Contraction en logique propositionnelle

MÉMOIRE

soutenu le 03 juillet 2012

pour l'obtention du

Master Recherche de l'Université d'Artois

Spécialité Informatique – Option Sytèmes Intelligents et Applications

par

Thomas Caridroit

Encadrants :	Sébastien Konieczny	Directeur de Recherches CNRS, CRIL
	Pierre Marquis	Professeur des Universités, CRIL

Centre de Recherche en Informatique de Lens – CNRS UMR 8188
Université d'Artois, rue Jean Souvraz, S.P. 18 F-62307, Lens Cedex France
Secrétariat : Tél.: +33 (0)3 21 79 17 23 – Fax : +33 (0)3 21 79 17 70
http://www.cril.fr

Mise en page avec memcril (B. Mazure, CRIL) et thloria (D. Roegel, LORIA).

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mes encadrants, à savoir Pierre Marquis et Sébastien Konieczny, pour leurs critiques et conseils, ainsi que l'aide qu'ils m'ont apportée tout au long de ce stage qui a été pour moi une première rencontre avec le monde de la recherche. Je ne serais pas arrivé à ces résultats sans eux.

Je remercie également mes camarades et collègues pour leur soutien pendant ces cinq années d'études, ainsi que pendant ce stage.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble des membres du Centre de Recherche en Informatique de Lens, pour leur sympathie et leur accueil, mais aussi pour m'avoir permis d'assister aux JFPC et JIAF.

Table des matières

Partie II Contribution

Table des figures

Introduction générale

Depuis l'Antiquité, le changement de croyances a été un sujet de réflexions philosophiques. Au XXe siècle, les philosophes ont discuté des mécanismes par lesquels les théorie scientifiques se développent. Au début des années 1970, un débat plus ciblé sur les exigences de changement de croyances rationnel a pris place dans la communauté philosophique. Nous pouvons souligner deux étapes. La première est une série d'études réalisées par Isaac Levi ([Lev77] ;[Lev80]). Levi a fourni une grande partie du cadre de base formel. Le travail de William Harper à la même époque a également eu une influence durable ([Har77]). La seconde étape est le modèle AGM, ainsi nommé d'après ses trois initiateurs, Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors et David Makinson. Avec leurs forces combinées, ils ont écrit un article qui a fourni un nouveau cadre formel beaucoup plus général et polyvalent pour les études de changement de croyances ([AGM85]). Depuis la publication de l'article en 1985, ses principaux concepts et constructions ont fait l'objet d'élaboration et de développement significatif ([Gär88] ;[GM88] ;[Rot93]).

Si la révision de bases de croyances propositionnelles a été beaucoup étudiée ([KM91]), il n'en est pas de même pour la contraction de bases de croyances. En effet, Katsuno et Mendelzon ont proposé un ensemble de postulats pour les opérateurs de révision dans le cadre de la logique propositionnelle ainsi qu'un théorème de représentation en termes d'assignements fidèles. Ce théorème est à l'origine des approches proposées pour modéliser la révision itérée ([DP97]) et ses développements. Les opérateurs de révision et de contraction étant étroitement liés, nous pourrions nous attendre à l'existence de travaux sur la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle mais il n'en est rien. Ceci peut s'expliquer par l'existence des identités de Levi et Harper, en effet ces identités permettent de définir les opérateurs de contraction à partir des opérateurs de révision et inversement. Le but de ce mémoire est donc, dans un premier temps, de proposer un ensemble de postulats pour les opérateurs de contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie ainsi qu'une contrepartie au théorème de représentation de Katsuno et Mendelzon pour la contraction. Nous pourrons ainsi définir ensuite des opérateurs de contraction itérée, contrepartie des opérateurs de révision itérée.

Ce mémoire est composé de deux parties. La première partie débute par quelques préliminaires formels, introduisant ainsi les notions indispensables à la compréhension du manuscrit. Nous présenterons ensuite la cadre classique de la dynamique des croyances, le cadre AGM, puis le cadre de la révision en logique propositionnelle.

La seconde partie regroupe l'ensemble des travaux effectués. Dans un premier chapitre, nous définissons les postulats qu'un opérateur de contraction sur les bases de croyances doit satisfaire. Nous étudions ensuite la correspondance entre la contraction d'ensembles de croyances et la contraction de bases de croyances propositionnelles. Puis nous vérifions qu'il y a bien une correspondance entre les opérateurs de révision propositionnelle définis par les postulats de Katsuno et Mendelzon et les opérateurs de contraction propositionnelle définis par nos postulats en utilisant les identités de Levi et Harper. Enfin ce mémoire se conclut par la définition d'un théorème de représentation pour la contraction de bases de croyances.

