Pondérations et collisions en logique des pénalités*

Nathalie Chetcuti-Sperandio, Sylvain Lagrue

Université Lille-Nord de France, Artois, F-62307 Lens
CRIL, F-62307 Lens
CNRS UMR 8188, F-62307 Lens
{chetcuti,lagrue}@cril.univ-artois.fr

Résumé : La logique des pénalités est un formalisme de représentation des connaissances permettant de manipuler des buts potentiellement incompatibles. Son principal atout est de permettre une certaine forme de compensation entre les différentes sources d'incompatibilité. Cependant, elle est excessivement sensible au choix des poids : il est possible d'obtenir des conclusions extrêmement différentes à partir d'un même ensemble d'informations en changeant simplement quelques poids, y compris en maintenant l'ordre entre les différentes formules.

Se plaçant dans un cadre restreint de la logique des pénalités, cet article se concentre sur le choix des pondérations et plus particulièrement sur le problème des collisions entre interprétations, ces collisions menant à des conclusions faibles. Nous étudions plus particulièrement une famille de pondérations, les σ-pondérations. Nous montrons comment certains éléments de cette famille permettent d'éviter les collisions tout en maintenant une certaine forme de compensation et nous obtenons leur caractérisation logique en considérant seulement les pondérations et non les formules associées.

Mots-clés : Logique des pénalités, collisions, σ-pondérations, Paralex.

1 Introduction

La logique des pénalités est un formalisme de représentation des connaissances permettant de traiter des buts potentiellement incompatibles. Ce formalisme a été proposé par Pinkas (1991, 1995) et développé dans Dupin de Saint-Cyr *et al.* (1994); Dupin de Saint Cyr (1996). La logique des pénalités propose un cadre intuitif pour manipuler des formules pondérées. Une pénalité est associée à chaque interprétation : cette pénalité est la somme des poids des formules falsifiées par l'interprétation. La principale caractéristique de ce formalisme est sa capacité à faire de la compensation par additivité des poids ; même si l'information la plus préférée est falsifiée par une interprétation cette dernière ne sera pas automatiquement rejetée.

*Ce travail est partiellement financé par le projet ANR *jeunes chercheurs* #JC05-41940 *Planevo*.

Toutefois la logique des pénalités est aussi connue pour être dépendante de la syntaxe des formules. Par ailleurs l'un de ses principaux défauts, néanmoins peu étudié, est sa sensibilité au choix des poids pour l'inférence : il est possible d'obtenir des résultats extrêmement différents à partir d'un même ensemble d'informations en changeant simplement quelques poids. Or, un expert ne peut pas prendre en compte les processus de compensation et de déduction de la logique des pénalités quand il donne ses buts. À moins d'utiliser des poids représentant une mesure additive (telle que l'argent), les poids fournis par l'expert sont généralement artificiels. En effet, il est généralement plus facile pour un expert d'évaluer un coût plutôt qu'un niveau de satisfaction (ou d'insatisfaction). De nombreuses méthodes qualitatives ont été proposées pour traiter les informations avec priorités (sans poids) par exemple dans Benferhat *et al.* (1993); Brewka (1989); Geffner (1992); Lehman (1995). Cependant, aucun de ces formalismes ne permet de compensation comme la logique des pénalités, c'est-à-dire falsifier plusieurs formules de peu d'importance peut être équivalent à falsifier une seule formule d'importance plus grande. De même aucune de ces méthodes ne s'intéresse au problème central que nous traitons ici : l'absence de collisions.

Deux interprétations entrent en collision lorsque la même pénalité leur est associée. Dans ce cas ces interprétations ne peuvent être hiérarchisées et les conclusions tirées peuvent être prudentes à l'excès. Idéalement, si deux interprétations falsifient des formules d'importances différentes elles devraient alors avoir des valeurs différentes de façon à obtenir les conclusions les plus fines possibles. Nous montrons dans cet article comment améliorer les résultats fournis par la logique des pénalités uniquement par le choix d'une pondération judicieuse.

