Rapport de stage

Alix Goudyme

Modélisation logique de l'intentionnalité dans les jeux épistémiques

Master Intelligence Artificielle

superviseurs : Nathalie Chetcuti-Sperandio, Sylvain Lagrue et Tiago de Lima

01/04/2018-25/07/2018

Centre de recherche en informatique de Lens

Contents

1 Introduction

Modéliser l'intention est un enjeu important de par son intéret dans divers domaine. En effet, connaitre le but recherher d'une personne, d'un groupe ou bien d'un logiciel à partir des connaissances qu'il a serait très intéressant en économie, dans les jeux et bien sur en intelligence artificielle.

Ce que l'on souhaite obtenir, c'est qu'à partir des connaissances des agents sur le mondes, des connaissances qu'ils ont sur les actions à leurs dispositions et des actions qu'ils ont finalement réaliser, on puisse obtenir l'objectif qu'ils souhaitaient attendre. Dans le monde réel, il est extrément difficile d'obtenir ces données, pour plusieurs raisons. Principalement, nous ne souhaitons pas obtenir ces informations par un questionnement direct, mais par simple observation. Ensuite, même si un questionnement direct était possible, l'agent n'a pas forcément une connaissance parfaite de ses connaissances.

On a donc choisit de se restreindre aux jeux épistémiques. D'une part car les jeux permettent une liberté de choix aux agents et à un observateur d'avoir une connaissance totale sur les connaissances des joueurs et des actions qu'il peuvent effectuer. D'autre part, les jeux épistémiques désignent les jeux à informations incomplète où la réussite du jeu dépend essentiellement de la connaissance de l'état du jeu par les joueurs. Des exemples de ces types de jeux sont le cluedo ou bien le hanabi.

La logique épistémique dynamique est une logique qui traite de la connaissance d'agents et de son évolution à la suite d'évenements. Elle apparait donc comme une bonne base pour la construction d'une modélisation loqique de l'intention dans les jeux épistémique.

Ce rapport présentera donc en première partie la logique épistémique dynamique en commençant par la logique modal dont elle est issue et en passant par logique épistémique classique. Dans le cadre de l'étude de jeux, le Game Description Language sera également présenté, nous permettant par la suite d'analyser de nombreuses parties de jeux. Et pour terminer, une partie sur le travail réaliser sur la modélisation de l'intention lors de ce stage.

2 Logique modale

2.1 Syntaxe

La logique modale est une logique propositionnelle enrichie par des connecteurs [F. Chellas(2012)]. Une proposition peut alors être simplement possible ou alors tout à fait nécessaire. Cette logique s'appuie sur les connecteurs de la logique propositionnelle auxquels on ajoute deux nouveaux connecteurs représentant la *possibilité* $\Diamond$ et la *nécessité* $\Box$. Les connecteurs sont résumés dans le tableau suivant :

nom	arité	symbole
vrai	0	$\top$
faux	0	$\bot$
négation	1	$\neg$
conjonction	2	$\wedge$
disjonction	2	$\vee$
implication	2	$\rightarrow$
équivalence	2	$\leftrightarrow$
possibilité	1	$\Diamond$
nécessité	1	$\Box$

Les raisonnements de la logique modale s'effectuent sur des formules. Elles se construisent de la façon suivante :

1. Si p est une variable propositionnelle alors p est une formule.
2. Si ϕ et ψ sont des formules alors $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$, $\Box\phi$, $\Diamond\phi$ sont des formules.
3. On ne peut créer des formules que par ces deux façons.

4. On peut également y inclure des parenthèses pour y fixer la portée d'un connecteur ou simplement pour plus de compréhension.

On aimerait attacher à chaque connecteur une signification afin de pouvoir donner un sens à chaque formule. Voici un exemple de ce qu'on aimerait obtenir :

- $\neg\phi$ signifie "non-ϕ"
- $\phi \wedge \psi$ signifie "ϕ et ψ".
- $(\phi \wedge \psi) \to \omega$ signifie "si ϕ et ψ alors ω"
- $\Diamond\neg(\phi \leftrightarrow \psi)$ signifie "il est possible que ϕ et ψ ne soient pas équivalents"
- $\neg\Box(\phi \leftrightarrow \psi)$ signifie "il n'est pas nécessaire que ϕ et ψ soient équivalents"

2.2 Interprétation

Dans le cadre de la logique propositionnelle, une interprétation associe à chaque formule une valeur de vérité : vrai ou faux. Une interprétation est par définition une fonction de l'ensemble des variables propositionnelles, noté P, vers l'ensemble {vrai,faux}. Les règles en logique propositionnelles sont les suivantes :

- $\top$ est vrai et $\bot$ est faux.
- si p est une variable propositionnelle alors p est vrai si et seulement si l'interprétation de p est vrai.
- si ϕ est une formule alors $\neg\phi$ est vrai si et seulement si ϕ est faux.
- si ϕ et ψ sont des formules alors $\phi \wedge \psi$ est vrai si ϕ et ψ sont vrais.
- si ϕ et ψ sont des formules alors $\phi \vee \psi$ est vrai si ϕ ou ψ ou les deux sont vrais.
- si ϕ et ψ sont des formules alors $\phi \to \psi$ est vrai si ϕ est faux ou si lorsque ϕ est vrai alors ψ est vrai.
- si ϕ et ψ sont des formules alors $\phi \leftrightarrow \psi$ est vrai si $\phi \to \psi$ et $\psi \to \phi$ sont vrais.

On appelle alors *modèle* une interprétation qui rend la formule vraie et on dit que l'interprétation falsifie si elle la rend fausse. Du point de vue des formules, on dit qu'une formule est *satisfiable* s'il existe au moins une interprétation qui la rend vraie. Dans le cas contraire elle est dite *insatisfiable*. Si toutes les interprétations rendent la formule vraie, on dit alors que la formule est *valide* ou également que c'est une *tautologie* noté $\models \phi$. (exemple de tautologie : p$\vee\neg$p)

Si ϕ et ψ sont des formules et si tous les modèles de ϕ sont aussi modèles de ψ alors on dit que ψ est une conséquence logique de ϕ noté $\phi \models \psi$. Si de même $\psi \models \phi$, alors on dit que ϕ et ψ sont logiquement équivalents, noté $\phi \equiv \psi$.

La logique modale et la logique propositionnelle partagent les mêmes règles pour ce qu'elles ont en commun. Pour les connecteurs $\Box$ et $\Diamond$, que veut dire "il est possible que ϕ soit vrai" ? On se doit donc de concevoir une modélisation appropriée, ce que nous allons voir immédiatement.

2.3 Modèle de Kripke

Une des sémantiques les plus utilisées est celle proposée par Saul Kripke [Kripke(1959)]. Un modèle de Kripke se base sur la notion de mondes possibles. On va noter chaque *monde* par $\mathrm{M_n}$ (où n est un entier), on note M l'ensemble des mondes $\mathrm{M_n}$ et enfin on note également $\mathbb{P}$ l'ensemble des propositions

On définit un *cadre de Kripke* comme l'ensemble formé de M et de R, où R est une relation binaire sur M. Cette relation est appelée *relation d'accessibilité* et définit les mondes accessibles depuis chacun des mondes. Un cadre de Kripke est souvent représenté sous forme de graphe orienté où les sommets sont les mondes et les arêtes relient les mondes accessibles.

Enfin on définit un *modèle de Kripke* comme un triplet formé de M, de R et de h, où h est la fonction de valuation des propositions. La fonction de valuation associe à chaque proposition de

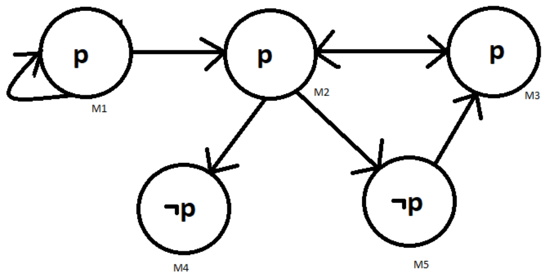

Figure 1: Graphe de Kripke

$\mathbb{P}$ un sous ensemble de mondes. Le triplet (M,R,h) est aussi appelé Univers, nous pouvons voir un exemple sur la figure 1.

Explication de la figure 1 : Il y a 5 mondes dans cet univers, mondes que l'on peut classer entre ceux qui contiennent p et ceux qui ne contiennent pas p. En effet, il est équivalent de dire qu'un monde ne contient pas une variable propositionnelle et de dire qu'il contient sa négation. On a donc h(p)={M1,M2,M3}. Les arêtes orientées représentent la relation R. Par exemple R lie le monde 1 à lui-même et au monde 2.

Ceci n'est pas encore suffisant pour définir le raisonnement en logique modale. Il est à noter que la relation R binaire ne s'est pas encore vu attribuer d'autres propriétés (symétrie, réflexivité,...). On notera $M_i\mathrm{R}M_j$ lorsque le monde M_i est relié au monde M_j.