Première partie

Etat de l'art

Chapitre 1

Préliminaires formels

1.1 Notions élémentaires

Définition 1. *(cardinal d'un ensemble).*
Soit E un ensemble fini. On note $\mid E \mid$ son nombre d'éléments (ou cardinal). On appelle singleton tout ensemble E tel que $\mid E \mid= 1$. On appelle ensemble vide, noté $E = \emptyset$, tout ensemble E tel que $\mid E \mid= 0$.

Définition 2. *(ensemble des parties d'un ensemble).*
Soit E un ensemble fini, on note 2^E l'ensemble des parties de E, également appelé ensemble des sous-ensembles de E.

Définition 3. *(produit cartésien).*
Soient E et F deux sous ensembles. Le produit cartésien de E et F, noté $E \times F = \{(x, y) \mid (x \in E)$ et $(y \in F)\}$, est l'ensemble des couples composés d'un élément de E et d'un autre de F. Pour tout nombre entier positif n, on note E^n le produit cartésien de $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n}$.

1.2 Relations binaires

Définition 4. *(relation binaire).*
Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est un sous-ensemble de $E \times E$. on note $x\mathscr{R}y$ lorsqu'un couple (x,y) appartient à $\mathscr{R}$.

Définition 5. *(propriétés sur les relations).*
Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. $\mathscr{R}$ est :

- *réflexive ssi* $\forall x \in E, x\mathscr{R}x$
- *irréflexive ssi* $\forall x \in E, (x, x) \notin \mathscr{R}$
- *transitive ssi* $\forall x, y, z \in E,$ *si* $x\mathscr{R}y$ *et* $y\mathscr{R}z$ *alors* $x\mathscr{R}z$
- *symétrique ssi* $\forall x, y \in E,$ *si* $x\mathscr{R}y$ *alors* $y\mathscr{R}x$
- *anti-symétrique ssi* $\forall x, y \in E,$ *si* $x\mathscr{R}y$ *et* $y\mathscr{R}x$ *alors* $x = y$
- *totale ssi* $\forall x, y \in E, x\mathscr{R}y$ *ou* $y\mathscr{R}x$

1.3 Logique propositionnelle

1.3.1 Syntaxe

Les atomes du langage de la logique propositionnelle sont les variables propositionnelles. Ces variables permettent de représenter des énoncés simples (par exemple "Il pleut") et ne peuvent revêtir que deux valeurs possibles, à savoir *vrai* ou *faux*.

Définition 6. *(variable propositionnelle).*
Une variable propositionnelle est une variable booléenne représentant une proposition binaire qui ne peut prendre que deux valeurs possibles, appelées valeurs de vérité, vrai ou faux (respectivement notées par 1 et 0).

Les variables peuvent être combinées entre elles à l'aide d'autres symboles du langage, les connecteurs logiques.

Définition 7. *(connecteurs logiques).*
Un connecteur logique est un symbole réservé du langage de la logique propositionnelle qui permet de combiner une ou plusieurs variables propositionnelles. Le nombre (positif) de variables combinées est son arité. Dans la suite nous considérons les connecteurs logiques suivants :

- *la négation :* $\neg$ *(non), d'arité 1*
- *la conjonction :* $\wedge$ *(et), d'arité 2*
- *la disjonction :* $\vee$*(ou), d'arité 2*
- *l'implication matérielle :* $\Rightarrow$*, d'arité 2*
- *et l'équivalence :* $\Leftrightarrow$*, d'arité 2*

Ainsi des énoncés plus complexes (par exemple "Si il pleut alors ça mouille"), appelés formules propositionnelles, peuvent être construits en combinant plusieurs variables propositionnelles à l'aide des connecteurs logiques, des symboles de parenthèses (et) et des symboles de constantes booléennes $\bot$ et $\top$, représentant respectivement le *faux* et le *vrai*.

Définition 8. *(langage des formules propositionnelles).*
Soient $\mathscr{V}$ *un ensemble fini de variables propositionnelles. Le langage* $\mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *des formules propositionnelles est défini de manière inductive comme le plus petit ensemble tel que :*

- $\forall x \in \mathscr{V}, x \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$
- $\top, \bot \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$
- *si* $\alpha \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$*, alors* (α) *et* $(\neg\alpha) \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$
- *si* $\alpha, \beta \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$*, alors :*
  - $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$
  - $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$
  - $(\alpha \Rightarrow \beta) \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$
  - $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$

Définition 9. *(littéral).*
Un littéral l est soit une variable propositionnelle x, soit sa négation $\neg x$. x (resp. $\neg x$ représente le littéral complémentaire de $\neg x$ (resp. x).

Définition 10. *(taille d'une formule).*
Soit une formule $\alpha \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$. La taille de α, notée $\mid \alpha \mid$, est le nombre d'occurrences de variables propositionnelles et de connecteurs utilisés pour écrire α.