Nous nous plaçons dans cet article dans un cadre restreint, mais néanmoins suffisamment expressif, de la logique des pénalités où chaque poids ne peut intervenir qu'une seule fois. Nous présentons dans ce cadre un panorama de différentes pondérations naturelles pouvant être générées de manière automatique à partir des buts pondérés initiaux fournis par l'expert. Nous montrons que certaines de ces pondérations augmentent le risque de collisions alors que d'autres les évitent mais désactivent dans le même temps le mécanisme de compensation de la logique des pénalités et diminuent donc son intérêt. Nous étudions plus particulièrement une famille de pondérations, les σ-pondérations. Nous établissons que l'une d'entre elles, la pondération parabolique, permet d'éviter les collisions tout en maintenant la compensation et nous obtenons sa caractérisation logique en considérant seulement les pondérations et non les formules associées. Cependant cette pondération départage les interprétations falsifiant le même nombre de formules en fonction de la formule la moins importante qu'elles falsifient. C'est la raison pour laquelle nous proposons enfin une pondération originale, appelée pondération Paralex, qui corrige ce défaut.

Dans la première section nous rappelons succinctement comment gérer des bases de buts ordonnées à l'aide de la logique des pénalités. Puis, nous présentons dans ce cadre le problème des collisions, ainsi qu'une étude complète d'une pondération naturelle, la pondération arithmétique. Dans la section suivante nous proposons un panorama de différentes pondérations possibles en nous focalisant plus particulièrement sur une famille de pondérations, les σ-pondérations. Nous montrons que deux d'entre elles possèdent des propriétés intéressantes en terme de collision et de compensation.

2 Bases de buts ordonnées et logique des pénalités

Dans cet article nous considérons un langage propositionnel *fini* $\mathcal{L}$. L'ensemble des interprétations (ou mondes possibles) basé sur $\mathcal{L}$ est noté Ω tandis que ω représente l'un de ses éléments. La conséquence logique est dénotée par $\models$ et $Mod(\varphi)$ désigne l'ensemble des modèles d'une formule φ, c'est-à-dire $Mod(\varphi) = \{\omega \in \Omega : \omega \models \varphi\}$.

2.1 Rappels

La logique des pénalités s'applique aux bases de buts ordonnées. Une base de buts ordonnée B est un ensemble de formules pondérées de la forme $B = \{\langle \varphi_i, r_i \rangle\}$. Le domaine des poids est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Plus un poids est élevé, plus la formule est importante. Le poids $+\infty$ est réservé à l'expression de contraintes d'intégrité, c'est-à-dire de formules ne pouvant être insatisfaites.

À partir d'une base de buts ordonnée, il est possible de définir une pondération sur les interprétations en considérant le poids des formules qu'elles falsifient.

Définition 1 (κ-fonction)
Soit B une base de buts ordonnée. La fonction *κ est une fonction de Ω dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$\kappa(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } \omega \models B^* \\ \sum_{\langle \varphi, r \rangle \in False_B(\omega)} r \text{ sinon} \end{cases}$$

où B^* correspond à B privé des poids et $False_B(\omega) = \{\langle \varphi, r \rangle \in B : \omega \not\models \varphi\}$.

À partir de la fonction κ, un préordre total sur l'ensemble des interprétations Ω peut être défini comme suit :

$$\omega \leq_\kappa \omega' \text{ ssi } \kappa(\omega) \leq \kappa(\omega').$$

Contrairement aux formules, les interprétations de plus faible valeur sont les préférées. La conséquence logique peut donc être étendue : une formule est une conséquence d'une base de buts ordonnée si et seulement si ses modèles contiennent tous les modèles κ-préférés. Plus formellement :

Définition 2
Soit B une base de buts ordonnée et φ une formule propositionnelle, alors :

$$B \models_\kappa \varphi \text{ ssi } Min(\Omega, \leq_\kappa) \subseteq Mod(\varphi).$$

La fonction κ est basée sur l'opérateur d'addition, ce qui donne la sémantique de la logique des pénalités cf. Pinkas (1995); Dupin de Saint-Cyr *et al.* (1994).