La sémantique de la logique modale au sein d'un univers U=(M,R,h) est régie par ces 10 règles :

1. $\models^U_{M_j} \psi$ si et seulement si $M_j \in h(\psi)$
2. $\models^U_{M_j} \top$
3. Non-$\models^U_{M_j} \bot$
4. $\models^U_{M_j} \neg\psi$ si et seulement si Non- $\models^U_{M_j} \psi$
5. $\models^U_{M_j} \phi \wedge \psi$ si et seulement si $\models^U_{M_j} \phi$ et $\models^U_{M_j} \psi$
6. $\models^U_{M_j} \psi \vee \phi$ si et seulement si $\models^U_{M_j} \psi$ ou $\models^U_{M_j} \phi$ ou les deux
7. $\models^U_{M_j} \psi \rightarrow \phi$ si et seulement si $\models^U_{M_j} \psi$ implique $\models^U_{M_j} \phi$
8. $\models^U_{M_j} \psi \leftrightarrow \phi$ si et seulement si $\models^U_{M_j} \psi \rightarrow \phi$ et $\models^U_{M_j} \phi \rightarrow \psi$
9. $\models^U_{M_j} \Box\psi$ si pour tous les mondes M_i de U tels que $M_j\mathrm{R}M_i$ $\models^U_{M_i} \psi$
10. $\models^U_{M_j} \Diamond\psi$ si pour au moins un monde M_i de U tels que $M_j\mathrm{R}M_i$ $\models^U_{M_i} \psi$

Exemples avec le symbole $\Box$:

- $\models^U_{M_j} \Box(\psi \wedge \phi)$ signifie que tout les mondes reliés à M_j vérifient ϕ et ψ.
- $\models^U_{M_j} \Box\psi$ n'implique pas $\models^U_{M_j} \Box\Box\psi$

Explication du deuxième exemple : même si tous les mondes qui sont reliés à M_j vérifient ψ, il n'est pas certain que tous les mondes reliés aux mondes reliés à M_j vérifient ψ.

On remarque que la sémantique de la logique propositionnelle s'applique au sein de chaque monde. Cependant, on ne parle pas d'interprétation. Les propositions sont soit vraies soit fausses au sein de chaque monde. On peut voir cela comme si chaque monde était une interprétation. Il est cependant possible de définir la validité d'une formule. En effet, si une formule est vraie dans tous les mondes de l'univers, elle est dite valide dans l'univers (par exemple si tous les mondes de la figure 1 contenaient p alors p serait valide dans cette univers). Si une formule est valide dans tous les univers alors elle est dite valide, ce type de formule est soit une tautologie, soit un axiome (ou un théorème).

Pour l'instant la logique modale est très simple et possède peu de règles. Afin d'effectuer des raisonnements plus poussés, on va ajouter des règles. Les raisonnements devront s'appuyer sur ces règles et on dira alors que la modélisation admet des règles. Ainsi une logique modale est dite *normale* si elle admet :

1. la règle d'inférence de nécessitation RN : $\frac{\psi}{\Box\psi}$
2. la règle d'inférence de Modus Ponens MP : $\frac{\psi\rightarrow\phi,\psi}{\phi}$
3. les tautologies de la logique propositionnelle
4. l'axiome de distribution de Kripke K: $\Box(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\Box\psi \rightarrow \Box\phi)$
5. l'axiome Df : $\neg\Diamond\neg\psi \leftrightarrow \Box\psi$

La règle RN signifie que si A est valide dans l'univers, alors $\Box$A est aussi valide dans l'univers (et par extension si A est valide alors $\Box$A est valide). Les logiques présentées dans la suite seront des extensions de cette logique.

3 Logique épistémique

3.1 Introduction

La logique épistémique est un type de logique modale qui traite la notion de connaissance et de croyance d'agents [Fagin et al.(2003)Fagin, Halpern, Moses, and Vardi]. L'agent croit certaines choses et n'a pas d'information sur d'autres, il imagine alors plusieurs mondes possibles.

Appelons A l'ensemble des agents. Pour chaque agent α nous introduisons un opérateur (ou connecteur) de croyance/connaissance que l'on peut noter B_α (où α réfère à l'agent α). Pour se situer par rapport au chapitre précédent, l'opérateur de croyance correspond à l'opérateur $\Box$. L'opérateur $\Diamond$ est souvent représenté $\hat{B}_\alpha$ (Pour rappel il peut s'écrire comme $\neg\Box\neg$). En effet, ce qu'un agent croit doit être vrai dans les mondes qu'il imagine. D'autre part, chaque opérateur se verra attribuer une relation binaire R_α. La relation R_α lie alors des mondes indistinguables pour l'agent α, c'est-à-dire ceux dont les propositions communes sont sues par l'agent α. La sémantique de la logique modale ne change pas pour la logique épistémique sauf pour les règles 9 et 10 qui deviennent simplement :

$$\models^U_{M_j} B_\alpha\psi \text{ si pour tous les mondes } M_i \text{ de U tels que } M_j R_\alpha M_i \models^U_{M_i} \psi$$

$$\models^U_{M_j} \hat{B}_\alpha\psi \text{ si pour au moins un monde } M_i \text{ de U tel que } M_j R_\alpha M_i \models^U_{M_i} \psi$$

Enfin, les raisonnements des agents peuvent s'effectuer sur les connaissances des autres agents. En d'autres termes, les agents ont des croyances sur les croyances des autres agents. Et pour aller plus loin, ils peuvent alors imaginer des mondes qu'ils savent faux mais potentiellement vrais pour d'autres agents.

Par exemple $B_1B_2p \wedge \neg B_2B_1B_2p$ signifie que 1 croit que 2 croit p mais que 2 ne croit pas que 1 croit que 2 croit p. Dans la partie sur la logique épistémique, des modèles de Kripke représentant ce type de formule seront montrés.

3.2 Système KD45

La logique épistémique présente deux familles d'axiomes fréquemment utilisés, le système S5 que nous verrons par la suite et le système KD45. Ce dernier traite de connaissance possible, comme une croyance de l'agent. En d'autre terme ce qu'il sait pourrait finalement être faux.

Le système KD45 est un système normal (règle RN et MP, tautologies propositionnelles, axiome K et Df) auquel on rajoute trois axiomes :

- (rappel) axiome K : $B_\alpha(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (B_\alpha\psi \rightarrow B_\alpha\phi)$
- axiome D : $B_\alpha\psi \rightarrow \neg B_\alpha\neg\psi$
- axiome 4 : $B_\alpha\psi \rightarrow B_\alpha B_\alpha\psi$
- axiome 5 : $\neg B_\alpha\psi \rightarrow B_\alpha(\neg B_\alpha\psi)$

L'axiome K est le même que vu précédemment. Il stipule que si un agent croit que ψ implique ϕ alors s'il croit ψ, il croit ϕ.

L'axiome D stipule que si un agent croit ψ alors il ne croit pas que ψ est faux. Notez que cet axiome n'est pas vrai dans tous les cas, par exemple on pourrait imaginer un système dans lequel des mondes ne sont reliés à aucun autre. Dans ce cas, on aurait, par définition de B_α, $B_\alpha\psi$ et $B_\alpha\neg\psi$ vrai.

L'axiome 4 dit que si l'agent croit ψ alors il croit qu'il croit ψ.

Enfin l'axiome 5 stipule que si l'agent ne croit pas ψ alors il croit qu'il ne croit pas ψ.

Dans ce système d'axiomes, chaque relation R_α liant les mondes possède les propriétés suivantes : sérielle, transitive et euclidienne. Elle est *sérielle* : chaque monde est relié à au moins un autre. Elle est *transitive* : si $M_1R_\alpha M_2$ et $M_2R_\alpha M_3$ alors $M_1R_\alpha M_3$. Enfin elle est *euclidienne* : si $M_1R_\alpha M_2$ et $M_1R_\alpha M_3$ alors $M_2R_\alpha M_3$.

3.3 Système S5

Le système S5 traite lui de connaissances qui sont "vraies". Ce système est un système normal auquel on ajoute deux axiomes :

- (rappel) axiome K : $B_\alpha(\psi \to \phi) \to (B_\alpha\psi \to B_\alpha\phi)$
- axiome 5 : $\neg B_\alpha\psi \to B_\alpha(\neg B_\alpha\psi)$
- axiome T : $B_\alpha\psi \to \psi$

L'axiome T exprime le fait que ce qui est su est vrai. La signification de l'axiome K et 5 change un peu. L'axiome K dit que si l'agent sait que ψ implique ϕ alors s'il sait ψ, il sait ϕ. L'axiome 5 exprime le fait que l'agent sait ce qu'il ne sait pas. De ces trois axiomes on peut déduire les axiomes D et 4 du précédent système.