Définition 11. *(ensemble des variables d'une formule).*
Soit une formule $\alpha \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$. On note $Var(\alpha)$ l'ensemble des variables propositionnelles qui apparaissent dans α.

Exemple 12. *Soit $\mathscr{V} = \{pluie, mouille, parapluie\}$ un ensemble de variables propositionnelles représentant les énoncés de notre exemple "Il pleut", "ça mouille", "J'ai un parapluie".*
$\alpha = (pluie \wedge \neg parapluie) \Rightarrow mouille$ est une formule propositionnelle de $\mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ exprimant que "Si il pleut et si je n'ai pas de parapluie, alors ça mouille".
Notons que $\mid \alpha \mid = 3$ et $Var(\alpha) = \mathscr{V}$.

1.3.2 Sémantique

Évaluation des formules

Définition 13. *(interprétation).*
Soit $\mathscr{V}$ un ensemble de variables propositionnelles. Une interprétation (ou monde) I sur $\mathscr{V}$ est une application de l'ensemble $\mathscr{V}$ des variables propositionnelles vers l'ensemble des valeurs de vérité 0,1 :

$$I : \mathscr{V} \to \{1, 0\}$$

On représente souvent I par l'ensemble des v de $\mathscr{V}$ tels que $I(v) = 1$.

Définition 14. *(sémantique d'une formule).*
La sémantique d'une formule propositionnelle dans une interprétation I est définie inductivement de la manière suivante.
Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$:

- $I(\top) = 1$
- $I(\bot) = 0$
- $I(\neg\alpha) = 1$ *ssi* $I(\alpha) = 0$
- $I(\alpha \wedge \beta) = 1$ *ssi* $I(\alpha) = 1$ *et* $I(\beta) = 1$
- $I(\alpha \vee \beta) = 0$ *ssi* $I(\alpha) = 0$ *et* $I(\beta) = 0$
- $I(\alpha \Rightarrow \beta) = 0$ *ssi* $I(\alpha) = 1$ *et* $I(\beta) = 0$
- $I(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1$ *ssi* $I(\alpha) = I(\beta)$

Définition 15. *(modèle/contre-modèle).*
Soient $\alpha \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *une formule et* I *une interprétation sur* $\mathscr{V}$. *On dit que* I *est un modèle (resp. contre-modèle) de* α, *noté* $I \vdash \alpha$ *(resp.*$I \not\vdash \alpha$*) si* $I(\alpha) = 1$ *(resp.* $I(\alpha) = 0$*).*
On dit aussi que I *satisfait (resp. ne satisfait pas)* α *ssi* $I \vdash \alpha$ *(resp.* $I \not\vdash \alpha$*).*
L'ensemble des modèles de α *est noté* $Mod(\alpha)$.

Définition 16. *(formule satisfiable/insatisfiable).*
Soit $\alpha \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *une formule propositionnelle.* α *est une formule satisfiable (ou cohérente) si il existe* I *une interprétation sur* $\mathscr{V}$ *telle que* $I \vdash \alpha$. *Sinon* α *est incohérente (ou insatisfiable ou encore contradictoire).*

Définition 17. *(formule valide).*
Soit $\alpha \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *une formule propositionnelle.* α *est une formule valide, notée* $\vdash \alpha$ *ssi pour toute interprétation* I *sur* $\mathscr{V}$, $I \vdash \alpha$.
Quand α *est une formule valide,* α *(resp.* $\neg\alpha$*) est une tautologie (resp. contradiction).*

Exemple 18. *Reprenons l'exemple précedent.*
Soient $\mathscr{V} = \{pluie, mouille, parapluie\}$ *un ensemble de variables propositionnelles et* $\alpha = (pluie \wedge \neg parapluie) \Rightarrow mouille$ *est une formule propositionnelle de* $\mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$.
Considérons les interprétations I_1 *et* I_2 *sur* $\mathscr{V}$ *telles que :*

$$I_1 = \{pluie, mouille\}, I_2 = \{pluie\}.$$

Nous pouvons observer ici que I_1 *est un modèle de* α *et* I_2 *est un contre-modèle de* α.
Ainsi, α *est une formule satisfiable, mais n'est pas une formule valide.*

Conséquence logique

Tout comme la relation de satisfiabilité relie interprétations et formules, la relation de conséquence logique permet de relier les formules entre elles.

Définition 19. *(conséquence logique).*
Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *deux formules propositionnelles.*
α *est une conséquence logique de* β, *noté* $\beta \vdash \alpha$ *ssi* $Mod(\beta) \subseteq Mod(\alpha)$.

Définition 20. *(fermeture logique).*
Soit $\alpha \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *une formule propositionnelle. La fermeture déductive de* α *est l'ensemble de formules* $Cn(\alpha) = \{\varphi | \alpha \vdash \varphi\}$ *des conséquences logiques de* α.

