preceq_\triangle$:

Proposition 1
Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées. Alors, (1) $\preceq_\triangle$ est un pré-ordre partiel sur l'ensemble des sous-bases cohérentes de Σ. (2) $\preceq_\triangle$ vérifie la propriété de monotonie, c'est à dire : $\forall A, B \subseteq \Sigma$, si $B \subseteq A$ alors $A \preceq_\triangle B$.

L'ordre partiel strict associé à $\preceq_\triangle$ est noté $\prec_\triangle$ et est défini par : $A \prec_\triangle B$, si et seulement si $A \preceq_\triangle B$ et $B \not\preceq_\triangle A$. L'égalité correspondante, notée $\approx_\triangle$, est définie par $A \approx_\triangle B$ ssi $A \preceq_\triangle B$ et $B \preceq_\triangle A$.

La proposition suivante fournit une définition équivalente à l'équivalence $\approx_\triangle$:

Proposition 2
Soit$(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et soient A et B deux sous-bases cohérentes de Σ. Alors, $A \approx_{\triangle} B$ ssi $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap B| = |E_i \cap A|$.

La préférence lexicographique entre les sous-bases cohérentes d'une base de croyances partiellement pré-ordonnées (Définition 5) recouvre la préférence lexicographique classique entre les sous-bases cohérentes d'une base de croyances totalement pré-ordonnées (Définition 1) comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3
Soit une base de croyances totalement pré-ordonnées $(\Sigma, \leq) = S_1 \cup \ldots \cup S_m$, soient A et B deux sous-bases cohérentes de Σ. Alors, (1) $A <_{lex} B$ ssi $A \prec_{\triangle} B$, (2) $A =_{lex} B$ ssi $A \approx_{\triangle} B$.

Exemple 3
Nous illustrons la préférence lexicographique à partir des exemples 1 et 2. Le pré-ordre partiel sur $MCONS(\Sigma)$, obtenu à partir de la Definition 5 est $\preceq_{\triangle}$: $\{A_7 \prec_{\triangle} A_4,\ A_4 \prec_{\triangle} A_1,\ A_3 \prec_{\triangle} A_1,\ A_3 \sim_{\triangle} A_4,\ A_1 \sim_{\triangle} A_5,\ A_1 \sim_{\triangle} A_2,\ A_7 \sim_{\triangle} A_6,\ A_6 \prec_{\triangle} A_3,\ A_3 \prec_{\triangle} A_5,\ A_5 \prec_{\triangle} A_2\}$. Par exemple, $A_3 \prec_{\triangle} A_1$ car nous avons $i = 3$ tel que $|E_3 \cap A_1| > |E_3 \cap A_3|$ et $\exists j, j = 1$ tel que $|E_1 \cap A_3| > |E_1 \cap A_1|$ et $E_1 <_s E_3$. $A_4 \prec_{\triangle} A_1$ car nous avons $i = 3$ tel que $|E_3 \cap A_1| > |E_3 \cap A_4|$ et $\exists j, j = 2$ tel que $|E_2 \cap A_4| > |E_2 \cap A_1|$ et $E_2 <_s E_3$. $A_3 \sim_{\triangle} A_4$ puisque $A_3 \not\prec_{\triangle} A_4$ car nous avons $i = 2$ tel que $|E_2 \cap A_4| > |E_2 \cap A_3|$ mais $\nexists j$ tel que $|E_j \cap A_3| > |E_j \cap A_4|$ et $E_j <_s E_2$. $A_4 \not\prec_{\triangle} A_3$ car nous avons $i = 1$ tel que $|E_1 \cap A_3| > |E_1 \cap A_4|$ mais $\nexists j$ tel que $|E_j \cap A_4| > |E_j \cap A_3|$ et $E_j <_s E_1$.