Pour rappel, le symbole B_a et le symbole $\Box$ représentent la même notion. De plus, la possibilité $\Diamond$ peut s'écrire comme $\neg\Box\neg$. Pour plus de simplicité, la démonstration utilisera les symboles $\Box$ et $\Diamond$. Commençons avec le théorème D :

1. axiome T : $\Box A \to A$
2. avec la réécriture de $\Box$ avec $\Diamond$: $\neg\Diamond\neg A \to A$
3. contraposée de l'implication: $\neg A \to \Diamond\neg A$
4. en changeant de variables on obtient une autre écriture du théorème T: $A \to \Diamond A$
5. de la ligne 1, 4 et du Modus Ponens on a $\Box A \to \Diamond A$
6. en réécrivant $\Diamond$ en $\Box$: $\Box A \to \neg\Box\neg A$: théorème D

Pour le théorème 4 cela se passe en 4 étapes. Première étape :

1. axiome 5 : $\neg\Box A \to \Box\neg\Box A$
2. 1+contraposée : $\neg\Box\neg\Box A \to \Box A$
3. 2+réécriture : $\Diamond\Box A \to \Box A$: axiome 5$\Diamond$

Deuxième étape:

1. hypothèse : $A \to B$
2. 1+RN : $\Box(A \to B)$
3. 2+K : $\Box A \to \Box B$
4. 1+2+3 : $\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$: règle RM

Troisième étape:

1. axiome 5 : $\neg\Box\neg A \to \Box\neg\Box\neg A$

2. axiome T : $\Box\neg A \to \neg A$
3. 2+contraposée : $A \to \neg\Box\neg A$
4. 3+1 : $A \to \Box\neg\Box\neg A$
5. 4+réécriture : $A \to \Box\Diamond A$: théorème B

Quatrième étape:

1. axiome 5 : $\Diamond$: $\Diamond\Box A \to \Box A$
2. 1+RM : $\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$
3. théorème B +RM : $\Box A \to \Box\Diamond\Box A$
4. 2+3 : $\Box A \to \Box\Box A$: théorème 4

Ainsi le théorème D signifie ici que si l'agent sait A alors il ne sait pas que A est faux. Le théorème 4 stipule simplement que l'agent sait ce qu'il sait.

Dans ce système, R_α liant les mondes possède les propriétés suivantes : sérielle, transitive, euclidienne, réflexive et symétrique. La *réflexivité* implique que chaque monde est lié à lui-même. La *symétrie* indique que si $M_1 R_\alpha M_2$ alors $M_2 R_\alpha M_1$. En d'autres termes, dans le graphe de Kripke associé à ce système S5, chaque arête du graphe est orientée dans les deux sens, les sommets reliés à un sommet commun forment une clique et enfin chaque sommet se pointe lui-même.

La différence entre le système KD45 et le système S5 repose donc sur la véracité de ce qui est su. Ainsi on parlera plus de croyance pour le système KD45 et de connaissance pour le système S5.

3.4 Connaissance commune

La notion de connaissance (ou croyance commune suivant le système dans lequel on se place) est assez importante et est très souvent introduite en prenant l'exemple du code de la route [Lewis(1969)]. Supposons que l'on ait une route avec deux voitures A et B roulant dans des sens opposés. A priori, tout se passe bien si A sait qu'on roule à droite et que B sait qu'on roule à droite. Mais si A ne sait pas que B sait qu'on roule à droite, il pourrait décider de rouler à gauche dans l'idée de potentiellement éviter B. Il faut donc que A sache que B sait qu'on roule à droite, et réciproquement.

Mais il faut aussi que B sache que A sait que B roule à droite, sinon B pourrait décider de rouler à gauche en pensant que A pourrait avoir l'idée de rouler à gauche pour l'éviter. Donc il faut que B sache que A sait que B sait qu'on roule à droite. Et ainsi de suite...

Pour définir ce qu'est une connaissance commune, commençons par définir $E^1_G(p) = \bigwedge_{i\in G} B_i p$ signifiant : "tout le monde dans le groupe G sait p" (G étant un ensemble d'agents). Par continuité $E^2_G(p) = E^1_G(E^1_G(p))$ signifiant tout le monde dans le groupe G sait que tout le monde dans le groupe G sait p.

La connaissance commune de p dans un groupe G noté $C_G(p)$ est définie comme :

$C_G(p)$ est vrai si et seulement si $E^k_G(p)$ est vrai pour k allant de 1 à l'infini.

Afin d'inclure la connaissance commune dans la logique modale, on se doit de rajouter une règle à la sémantique. Tout d'abord introduisons la notion de G-atteignable. Un monde M_i est G-atteignable en une étape par un monde M_j si la relation d'un agent du groupe G relie ces deux mondes. Ils sont G-atteignables en 2 étapes s'ils ont en commun un monde G-atteignable en une étape. On peut continuer ainsi pour 3, 4, ... n étapes. Finalement, un monde est G-atteignable depuis un autre s'il existe k tel que ces deux mondes soient G-atteignables en k étapes. On peut à présent rajouter une règle à la sémantique :

$\models^U_{Mi} C_G(p)$ si et seulement si $\models^U_{Mj} p$ pour tous les mondes j qui sont G-atteignables depuis i.

4 Logique épistémique dynamique

4.1 Présentation

Pour introduire la logique épistémique dynamique nous allons utiliser le système S5 et continuer sur un exemple de connaissance commune. Cet exemple est connu sous le nom de "muddy children puzzle" et possède plusieurs variantes, nous allons voir l'une d'entre elles. Deux joueurs sont dans une même salle, ils peuvent se voir mais pas communiquer entre eux. Une personne extérieure rentre et colle sur le front de chaque participant un papier sur lequel est écrit soit "propre", soit "sale". Le but du jeu est de savoir si l'on est propre ou sale.

Considérons le cas où la personne extérieure a collé le mot "sale" sur les deux participants. Le joueur 1 voit le front du joueur 2, il sait que le front du joueur 2 est sale. Mais il ne sait pas si lui-même est sale. Il imagine alors deux mondes possibles, le monde où il est propre et celui où il est sale. Le joueur 2 se fait la même réflexion.

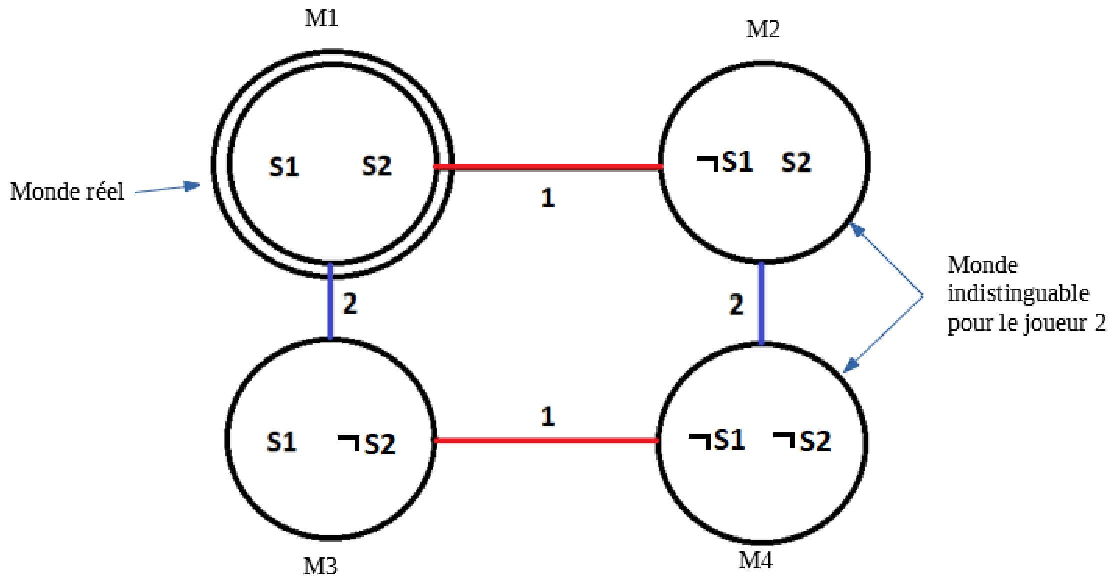

Figure 2: Modèle de Kripke du *muddy children puzzle*

Le problème est représenté dans le graphe de Kripke de la figure 2. Ce problème traite de connaissance vraie, il est donc étudié dans le système S5. Pour rappel dans ce système - ce qui n'est pas clairement représenté dans la figure 2 - chaque arête est à double sens et les mondes sont aussi reliés à eux-mêmes.

On va s'attarder à expliquer ce graphe avant de continuer l'exemple. Le monde réel, ici M1, est toujours représenté différemment des autres. Dans ce problème, les mondes M1 et M2 sont indistinguables pour le joueur 1 : il sait que le joueur 2 est sale mais ne connaît pas son propre état. Par contre, ces deux mondes ne sont pas indistinguables pour le joueur 2 car lui connaît l'état du joueur 1. Les deux mondes M1 et M2 sont donc reliés par la relation R1 mais pas par la relation R2.

Ainsi, le monde M1 est relié au monde M1 et au monde M2 par la relation 1. Le monde M1 et M2 ont en commun l'état sale du joueur 2 et n'ont pas en commun l'état du joueur 1. C'est de cette manière que l'on modélise les connaissances du joueur 1 dans le monde M1. Ce que les mondes reliés ont en commun sont les certitudes qu'a le joueur, et ce qu'ils n'ont pas en commun, c'est ce que le joueur pense simplement possible.

Enfin, on pourrait se demander pourquoi le monde M4 est envisagé car a priori les deux joueurs savent qu'au moins un joueur n'est pas propre. Mais pour le joueur 1, ne connaissant pas son état, il peut penser qu'il est propre. Dans ce cas, il imagine que pour le joueur 2, il y a deux mondes possibles, le monde M2 et le monde M4. On peut continuer avec la même réflexion, le joueur 1 peut imaginer que le joueur 2 imagine que les mondes M4 et M3 sont équivalents pour le joueur 1. Et ainsi de suite... On est donc capable de représenter des connaissances sur les connaissances avec ce graphe.