Définition 21. *(base de connaissances propositionnelle).*
Soit K *un ensemble fini de formules propositionnelles appelé base de connaissances. La fermeture déductive de* K *est l'ensemble* $Cn(K)$ *de formules vraies dans chaque interprétation qui est un modèle de chacune des formules de* K.
Un ensemble de formules propositionnelles clos déductivement est appelé ensemble de connaissances (ou théorie). $K_\perp$ *est l'ensemble de connaissances trivial et* $K_\top$ *l'ensemble de connaissances tautologique.*
$K_\perp = Cn(\{\perp\})$ *et* $K_\top = Cn(\{\top\})$

Propriété 22. *Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *trois formules propositionnelles.*
Nous pouvons distinguer quelques propriétés interressantes de la relation de conséquence :

- *réflexivité :* $\alpha \vdash \alpha$
- *transitivité : si* $\alpha \vdash \beta$ *et* $\beta \vdash \gamma$*, alors* $\alpha \vdash \gamma$
- *coupure : si* $(\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ *et* $\alpha \vdash \beta$*, alors* $\alpha \vdash \gamma$
- *monotonie : si* $\alpha \vdash \beta$ *alors* $\alpha \wedge \gamma \vdash \beta$

Équivalence logique

Il est possible de définir une relation d'équivalence entre formules propositionnelles à partir de la relation de conséquence logique.

Définition 23. *(équivalence logique).*
Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{PROP}_{\mathscr{V}}$ *deux formules propositionnelles.*
α *et* β *sont logiquement équivalents, noté* $\alpha \equiv \beta$*, ssi* $\alpha \vdash \beta$ *et* $\beta \vdash \alpha$*.*

L'équivalence couplée au principe de remplacement des équivalents permet la manipulation syntaxique des formules propositionnelles tout en préservant la sémantique. Nous pouvons alors noter l'existence de nombreuses règles de réécriture de formules propositionnelles :

- double négation : $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
- associativité : $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ et $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- commutativité : $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ et $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
- idempotence : $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$ et $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
- distributivité : $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ et $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

Nous pouvons également déduire les équivalences suivantes :

- $\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \Rightarrow \beta$
- $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)$
- $\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha) \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$

Chapitre 2

La dynamique des croyances

Dans ce chapitre, nous présenterons deux cadres pour la dynamique de croyances. En premier lieu, nous présenterons le cadre AGM, développé par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ([Gär88] ;[AGM85] ;[GM88]). Le cadre AGM propose un ensemble de postulats que toute opération de changement de croyances doit satisfaire. Nous présenterons ensuite un cas particulier du cadre AGM, celui de la logique propositionnelle.

Sommaire

2.1 Présentation du cadre AGM

2.1.1 Préliminaires

Dans cette partie, nous raisonnons sur des théories, soit des ensembles K clos pour la déduction logique (i.e. $Cn(K) = K$). Pour un agent avec les croyances K, une formule α ne peut avoir que trois statuts épistémiques différents :

- Soit $\alpha \in K$, on dit alors que l'agent accepte α, il la croit vraie.
- Soit $\neg\alpha \in K$, on dit alors que l'agent refuse α, il la croit fausse.
- Soit $\alpha \notin K$ et $\neg\alpha \notin K$, on dit alors que α est indéterminée (contingente) pour l'agent.

Les changements de croyances concernant α consistent donc à changer l'un de ces statuts épistémiques pour un autre. Six changements sont possibles, ceux-ci sont regroupés en trois types pour des raisons de symétrie. Le premier type est le passage d'un statuts indéterminé à accepté (symétriquement refusé), cette transition est nommée **expansion**, en effet on ajoute simplement une nouvelle information (ainsi que ses conséquences) dans K. Le deuxième type est le passage d'un statuts accepté à refusé (ou symétriquement de refusé à accepté), cette transition est nommée **révision**. Dans ce cas, l'agent change radicalement d'avis sur la croyance. Enfin le troisième type est le passage d'un statuts accepté à indéterminé (ou symétriquement de refusé à indéterminé), cette transition est nommée **contraction**. Dans ce cas, l'agent oublie une information. Il parait évident que ces trois opérations de changement de croyances doivent

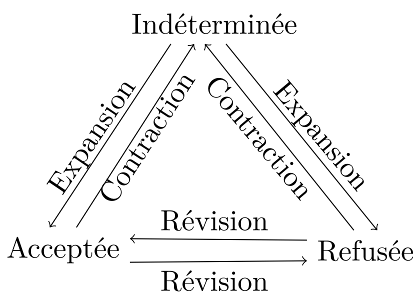

FIGURE 2.1 – Transitions entre statuts épistémiques

respecter des propriétés de rationalité, que l'on peut exprimer par trois principes :

- **Principe de succès** (ou **principe de primauté de la nouvelle information**) : le changement doit réussir après l'opération, l'information doit avoir le statut voulu.
- **Principe de cohérence** : on veut éviter la trivialisation de la base résultante, celle-ci doit être cohérente.
- **Principe de changement minimal** : on veut modifier le moins possible les croyances de l'agent, on ne veut ni retirer ni ajouter plus que nécessaire.