Exemple 1
Soit B une base de buts ordonnée telle que $B = \{(a \wedge b, 3), (\neg a, 2), (\neg b, 1)\}$. Le tableau 1 détaille la fonction κ. Par exemple, ω_2 falsifie deux formules ($(a \wedge b, 3)$ et $(\neg a, 2)$), donc $\kappa(\omega_2) = 3+2 = 5$. La fonction κ entraîne l'ordre suivant sur l'ensemble des interprétations : $\omega_3 \approx_\kappa \omega_0 <_\kappa \omega_1 <_\kappa \omega_2$. Ainsi $B \models_\kappa a \vee \neg b$, par exemple, car $Min(\Omega, \leq_\kappa) = \{\omega_0, \omega_3\} \subseteq \{\omega_0, \omega_2, \omega_3\} = Mod(a \vee \neg b)$.

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\kappa(\omega_i)$
ω_0	0	0	**3**
ω_1	0	1	4
ω_2	1	0	5
ω_3	1	1	**3**

TAB. 1 – Exemple de fonction κ

La logique des pénalités prend en considération la strate la plus basse et est moins affectée par le problème de la noyade cf. Benferhat *et al.* (1993). Par exemple, dans la logique possibiliste cf. Dubois *et al.* (1994), une interprétation qui falsifie la formule la plus importante est automatiquement exclue alors qu'en logique des pénalités elle peut être conservée.

Le préordre entre interprétations induit par la fonction κ dépend fortement des poids donnés.

2.2 De l'impact des collisions

Comme indiqué dans l'introduction, les conclusions obtenues dans le cadre de la logique des pénalités à partir d'une base de buts ordonnée dépendent fortement du choix des poids. Un expert ne peut cependant pas prendre en compte les processus de compensation et de déduction de la logique des pénalités quand il code ses buts : les poids qu'il donne sont généralement artificiels. Ainsi il est plus simple pour un expert de fournir uniquement un ordre entre ses buts ou d'utiliser des entiers naturels consécutifs $(1, 2, 3, 4, ...)$ pour exprimer le niveau de mécontentement atteint lorsqu'un but n'est pas réalisé.

D'après la définition 2, l'inférence de la logique des pénalités est basée sur les interprétations ayant une valeur pour κ (κ-valeur) minimale. Plus l'ensemble des interprétations κ-minimales est grand, plus les inférences produites sont pauvres et peu instructives : les informations inférées doivent contenir *toutes* les interprétations κ-minimales. Intuitivement l'ensemble des interprétations préférées doit être le plus petit possible pour être le plus précis possible.

Soit B une base de buts ordonnée et ω, ω' deux interprétations, alors ω et ω' entrent en collision si et seulement si elles falsifient un ensemble de formules différentes et $\kappa(\omega) = \kappa(\omega')$.

Si deux interprétations falsifient exactement les mêmes formules, par définition de κ, elles ont la même κ-valeur. À l'inverse si elles falsifient des formules d'importance différente elle devraient, dans l'idéal, avoir une κ-valeur différente afin d'éviter les collisions. Cette notion d'absence de collision peut être caractérisée comme suit :

($\mathbf{C_{CF}}$) $\forall \omega, \omega' \in \Omega$, $\kappa(\omega) = \kappa(\omega')$ ssi $False_B(\omega) = False_B(\omega')$. [1]

Il est à noter que, par définition, la κ-valeur 0 ne peut jamais être impliquée dans une collision. En effet deux interprétations ne falsifiant aucune formule ont une même

[1] $False_B(\omega)$ est défini dans la définition 1.

κ-valeur de 0, or elles falsifient le même ensemble de formules -l'ensemble *vide*-, elles ne peuvent donc pas entrer en collision.

Exemple 2
Soit B une base de buts ordonnée telle que $B = \{\langle a \vee b, 6\rangle, \langle a \leftrightarrow b, 4\rangle, \langle \neg a, 3\rangle, \langle \neg b, 2\rangle, \langle \neg a \vee \neg b, 1\rangle, \langle a \wedge \neg b, 1\rangle\}$. Le tableau 2 présente la fonction κ_B induite.

	a	b	κ_B
ω_0	0	0	$7 = 6 + 1$
ω_1	0	1	$7 = 4 + 2 + 1$
ω_2	1	0	$7 = 4 + 3$
ω_3	1	1	$7 = 3 + 2 + 1 + 1$

TAB. 2 – Un exemple extrême de collision

Dans le cas présent toutes les interprétations entrent en collision et il n'est donc possible d'inférer de B que $\top$, inférence la plus pauvre qui soit.