5 Une deuxième définition de l'inférence lexicographique

Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées. L'ensemble de toutes les sous-bases cohérentes de $(\Sigma, \preceq)$ qui sont lexicographiquement préférées est noté $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq)$, et $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) = Min(CONS(\Sigma), \prec_{\triangle})$. On peut facilement vérifier que chaque élément de $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq)$ est une sous-base maximale (par rapport à l'inclusion ensembliste) cohérente de Σ puisque $\preceq_{\triangle}$ satisfait la propriété de monotonie (Proposition 1). Nous définissons maintenant une inférence lexicographique basée sur le pré-ordre $\preceq_{\triangle}$ entre les sous-bases cohérentes :

Définition 6
Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et soit ψ une formule. ψ est conséquence $\mathcal{P}$-lexicographique de $(\Sigma, \preceq)$, notée $(\Sigma, \preceq) \vdash^{\mathcal{P}}_{lex} \psi$, ssi ψ est conséquence classique de chaque sous-base cohérente préférée de $(\Sigma, \preceq)$ par rapport à $\preceq_{\triangle}$, c'est à dire : $(\Sigma, \preceq) \vdash^{\mathcal{P}}_{lex} \psi$ ssi $\forall B \in \mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) : B \vdash \psi$.

Le lemme suivant, nécessaire pour prouver un de nos résultats les plus importants stipule que si A est lexicographiquement préférée à B alors A est lexicographiquement préférée à B pour toute base totalement pré-ordonnée compatible.

Lemma 1
Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et soient A et B deux sous-bases cohérentes de Σ. Soit $(\Sigma, \leq)$ une base de croyances totalement pré-ordonnées compatible avec $(\Sigma, \preceq)$. Alors, (1) Si $A \prec_{\triangle} B$ alors $A <_{lex} B$. (2) Si $A \approx_{\triangle} B$ alors $A =_{lex} B$.

Cette inférence lexicographique est équivalente à l'inférence lexicographique basée sur les compatibles donnée par la Définition 3 comme le montre la proposition suivante :

Proposition 4
Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et soit ψ une formule propositionnelle. Alors $(\Sigma, \preceq) \vdash^{\mathcal{P}}_{lex} \psi$ ssi $(\Sigma, \preceq) \vdash^{\mathcal{C}}_{lex} \psi$.

Exemple 4
Nous continuons l'exemple 3. Nous avons $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) = \{A_6, A_7\}$.De plus, on peut voir que $\mathfrak{L}ex(\Sigma, \preceq) = \bigcup_{(\Sigma, \leq^i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} Lex(\Sigma, \leq^i)$ où $\bigcup_{(\Sigma, \leq^i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq)} Lex(\Sigma, \leq^i)$ est calculé dans l'example 1.

6 Contrepartie sémantique et propriétés

Nous commençons par donner une caractérisation sémantique de l'inférence lexicographique proposée. Une relation de préférence entre deux interprétations est donnée comme suit :

Définition 7
Soient ω et ω' deux interprétations. ω est dite lexicographiquement préférée à ω', notée $\omega \preceq^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega'$, ssi $[\omega] \preceq_{\Delta} [\omega']$ où $[\omega]$ est l'ensemble de formules des Σ satisfaites par ω.

Soit $Min(\mathcal{W}, \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}})$ l'ensemble des interprétations préférées de $\mathcal{W}$ par rapport à $\prec^{\Delta}_{\mathcal{W}}$ l'inférence sémantique est définie comme suit :

Définition 8
Soit $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et soit ψ une formule propositionnelle. Alors ψ est une conséquence $\mathcal{S}$-lexicographique de $(\Sigma, \preceq)$, noté par $(\Sigma, \preceq) \models^{\mathcal{S}}_{lex} \psi$, si et seulement si ψ est satisfaite par chaque interprétation préférée, c'est à dire : $(\Sigma, \preceq) \models^{\mathcal{S}}_{lex} \psi$ ssi $\forall \omega \in Min(\mathcal{W}, \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}}), \omega \models \psi$.

Nous montrons que :

Proposition 5
Soient $(\Sigma, \preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et ψ une formule propositionnelle. Alors, $(\Sigma, \preceq) \vdash^{\mathcal{S}}_{lex} \psi$ ssi $(\Sigma, \preceq) \vdash^{\mathcal{P}}_{lex} \psi$.

Nous illustrons l'approche sémantique avec l'exemple suivant.