2.1.2 Postulats AGM

Nous allons voir maintenant comment formaliser les principes de rationalité pour chaque opération de changement de croyances.

Expansion

Commençons par présenter l'opérateur d'expansion $+$.

Définition 24. *([AGM85])*
Soient un ensemble de croyances K et une information α. L'expansion de K par α est notée $K + \alpha$ et doit vérifier les postulats suivants :

(K+1)	*$K + \alpha$ est une théorie*	*(clôture)*
(K+2)	*$\alpha \in K + \alpha$*	*(succès)*
(K+3)	*$K \subseteq K + \alpha$*	*(inclusion)*
(K+4)	*Si $\alpha \in K$, alors $K + \alpha = K$*	*(vacuité)*
(K+5)	*Si $K' \subseteq K$, alors $K' + \alpha \subseteq K + \alpha$*	*(monotonie)*
(K+6)	*$K + \alpha$ est la plus petite base satisfaisant $(K + 1) - (K + 5)$*	*(minimalité)*

(K+1) assure que le résultat de l'expansion est bien une théorie. (K+2) exprime que la nouvelle information doit être vraie dans la théorie résultante. (K+3) certifie que l'on garde toutes les informations de K. (K+4) dit que si l'information appartient déjà à la théorie, alors elle reste inchangée. (K+5) exprime la monotonie de l'expansion. (K+6) exprime la minimalité du changement, il assure donc que la nouvelle théorie ne contient pas de croyance non justifiée par l'ajout de la nouvelle information.

Théorème 25. *([Gär88])*
L'opérateur d'expansion + satisfait les postulats $(K + 1) - (K + 6)$ ssi $K + \alpha = Cn(K \cup \{\alpha\})$.

Ce théorème nous montre que l'union ensembliste est le seul opérateur satisfaisant ces postulats de rationalité.

Révision

L'opérateur d'expansion ne permet pas d'incorporer une information qui contredit les croyances. L'opérateur de révision $*$ le permet. Il faut alors abandonner certaines croyances pour ne pas obtenir un ensemble contradictoire.

Définition 26. *([AGM85])*
Soient un ensemble de croyances K et une information α. La révision de K par α, notée $K * \alpha$, doit vérifier les postulats suivants :

(K*1)	*$K * \alpha$ est une théorie*	*(clôture)*
(K*2)	*$\alpha \in K * \alpha$*	*(succès)*
(K*3)	*$K * \alpha \subseteq K + \alpha$*	*(inclusion)*
(K*4)	*Si $\neg\alpha \notin K$, alors $K + \alpha \subseteq K * \alpha$*	*(vacuité)*
(K*5)	*$K * \alpha = K_\perp$ ssi $\vdash \neg\alpha$*	*(cohérence)*
(K*6)	*Si $\alpha \equiv \beta$ alors $K * \alpha \equiv K * \beta$*	*(extensionalité)*
(K*7)	*$K * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (K * \alpha) + \beta$*	*(inclusion conjonctive)*
(K*8)	*Si $\neg\beta \notin K * \alpha$ alors $(K * \alpha) + \beta \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$*	*(vacuité conjonctive)*

(K*1) assure que le résultat de la révision est bien une théorie. (K*2) exprime que la nouvelle information doit appartenir à la nouvelle théorie. (K*3) implique que la révision ne peut pas ajouter de croyance qui ne soit pas une conséquence de la nouvelle information et de K. (K*3) et (K*4) expriment ensemble que lorsque K est cohérente avec la nouvelle information, alors la révision revient à une expansion. (K*5) assure que l'ensemble révisé n'est contradictoire que si la nouvelle information l'est. (K*6) dit que le résultat de la révision ne dépend pas de la syntaxe de la nouvelle information.

Ces six postulats sont les postulats de base pour les opérateurs de révision. (K*7) et (K*8) sont des postulats supplémentaires qui expriment le bon comportement des opérateurs de révision en terme de minimalité de changement. Ils assurent que la révision par une conjonction de deux informations revient à une révision par la première suivie d'une expansion par la seconde, dès que cela est possible (i.e. quand la seconde ne contredit aucune croyance issue de la première révision).

Contraction

Contrairement aux opérations d'expansion et de révision qui permettent d'ajouter une nouvelle information dans une théorie, l'opération de contraction, elle a pour objectif de retirer une information d'une théorie. La minimalité du changement doit toujours être respectée, on ne veut retirer que ce qui est nécessaire pour ne plus impliquer l'information de la théorie.