Il est également possible de rendre compte des connaissances des joueurs sous forme de formules. Voilà une partie de ce que sait le joueur 1 (ce qui est également vrai en remplaçant joueur 1 par joueur 2) :

1. B_1S2 le joueur 1 sait que 2 est sale.
2. $\neg B_1S1$ le joueur 1 ne sait pas qu'il est sale.
3. $\neg B_1\neg S1$ le joueur 1 ne sait pas qu'il est propre.
4. $B_1(B_2S1 \vee B_2\neg S1)$ le joueur 1 sait que le joueur 2 sait l'état du joueur 1.
5. $B_1(\neg B_2S2 \wedge \neg B_2\neg S2)$ le joueur 1 sait que le joueur 2 ne connaît pas son état.

Toutes ces connaissances sont des connaissances communes des deux joueurs sauf la première. Par exemple, les deux joueurs savent qu'il n'y a que deux états possibles pour chacun d'entre eux et ils savent qu'ils le savent. En bref, ils savent que ce sont des connaissances communes. Par contre, l'état de chaque joueur n'est pas une connaissance commune. En effet, nous avons B_1S2 et B_2S1 mais nous n'avons pas B_1S1 ni B_1B_2S1 (le joueur 1 ne sait pas qu'il est sale ni que le joueur 2 sait qu'il est sale).

On remarque ici la puissance du modèle de Kripke. En effet, même s'il parait simple, avec un graphe de seulement 4 mondes avec 4 arêtes, le nombre de formules que le graphe représente est assez grand.

Pour rappel, le but de ce jeu pour le joueur est de savoir s'il est sale ou propre. Dans l'état actuel des choses, les deux joueurs ne connaissent pas la réponse. La suite du jeu demande l'intervention de la personne extérieure, ce que nous allons voir tout de suite.

4.2 Annonces publiques

A présent on va introduire la partie dynamique de cette logique : la personne extérieure annonce publiquement que au moins un des deux joueurs est sale. Il faut donc mettre à jour les connaissances des joueurs. Même si les joueurs savaient déjà tous les deux qu'au moins l'un d'entre eux était sale, ce n'était pas une connaissance commune. C'est à présent le cas et ce que les annonces publiques apportent, ce sont des connaissances communes.

L'annonce *publique* est la plus simple des annonces à traiter. En effet, tous les joueurs apprennent tous la même chose et ils le savent. Dans l'exemple traité ici la connaissance commune acquise est qu'au moins un des deux est sale : $S1 \vee S2$. On va donc retirer les mondes pour lesquels cette connaissance est fausse : le monde M4. En effet, les joueurs ne peuvent plus imaginer un monde où cette connaissance est vraie ou même imaginer que l'autre joueur puisse l'imaginer.

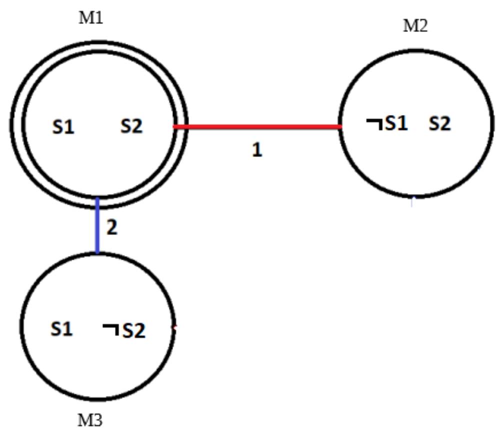

Figure 3: Modèle de Kripke après l'annonce de la personne extérieure

Pour autant, les deux joueurs ne connaissent pas encore la réponse. Chacun imagine deux mondes indistinguables où la réponse est différente. Pour continuer le jeu, il faut faire appel à une deuxième annonce commune : "est-ce que l'un de vous deux connaît son état ?" et les deux joueurs répondent "non". La connaissance commune acquise est ainsi celle-ci : $\neg B_1 S1 \wedge \neg B_2 S2$.

On va mettre à jour les connaissances des joueurs. Le joueur 1 sait que le joueur 2 ne connaît pas son état. Or le monde M2 n'est relié avec aucun autre monde pour le joueur 2, c'est-à-dire que dans le monde M2, le joueur 2 connaît son état. Ce monde n'est donc plus envisageable pour le joueur 1, il faut donc le supprimer. Le joueur 2 effectue la même réflexion pour le monde M3 et le joueur 1. En somme, il faut retirer les mondes qui ne sont pas indistinguables par rapport à d'autres. Et finalement, le graphe de Kripke ne contient plus qu'un seul monde et les deux joueurs connaissent leur état.

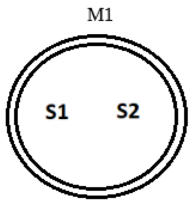

Figure 4: Graphe de Kripke après les deux annonces publiques

Formellement, on opère des restrictions à l'univers. Soit $U = (M, R, h)$ un univers, on définit la restriction de U par p comme $U^p = (M^p, R^p, h^p)$ où

- $M^p = \{M_i \in M$ tel que $\models^U_{Mi} p\}$ restriction à l'ensemble des mondes où p est vrai
- $R^p = R \cap (M^p \times M^p)$ restrictions des relations aux mondes de M^p
- $h^p = h_{|M^p}$ restriction de la valuation aux mondes de M^p

Pour l'exemple on avait donc U, puis $U^{S1 \vee S2}$ et enfin $(U^{S1 \vee S2})^{\neg B_1 S1 \wedge \neg B_2 S2}$

4.3 Annonce semi-privée

Il y a un autre type d'annonce, celle qui ne vise pas l'ensemble des agents. Un joueur (ou un groupe de joueurs) apprend quelque chose et les autres agents ne savent pas ce qu'il apprend mais savent qu'il apprend quelque chose. On parle alors d'annonce *semi-privée* dû au fait que les autres agents savent qu'il y une annonce de faite [1]. Le fait qu'il y ait une annonce est donc une connaissance commune mais le contenu de l'annonce ne l'est pas.

Pour expliciter ce type d'annonce prenons en exemple une variante simplifiée du cluedo [van Ditmarsh(2001)]. Dans le jeu, il y a trois cartes (A, B et C) et deux joueurs (1 et 2). Un croupier distribue une carte à chaque joueur et laisse face retournée la troisième carte. Le but du jeu est de savoir quel est la carte retournée. Pour fixer le jeu, le joueur 1 a la carte A, le joueur 2 a la carte B et donc la troisième carte est C.

Sous la forme d'un graphe de Kripke voici l'état actuel du jeu :

Le croupier autorise le joueur 1 à regarder la troisième carte. Le joueur 1 voit la troisième carte, le joueur 2 voit que le joueur 1 voit la troisième carte. Le joueur 1 connaît donc l'état du jeu et le joueur 2 envisage deux possibilités : que le joueur 1 voit que la troisième carte est A ou C. La mise à jour des connaissances est plus difficile que pour une annonce publique. Pour ce faire on va croiser deux graphes de Kripke :

Dans la figure 6, à gauche nous avons le graphe initial et à droite le graphe d'apprentissage. Ce deuxième graphe représente ce qui a été appris. Pour le joueur 2, les deux possibilités sont indistinguables. Pour le joueur 1 ce n'est pas le cas.

Le croisement de ces deux graphes s'effectue en deux étapes. La première étape consiste à restreindre le graphe initial par les connaissances du graphe d'apprentissage. Ici on ne garde que les mondes où la troisième carte est un C ou un A.

La deuxième étape concerne les liens. Si un lien du graphe initial existe dans le graphe d'apprentissage, on le garde, sinon on l'enlève. Par exemple ici, dans le graphe initial, il existe des liens pour le joueur 1 entre les mondes M4 et M5. Ces deux mondes ont pour troisième

[1] Il y a aussi des annonces privées, c'est-à-dire que certains joueurs ne savent qu'il y a eu une annonce, mais cela ne rentre pas dans le cadre du système S5

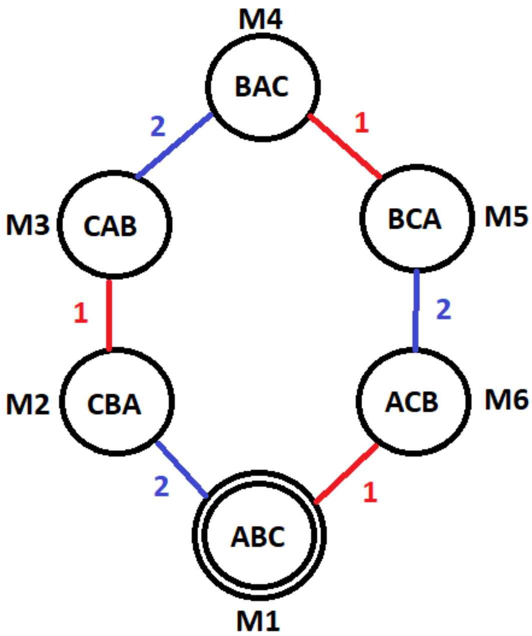

Figure 5: Graphe de Kripke, état initial du cluedo

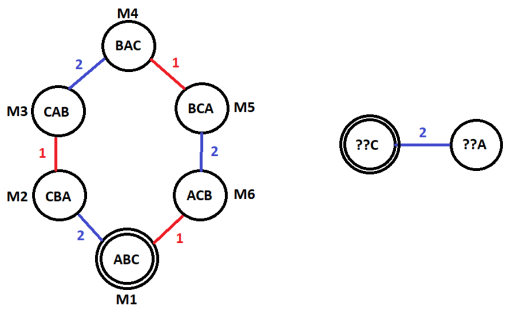

Figure 6: Les deux graphes de Kripke à croiser

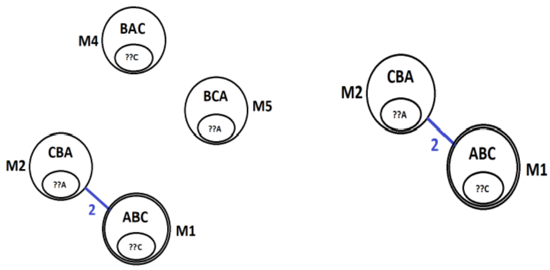

Figure 7: À gauche, le graphe après croisement. À droite, le graphe résultant

carte un C ou un A. Mais dans le graphe d'apprentissage, il n'y a pas de lien pour le joueur 1 entre les mondes qui ont pour troisième carte A ou C. On supprime donc ce lien.