Dans l'exemple précédent toutes les interprétations sont considérées comme équi-préférées. Néanmoins deux d'entre elles, ω_0 et ω_2, falsifient moins de formules que les autres. Si l'on ne considère que ces deux interprétations-là, on peut déduire $\neg b$. Cette remarque nous amène à introduire le critère de préservation de la majorité :

$(\mathbf{C_{MP}})$ $|False_B(\omega)| < |False_B(\omega')|$ implique $\omega <_\kappa \omega'$,

où $|E|$ représente la cardinalité de l'ensemble E. Ce critère spécifie qu'une interprétation qui falsifie moins de formules qu'une autre interprétation doit lui être préférée : cela permet une certaine forme de compensation, tout comme la logique des pénalités.

2.3 La pondération arithmétique

Pour s'affranchir de la structure logique des informations et ne considérer que la pondération, nous imposons la restriction suivante dans le reste de l'article : **chaque poids n'apparaît qu'une seule fois dans une base donnée**. Autrement dit, deux formules ne peuvent avoir le même poids. L'expert peut exprimer le fait qu'il considère deux formules comme équi-préférées **uniquement** en les combinant avec une conjonction. L'expert peut se voir proposer un ensemble de n poids dans lequel il choisit les poids pour ses n formules.

À partir d'une pondération W, toutes les κ-valeurs possibles peuvent être calculées. Cet ensemble de valeurs, noté W_Σ, est tel que :

$$W_\Sigma = \left\{ \sum_{a \in A} a : A \subseteq W \right\}.$$

Notons que comme les pondérations sont appliquées aux formules et non aux interprétations, le poids 0 ne présente aucun intérêt. En effet il n'intervient pas dans le calcul des pénalités, et donc n'apparaît pas dans les pondérations considérées.

Étudier les collisions possibles revient à chercher toutes les sommes d'éléments de W (représentant différents ensembles de formules) donnant la même valeur.

Pour choisir une pondération il est assez naturel de prendre la suite des n premiers entiers naturels pour pondérer n formules données :

$$W^{arith,n} = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}.$$

Cette pondération est appelée pondération arithmétique car elle dérive d'une progression arithmétique. Le poids n est associé à la formule la plus préférée alors que la moins préférée a un poids de 1. En fait cette pondération naïve est l'une des pires qui soient en matière de collisions.

En fait, le problème des collisions avec la pondération arithmétique est équivalent à un problème bien connu de la théorie des nombres : la partition d'un entier i en termes distincts de 1 à i cf. Hardy & Wright (1979). Ainsi le nombre de collisions pour chaque valeur de $W_{\Sigma}^{arith,n}$ est lié au développement de :

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)...(1 + x^n).$$

Par exemple, soit $n = 4$. Le développement de $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)$ est $1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$. Le monôme $2x^3$ indique qu'il existe deux manières d'obtenir 3.

Il peut être prouvé que, pour tout n, seules six valeurs ne mènent pas à une collision : 0 (cas dans lequel aucune formule n'est falsifiée), 1, 2 et, de façon symétrique, $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$, $\sum_{i=1}^{n-2} i$ et $\sum_{i=1}^{n-1} i$. Toutes les autres valeurs peuvent être obtenues par au moins deux sommes différentes de poids, menant ainsi à une collision. Le nombre maximum de collisions se produit à la médiane de $W_{\Sigma}^{arith,n} = \{1, 2, 3, ..., n(n+1)/2\}$, c'est-à-dire $\lfloor n(n + 1)/4 \rfloor$, avec $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Quoique naturelle et intuitive, la pondération arithmétique ne satisfait pas au critère d'absence de collision (C_{CF}).

3 La famille des σ-pondérations

La section précédente montre que la pondération arithmétique est trop naïve et donne des résultats trop pauvres et peu informatifs en matière d'inférence.