Définition 27. *([AGM85])*
Soient un ensemble de croyances K et une information α. La contraction de K par α, notée $K \div \alpha$, doit vérifier les postulats suivants :

(K÷1) $K \div \alpha$ *est une théorie* *(clôture)*
(K÷2) $K \div \alpha \subseteq K$ *(inclusion)*
(K÷3) *Si* $\alpha \notin K$, *alors* $K \div \alpha = K$ *(vacuité)*
(K÷4) *Si* $\nvdash \alpha$, *alors* $\alpha \notin K \div \alpha$ *(succès)*
(K÷5) *Si* $\alpha \in K$, *alors* $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha$ *(restauration)*
(K÷6) *Si* $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, *alors* $K \div \alpha = K \div \beta$ *(préservation)*
(K÷7) $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta$ *(intersection)*
(K÷8) *Si* $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$, *alors* $K \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha$ *(conjonction)*

(K÷1) assure que le résultat de la contraction est bien une théorie. (K÷2) garantit que, lors de la contraction, aucune nouvelle information n'est ajoutée à la théorie. (K÷3) dit que si l'information α n'est pas acceptée par K, il n'y a rien à faire pour retirer α de K. (K÷4) assure le succès de la contraction, c'est-à-dire que si α n'est pas une tautologie, alors la contraction réussit. (K÷5) garantit que la contraction de K par α suivie de l'expansion par α redonne la théorie K comme résultat (l'inclusion inverse de (K÷5) étant une conséquence de (K÷1)-(K÷4)). (K÷6) dit que le résultat de la contraction ne dépend pas de la syntaxe de l'information. Ces six postulats sont les postulats de base pour les opérateurs de contraction. (K÷7) et (K÷8) sont appelés postulats supplémentaires. (K÷7) assure que si l'information est à la fois dans la contraction par α et dans la contraction par β alors elle doit être dans la contraction par la conjonction $\alpha \wedge \beta$. (K÷8) exprime la minimalité du changement pour la conjonction.

Equivalence Contraction/Révision

Comme illustré sur la figure 2.1.1, nous pouvons décomposer la révision (transition du statut accepté au statut refusé) en une contraction (transition du statut accepté vers le statut indéterminé) suivie d'une expansion (transition du statut indéterminé au statut refusé). C'est ce que nous dit l'**identité de Levi** :

- $K * \alpha = (K \div \neg\alpha) + \alpha$ **Identité de Levi**

Le théorème suivant montre que les opérateurs définis grâce à l'identité de Levi sont bien des opérateurs de révision.

Théorème 28. *([Gär88])*
*Si l'opérateur de contraction ÷ satisfait (K÷1)-(K÷4) et (K÷6) et l'opérateur + satisfait (K+1)-(K+6), alors l'opérateur de révision * défini par l'identité de Levi satisfait (K*1)-(K*6). De plus, si (K÷7) est satisfait, alors (K*7) est satisfait pour la révision ainsi définie, et si (K÷8) est satisfait, alors (K*8) est satisfait pour la révision ainsi définie.*

Remarque 29. *Le postulat* ***restauration*** *(K÷5) n'est pas nécessaire pour ce résultat.*

L'**identité de Harper** permet d'exprimer le fait que la correspondance inverse est vérifiée. Ainsi, si nous disposons d'un opérateur de révision, il est possible de définir un opérateur de contraction.

- $K \div \alpha = K \cap (K * \neg\alpha)$ **Identité de Harper**

Nous remarquons alors que les informations issues de la contraction de K par α sont celles n'ayant rien à voir avec la vérité de α.
Le théorème suivant montre que les opérateurs définis par l'identité de Harper sont bien des opérateurs de contraction.

Théorème 30. *([Gär88])*
*Si l'opérateur de révision * satisfait (K*1)-(K*6), alors l'opérateur de contraction ÷ défini par l'identité de Harper satisfait (K÷1)-(K÷6). De plus si (K*7) est satisfait alors (K÷7) l'est aussi, et si (K*8) est satisfait alors (K÷8) l'est aussi.*

Ces deux identités nous montrent bien l'étroit lien qui existe entre les opérateurs de contractions et les opérateurs de révision.

2.1.3 Théorèmes de représentation

Maintenant que les bonnes propriétés des opérateurs de changements de croyances sont définies, nous pouvons présenter des moyens pratiques pour définir ces opérateurs. C'est ici que les théorèmes de représentation entrent en jeu. Nous n'allons présenter que trois des multiples théorèmes de représentation pour la contraction dans cette partie : celui utilisant les intersections partielles, celui utilisant les enracinements épistémiques, et enfin celui utilisant les systèmes de sphères.

Contraction par intersection partielle

L'idée des opérateurs de contraction par intersection est de conserver le plus de formules de l'ancienne base. Pour ce faire, nous allons conserver l'ensemble de tous les sous-ensembles maximaux de la théorie n'impliquant pas la croyance que l'on veut oublier. La nouvelle théorie est alors l'ensemble des formules que l'on pourra inférer de tous ces sous-ensembles.

