Représentation de contraintes qualitatives pour le temps et l'espace en SAT

Jean-François Condotta et Dominique D'Almeida

CRIL-CNRS, Université d'Artois, 62307 Lens Cedex, France
{condotta, dalmeida}@cril.univ-artois.fr

Résumé : Dans cet article nous considérons le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives pour le temps et l'espace. Une nouvelle traduction permettant de représenter et de résoudre ce problème dans le cadre de la logique propositionnelle est proposée. La définition de cette représentation présuppose l'existence d'un ordre particulier sur les relations de base du formalisme qualitatif utilisé tel que celui du treillis conceptuel de l'algèbre des intervalles.

1 Introduction

La représentation et le raisonnement sur les informations temporelles et spatiales est une tâche importante de nombreuses applications de l'Intelligence Artificielle : les systèmes d'informations géographiques (GIS), la compréhension du langage naturelle, la navigation de robot, la planification temporelle et spatiale. Ces dernières années de nombreux formalismes ont été développés pour représenter et raisonner sur les configurations temporelles ou spatiales à l'aide de relations dites qualitatives. Un formalisme qualitatif [1, 15, 8, 14] utilise des éléments particuliers (sous-ensembles d'un espace topologique, points d'une droite des rationnels, intervalles d'une droite, rectangles d'un plan, tuples de points, ...) pour représenter les entités spatiales ou temporelles du système, et considère un nombre limité de relations entre ces éléments. Chacune de ces relations correspond à une situation temporelle ou spatiale particulière. Par exemple, considérons le bien connu formalisme temporel d'Allen appelé l'algèbre des intervalles [1]. Il utilise des intervalles de la droite des rationnels pour représenter les entités temporelles. Treize relations de base entre ces intervalles sont utilisées pour modéliser les différentes situations qualitatives possibles entre les entités temporelles (Figure 1).

Des réseaux de contraintes appelés réseaux de contraintes qualitatives (RCQ en abrégé) peuvent être utilisés pour représenter les contraintes posées sur les positions relatives d'un ensemble d'entités temporelles ou spatiales. Chaque contrainte d'un RCQ est définie par l'ensemble des relations de base permises entre les entités temporelles ou spatiales concernées. Étant donné un RCQ, le principal problème qui se pose est le problème de sa cohérence. Ce problème consiste à déterminer si ce réseau possède des solutions satisfaisant ses contraintes ou non. Pour résoudre ce problème de manière efficace, des méthodes de recherche utilisant la méthode de fermeture par faible composition comme propagation locale de contraintes d'une part, et une décomposition des contraintes en relations d'une classe dite traitable d'autre part ont été définies [11]. Concrètement, lors de la recherche d'une solution chaque contrainte est découpée en relations d'une classe pour laquelle la méthode de fermeture par faible composition est complète et est successivement instanciée par une de ces relations. Après chaque instanciation, la méthode de fermeture par faible composition est appliquée. Le facteur de branchement lors de la recherche est ainsi grandement diminué et rend la recherche plus rapide. Pour un formalisme qualitatif donné, de nombreux travaux ont eut pour objectif la caractérisation de classes dites traitables. L'ensemble des relations convexes définies à l'aide d'un treillis dit conceptuel sur les relations de base correspond à une classe traitable de nombreux formalismes [13, 12, 8, 3, 2, 14].

Des travaux ont également consisté à représenter les RCQ en logique propositionnelle traduisant ainsi le problème de la cohérence d'un RCQ en un problème de satisfiabilité d'un ensemble de clauses propositionnelles. Nous pouvons citer la traduction proposée par Nebel et Burckert [12] permettant de modéliser des contraintes de l'algèbre des intervalles en un ensemble de clauses SAT. Grossièrement, cet ensemble de clauses SAT modélise l'orde linéaire correspondant à la configuration des bornes des intervalles du système. Des traductions plus génériques et pouvant être utilisées dans la cadre de tout formalisme qualitatif ont été définies et étudiées récemment [7, 6]. L'une de ces traductions consiste en la modélisation en SAT de toutes les combinaisons possibles de relations de base entre chaque triplet de variables. Ces combinaisons possibles sont fournies par la table de composition faible. Une autre approche consiste en la modélisation des combinaisons interdites. L'intérêt principal de ces traductions vers SAT est l'utilisation de solveurs SAT très performants tels que zChaff ou MiniSAT pour résoudre le problème de la cohérence des RCQ. Les tailles très importantes des ensembles de clauses obtenus par ces traductions limitent leur utilisation.

Force est de constater qu'aucune traduction SAT proposée dans la littérature utilise de manière générique la définition d'une classe traitable. Nous remédions à cela en proposant une traduction exploitant la définition des relations convexes. Plus exactement, la représentation SAT proposée utilise un treillis défini sur les relations de base possédant des caractéristiques similaires à celui du treillis conceptuel du formalisme d'Allen. À l'aide de cette nouvelle traduction les RCQ dont les contraintes sont définies par des intervalles d'un tel treillis seront représentés à l'aide d'un ensemble de clauses de Horn.

Cet article est organisé de la manière suivante. Dans la section 2 se trouvent des rappels concernant les formalismes qualitatifs. La section 3 est consacrée à la définition de notre traduction des RCQ en logique propositionnelle. Dans la section 4 nous montrons que la traduction proposée est complète pour le problème de la cohérence. La section 5 est dévolue à une comparaison de notre traduction avec une traduction SAT classique. Nous exposons les perspectives futures de nos travaux et concluons dans la section 6.