Dans la figure 7, on a donc le graphe après le croisement à gauche. Les mondes M4 et M5 n'étant pas reliés au monde réel, on les enlève. On obtient finalement le graphe qui se trouve à droite. Le joueur 2 envisage deux mondes possibles, le joueur 1 n'en envisage qu'un seul mais sait que le joueur 2 en envisage deux.

4.4 Action et actions multi-agents

En logique épistémique dynamique, il existe aussi les actions. Celles-ci permettent de décrire des changements de l'état du jeu et pas seulement de l'état des connaissances. Par exemple, les actions permettent de représenter la pioche d'une carte ou bien l'ouverture d'une porte. L'action part d'un univers vers un autre univers. Elle se compose d'une pré-condition et d'une post-condition. Elle fonctionne de la manière suivante : chaque monde du modèle vérifiant la précondition est modifié par la post-condition, les autres mondes sont supprimés et les liens entre les mondes restants sont gardés.

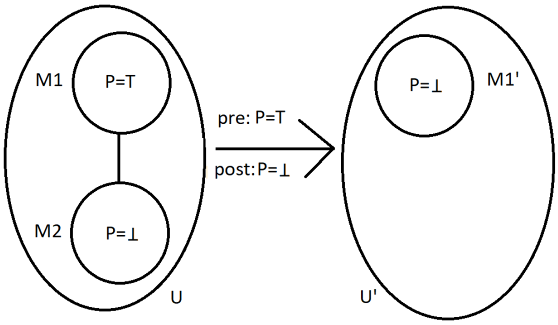

Figure 8: Effet d'une action

Dans la figure 8, l'action composé de la pré-condition P et la post-condition P' agit sur l'univers U pour former l'univers U'. Dans les faits l'action change la valeur de la variable propositionnelle P de *vrai* à *faux*. En nommant cette action "a", on peut alors la décrire de la manière suivante : $a(P = \top, P = \bot)$.

A priori, cette façon de modéliser les actions peut suffire dans de nombreux cas. On n'a pas forcément besoin de savoir qui effectue l'action et il n'y a pas de problème pour enchaîner les actions. Cependant on peut continuer la modélisation des actions en attribuant les actions aux agents. Bien évidemment, il y a plusieurs modélisations possibles, celle que nous allons présenter provient de [de Lima(2012)]. Cette modélisation est poussée et permet même de décrire l'effet de l'exécution d'actions simultanées par plusieurs agents. Cependant, le type de jeu que nous cherchons à modéliser ne comporte pas d'actions simultanées. On va donc garder la syntaxe et la sémantique, mais nous n'allons pas expliquer ce qu'il se passe lorsque plusieurs actions agissant sur la même variable sont effectuées simultanément.

Lorsqu'une action est effectuée, la modélisation de l'évolution de l'état épistémique ressemble à celle de l'annonce publique. On va noter A l'ensemble des actions possibles et U=(M,R,h) le modèle épistémique courant. L'exécution de l'action a, élément de A, dans U donne le modèle $U_{|a} = (M_{|a}, R_{|a}, h_{|a})$ où :

- $M_{|a} = \{M_i \in M$ tel que $\models^U_{Mi} pre(a)\}$ restriction à l'ensemble des mondes vérifiant la précondition de a.
- $R_{|a} = R \cap (M_a \times M_a)$ restriction des relations aux mondes de $M_{|a}$
- $h_{|a}(p) = \{M_i \in M$ tel que $\models^U_{Mi} post(a)(p)\} \cap M_{|a}$ restriction de la valuation aux mondes de $M_{|a}$ et réaffectation de la valeur des variables propositionnelles

Pour l'instant, on décrit encore des actions globales, l'action est effectuée, son origine n'est pas prise en compte. Soit le groupe d'agents N formé d'un sous-groupe d'agents G et de son complémentaire le groupe $\overline{G}$. La description de l'action étant a priori globale, lorsqu'on souhaite modéliser une action a du groupe G il nous faut également décrire l'action simultanée b du groupe $\overline{G}$. L'action à effectuer par le groupe G est alors notée $G : a$ et l'action globale notée $G : a \cup \overline{G} : b$. La modification de l'univers s'écrit donc $U_{|G:a\cup\overline{G}:b}$. On a donc pris en compte l'origine de l'action. Pour rappel, on a décidé de ne modéliser que des actions à la chaîne, en d'autres termes, l'action simultanée effectuée par le groupe d'agents $\overline{G}$ est de ne rien faire, notée $passe = (\top, \emptyset)$. On a donc $pre(G : a \cup \overline{G} : b) = pre(G : a)$ et $post(G : a \cup \overline{G} : b) = post(G : a)$ Pour finir, on définit A_G (symétriquement $A_{\overline{G}}$) l'ensemble des actions que peut effectuer le groupe G. Il est a noter que tout sous-ensemble d'actions d'un groupe d'agents possède l'action *passe*.

On définit à présent un nouvel opérateur :

$$\models^{U}_{Mi} < G : A \;.\; \overline{G} : B > \psi \text{ si et seulement si } \models^{U}_{Mi} pre(G : A \;.\; \overline{G} : B) \text{ et } \models^{U_{|G:A} \;.\; \overline{G}:B}_{Mi} \psi$$

Il exprime le fait que si le groupe G effectue l'action a pendant que son groupe complémentaire effectue l'action b cela apportera la propriété p dans le monde M_i si et seulement si le monde M_i vérifie la précondition de l'action. En d'autres termes, il nous permet de décrire les résultats d'une action sur le monde.

5 Game description language

5.1 General game playing

Le general game playing est la conception d'intelligence artificielle capable de jouer à plusieurs jeux. Contrairement aux programmes conçus pour battre les meilleurs joueurs mondiaux aux échecs ou plus récemment au jeu de go, en general game playing, le programme se doit d'être efficace dans plus d'un jeu. En effet, cela est plus proche de ce qu'on attend communément d'une intelligence artificielle.

Les jeux utilisés pour le general game playing sont écrits en GDL (game description language). C'est un langage basé sur le Datalog qui est un langage de programmation logique. Un jeu est décrit en GDL comme un ensemble d'états possibles et de transitions possibles.

5.2 Syntaxe

GDL se base sur un vocabulaire, des termes et des règles Datalog [Love et al.(2006)Love, Hinrichs, Haley, Schkufza, and
Le vocabulaire est composé de :

- l'ensemble des relations (constantes) associées avec une arité
- l'ensemble des fonctions (constantes) associées avec une arité
- l'ensemble des constantes

Un terme peut être :

- une variable
- une constante
- une fonction (constante) d'arité n appliquée sur n termes

On peut définir une *phrase atomique* comme étant formée d'une relation constante d'arité n et de n termes et un *littéral* comme étant un phrase atomique ou la négation d'une phrase atomique.

Finalement, une règle Datalog est défini par :

- une implication : $h \Leftarrow b_1 \wedge b_2 \wedge ...$
- avec une tête h qui est une phrase atomique
- un corps $b_1 \wedge b_2 \wedge ...$ composé de littéraux b_1,b_2,...
- Enfin si la règle possède des termes niés que ce soit dans la tête ou le corps alors elle doit vérifier une condition particulière spécifiée dans [Love et al.(2006)Love, Hinrichs, Haley, Schkufza, and Genesereth].

5.3 Sémantique

Les jeux ont tous des règles différentes mais possèdent des principes élémentaires en commun : il y a des joueurs, il y a des règles, il y a une situation initiale, une ou plusieurs façons de gagner... Le GDL possède donc déjà plusieurs relations de bases pour représenter les jeux.