Définition 31.
Soient une théorie K et une proposition α. L'ensemble des sous-théories maximales de K n'impliquant pas α, notée $K \perp \alpha$, est l'ensemble de tous les K' qui vérifient :

- $K' \subseteq K$
- $K' \nvdash \alpha$
- *Si* $K' \subset K'' \subseteq K$ *alors* $K'' \vdash \alpha$

Définition 32.
La fonction de contraction par intersection totale (full meet contraction) $\div_f$ *est définie comme*

$$K \div_f \alpha = \begin{cases} \bigcap(K \perp \alpha) & \textit{si } K \perp \alpha \textit{ n'est pas vide, et} \\ K & \textit{sinon} \end{cases}$$

Cette définition pose problème. En effet, le résultat est l'ensemble des formules de K qui sont conséquences logiques de $\neg\alpha$. Nous avons en particulier :

Théorème 33. *([AM82])*
*Si une fonction de révision * est définie à partir d'une fonction de contraction par intersection totale au moyen de l'identité de Levi, alors pour chaque proposition* α *telle que* $\neg\alpha \in K$*, on a* $K * \alpha = Cn(\alpha)$*.*

Ce théorème nous montre que l'on oublie toute les informations sur les anciennes croyances de l'agent. En effet, garder l'ensemble de toutes les sous-théories maximales de K n'impliquant pas α pose problème, cela nous force à retirer trop d'informations.
Nous allons donc garder uniquement les "meilleures".

Définition 34.
Soit une théorie K, une fonction de sélection γ *est une fonction qui associe à chaque proposition* α *l'ensemble* $\gamma(K \perp \alpha)$*, qui est un sous-ensemble non vide de* $K \perp \alpha$ *si celui-ci n'est pas vide et* $\gamma(K \perp \alpha) = \{K\}$ *sinon.*

Définition 35.
Une fonction de contraction par intersection partielle (partial meet contraction) $\div$ *est définie comme*

$$K \div \alpha = \bigcap \gamma(K \perp \alpha)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de représentation, indiquant que tout opérateur satisfaisant les propriétés attendues pour la contraction peut être définie par un opérateur de contraction par intersection partielle.

Théorème 36. *([AGM85])*
$\div$ *est une fonction de contraction par intersection partielle ssi* $\div$ *satisfait les postulats (K÷1)-(K÷6).*

En contraignant un peu la fonction de sélection, il est possible de satisfaire les deux derniers postulats.

Définition 37.
Une fonction de sélection γ *est relationnelle ssi pour tout K il existe une relation* $\leq$ *sur* $K \times K$ *telle que*

$$\gamma(K \perp \alpha) = \{K' \in K \perp \alpha \mid K' \leq K'', \forall K'' \in K \perp \alpha\}$$

Si $\leq$ *est une relation transitive alors* γ *est dite relationnelle transitive.*

Théorème 38. *([AGM85])*
$\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle relationnelle transitive ssi $\div$ satisfait les postulats (K$\div$1)-(K$\div$8).

Ce résultat montre bien que les postulats supplémentaires expriment la minimalité du changement. En effet, l'existence d'une relation $\leq$ aidant la sélection des sous-théories n'est possible que par l'ajout des postulats (K$\div$7) et (K$\div$8).

Contraction par enracinement épistémique

Le principe ici est d'ordonner les formules de la théorie en fonction de leur importance. Lors d'une contraction, on prend en compte cet ordre pour éliminer uniquement les formules les moins importantes.

Définition 39. *([Gär88])*
Soient deux formules α et β, la notation $\alpha \leq \beta$ signifie "β est au moins aussi importante que α". $\leq$ est un enracinement épistémique s'il satisfait les propriétés suivantes :

- ***(EE1)*** *Si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \gamma$, alors $\alpha \leq \gamma$* *(transitivité)*
- ***(EE2)*** *Si $\alpha \vdash \beta$, alors $\alpha \leq \beta$* *(domination)*
- ***(EE3)*** *$\alpha \leq \alpha \wedge \beta$ ou $\beta \leq \alpha \wedge \beta$* *(conjonction)*
- ***(EE4)*** *Si $K \neq K_\perp$, $\alpha \notin K$ ssi $\forall \beta$ $\alpha \leq \beta$* *(minimalité)*
- ***(EE5)*** *Si $\beta \leq \alpha \forall \beta$, alors $\vdash \alpha$* *(maximalité)*

Théorème 40. *([Gär88])*
Une fonction de contraction $\div$ satisfait (K$\div$1)-(K$\div$8) ssi il existe $\leq$ satisfaisant (EE1)-(EE5), où $\beta \leq \alpha$ ssi $\beta \notin K \div \alpha \wedge \beta$ ou $\vdash \alpha \wedge \beta$.