2 Rappels sur les formalismes qualitatifs

Dans la suite, nous supposons donné un formalisme qualitatif pour le temps ou l'espace défini sur un ensemble fini B de relations de base binaires sur un domaine D. Nous effectuons également l'hypothèse qu'elles sont complètes et deux à deux disjointes, c'est-à-dire que tout couple d'éléments de D appartient à exactement une relation de B. De plus, nous supposons que B contient la relation identité sur D, dénotée par Id dans la suite. Pour illustration, considérons le bien connu formalisme d'Allen : l'algèbre des intervalles (AI). AI est basée sur 13 relations binaires définis sur un ensemble d'intervalles, celui de la droite des nombres rationnels par exemple. Chacune de ces relations correspond à un ordre partculier des 4 bornes de deux intervalles.

Relation	Symbole	Inverse	Signification
precedes	b	bi	
meets	m	mi	
overlaps	o	oi	
starts	s	si	
during	d	di	
finishes	f	fi	
equals	eq	eq	

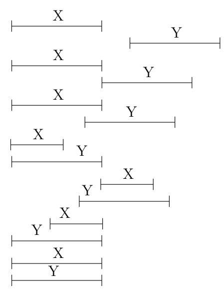

FIG. 1 – Les relations de base de AI

Les informations temporelles ou spatiales sur la configuration d'un ensemble d'entités peuvent être représentées à l'aide d'un réseau de contraintes dit réseau de contraintes qualitatives (RCQ en abrégé). Formellement, un réseau de contraintes qualitatives $\mathcal{N}$ est un couple (V, C) où V est un ensemble fini de n variables $v_0, \ldots, v_{n-1}$ (avec n est un entier positif) et C est une application qui, pour chaque couple (v_i, v_j) de variables de V associe un sous-ensemble $C(v_i, v_j)$ de l'ensemble des relations de base : $C(v_i, v_j) \subseteq \mathsf{B}$. Nous dénoterons par A l'ensemble 2^{B} de tous les ensembles de B. Pour $r \in \mathsf{A}$, deux éléments $x, y \in \mathsf{D}$ satisfont r, ce que nous dénoterons par $x\ r\ y$, ssi il existe une relation de base $a \in r$ telle que $(x, y) \in a$. Ainsi chaque élément r de A peut être considéré comme l'union de toutes les relations de base la composant. Nous utilisons le terme de "relation" pour désigner une telle union de relations de base. L'ensemble A est muni de l'opération d'intersection ($\cap$) et l'opération d'union ($\cup$). Il est également muni avec l'opération unaire inverse ($^{-1}$) et l'opération binaire de faible composition ($\circ$) : l'inverse d'une relation r de A est la relation de A correspondant à la transposée de r ; elle correspond à l'union des inverses des relations de base appartenant à r. La faible composition $a \circ b$ de $a, b \in \mathsf{B}$ est la relation r définie par $r = \{c : \exists x, y, z \in \mathsf{D}, x\ a\ y, y\ b\ z$ et $x\ c\ z\}$. La faible composition $r \circ s$ de $r, s \in \mathsf{A}$ est la relation $t = \bigcup_{a \in r, b \in s}\{a \circ b\}$. Intuitivement, $r \circ s$ est l'ensemble de toutes les relations de base possibles entre $x \in \mathsf{D}$ et $y \in \mathsf{D}$ lorsqu'il existe $z \in \mathsf{D}$ avec $x\ r\ z$ et $z\ s\ y$. Concernant les RCQ nous utiliserons les définitions suivantes dans la suite :

Définition 1
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* RCQ*, avec* $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$*. Une* solution partielle *de* $\mathcal{N}$ *sur* $V' \subseteq V$ *est une application* σ *de* V' *vers* D *telle que* $\sigma(v_i)\ \ C(v_i, v_j)\ \ \sigma(v_j)$*, pour tout* $v_i, v_j \in V'$*. Une* solution *de* $\mathcal{N}$ *est une solution partielle de* V*.* $\mathcal{N}$ *est* cohérent *si et seulement si il admet une solution.* $\mathcal{N}$ *est* $\circ$-fermé *si et seulement si pour tout*

$v_k, v_i, v_j \in V$, *$C(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_k) \circ C(v_k, v_j)$ et $C(v_i, v_j) \neq \emptyset$ (remarquons que nous pouvons nous restreindre aux triplets $v_k, v_i, v_j \in V$ avec $i < j$). Un* sous-RCQ *$\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ est un* RCQ *(V, C') où $C'(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_j)$ pour tout $v_i, v_j \in V$. La notation $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ dénotera le fait que $\mathcal{N}'$ est un sous-*RCQ *de $\mathcal{N}$. Un* scénario *de $\mathcal{N}$ est un* sous-RCQ *(V, C') de $\mathcal{N}$ tel que $C'(v_i, v_j) = \{a\}$ avec $a \in$* B*. Un* scénario cohérent *de $\mathcal{N}$ est un scénario de $\mathcal{N}$ admettant une solution. $\mathcal{N}' = (V, C')$ est* équivalent *à $\mathcal{N}$ ssi les deux* RCQ *ont mêmes solutions.*

Étant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$, des algorithmes de propagation locale de contraintes [10, 9, 4, 5] peuvent être utilisés pour dériver en temps polynomial un sous-RCQ équivalent et $\circ$-fermé (ou contenant la relation vide comme contrainte). Le principe de ces algorithmes est d'itérer l'opération $C(v_i, v_j) \leftarrow C(v_i, v_j) \cap (C(v_i, v_k) \circ C(v_k, v_j))$ pour tout triplet de variables $v_i, v_j, v_k \in V$ jusqu'à ce qu'un point fixe soit obtenu. Dans la suite, méthode de la fermeture par faible composition désignera un tel algorithme. Étant donné un sous-ensemble E de A, nous dirons que la methode de la fermeture par faible composition est complète pour E lorsque cette méthode est suffisante pour résoudre le problème de la cohérence des RCQ définis sur E. C'est-à-dire lorsque la non obtention de la relation vide comme contrainte permet d'affirmer que le RCQ initial défini sur E admet une solution.