On va commencer par le nombre de joueurs. Par exemple pour expliciter le fait que le jeu se joue à deux joueurs on utilise la relation "rôle". Ainsi si le jeu comporte deux joueurs i et j on aura :

```
(role i)
(role j)
```

La relation "control" indique quel joueur a la main. Si c'est au joueur i de jouer il faut marquer

```
(control i)
```

Pour un jeu de plateau, il est utile d'introduire une relation représentant les cases. On choisit donc un mot pour représenter notre relation, ici on a choisi "cell". Par exemple si on souhaite exprimer que la case située colonne 3, ligne 2 est vide on écrit (où b est arbitraire et signifie blanc/vide) :

```
(cell 3 2 b)
```

L'initialisation du jeu se fait grâce à la relation "init". Par exemple pour un jeu de plateau à trois cases et qui donne la main au joueur i au début on a :

```
(init (cell 1 1 b))
(init (cell 1 2 b))
(init (cell 1 3 b))
(init (control i))
```

A présent, nous allons aborder les transitions. La relation "true" explicite ce qui est vrai maintenant, autrement dit elle représente l'état de départ de la transition. Par exemple si à cet instant du jeu, la main est à j et que la case [3,2] est vide :

```
(true (cell 3 2 b))
(true (control j))
```

La relation "next" représente l'état d'arrivée de la transition. Par exemple si c'est au tour de i de jouer alors au tour suivant c'est à j de jouer, ce qui est représenté par (attention, notation préfixée pour les règles Datalog):

```
(<= (next (control j))
    (true (control i))
```

Pour représenter les règles, il faut utiliser la relation "legal". Elle prend un joueur et une fonction en entrée. Par exemple si c'est au joueur i de jouer, le joueur j doit attendre (représenté par *noop*) :

```
(<= (legal j noop )
    (true (control i))
```

Pour représenter les actions menées par un joueur, il faut utiliser la relation "does". Elle prend en entrée un joueur et une fonction:

```
(<= (next (cell ?x ?y ?player))
    (does ?player (mark ?x ?y)))
```

Attardons-nous sur cette exemple. La fonction "mark" représente l'action de marquer une case. Le "?" devant "x" indique que c'est une variable. Cet exemple représente l'action suivante : si le joueur marque une case alors cette case sera marquée de son nom.

Pour représenter le gain, on utilise la relation "goal". Pour représenter le fait que le joueur i marque 100 on écrit :

```
(goal i 100)
```

Enfin pour annoncer la fin d'un jeu, il faut utiliser la relation "terminal". Par exemple, si le joueur s'arrête quand le joueur i a fait une ligne (la relation *ligne* devant être défini ailleurs) :

```
(<= (terminal))
    (ligne i)
```

Les relations role, init, true, next et does ne peuvent être placées n'importe où dans les règles-datalog. La relation role ne peut être placée au sein d'une règle-datalog. Les relations init et next ne peuvent apparaître que dans la tête et les relations next et does doivent être dans la partie corps (voir [Love et al.(2006)Love, Hinrichs, Haley, Schkufza, and Genesereth]).

5.4 Exemple

Un exemple de jeu, le morpion, est déjà présenté dans [Love et al.(2006)Love, Hinrichs, Haley, Schkufza, and Genesereth
Toutefois, avec cet exemple, ce document ne présente qu'une partie de ce qu'il est possible de faire. Je vais donc présenter un exemple de structure qui n'est pas présenté dans le document.

Dans le jeu de puissance 4, on ne peut placer un pion que si la case est vide et qu'un pion se trouve en dessous. Pour rappel un jeu de puissance 4 se joue à deux (rouge et jaune) dans une grille de 7 colonnes pour 6 lignes.

```
(<= (legal ?player (mark ?x ?y)) ;; il est autorisé que le joueur marque la case x y
    (true (control ?player))     ;; si c'est au joueur de jouer
    (true (cell ?x ?y b))        ;; si la case est vide
    (true marked(?n ?y))         ;; si la case n y n'est pas vide
    (true precedent(?n ?x))      ;; si n est bien en dessous de x

(<= (legal ?player (mark 0 ?y))  ;; il est autorisé que le joueur marque la case 0 y
    (true (control ?player))     ;; si c'est au joueur de jouer
    (true (cell 0 ?y b))         ;; si la case est vide

(<= marked(?x ?y)                ;; la case est marquée
    (true cell(?x ?y jaune)))    ;; si la case a un pion jaune

(<= marked(?x ?y)                ;; la case est marquée
    (true cell(?x ?y rouge)))    ;; si la case a un pion rouge

(precedent(5 6))
(precedent(4 5))
(precedent(3 4))
(precedent(2 3))
(precedent(1 2))
```

6 Intention

6.1 Introduction

Une action est intentionnelle si le résultat de l'action était voulu et si l'acteur avait connaissance de l'effet de l'action. En effet, il paraît clair qu'un résultat non recherché ne peut être intentionnel, on préfère bien souvent parler d'accident. De même, si l'effet d'une action n'est pas connu, son résultat ne peut être intentionnel, on parle plutôt de "coup de chance".

Il faut donc prendre en compte deux concepts dans la modélisation : la volonté d'obtenir un résultat et la connaissance des effets de l'action.

6.2 Volonté et connaissance

Comment savoir si le résultat d'une action était voulu ? Le moyen le plus simple serait de poser la question à l'agent, mais d'une part il pourrait mentir, d'autre part le but de ce travail est de déterminer l'intention par simple observation. Par souci de simplicité, on se place dans le cas où celui-ci est rationnel (cf théorie des jeux) et qu'il connaît les effets des actions disponibles. Supposons que seulement l'une des actions amène au résultat recherché. Si l'agent effectue cette action, puisqu'il est rationnel, on peut dire que le résultat était voulu.

À présent, arrêtons-nous sur le cas où l'action produit deux effets dont seulement l'un est recherché. Prenons un exemple : un pistolet est braqué sur une assiette. L'agent souhaite entendre le bruit du coup de feu ; pour cela, il doit tirer et va briser l'assiette. L'un ne va pas sans l'autre : s'il brise l'assiette, il aura entendu le bruit du coup de feu et s'il entend le bruit du coup de feu, c'est qu'il a brisé l'assiette. Finalement, il est équivalent de dire qu'il cherche à entendre le bruit du coup de feu et qu'il cherche à briser l'assiette. En somme, un agent ne cherche pas à atteindre un résultat mais un état du monde. Il serait donc équivalent de dire qu'il cherche à obtenir un des résultats de l'action comme de dire qu'il cherche à obtenir l'ensemble des résultats, ou un même sous-ensemble.

Autre point, si plusieurs actions offrent le résultat, le choix de l'une d'entre elles serait équivalent au choix d'une autre. Par contre, supposons que les effets des actions ne soient pas systématiques, par exemple qu'elles soient aléatoires, et que l'on puisse les classer suivant la sûreté d'obtenir le résultat recherché. Alors si l'agent effectue l'action la plus sûre pour obtenir le résultat, c'est que le résultat était voulu.

Traitons maintenant la deuxième partie : la connaissance des actions disponibles et leurs effets. Le monde réel est très complexe puisqu'en général on ne connaît pas l'ensemble des actions disponibles ni l'ensemble de leurs effets. Mais il est toujours possible de raisonner sur l'intention car l'important est ce que croit l'agent. Si l'agent pense qu'une action entraînera le résultat qu'il cherche alors l'effectuer est intentionnel. Et cela reste vrai même s'il existe d'autres actions plus pertinentes (mais inconnues de l'agent) ou bien même si l'action ne conduit pas au résultat escompté.

De manière générale, il est difficile de savoir les connaissances d'un agent. On va donc se placer dans le cadre d'un jeu pour deux raisons. Premièrement, on connaît l'ensemble des actions disponibles et deuxièmement, on connaît les connaissances des joueurs. Pour autant, l'agent ne connaît pas forcément les effets des actions. En effet, il est possible qu'il n'ait pas une connaissance complète sur le jeu. Il imagine plusieurs mondes possibles et dans ces différents mondes, les actions n'ont pas forcément les mêmes effets.

L'un des objectifs de cette modélisation est de connaître l'intention d'un joueur. Il est donc important de prendre en compte les connaissances de l'agent lors de la prise de décision. Ce cadre se prête parfaitement à la logique épistémique et on va donc se placer dans le système S5. Dans le modèle de Kripke, la réalisation d'une action nous amène d'un modèle vers un autre modèle. Pour rappel, les modèles contiennent les différents mondes possibles. Les mondes reflétant des résultats différents, il faut se demander comment traiter le problème afin de savoir quel résultat était recherché.

Une première solution serait de ne regarder que le monde réel, mais cela serait oublier que l'on se place au travers du regard du joueur afin de connaître ses intentions. Une autre idée serait de compter le nombre de mondes ayant la propriété recherchée sur l'ensemble des mondes que le joueur imagine. Mais cela semble trop compliqué pour une première modélisation. L'idée retenue est celle de ne garder que les propriétés valides au sein des modèles, c'est-à-dire, celles vraies dans tous les mondes imaginés.

Enfin, il reste certaines incertitudes concernant l'effet des actions. En règle générale, dans le monde réel comme dans un jeu, il n'y a pas qu'une seule personne qui agit sur le monde. Les actions des autres joueurs influencent le monde et agissent également sur lui. Il est donc parfois nécessaire de prendre en compte plus d'une seule action. On nomme cette suite d'actions "une chaîne d'actions".

A priori, les actions qui seront effectuées par les autres joueurs ne sont pas connues, le joueur imagine donc plusieurs chaînes d'actions. Ces chaînes d'actions forment un arbre dont les feuilles sont les différents modèles résultants. En effet, chaque action du joueur produit un modèle et chaque action des autres joueurs produit également un autre modèle.

Afin de comprendre ce que l'on souhaite modéliser, imaginons un tour complet d'un jeu, c'est à dire, le joueur effectue une action, les autres joueurs effectuent une action et l'on regarde à ce moment le résultat obtenu. On a donc un premier niveau avec les actions du joueur et un deuxième niveau avec les actions des autres joueurs. La question est à présent de savoir quelle est l'action que l'agent doit réaliser pour obtenir le résultat qu'il souhaite. L'idée est de mesurer la fréquence de validité de la propriété recherchée après les actions des autres joueurs pour chaque action de l'agent. La meilleure action est alors celle qui permet d'obtenir la propriété avec la fréquence la plus haute, c'est à dire de la façon la plus sûre.