Nous rassemblons dans cette section une famille de pondérations aux propriétés communes que nous appelons les *σ-pondérations*. Chaque membre de cette famille est construit à partir d'une σ-suite dont les éléments sont les sommes des éléments précédents. Une σ-suite est elle-même basée sur une suite Φ qui indique le nombre d'éléments à additionner. La définition générique d'une σ-suite est la suivante :

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & = & 1 \\ \sigma_i & = & \sum_{j=i-\Phi_{i-1}}^{i-1} \sigma_j \end{cases}$$

où Φ_i est le i^{e} terme de la suite Φ.

Nous illustrons cette famille avec une suite bien connue : les nombres de Fibonacci.

Exemple 3 (Les nombres de Fibonacci)
Considérons la suite

$$\Phi^{Fibo} = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...).$$

Il est possible de calculer la σ-suite basée sur Φ^{Fibo} et notée σ^{Fibo} :

$$\sigma^{Fibo} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...).$$

Par exemple pour calculer σ_3^{Fibo}, comme $\Phi_2^{Fibo} = 2$, on calcule $\sum_{j=3-2=1}^{2} \sigma_j = \sigma_1^{Fibo} + \sigma_2^{Fibo} = 1 + 1 = 2$.

Cette suite se trouve être celle de Fibonacci. De façon similaire la suite $\Phi^{Tribo} = (1, 2, 3, 3, 3, ...)$ génère la suite appelée souvent nombres de Tribonacci dans laquelle chaque élément est la somme de ses trois prédécesseurs.

On peut remarquer que, dans le cas général, ni les nombres de Fibonacci ni les nombres de Tribonacci n'ont de bonnes propriétés en ce qui concerne les collisions, puisque chaque poids (sauf les tous premiers) est la somme des deux ou trois poids précédents.

3.1 La pondération lexicographique

Nous étudions dans cette section une autre suite basée sur :

$$\Phi^{lex} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...).$$

La σ-suite générée à partir de Φ^{lex} peut être utilisée telle quelle comme une pondération :

$$\sigma^{lex} = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...).$$

Dans ce cas nous obtenons les puissances successives de 2 et la logique des pénalités a alors exactement le même comportement que l'inférence lexicographique cf. Dupin de Saint Cyr (1996). Une interprétation ω est préférée à une interprétation ω' ssi elles falsifient les mêmes formules de plus fort poids jusqu'à un poids r, pour lequel ω' falsifie une formule satisfaite par ω. Plus formellement :

Proposition 1
Soit B une base de buts ordonnée telle que $|B| = n$ et telle que $W_B = W^{lex,n}$, alors $\kappa_B(\omega) < \kappa_B(\omega')$ ssi $\exists r$ tel que :

(i) $\langle \varphi, r\rangle \in B$ et $\omega \models \varphi$ mais $\omega' \not\models \varphi$

(ii) $\forall \langle \varphi, r'\rangle \in B$ tel que $r' > r$, $\omega \models \varphi$ ssi $\omega' \models \varphi$.

Il s'ensuit de cette proposition que toute base de buts ordonnée B telle que $W_B = W^{lex,n}$ est exempte de collision donc satisfait C_{CF}. En fait si deux interprétations falsifient des ensembles différents de formules, leurs κ-valeurs sont des sommes de puissances de 2 différentes.

Cette pondération évite les collisions mais dans le même temps désactive le mécanisme de compensation (donc l'intérêt) de la logique des pénalités, comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 4
Soit B une base de buts ordonnée telle que $W_B = \{\sigma_i^{lex} : i \leq 5\}$ et $B = \{\langle \neg a, 16\rangle, \langle a \wedge b, 8\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle a \vee b, 2\rangle, \langle a \vee \neg b, 1\rangle\}$. Le tableau 3 présente la fonction κ induite. Les deux

	a	b	κ_B
ω_0	0	0	$14 = 8 + 4 + 2$
ω_1	0	1	$13 = 8 + 4 + 1$
ω_2	1	0	$24 = 16 + 8$
ω_3	1	1	$16 = 16$

TAB. 3 – Pondération lexicographique

interprétations préférées sont les interprétations qui falsifient le plus de formules, à savoir ω_0 et ω_1. On peut observer que ω_3 est rejetée alors qu'elle ne falsifie qu'une seule formule ($\neg a$), qui n'est d'ailleurs même pas une contrainte d'intégrité.