3 Une traduction des RCQ en logique propositionnelle

Dans cette section nous proposons et étudions une traduction permettant de représenter un RCQ en un ensemble de clauses propositionnelles dont la satisfiabilité permet de déterminer la cohérence ou la non cohérence du RCQ. Un prérequis à la définition de cette traduction est l'existence d'un ordre partiel $\preceq$ sur B devant satisfaire certaines propriétés. Tout d'abord $(B, \preceq)$ doit être un treillis, ainsi pour tout $a, b, c \in$ B nous avons : (1) $a \preceq a$, (2) si $a \preceq c$ et $c \preceq b$ alors $a \preceq b$, (3) si $a \preceq b$ et $b \preceq a$ alors $a = b$, (4) il existe deux éléments de B correspondant à $\mathsf{Inf}\{a, b\}$ et $\mathsf{Sup}\{a, b\}$. Étant donné deux éléments $a, b \in$ B, l'intervalle $[a, b]$ représentera la relation de A définie par $\{c \in \mathsf{B} : a \preceq c$ et $c \preceq b\}$. $\mathcal{C}_{\preceq}$ dénotera le sous-ensemble de A correspondant aux intervalles de $(\mathsf{B}, \preceq)$. Formellement, $\mathcal{C}_{\preceq} = \{[a, b] : a, b \in \mathsf{B}\}$. Dans la suite, nous appelons simple RCQ, SRCQ en abrégé, tout RCQ $= (V, C)$ dont chaque contrainte C_{ij} est définie par une relation $[C^-_{ij}, C^+_{ij}]$ de $\mathcal{C}_{\preceq}$.
Concernant $(\mathsf{B}, \preceq)$ nous posons deux nouvelles propriétés concernant les opérations d'inverse et de faible composition :

- pour tout $a, b \in \mathsf{B}$, si $a \preceq b$ alors $b^{-1} \preceq a^{-1}$;
- pour tout $a, b, c, d \in \mathsf{B}$, $[a, b] \circ [c, d] = [\mathsf{Inf}(a \circ c), \mathsf{Sup}(b \circ d)]$.

Pour de nombreux formalismes qualitatifs [13, 12, 8, 3, 2, 14] un tel treillis existe, il est parfois appelé treillis qualitatif ou conceptuel tandis que les relations de l'ensemble $\mathcal{C}_{\preceq}$ sont nommées relations convexes. Le treillis conceptuel de l'algèbre des intervalles est représenté dans la figure 2. Un SRCQ défini sur ce treillis est également représenté dans cette même figure. La contrainte C_{ij} n'est pas représentée lorsque C_{ji} est déjà présente ou bien lorsqu'elle corespond à la relation totale (*i.e.* B) ou bien encore lorsque $i = j$.

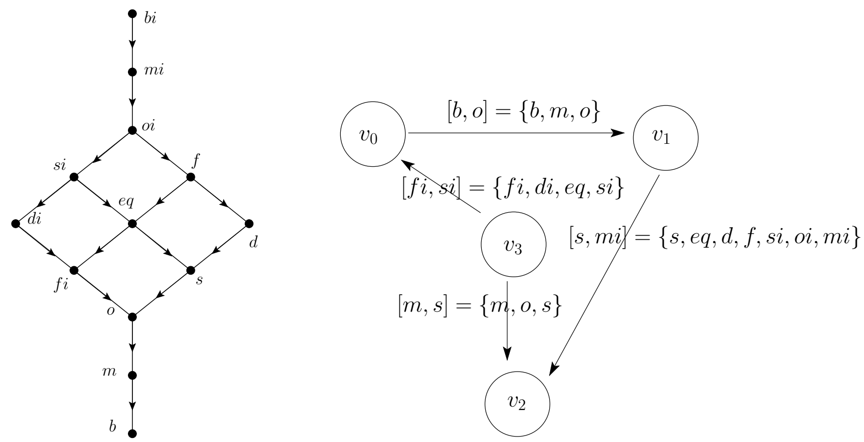

FIG. 2 – Le treillis conceptuel $(\mathsf{B}, \preceq)$ de AI (à gauche) et un SRCQ cohérent (à droite)

Il est temps maintenant de définir notre traduction permettant la représentation d'un RCQ en un ensemble de clauses. Cet ensemble de clauses permet de modéliser des propriétés sur les liens entre le treillis $(\mathsf{B}, \preceq)$ et les relations de base devant être satisfaites entre les différentes variables.