Exemple 5
Nous reprenons l'exemple 1. Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des interpretations et $[\omega]$ l'ensemble des formules de Σ satisfaites par ω :

$\mathcal{W}$	d	h	r	$[\omega]$	A_i
ω_0	$\neg d$	$\neg h$	$\neg r$	$\{d \to r \wedge h, \neg h, \neg r\}$	A_3
ω_1	$\neg d$	$\neg h$	r	$\{d \to r \wedge h, r, \neg h\}$	A_4
ω_2	$\neg d$	h	$\neg r$	$\{d \to r \wedge h, h, \neg r\}$	A_2
ω_3	$\neg d$	h	r	$\{d \to r \wedge h, h, r\}$	
ω_4	d	$\neg h$	$\neg r$	$\{d, \neg h, \neg r\}$	A_6
ω_5	d	$\neg h$	r	$\{d, \neg h, r\}$	A_7
ω_6	d	h	$\neg r$	$\{d, \neg r, h\}$	A_5
ω_7	d	h	r	$\{d \to r \wedge h, d, r, h\}$	A_1

Les préférences entre les A_i sont données dans l'exemple 3 le pré-ordre entre les interpretations est $\preceq^{\Delta}_{\mathcal{W}}$: $\{\omega_4 \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_0,\ \omega_0 \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_6,\ \omega_6 \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_2,\ \omega_0 \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_7,\ \omega_4 \sim^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_5,\ \omega_0 \sim^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_1,\ \omega_6 \sim^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_7,\ \omega_2 \sim^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_3,\ \omega_5 \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_1,\ \omega_1 \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_7,\ \omega_7 \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}} \omega_3, \}$. Nous pouvons facilement vérifier que $\bigcup_{B \in \mathfrak{L}ex(\Sigma,\preceq)} Mod(B) = Min(\mathcal{W}, \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}})$ En effet, $\mathfrak{L}ex(\Sigma,\preceq) = \{A_6, A_7\}$ et puisque $A_6 = \{d, \neg h, \neg r\}$ et $A_7 = \{d, r, \neg h\}$, $Mod(A_6) = \{\omega_4\}$ et $Mod(A_7) = \{\omega_5\}$. Donc,

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{L}ex(\Sigma,\preceq)} Mod(B) = \{\omega_4, \omega_5\} = Min(\mathcal{W}, \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}})$$

Par conséquent, $(\Sigma,\preceq) \vdash^{\mathcal{P}}_{lex} \psi$ iff $(\Sigma,\preceq) \models^{\mathcal{S}}_{lex} \psi$.

Nous analysons maintenant les propriétés non monotones de cette relation d'inférence. Dans un premier temps, nous l'étendons de telle sorte qu'elle soit définie entre deux formules par rapport à une base de croyances partiellement pré-ordonnées :

Définition 9
Soit $(\Sigma,\preceq)$ une base de croyances partiellement pré-ordonnées et soient ϕ et ψ deux formules. Soit $(\Sigma',\preceq')$ une nouvelle base de croyances partiellement pré-ordonnées telle que : (1) $\Sigma' = \Sigma \cup \{\phi\}$ (2) $\forall \alpha, \beta \in \Sigma, \alpha \preceq \beta$ ssi $\alpha \preceq' \beta$ (3) $\forall \alpha \in \Sigma, \phi \preceq' \alpha$, c'est à dire ϕ est la formule la plus prioritaire dans Σ'. Alors ψ est une Lex-conséquence de ϕ par rapport à Σ, notée $\phi \mid\sim_{lex} \psi$, ssi $(\Sigma',\preceq') \vdash^{\mathcal{P}}_{lex} \psi$.

Ainsi, une d'inférence préférentielle (voir Shoham (1988)) de notre inférence lexicograhique peut être définie comme suit :

Proposition 6
Soient ϕ et ψ deux formules. Alors, $\phi \mid\sim_{lex} \psi$ ssi $\forall \omega \in Min(Mod(\phi), \prec^{\Delta}_{\mathcal{W}}), \omega \models \psi$.

Par conséquent, l'inférence lexicographique proposée satisfait le Système P. Néanmoins, et contrairement à l'inférence lexicographique classique, elle ne satisfait pas la monotonie rationnelle.