Nous nous intéressons maintenant à deux pondérations qui évitent les collisions tout en permettant une certaine forme de compensation.

3.2 La pondération parabolique

La pondération parabolique a été proposée dans Alvarez Rodriguez (1983) dans le cadre de la théorie du choix social. Cette pondération est basée sur une suite bien connue en informatique, la suite parabolique :

$$\Phi^{parab} = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...).$$

Dans cette suite, chaque entier n apparaît exactement n fois consécutivement. Chaque élément de cette suite peut être calculé directement à l'aide de la formule $\Phi_i^{parab} = \lfloor (1 + \sqrt{8i - 7})/2 \rfloor$, voir par exemple Knuth (1968). Historiquement, le nom de cette suite provient de cette formule. Les premiers termes de la σ-suite associée sont :

$$\sigma^{parab} = (1, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 40, 77, 148, 285, 570, ...).$$

Cette suite croît plus rapidement que la suite de Fibonacci. Cependant, nous n'allons pas utiliser directement cette suite comme pondération, mais les sommes de ses éléments, calculées comme suit :

$$W_i^{parab,n} = \sum_{j=n-i+1}^{n} \sigma_j^{parab}.$$

Le tableau 4 présente la pondération parabolique pour un nombre de niveaux variant de 1 à 6.

Cette pondération est extrêmement performante : non seulement elle satisfait C_{CF}, mais elle autorise également la forme de compensation définie par le critère C_{MP}.

Proposition 2
Soit B une base de buts ordonnée telle que $|B| = n$ et que $W_B = W^{rep,n}$. Dans ce cas B vérifie C_{CF} et C_{MP}.

n	$W^{parab,n}$					
1	1					
2	1	2				
3	2	3	4			
4	3	5	6	7		
5	6	9	11	12	13	
6	11	17	20	22	23	24

TAB. 4 – $W^{parab,n}$ pour $n < 7$

Par ailleurs, il a été démontré dans Alvarez Rodriguez (1983) que le premier poids de $W^{parab,n}$ est le plus petit poids démarrant une pondération qui satisfait C_{CF} et C_{MP}. Cependant, cette pondération vérifie une propriété inattendue lorsque deux interprétations falsifient le même nombre de formules. Celles-ci sont ordonnées en fonction de la formule *la moins prioritaire* qu'elles falsifient, suivant un critère lexicographique inversé :
($\mathbf{C_{RLC}}$) si $|False_B(\omega)| = |False_B(\omega')|$ alors $\omega <_\kappa \omega'$ ssi $min\{r : \langle\varphi, r\rangle \in False_B(\omega) \setminus False_B(\omega')\} < min\{r' : \langle\varphi', r'\rangle \in False_B(\omega') \setminus False_B(\omega)\}$.

Proposition 3
Soit B une base de buts ordonnée telle que $|B| = n$ et $W_B = W^{parab,n}$. Dans ce cas, B satisfait C_{RLC}.

La pondération parabolique est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple 5 (suite)
Considérons à nouveau la base de buts ordonnée B de l'exemple 4, avec le même ordre entre les formules, mais avec une pondération différente, basée sur $W^{parab,n}$. Comme $W^{parab,5} = \{6, 9, 11, 12, 13\}$, nous pouvons considérer B telle que $B = \{\langle\neg a, 13\rangle, \langle a \wedge b, 12\rangle, \langle a, 11\rangle, \langle a \vee b, 9\rangle, \langle a \vee \neg b, 6\rangle\}$. Le tableau 5 résume la fonction κ induite.

	a	b	κ_B
ω_0	0	0	$32 = 12 + 11 + 9$
ω_1	0	1	$29 = 12 + 11 + 6$
ω_2	1	0	$25 = 13 + 12$
ω_3	1	1	$\mathbf{13} = 13$