Définition 2
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* SRCQ *et* $n = |V|$. *Sur l'ensemble de propositions* $\{C_{ij} \preceq a$ *avec* $a \in B$ *et* $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}\} \cup \{a \preceq C_{ij}$ *avec* $a \in B$ *et* $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ *nous définissons* $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ *par l'ensemble des clauses suivantes :*

– *pour chaque contrainte* $C_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$ *avec* $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$*, deux clauses unitaires bornant les relations de base possibles sont introduites :*

$$a_{ij} \preceq C_{ij} \text{ et } C_{ij} \preceq b_{ij} \quad (I)$$

– *Nous introduisons également des clauses modélisant une propriété sur les infimums et les supremums de* $\preceq$ *pour tout* $a, b \in \mathsf{B}$ *:*

$$\neg(a \preceq C_{ij}) \vee \neg(b \preceq C_{ij}) \vee \mathsf{Sup}\{a, b\} \preceq C_{ij} \quad (II\ a)$$

$$\neg(C_{ij} \preceq a) \vee \neg(C_{ij} \preceq b) \vee C_{ij} \preceq \mathsf{Inf}\{a, b\} \quad (II\ b)$$

– *Des clauses correspondant à la propriété de transitivité de* $\preceq$ *sont introduites pour tout* $a, b \in \mathsf{B}$ *tels que* $a \not\preceq b$ *:*

$$\neg(a \preceq C_{ij}) \vee \neg(C_{ij} \preceq b) \quad (III)$$

– *Deux clauses concernant l'opération inverse est introduite pour tout* $a \in \mathsf{B}$ *:*

$$\neg(a \preceq C_{ij}) \vee C_{ji} \preceq a^{-1} \text{ et } \neg(C_{ij} \preceq a) \vee a^{-1} \preceq C_{ji} \quad (IV)$$

– *Enfin nous introduisons pour chaque triplet de contraintes* C_{ik}, C_{kj}, C_{ij}*, avec* $i, j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *et* $i < j$*, deux clauses découlant de propriétés de l'opération de faible composition :*

$$\neg(a \preceq C_{ik}) \vee \neg(b \preceq C_{kj}) \vee \mathsf{Inf}(a \circ b) \preceq C_{ij} \quad (V a)$$

$$\neg(C_{ik} \preceq a) \vee \neg(C_{kj} \preceq b) \vee C_{ij} \preceq \mathsf{Sup}(a \circ b) \quad (Vb)$$

Notons que $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ ne contient que des clauses de Horn. En conséquence de quoi sa satisfiabilité peut être déterminée en temps polynomial. De plus, nous pouvons remarquer que les traductions de deux SRCQ définis sur un même formalisme qualitatif et sur un même ensemble de variables ne vont différer que pour l'ensemble des clauses (I). Des clauses peuvent être également trivialement vraies du fait qu'elles contiennent un littéral et son opposé. Elles peuvent donc être omises. Par exemple, pour deux relations de base $a, b \in \mathsf{B}$ tels que $\mathsf{Sup}\{a, b\} = a$ ou $\mathsf{Sup}\{a, b\} = b$, les clauses (II a) sont trivialement satisfaites. Considérons le SRCQ représenté dans la figure 2. Sa traduction en SAT contient notamment les clauses $eq \preceq C_{00}$, $C_{00} \preceq eq$, $b \preceq C_{01}$, $C_{01} \preceq o$, $oi \preceq C_{10}$, $C_{10} \preceq bi$, $b \preceq C_{02}$, $C_{02} \preceq bi$, $b \preceq C_{20}$, $C_{20} \preceq bi$ parmi les clauses (I). L'ensemble des clauses (II) contiendra par exemple $\neg(fi \preceq C_{01}) \vee \neg(d \preceq C_{01}) \vee f \preceq C_{01}$ puisque $f = \mathsf{Sup}\{fi, d\}$. Dans les ensembles (III) et (IV) on aura entre autres clauses $\neg(di \preceq C_{01}) \vee \neg(C_{01} \preceq eq)$ et $\neg(f \preceq C_{10}) \vee C_{01} \preceq fi$ respectivement. Comme $m \circ f = \{o, s, d\} = [o, d]$, les clauses $\neg(m \preceq C_{01}) \vee \neg(f \preceq C_{12}) \vee o \preceq C_{02}$ et $\neg(C_{01} \preceq m) \vee \neg(C_{12} \preceq f) \vee C_{02} \preceq d$ apprtiennent à l'ensemble de clauses (V).