Proposition 7
L'inférence $\mid\sim_{lex}$ satisfait les postulats rationnels du Système P contrairement à la monotonie rationnelle.

Enfin, comparée à l'extension possibiliste de Benferhat *et al.* (2004b) et à l'extension de l'inférence basée sur l'inclusion de Junker & Brewka (1989), notre inférence s'avère plus productive. Ce résultat peut être aisément vérifié et ce, en utilisant par exemple la définition basée sur les compatibles et en considérant le résultat démontré par Benferhat *et al.* (1993). En fait, ce résultat stipule qu'étant donnée une base de croyances totalement pré-ordonnées, toute conséquence possibiliste est une conséquence basée sur l'inclusion, et que toute conséquence basée sur l'inclusion est une conséquence lexicographique.

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons combiné les avantages de l'inférence lexicographique et ceux des bases de croyances partiellement pré-ordonnées pour raisonner en présence d'incohérence. Nous avons présenté une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement pré-ordonnées qui étend l'inférence lexicographique classique.

Plus précisément, nous avons proposé deux relations d'inférence dont nous avons prouvé l'équivalence. La première, assez naturelle, consiste à appliquer l'inférence lexicographique classique sur toutes les bases totalement pré-ordonnées compatibles. Quant à la seconde, elle s'articule autour de la définition d'un nouveau pré-ordre partiel basé sur la cardinalité entre sous-bases cohérentes. Il s'agit ensuite d'appliquer l'inférence classique sur les sous-bases cohérentes préférées selon ce pré-ordre.

Ce travail ouvre de nombreuses perspectives, entre autres son application à la corrélation d'alerte ainsi qu'au traitement d'informations archéologiques.

Remerciements

Ce travail a été réalisé avec le soutien du projet PLACID (ANR SETIN 2006). Ce travail a été réalisé avec le soutien de la Communauté Européenne au sein du projet VENUS (IST-034924) du 6ième programme cadre pour la recherche et le développement (FP6) (Société, Information et Technologie) (IST). Les auteurs sont seuls responsables du contenu de ce papier qui ne reflète pas l'opinion de Communauté Européenne. De plus, la Communauté Européenne n'est pas responsable de l'utilisation des données apparaissant dans l'article.

Références

BENFERHAT S., BONNEFON J.-F. & DA SILVA NEVES R. (2004a). An experimental analysis of possibilistic default reasoning. In *KR'04*, p. 130–140.

BENFERHAT S., DUBOIS D., CAYROL C., LANG J. & PRADE H. (1993). Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *IJCAI'03*, p. 640–647.

BENFERHAT S., LAGRUE S. & PAPINI O. (2003). A possibilistic handling of partially ordered information. In *UAI'03*, p. 29–36.

BENFERHAT S., LAGRUE S. & PAPINI O. (2004b). Reasoning with partially ordered information in a possibilistic framework. *Fuzzy Sets and Systems*, **144**, 25–41.

BREWKA G. (1989). Preferred sutheories : an extende logical framework for default reasoning. In *IJCAI'89*, p. 1043–1048.

DA COSTA N. C. A. (1974). Theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic.*, **15**, 497–510.

DUBOIS D., LANG J. & PRADE H. (1994). Possibilistic logic. *Handbook of Logic in Articial Intelligence and Logic Programming.*, **3**, 439–513.

JUNKER U. & BREWKA G. (1989). Handling partially ordered defaults in TMS. In *IJCAI'89*, p. 1043–1048.

LEHMANN D. J. (1995). Another perspective on default reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **15**(1), 61–82.

NEBEL B. (1994). Base revision operations and schemes : semantics, representation and complexity. In *ECAI'94*, p. 341–345.

PINKAS G. & LOUI R. P. (1992). Reasoning from inconsistency : A taxonomy of principles for resolving conflict. In *KR'92*, p. 709–719.

RESHER N. & MANOR R. (1970). On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision.*, **1**, 179–219.

SHOHAM Y. (1988). *Reasoning about change : Time and Causation from the standpoint of Artificial Intelligence*. MIT press.