TAB. 5 – Pondération parabolique

3.3 La pondération Paralex

Le critère C_{RLC} qui permet de départager deux interprétations falsifiant le même nombre de formules n'est pas satisfaisant. Il est en effet plus intuitif de départager ces interprétations en fonction de la formule la plus prioritaire falsifiée par l'une et satisfaite par l'autre. C'est pourquoi nous avons proposé dans Chetcuti-Sperandio & Lagrue (2008) une pondération originale qui satisfait le critère de *cardinalité lexicographique* suivant :

$(\mathbf{C_{LC}})$ si $|False_B(\omega)| = |False_B(\omega')|$ alors $\omega <_\kappa \omega'$ ssi $max\{r : \langle\varphi, r\rangle \in False_B(\omega) \setminus False_B(\omega')\} < max\{r' : \langle\varphi', r'\rangle \in False_B(\omega') \setminus False_B(\omega)\}$.

Dans cette optique, nous construisons une pondération, $W^{paralex,n}$, basée elle aussi sur σ^{parab} et telle que :

$$\begin{cases} W_1^{paralex,n} &= \sum_{j=\lfloor(n+1)/2\rfloor}^{n} \sigma_j^{parab}, \\ W_i^{paralex,n} &= W_{i-1}^{paralex,n} + \sigma_{i-1}^{parab}. \end{cases}$$

La pondération Paralex $W^{paralex,n}$ est liée à la suite parabolique. Si l'on considère uniquement les n premiers éléments de σ^{parab}, $W^{paralex,n}$ commence par la somme des $\lfloor(n+1)/2\rfloor$ derniers éléments de σ^{parab} puis chacun des poids suivants est la somme du poids courant et de l'élément courant de σ^{parab}. Le tableau 6 présente la pondération Paralex pour $n < 7$.

n	$W^{paralex,n}$					
1	1					
2	1	2				
3	3	4	5			
4	5	6	7	9		
5	11	12	13	15	18	
6	20	21	22	24	27	33

TAB. 6 – $W^{paralex,n}$ pour $n < 7$

Comme souhaité, cette pondération satisfait la propriété *d'absence de collision*, de *préservation de la majorité* et de *cardinalité lexicographique*.

Proposition 4
Soit B une base de buts ordonnée telle que $|B| = n$ et $W_B = W^{paralex,n}$. Dans ce cas, B satisfait C_{CF}, C_{MP} et C_{LC}.

Bien qu'il puisse être montré que la pondération Paralex n'est pas minimale, elle apporte néanmoins une solution efficace et facilement calculable satisfaisant C_{CF}, C_{MP} et C_{LC}. L'exemple suivant illustre la différence entre la pondération Paralex et la pondération parabolique.

φ	$W^{paralex,6}$	$W^{parab,6}$
$a \to \neg b$	33	24
b	27	23
a	24	22
$a \vee \neg b$	22	20
$\neg a \vee b$	21	17
$a \leftrightarrow \neg b$	20	11

TAB. 7 – Deux pondérations différentes

Exemple 6
Considérons la base de buts ordonnée B décrite par le tableau 7 associée à deux pondérations différentes, $W^{paralex,n}$ et $W^{parab,n}$.

Ces deux pondérations induisent deux fonctions κ différentes, décrites dans le tableau 8. L'interprétation ω_0, qui falsifie une formule de plus que les autres interprétations, est l'interprétation la moins préférée dans les deux cas.

	a	b	$\kappa_B^{paralex}$	κ_B^{parab}
ω_0	0	0	$71 = 27 + 24 + 20$	$56 = 23 + 22 + 11$
ω_1	0	1	$\mathbf{46 = 24 + 22}$	$42 = 22 + 20$
ω_2	1	0	$48 = 27 + 21$	$40 = 23 + 17$
ω_3	1	1	$53 = 33 + 20$	$\mathbf{35 = 24 + 11}$

TAB. 8 – Fonctions κ induites

L'ordre relatif sur les interprétations induit par la pondération parabolique est :

$$\omega_3 <_{\kappa_B^{parab}} \omega_2 <_{\kappa_B^{parab}} \omega_1 <_{\kappa_B^{parab}} \omega_0$$

tandis que l'ordre induit par la pondération Paralex est :

$$\omega_1 <_{\kappa_B^{paralex}} \omega_2 <_{\kappa_B^{paralex}} \omega_3 <_{\kappa_B^{paralex}} \omega_0.$$