Précédemment nous avons proposé une traduction des SRCQ en logique propositionnelle. Cette traduction peut-être facilement généralisée au cas de RCQ quelconques. En effet, étant donnée une contrainte définie par une relation $C_{ij} \in \mathsf{A}$, nous pouvons toujours découper C_{ij} en un ensemble de k relations $\{C_{ij}^1, \ldots, C_{ij}^{k_{ij}}\}$, avec k_{ij} un nombre entier infèrieur à $|\mathsf{B}|$, tel que $C_{ij} = \bigcup_{l \in 1, \ldots, k_{ij}} C_{ij}^l$ et C_{ij}^l est une relation appartenant à $\mathcal{C}_{\preceq}$ pour tout $l \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$. Ainsi, $C_{ij}^l = [a_{ij}^1, b_{ij}^1] \cup \ldots \cup [a_{ij}^{k_{ij}}, b_{ij}^{k_{ij}}]$ avec $a_{ij}^1, \ldots, a_{ij}^{k_{ij}}, b_{ij}^1, \ldots, b_{ij}^{k_{ij}} \in \mathsf{B}$. La modélisation d'une telle contrainte sera effectuée en remplaçant les deux clauses unitaires introduites dans (I) par un ensemble de clauses correspondant à la formule logique $(a_{ij}^1 \preceq C_{ij} \wedge C_{ij} \preceq b_{ij}^1) \vee \ldots \vee (a_{ij}^{k_{ij}} \preceq C_{ij} \wedge C_{ij} \preceq b_{ij}^{k_{ij}})$. Par exemple, supposons que pour le RCQ représenté dans la figure 2 la contrainte C_{02} ne soit plus définie par la relation totale mais par la relation $\{m, o, s, eq, f, d\}$. Nous avons $C_{02} = \{m, o, s, eq, f, d\} = \{m, o\} \cup \{s, eq, f, d\} = [m, o] \cup [s, d]$. C_{02} pourra donc être modélisée par des clauses correspondant à la formule logique $(m \preceq C_{02} \wedge C_{02} \preceq o) \vee (s \preceq C_{02} \wedge C_{02} \preceq d) : m \preceq C_{02} \vee s \preceq C_{02}, m \preceq C_{02} \vee C_{02} \preceq d$, $C_{02} \preceq o \vee s \preceq C_{02}$, $C_{02} \preceq o \vee C_{02} \preceq d$. Remarquons que ces clauses ne sont pas des clauses de Horn. Notons également que dans le cas des relations d'Allen, le nombre de relations de $\mathcal{C}_{\preceq}$ nécessaires pour un découpage minimal est de 3.55 en moyenne [11]. En règle générale, le "découpage" d'une relation quelconque de A en relations de $\mathcal{C}_{\preceq}$ n'est pas unique. Pour la suite, nous supprimons ce non determinisme en supposant fixé un découpage unique pour chaque relation $r \in \mathsf{A}$.

4 Complétude de la traduction Sat

Dans cette section nous prouvons que la satisfiabilité de l'ensemble de clauses issu de la traduction Sat appliquée à un RCQ permet de déterminer la cohérence ou non de ce dernier. Avant cela, prouvons une propriété qui nous sera utile dans la suite et qui concerne le treillis $(\mathsf{B}, \preceq)$:

Proposition 1
Soient $a, b, c, d \in \mathsf{B}$. *Si* $a \preceq c$ *et* $b \preceq d$ *alors nous avons* $\mathsf{Inf}(a \circ b) \preceq \mathsf{Inf}(c \circ d)$ *et* $\mathsf{Sup}(a \circ b) \preceq \mathsf{Sup}(c \circ d)$.

Preuve Considérons les relations $[a, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})]$, $[b, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})]$, $[c, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})]$ et $[d, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})]$. Comme $a \preceq c$ et $b \preceq d$ nous avons $[c, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] \subseteq [a, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})]$ et $[d, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] \subseteq [b, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})]$. En conséquence de quoi $[c, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] \circ [d, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] \subseteq [a, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] \circ [b, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})]$. Du fait que $[c, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] \circ [d, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] = [\mathsf{Inf}(c \circ d), \mathsf{Sup}(\mathsf{Sup}(\mathsf{B}) \circ \mathsf{Sup}(\mathsf{B}))]$ et $[a, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] \circ [b, \mathsf{Sup}(\mathsf{B})] = [\mathsf{Inf}(a \circ b), \mathsf{Sup}(\mathsf{Sup}(\mathsf{B}) \circ \mathsf{Sup}(\mathsf{B}))]$ il s'ensuit que $\mathsf{Inf}(a \circ b) \preceq \mathsf{Inf}(c \circ d)$. En considérant les relations $[\mathsf{Inf}(\mathsf{B}), a]$, $[\mathsf{Inf}(\mathsf{B}), b]$, $[\mathsf{Inf}(\mathsf{B}), c]$, $[\mathsf{Inf}(\mathsf{B}), d]$ et en utilisant un raisonnement similaire nous pouvons démontrer que $\mathsf{Sup}(a \circ b) \preceq \mathsf{Sup}(c \circ d)$. $\dashv$
Maintenant prouvons que la traduction SAT d'un SRCQ fermé par faible composition est satisfiable :

Proposition 2
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* SRCQ *défini sur* $(\mathsf{B}, \preceq)$. *Si* $\mathcal{N}$ *admet un scénario* $\circ$*-fermé alors* $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ *est satisfiable.*

Preuve Soit $\mathcal{S}$ un scenario $\circ$-fermé de $\mathcal{N}$. Notons s_{ij} la relation de base correspondant à la contrainte entre les variables v_i et v_j de $\mathcal{S}$ pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ avec $n = |V|$. Nous définissons une interprétation I de $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ de la manière suivante : pour chaque contrainte C_{ij} et chaque $a \in \mathsf{B}$: si $a \preceq s_{ij}$ alors $I(a \preceq C_{ij}) = vrai$, $I(a \preceq C_{ij}) = faux$ sinon. Pour chaque contrainte C_{ij} et chaque $a \in \mathsf{B}$: si $s_{ij} \preceq a$ alors $I(C_{ij} \preceq a) = vrai$, $I(C_{ij} \preceq a) = faux$ sinon. Comme $\mathcal{S}$ est un scénario de $\mathcal{N}$, nous avons $a_{ij} \preceq s_{ij} \preceq b_{ij}$, avec $C_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$. Il s'ensuit que I satisfait les clauses (I). $s_{ij} \in \mathsf{B}$ et $(\mathsf{B}, \preceq)$ est un treillis, il s'ensuit que les clauses (II) et (III) sont satisfaites. $s_{ij} = s_{ji}^{-1}$ et nous savons que si $a \preceq b$ alors $b^{-1} \preceq a^{-1}$. Il s'ensuit que les clauses (IV) sont satisfaites par I. Comme $\mathcal{S}$ est $\circ$-fermé nous avons $s_{ij} \in [s_{ik}, s_{ik}] \circ [s_{kj}, s_{kj}]$ pour tout $i, j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Ainsi, $\mathsf{Inf}(s_{ik} \circ s_{kj}) \preceq s_{ij} \preceq \mathsf{Sup}(s_{ik} \circ s_{kj})$. Pour tout $a, b \in \mathsf{B}$, si $a \preceq s_{ik}$ et $b \preceq s_{kj}$ alors $\mathsf{Inf}(a \circ b) \preceq \mathsf{Inf}(s_{ik} \circ s_{kj})$ (Prop. 1). Il s'ensuit que $\mathsf{Inf}(a \circ b) \preceq s_{ij}$. Pour tout $a, b \in \mathsf{B}$, si $s_{ik} \preceq a$ et $s_{kj} \preceq b$ alors $\mathsf{Sup}(s_{ik} \circ s_{kj}) \preceq \mathsf{Sup}(a \circ b)$ (Prop. 1). Il s'ensuit que $s_{ij} \preceq \mathsf{Sup}(a \circ b)$. Les clauses (V) sont donc satisfaites. Nous pouvons donc conclure que I est un modèle de $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$. $\dashv$