6.3 Définitions

Pour rappel un modèle de Kripke est représenté par U=(M,R,h) où M est l'ensemble des mondes possibles, R l'ensemble des relations entre les mondes et h la fonction de valuation. On note $\models^U p$ lorsqu'une formule (ou propriété) est valide dans l'univers U et on note N l'ensemble des agents. On se place dans le cas où le nombre d'actions est fini et que l'ensemble des actions et leur effets sont connus par tous, en d'autres termes dans un jeu.

On souhaite attribuer chaque action réalisé à l'agent ou le groupe d'agent qui l'a réalisé. On va donc décomposer chaque action comme un ensemble d'actions réalisées simultanéments par chacun des agents.

- **Definition 1** : On note E_α l'ensemble des actions disponibles pour l'agent α. On suppose que l'ensemble possède l'action passe=(vrai,rien)

L'ensemble E_α représente l'ensemble des actions élémentaires de l'agent α, c'est à dire les actions disponible pour l'agent indépendament des actions que les autres agents réalisent. Il se peut donc que les actions disponibles ne soient pas réalisables. L'action $passe = (vrai, rien)$ est l'action représentant l'inaction. Par exemple pour les jeux au tour par tour, lorsque que c'est au tour d'un joueur, les autres joueurs effectuent l'action *passe*.

Pour chaque agent α et chaque action a, le couple $(\alpha : a)$ représente l'action a réalisée par l'agent α. Le couple $(\alpha : a \ . \ \beta : b)$ représente une action conjointe de l'agent α et de l'agent β. L'agent α effectue l'acion a pendant que l'agent β effectue simulatément l'action b. On peut par extension définir l'action conjointe réaliser par un groupe de plus de deux agents. On va donc définir l'ensemble des actions disponibles pour un groupe d'agent.

- **Definition 2** : Soit le groupe d'agent $G = \{\alpha, \beta, ..., \omega\}$, on note E_G l'ensemble des actions que peut réaliser le groupe G : $E_G = \{(\alpha : a \ . \ \beta : b \ . \ ... \ . \ \omega : n), a \in E_\alpha, b \in B_\beta, ..., n \in E_\omega\}$

L'ensemble E_G est formé de l'ensembles des actions conjointes que peuvent réaliser simulatément les agents du groupe chaque agent réalisant une action qui lui est disponible.

Soit le groupe G réalisant l'action $A \in E_G$ et son groupe complémentaire $\overline{G}$ réalisant l'action $B \in E_{\overline{G}}$, on décrit alors l'action conjointe agissant sur le monde : $C = (G : A \ . \ \overline{G} : B)$

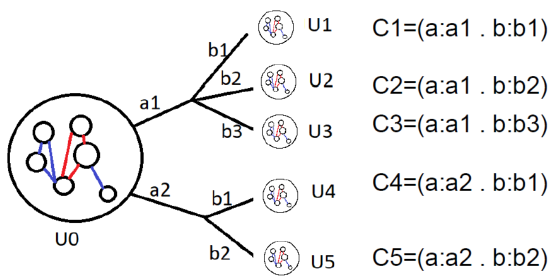

Figure 9: Figure d'une chaîne d'action. Les sommets U0 à U5 représentent des modèles de Kripke, les arrêtes a1 et a2 représentent les actions d'un premier agent et les actions b1, b2 et b3 les actions d'un deuxième agent, les actions c1 à c5 sont les actions conjointes résultantes

Chaque action va d'un univers vers un autre, les actions réalisable sont les actions qui ne mènent pas vers un univers vide. Ces actions réalisable pour un groupe varies suivant l'action réalisé simultanément par le groupe le complémentaire.

- **Definition 3** : L'ensemble des actions réalisables par le groupe G lorsque le groupe $\overline{G}$ réalise l'action $D \in E_{\overline{G}}$: $E^G_{\overline{G}:D} = \{A \in E_G$ tel que $M_{|G:A \ . \ \overline{G}:D} \neq \emptyset\}$

6.4 Opérateurs

À partir de ces définitions, on va pouvoir définir trois opérateurs dont voici les deux premiers :

- **Definition 4** : $\models^U \langle G : A \rangle \psi$ si et seulement si il existe d tel que pour tous les mondes $M_i \in U \models^U_{Mi} \langle G : A \ . \ \overline{G} : D \rangle \psi$

- **Definition 5** : $\models^U \langle G : A \ . \ \overline{G} : D \rangle \psi$ si et seulement si pour tous les mondes $M_i \in U \models^U_{Mi} \langle G : A \ . \ \overline{G} : D \rangle \psi$

Cela signifie que l'action a par le groupe d'agents G peut entraîner la validité de p, si et seulement si, il existe une action réalisable simultanément par le groupe d'agents complémentaire $\overline{G}$ permettant d'obtenir la validité de p ($G \cup \overline{G} = N$). Par exemple, lorsqu'il suffit d'une action directe d'un agent pour obtenir la validité de p, il suffit que les autres agents ne fassent rien. Cet opérateur est aussi utile pour des suites d'actions. Imaginons un jeu au tour par tour, on peut alors définir des chaînes d'actions plutôt que de simples actions. Par exemple, si le jeu compte 2 joueurs, la chaîne d'actions A serait alors décrite comme $A = (a1, passe, a2)$ et la chaîne d'actions B comme $(passe, b, passe)$. C'est à dire, le joueur 1 effectue l'action a1 puis attend son tour puis l'action a2, le joueur 2 attend son tour puis effectue l'action b. Cela revient donc à des actions effectuées en simultané.

On va introduire $freq^p_{G:a}$ qui est la fréquence de validité d'une propriété p à la suite de l'action a par le groupe G . C'est à dire le rapport entre le nombre d'actions que le groupe complémentaire peut effectuer permettant d'obtenir la validité de la propriété p sur le nombre d'actions total qu'ils peuvent réaliser. On note $A^{\overline{G}}_{G:a}$ l'ensemble des actions réalisables par le groupe complémentaire à G lorsque le groupe G a réalisé l'action a. Les actions réalisables étant les actions qui ne conduisent pas vers des univers vides. (En effet, les actions pouvant être réalisées peuvent évoluer suivant l'action des autres agents).

- **Definition 6** : $freq^{\psi}_{G:A} = \frac{\#\{D \in E^{G:A}_{\overline{G}} \text{ tel que} \models^U \langle G:A\ .\ \overline{G}:D\rangle\psi\}}{\#\{D \in E^{G:A}_{\overline{G}}\}}$

Cela nous permet d'introduire le troisième opérateur :

- **Definition 7** : $\models^U \langle G : A \geq B\rangle\psi$ si et seulement si $freq^{\psi}_{G:A} \geq freq^{\psi}_{G:B}$

Ce que nous pouvons lire comme : l'exécution de l'action a par le groupe lG est plus efficace que l'exécution de l'action b par le groupe G pour obtenir la validité de p dans l'univers U. De cet opérateur on peut dériver (définitions justifiées par le fait que les fréquences sont des nombres):

- $\langle G : b \geq a\rangle p \equiv \langle G : a \leq b\rangle p$
- $\langle G : a < b\rangle p \equiv \neg\langle G : a \geq b\rangle p$
- $\langle G : a = b\rangle p \equiv \langle G : a \geq b\rangle \wedge \langle G : b \geq a\rangle$
- $\langle G : a \neq b\rangle p \equiv \neg(\langle G : a \geq b\rangle \wedge \langle G : b \geq a\rangle)$

C'est une relation d'ordre total sur l'ensemble des actions que le groupe peut effectuer. Cela est facilement démontrable étant donné qu'elle s'appuie sur la relation $\geq$ des nombres réels.

Enfin l'ensemble des actions pour le groupe G les plus efficaces pour obtenir la propriété p, en somme, il modélise la réflexion portée dans la partie 6.2.

- **Definition 8** : $best^{\psi}_G = \{A \text{ tel que } \forall B \in E^G \models^U \langle G : A \geq B\rangle\psi\}$

6.5 Exemple

Nous allons prendre pour exemple d'application celui d'une partie de morpion. La figure 10 représente le cinquième tour d'une partie de morpion, c'est au joueur X de jouer. L'univers U0 est l'univers avant que le joueur X joue, les univers U1 à U5 représentent l'état épistémique après l'action du joueur X.

Cet exemple possède une particularité, les agents n'imaginent qu'un seul monde possible dans chaque univers. Cela est dû au fait que le jeu de morpion est à information complète et parfaite. Ainsi, pour chaque proposition, soit celle-ci est valide, soit sa négation est valide.

Pour les cinq actions possibles, seulement l'une d'entre elles permet à l'agent X de gagner directement. On a donc dans cet exemple, une seule action qui permet à l'agent de gagner, c'est à dire d'avoir la propriété "p=X a gagné" valide. Les autres actions permettent donc d'obtenir la propriété "q=X n'a pas gagné" valide. Pour rappel, le joueur O réalise dans le même temps l'action "passe".