L'ordre issu de $\kappa_B^{paralex}$ est le plus convaincant. En effet, $\kappa_B^{paralex}$ préfère ω_1 qui falsifie autant de formules que ω_2 et ω_3, mais qui en falsifie de moins prioritaires. En particulier ω_1 ne falsifie pas la formule la plus prioritaire de la base, $a \to \neg b$. À l'inverse, κ_B^{parab} associe la plus petite pénalité à ω_3. De cette interprétation, les formules a et b peuvent être déduites. Or ces formules sont incohérentes avec la formule la plus prioritaire de la base : $a \to \neg b$.

4 Conclusion et perspectives

Les travaux exposés dans cet article apportent des solutions pratiques à un problème fondamental mais néanmoins ignoré jusqu'à présent dans la littérature, le problème des collisions entre interprétations dans la logique des pénalités. Deux principaux facteurs prévalent pour ces collisions, l'expression logique des buts et les pondérations elles-mêmes. Nous avons présenté ici différentes pondérations permettant de respecter le critère d'absence de collision tout en gardant certaines propriétés de compensation de la logique des pénalités.

Nous avons montré que les pondérations les plus couramment utilisées s'avèrent trop naïves et n'ont pas réellement de bonnes propriétés en matière de collisions, si ce n'est de les favoriser. D'autres, comme la pondération lexicographique, empêchent les collisions, mais désactivent dans le même temps les mécanismes de compensation de la logique des pénalités. Finalement nous avons présenté deux pondérations possédant de bonnes propriétés et facilement calculables, les pondérations parabolique et Paralex.

Cependant, certains questions restent ouvertes, comme l'existence d'une pondération minimale et aisément calculable qui vérifierait C_{CF}, C_{MP} et C_{LC} ou encore comment autoriser plus d'une formule par strate. De plus, d'autres critères, telle l'inclusion ensembliste, peuvent être étudiés. Enfin, ces résultats peuvent être exploités et adaptés au cadre de la fusion de croyances.

Références

ALVAREZ RODRIGUEZ M. A. (1983). *Étude des propriétés d'une suite numérique liée à un problème de vote pondéré*. Thèse de docteur-ingénieur, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.

BENFERHAT S., CAYROL C., DUBOIS D., LANG J. & PRADE H. (1993). Inconsistency Management and Prioritized Syntax-Based Entailment. In *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, p. 640–647.

BREWKA G. (1989). Preferred Subtheories : An Extended Logical Framework for Default Reasoning. In *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, p. 1043–1048.

CHETCUTI-SPERANDIO N. & LAGRUE S. (2008). How to Choose Weightings to Avoid Collisions in a Restricted Penalty Logic. In *Proceedings of the 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, p. 340–347 : AAAI Press.

DUBOIS D., LANG J. & PRADE H. (1994). Possibilistic Logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, p. 439–513 : Oxford University Press.

DUPIN DE SAINT CYR F. (1996). *Gestion de l'évolutif et de l'incertain en logiques pondérées*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

DUPIN DE SAINT-CYR F., LANG J. & SCHIEX T. (1994). Penalty Logic and its Link with Dempster-Shafer Theory. In *Proceedings of the 10th conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'94)*, p. 204–211.

GEFFNER H. (1992). *Default Reasoning : Causal and Conditional Theories*. MIT Press.

HARDY G. H. & WRIGHT E. M. (1979). *An Introduction to the Theory of Numbers*, chapter Partitions, p. 273–296. Oxford Science Publications, 5th edition.

KNUTH D. E. (1968). *The Art of Computer Programming*, volume 1, p. 44 and 479. Addison-Wesley, second edition.

LEHMAN D. (1995). Another Perspective on Default Reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **15**(1), 61–82.

PINKAS G. (1991). Propositional Non-Monotonic Reasoning and Inconsistency in Symmetric Neural Networks. In *Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'91)*, p. 525–530.

PINKAS G. (1995). Reasoning, Nonmonotonicity and Learning in Connectionist Networks that Capture Propositional Knowledge. *Artificial Intelligence*, **77**(2), 203–247.