À partir d'une interprétation satisfaisant $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ nous pouvons définir un sous-RCQ de $\mathcal{N}$ $\circ$-fermé et défini sur $\mathcal{C}_{\preceq}$. Ce SRCQ est défini formellement de la manière suivante :

Définition 3
Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* SRCQ *et* I *un modèle satisfaisant* $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$. $\mathsf{srcq}(\mathsf{Sat}(\mathcal{N}))$ *est le* SRCQ (V, C') *défini par* $C'_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]$, *avec* $l_{ij} = \mathsf{Sup}\{a \in \mathsf{B} : I(a \preceq C_{ij}) = vrai\}$ *et* $u_{ij} = \mathsf{Inf}\{a \in \mathsf{B} : I(C_{ij} \preceq a) = vrai\}$, *pour tout* $i, j \in \{0, \ldots, |V|-1\}$.

Notons que $\mathsf{srcq}(\mathsf{Sat}(\mathcal{N}))$ est bien défini car du fait de la satisfaction des clauses (IV) nous pouvons montrer que $l_{ij} = l_{ji}^{-1}$ et $u_{ij} = u_{ji}^{-1}$. De plus, nous avons $l_{ii} = u_{ii} = \mathsf{Id}$ car $\mathsf{Id} \preceq C_{ii}$ et $C_{ii} \preceq \mathsf{Id}$ appartiennent aux clauses (I). Ce SRCQ possède également les caractéristiques suivantes :

Proposition 3
Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* SRCQ *et* I *un modèle satisfaisant* $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$*. Nous avons :* (a) $\mathsf{srcq}(\mathsf{Sat}(\mathcal{N})) \subseteq N$ *et,* (b) $\mathsf{srcq}(\mathsf{Sat}(\mathcal{N}))$ *est un* RCQ $\circ$*-fermé.*

Preuve (a) Montrons que pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, avec $n = |V|$, $a_{ij} \preceq l_{ij} \preceq u_{ij} \preceq b_{ij}$, avec $C_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$ et $l_{ij} = \mathsf{Sup}\{a \in \mathsf{B} : I(a \preceq C_{ij}) = vrai\}$ et $u_{ij} = \mathsf{Inf}\{a \in \mathsf{B} : I(C_{ij} \preceq a) = vrai\}$. Du fait des clauses (I) nous savons que I satisfait $a_{ij} \preceq C_{ij}$ et $C_{ij} \preceq b_{ij}$. Par définition de l_{ij} et u_{ij} nous avons donc $a_{ij} \preceq l_{ij}$ et $u_{ij} \preceq b_{ij}$. Montrons que $l_{ij} \preceq u_{ij}$. I satisfait les clauses (II), nous pouvons en déduire que I satisfait $l_{ij} \preceq C_{ij}$ et $C_{ij} \preceq u_{ij}$. Dans le cas où $l_{ij} \not\preceq u_{ij}$ I ne satisferait pas les clauses (III). Il s'ensuit que $l_{ij} \preceq u_{ij}$. (b) Montrons que pour tout $i, j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$, avec $i < j$, nous avons $[l_{ij}, u_{ij}] \subseteq [l_{ik}, u_{ik}] \circ [l_{kj}, u_{kj}]$. Nous savons que I satisfait les littéraux $l_{ik} \preceq C_{ik}$, $l_{kj} \preceq C_{kj}$, $C_{ik} \preceq u_{ik}$ et $C_{kj} \preceq u_{kj}$. Du fait que I satisfait les clauses (V) nous pouvons affirmer que $\mathsf{Inf}(l_{ik} \circ l_{kj}) \preceq C_{ij}$ et $C_{ij} \preceq \mathsf{Sup}(u_{ik} \circ u_{kj})$ sont deux littéraux satisfaits. Par définition de l_{ij} et u_{ij} nous en déduisons que $\mathsf{Inf}(l_{ik} \circ l_{kj}) \preceq l_{ij}$ et $u_{ij} \preceq \mathsf{Sup}(u_{ik} \circ u_{kj})$. Comme $[l_{ik}, u_{ik}] \circ [l_{kj}, u_{kj}] = [\mathsf{Inf}(l_{ik} \circ l_{kj}), \mathsf{Sup}(u_{ik} \circ u_{kj})]$, nous avons $[l_{ij}, u_{ij}] \subseteq [l_{ik}, u_{ik}] \circ [l_{kj}, u_{kj}]$. $\mathsf{srcq}(\mathsf{Sat}(\mathcal{N}))$ est donc un RCQ $\circ$-fermé. $\dashv$