On obtient donc par exemple $freq^p_{X:a3} = 1$, $freq^q_{X:a3} = 0$ pour l'opérateur $freq$. Pour l'opérateur $best$, on a $best^p_X = a3$ pour la proposition p mais pour la proposition q $best^q_X = \{b1, b2, c1, c3\}$. Il est à noter que même si le joueur X n'a pas gagné, il n'a pas perdu pour autant. En effet, il est tout à fait possible pour le joueur X de gagner par la suite, mais il s'agirait alors d'étudier des suites d'actions sur plusieurs tours.

Pour conclure sur cet exemple, en particulier l'action du joueur X, si le joueur X avait choisi l'action $a3$ alors il avait l'intention de gagner, sinon dans les autres cas, il n'en avait pas l'intention.

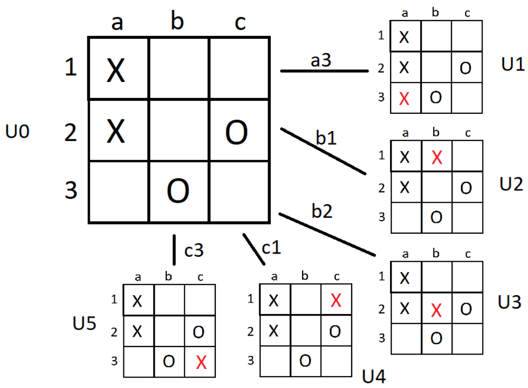

Figure 10: Figure des différentes actions possibles pour le joueur X dans un jeu de morpion. U0 à U1 sont les univers. a3,b1,b2,c1,c2 sont les actions disponibles pour le joueur X

6.6 Propriétés

Nous allons maintenant voir quelques propriétés ou non-propriétés de l'opérateur $\langle G : A \geq B\rangle$ intéressantes.

- **Proposition 1** : Soit N l'ensemble des agents, A et B des actions possibles de N, ψ et ϕ alors :
$$\langle G : A \geq B\rangle\phi \wedge \langle G : A \geq B\rangle\psi \Longrightarrow \langle G : A \geq B\rangle(\phi \wedge \psi)$$

Signifie que si effectuer l'action A par l'ensemble des agents est plus efficace que d'effectuer l'action B pour la formule ψ et pour la formule ϕ alors l'action A est aussi plus efficace pour obtenir ψ et ϕ.

Preuve: Si c'est l'ensemble des agents qui agissent, il ne reste personne pour effectuer une autre action. Chaque action du groupe ne conduit donc que vers un modèle. Il n'y a donc que deux possibilités, soit l'action permet d'obtenir la validité de la formule soit elle ne le permet pas.

Φ (A)	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
Φ (B)	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
Ψ (A)	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
Ψ (B)	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v
Φ et Ψ (A)	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	f	f	v	v
Φ et Ψ (B)	f	f	f	f	f	v	f	v	f	f	f	f	f	v	f	v
<N:A≥B> Φ	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
<N:A≥B> Ψ	v	f	v	v	v	f	v	v	v	f	v	v	v	f	v	v
<N:A≥B> Φ et Ψ	v	v	v	v	v	f	v	f	v	v	v	v	v	f	v	v

Figure 11: Tableau récapitulant tous les cas possibles, prouvant la propriété

- **Proposition 2** : Soit G un groupe d'agents, A et B des actions possibles de G, ψ et i un agent alors :
$$\langle G : A \geq B\rangle\psi \equiv B_i\langle G : A \geq B\rangle\psi$$

C'est une propriété assez importante puisqu'elle stipule que les agents savent tous quelle action est la plus efficace pour obtenir la validité d'une propriété. Ceci est possible par le fait que l'on ne regarde que des formules valides dans les modèles, elles doivent donc être vraies dans tous les mondes, notamment les mondes que les agents imaginent.

Preuve: De gauche à droite, par l'axiome T, $B_i\langle G : A \geq B\rangle\psi \Rightarrow \langle G : A \geq B\rangle\psi$. De droite à gauche, par définition, si $\langle G : A \geq B\rangle\psi$ est vrai, alors $\langle G : A \geq B\rangle\psi$ est vrai pour tous les mondes de l'univers, dont l'ensemble des mondes que l'agent imagine, on a donc $B_i\langle G : A \geq B\rangle\psi$ vrai.

- **Proposition 3** : Soit G un groupe d'agents, A et B des actions possibles de G, ψ et ϕ des formules alors :

$$\langle N : A \geq B\rangle(\phi \rightarrow \psi) \nrightarrow (\langle N : A \geq B\rangle\phi \rightarrow \langle N : A \geq B\rangle\psi)$$

Preuve: Imaginons un univers dans lequel l'action A donne un univers où on a $(\neg\phi, \neg\psi)$ et que l'action B donne $(\neg\phi, \psi)$. On aura alors $\langle N : A \geq B\rangle(\phi \rightarrow \psi)$,$\langle N : A \geq B\rangle\phi$ mais pas $\langle N : A \geq B\rangle\psi$

- **Proposition 4** : Soit G et H deux groupes d'agents, A et B des actions possibles de G, C et D des actions possibles de H, ψ et ϕ des formules alors :

$$\langle G : A \geq B\rangle\phi \wedge \langle H : C \geq D\rangle\psi \nrightarrow (\rangle G \cup H : A\ .\ C \geq B\ .\ D\langle)(\phi \wedge \psi)) \text{ si } G \cap H = \emptyset$$

Signifie que si l'action a est plus efficace que b pour le groupe G pour obtenir la formule ψ et que l'action C est plus efficace pour le groupe H pour obtenir la formule ψ alors l'action conjointe A et C par le groupe $G \cup H$ n'est pas plus efficace que l'action conjointe B et D pour obtenir la formule ψ et ϕ. Cette propriété est fausse en général et montre une autre limite de l'opérateur. Il existe différentes raisons pour lesquelles cette propriété est fausse. L'une d'entre elles, assez simple, est que l'action C peut ne pas être réalisable par le groupe H si le groupe G réalise l'action A.

Preuve: Un exemple d'une situation ou l'action A et l'action C ne sont pas compatibles est présenté dans la figure 12. On aura alors $\langle G : A \geq B\rangle\phi \wedge \langle H : C \geq D\rangle\psi$ vrai mais on aurait $\langle G \cup H : A\ .\ C \geq B\ .\ D\rangle(\phi \wedge \psi)$ faux.

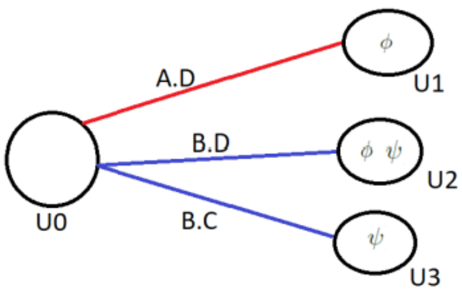

Figure 12: Exemple validant la proposition

- **Proposition 5** : Soit G, A et B des actions possibles de G et ψ une formules alors :

$$\models \phi \nrightarrow \models \langle G : A \geq B\rangle\phi$$

Preuve: Si ϕ est valide, imaginons que A crée un univers vide, on aurait $freq^{\phi}_{G:A} = 0$ et que B crée un univers non vide, on aurait alors $freq^{\phi}_{G:A} = 1$, donc on aurait $\langle G : A \geq B\rangle\phi$ faux.

6.7 Conclusion et perspectives

Cette première modélisation de l'intention est plutôt prometteuse puisqu'on est à présent capable d'identifier des actions intentionnelles et mériterait un développement d'un logiciel pour analyser des parties de jeu. Mais elle présente déjà quelques lacunes. Il n'est pour l'instant, que possible d'identifier des actions intentionnelles permettant d'obtenir des formules valides. L'une des améliorations les plus simples à priori serait de prendre en compte les formules partagées par les mondes indistinguables du monde réel pour le joueur, voire les fréquences d'apparition de formules entre ces mondes.

Puis, il serait peut-être intéressant de prendre en compte des actions plus "humaines". Par exemple, la prise en compte d'actions plus probables que d'autres, de stratégies visant plusieurs résultats différents afin de maximiser ses chances de gagner ou encore d'intégrer la difficulté de raisonnement lors d'inférence pour obtenir des formules.

Et enfin, si à présent on est capable de dire dans notre modélisation si une action est intentionnelle ou non en connaissant la propriété recherchée, il serait aussi intéressant d'être capable de détecter les propriétés visées. L'une des pistes envisagées serait d'identifier les formules les plus fréquentes au sein des modèles lors de l'enchaînement des actions.

Bibliography

[de Lima(2012)] Tiago de Lima. Alternating-time temporal dynamic epsitemic logic. *Journal of Logic and Computation Advance Access published*, 2012.

[F. Chellas(2012)] Brian F. Chellas. Modal logic. *Cambridge University Press*, pages 3–160, 2012.

[Fagin et al.(2003)Fagin, Halpern, Moses, and Vardi] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Y. Vardi. Reasoning about knowledge. *MIT Press*, pages 1–232, 2003.

[Kripke(1959)] Saul Aaron Kripke. Semantical analysis of modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 1959.

[Lewis(1969)] David Kellogg Lewis. Convention: A philosophical study. 1969.

[Love et al.(2006)Love, Hinrichs, Haley, Schkufza, and Genesereth] Nathaniel Love, Timothy Hinrichs, David Haley, Eric Schkufza, and Michael Genesereth. General game playing : game description language specification. *LG*, 2006.

[van Ditmarsh(2001)] H.P. van Ditmarsh. The description of game actions in cluedo. *Technical Report*, 2001.