Proposition 4
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* SRCQ*. Si la méthode de la fermeture par faible composition est complète pour les* SRCQ *alors* $\mathcal{N}$ *est cohérent ssi* $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ *est satisfiable.*

Preuve $-$ Supposons que $\mathcal{N}$ soit cohérent. Il existe un scénario de $\mathcal{N}$ cohérent. Ce scénario est fermé par faible composition. D'après la proposition 2, nous pouvons affirmer que $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ admet un modèle. $-$ Supposons que $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ admet un modèle I. D'après la proposition 3 nous pouvons affirmer que $\mathsf{srcq}(\mathsf{Sat}(\mathcal{N}))$ est un sous-RCQ de $\mathcal{N}$ $\circ$-fermé. $\mathsf{srcq}(\mathsf{Sat}(\mathcal{N}))$ est donc cohérent. Il s'ensuit que $\mathcal{N}$ est cohérent. $\dashv$
Nous pouvons étendre ce théorème au cas général des RCQ :

Théorème 1
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* RCQ*. Si la méthode de la fermeture par faible composition est complète pour les* SRCQ *alors* $\mathcal{N}$ *est cohérent ssi* $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ *est satisfiable.*

Preuve Rappelons nous que la traduction SAT d'un RCQ $\mathcal{N}$ est basée sur un découpage en relations de $\mathcal{C}_\preceq$ de chacune de ses contraintes : $C_{ij} = [a^1_{ij}, b^1_{ij}] \cup \ldots \cup [a^{k_{ij}}_{ij}, b^{k_{ij}}_{ij}]$ avec $a^1_{ij}, \ldots, a^{k_{ij}}_{ij}, b^1_{ij}, \ldots, b^{k_{ij}}_{ij} \in \mathsf{B}$ et k_{ij} un entier. $-$ Si $\mathcal{N}$ est cohérent alors il admet un sous-RCQ $\mathcal{N}' = (V, C')$ cohérent dont chaque contrainte C'_{ij} est définie par une relation $[a^l_{ij}, b^l_{ij}]$ avec $l \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$ issue du découpage de C_{ij}. De la proposition précédente nous savons que $\mathsf{Sat}(\mathcal{N}')$ admet un modèle. En examinant la définition de $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$ on peut affirmer que ce modèle satisfait également $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$. $-$ Soit un modèle I satisfaisant $\mathsf{Sat}(\mathcal{N})$. Nous savons que pour chaque contrainte C_{ij}, il existe un entier $k \in \{1, \ldots, k_{ij}\}$ tel que I satisfait la conjonction $a^k_{ij} \preceq C_{ij} \wedge b^k_{ij} \preceq C_{ij}$. En définissant $\mathcal{N}' = (V, C')$ par $C'_{ij} = [a^k_{ij}, b^k_{ij}]$, nous obtenons un SRCQ sous-RCQ de $\mathcal{N}$ dont la traduction SAT $\mathsf{Sat}(\mathcal{N}')$ est satisfaite par I. Par conséquent, d'après la proposition précédente, $\mathcal{N}'$ est cohérent. Il s'ensuit que $\mathcal{N}$ est également cohérent. $\dashv$

5 Discussion concernant les traductions SAT existantes

La traduction existante [7, 6] la plus "naturelle" exploite le fait que dans la plupart des formalismes, un scénario $\circ$-fermé est cohérent. Elle est définie de la manière suivante :

Définition 4 (Support encoding)
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ *un* RCQ *tel que* $V = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$. $\mathsf{Sat}_S(\mathcal{N})$ *est l'ensemble de clauses défini sur l'ensemble de propositions* $\{r_{ij}$ *avec* $a \in \mathsf{B}, i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ *et* $i < j\}$ *par :*

1. *pour tout* $1 \leq i < j \leq n$*, la clause* $\bigvee_{a \in C_{ij}} a_{ij}$ *est introduite (ALO),*
2. *pour tout* $1 \leq i < j \leq n$ *et pour tout* $a, b \in C_{ij}$*, si* $a \neq b$*, la clause* $\neg a_{ij} \vee \neg b_{ij}$ *est introduite (AMO)*
3. *pour tout* $1 \leq i < k < j \leq n$*, pour tout* $a \in C_{ik}$*,* $b \in C_{kj}$*, la clause* $\neg a_{ik} \vee \neg b_{kj} \vee \bigvee_{c \in (a \circ b) \cap C_{ij}} c$*, est introduite (Support).*

Intuitivement, les clauses (ALO) et (AMO) font que tout modèle "satisfera" une et une seule relation de base a_{ij} par contrainte C_{ij}.Les clauses (Support) permettent de spécifier tous les triplets de relations de base possibles à l'aide de la table de composition. On peut prouver que si la méthode de la fermeture par faible composition est complète pour les scénarios alors $\mathsf{Sat}_S(\mathcal{N})$ est satisfiable ssi $\mathcal{N}$ est cohérent. En comparant Sat et Sat_S, le premier constat qu'il est possible de faire concerne les clauses de Horn. En effet, Sat garantit à toutes les clauses d'être de Horn dans le cas où le RCQ traduit est un SRCQ. Ce n'est pas le cas de la traduction Sat_S. À des fins d'illustration considérons de nouveau le SRCQ de la figure 2. La clause (ALO) associée à C_{01} sera définie par $b_{01} \vee m_{01} \vee o_{01}$. L'une des 3 relations b, m, o dans C_{01}. Les clauses (AMO) associées à C_{01} sont au nombre de 3 : $\neg b_{01} \vee \neg m_{01}$, $\neg b_{01} \vee \neg o_{01}$ et $\neg m_{01} \vee \neg o_{01}$. Enfin, pour représenter le fait que $m \circ o = \{o, s, d\}$ pour les contraintes C_{01}, C_{12}, C_{23} par exemple, on introduit la clause (Support) $\neg m_{01} \vee \neg o_{12} \vee o_{02} \vee s_{02} \vee d_{02}$. On constate que la plupart de ces clauses ne sont pas de Horn, ce qui peut être aussi le cas des clauses de Sat, dans le cas d'une traduction des RCQ. Le nombre de littéraux des clauses (I) dépendra du découpage en relations de $\mathcal{C}_{\preceq}$. Dans le cas d'Allen, en moyenne, ce nombre est plus faible que la taille des clauses (ALO). La représentation de la relation totale est la relation pour laquelle la différence est la plus extrême. De loin, l'ensemble de clauses le plus important résultant des deux traductions correspond aux clauses représentant la composition des relations de base : l'ensemble de clauses (V) pour Sat et l'ensemble de clauses (Support) pour Sat_S. En prenant l'exemple d'un RCQ de 50 variables, le nombre de clauses (V) obtenu par Sat est de l'ordre de la dizaine de millions, tandis que dans le cas des clauses (Support) obtenues par Sat_S, le nombre de clauses est 3 fois moindre. Ceci est dû notamment à la définition des clauses (Support) qui se contente d'un ordre strict sur les indices des contraintes considérées. Une étude théorique encore approfondie doit aussi permettre de pouvoir réduire les clauses (V).

6 Conclusion et travaux futurs

Dans ce papier nous avons défini un codage des réseaux de contraintes qualitatives en logique propositionnelle utilisant une structure correspondant à un treillis particulier sur les relations de base. Dans le cas particulier des SRCQ nous obtenons un ensemble de clauses de Horn. Nous avons prouvé que le problème de satisfiabilité de l'ensemble des clauses résultant de cette traduction permet de résoudre le problème de la cohérence des RCQ traduits. Des expériences sont en cours pour comparer les différentes traductions SAT existantes et cette nouvelle traduction. Notre objectif est de comparer d'une part les tailles des ensembles de clauses obtenues par ces traductions, et d'autre part nous souhaitons comparer le temps nécessaire à différents solveurs SAT pour résoudre ces ensembles de clauses. La traduction présentée dans ce papier s'inspire de propriétés des relations dites convexes. Une perspective de recherche est de définir une nouvelle traduction s'inspirant de propriétés des relations dites préconvexes qui correspondent à un sur-ensemble traitable de l'ensemble des relations convexes.

Références

[1] J. F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proc. of the Seventh Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'81)*, pages 221–226, 1981.

[2] P. Balbiani, J.-F. Condotta, and L. Fariñas del Cerro. Spatial reasoning about points in a multidimensional setting. In *Proc. of the work. on temp. and spatial reasoning (IJCAI'99)*, pages 105–113, 1999.

[3] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In T. Dean, editor, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99)*, pages 442–447, 1999.

[4] Peter Van Beek and Dennis W. Manchak. The design and experimental analysis of algorithms for temporal reasoning. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 4 :1–18, 1996.

[5] J.-F. Condotta, G. Ligozat, and M. Saade. An empirical study of algorithms for qualitative temporal or spatial networks. In *Proceedings of the workshop on spatial reasoning (ECAI'06)*, 2006.

[6] Dominique D'Almeida. Résolution de CSP qualitatifs par l'utilisation de CSP discrets et de SAT. Technical report, Rapport de Master I, Université d'Artois, CRIL-CNRS, 2007.

[7] Abdul Sattar Duc Nghia Pham and John Thornton. Towards an efficient sat encoding for temporal reasoning. In F. Benhamou, editor, *Proceedings of the 12th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP'06)*, volume Lecture Notes in Computer Science 4204, pages 421–436, Nantes, France, 2006.

[8] Gérard Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 1(9) :23–44, 1998.

[9] A. K. Mackworth and E. C. Freuder. The Complexity of Some Polynomial Network Consistency Algorithms for Constraint Satisfaction Problem. *Artificial Intelligence*, 25(1) :65–74, 1985.

[10] U. Montanari. Networks of constraints : Fundamental properties and application to picture processing. *Information Sciences*, 7(2) :95–132, 1974.

[11] Bernhard Nebel. Solving hard qualitative temporal reasoning problems : Evaluating the efficienty of using the ord-horn class. In *Proc. of the Twelfth Conference on Artificial Intelligence (ECAI'96)*, 1996.

[12] Bernhard Nebel and Hans-Jürgen Bürckert. Reasoning About Temporal Relations : A Maximal Tractable Subclass of Allen's Interval Algebra. *Journal of the ACM*, 42(1) :43–66, 1995.

[13] K. Nökel. Temporally distributed symptoms in technical diagnosis. *LNCS*, 517 :1–184, 1991.

[14] Arun K. Pujari, G. Vijaya Kumari, and Abdul Sattar. Indu : An interval and duration network. In *Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 291–303, 1999.

[15] D. A. Randell, Z. Cui, and A. G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In *Proc. of the 3rd Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, pages 165–176, 1992.