Ce théorème nous dit que, si après la contraction de K par $\alpha \wedge \beta$ on ne peut plus déduire β, alors α était strictement plus enraciné que β.

Systèmes de sphères

Le principe ici est d'organiser les interprétations en fonction de leur plausibilité.

Un monde possible d'une base de croyances est un sous-ensemble du langage, maximal parmi les sous-ensembles cohérents, tel que les formules de la base de croyances sont vraies dans ce sous-ensemble. Chaque monde possible est une façon de décrire le monde entièrement qui est cohérent avec les croyances de l'agent.

Définition 41. *([Gro88])*

- *On appelle monde possible un sous-ensemble maximal cohérent du langage et on note $M_{\mathscr{L}}$ l'ensemble des mondes possibles du langage $\mathscr{L}$.*
- *Soit une théorie K. On définit $[K]$ par si K=$K_\perp$ alors $[K] = \emptyset$, sinon $[K] = \{M \in M_{\mathscr{L}} \mid K \subseteq M\}$.*

- *Soit un ensemble $S \in M_{\mathscr{L}}$, on définit l'ensemble K_S par $K_S = \bigcap\{M \mid M \in S\}$.*

Définition 42. *([Gro88])*
Un système de sphères centré sur [K] est une collection de sous-ensembles S de $M_{\mathscr{L}}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(S1) *Si $s, s' \in S$, alors $s \subseteq s'$ ou $s' \subseteq s$*
(S2) *[K] $\in S$*
(S3) *Si $s \in S$, alors [K]$\subseteq$S*
(S4) *$M_{\mathscr{L}} \in S$*
(S5) *Si α est une formule et si $[\alpha]$ intersecte une sphère de S, alors il existe une sphère minimale qui intersecte $[\alpha]$ (on note $C(\alpha) = [\alpha] \cap S_\alpha$).*

Une sphère est définie comme un ensemble de mondes possibles, et le système de sphères centré sur $[K]$ est construit de la façon suivante :

- Les sphères sont imbriquées les unes dans les autres.
- L'ensemble des mondes possibles de K est la plus petite sphère.
- L'ensemble des mondes possibles, $M_{\mathscr{L}}$, est la plus grande sphère.

Théorème 43. *([Gro88])*
*Soit une théorie K. Il existe un système de sphères S centré sur [K] tel que pour toute formule α, $K * \alpha = K_{C(\alpha)}$ ssi * est un opérateur de révision satisfaisant (K*1)-(K*8).*

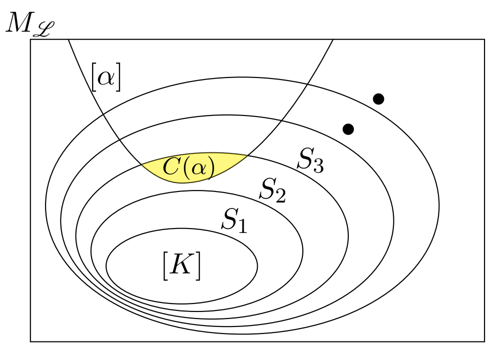

FIGURE 2.2 – Révision de K par α via un système de sphères centré sur $[K]$

Graphiquement, cela peut être représenté comme sur la figure 2.2 : les mondes possibles qui satisfont la théorie ([K]) sont les mondes les plus plausibles. Les autres mondes sont ensuite ordonnés suivant leur plausibilité (sphères S_1, S_2, ...).
Lorsque l'on révise par une nouvelle croyance α, les mondes possibles de α qui appartiennent à la sphère la plus plausible (la plus "basse") sont conservés.

2.2 Révision en logique propositionnelle

Katsuno et Mendelzon ont proposé une formulation équivalente des postulats AGM instanciés au cadre propositionnel standard. Une base de croyances finie K est équivalente à une formule φ, la conjonction des formules de K.

Dans ce cadre, la révision de φ par μ revient à rechercher les modèles de μ les plus proches de ceux de φ.

Postulats

Définition 44. *([KM91])*
Soient φ et μ deux formules propositionnelles où φ joue le rôle de la base de croyances et μ celui de la nouvelle croyance. La révision de φ par μ est notée $\varphi \circ \mu$ et doit vérifier les postulats suivants :

- ***(R1)*** $\varphi \circ \mu \vdash \mu$ *(succès)*
- ***(R2)*** *Si $\varphi \wedge \mu$ est cohérent alors $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$* *(vacuité)*
- ***(R3)*** *Si μ est cohérent alors $\varphi \circ \mu$ est cohérent* *(cohérence)*
- ***(R4)*** *Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\varphi_1 \circ \mu_1 \equiv \varphi_2 \circ \mu_2$* *(extensionalité)*
- ***(R5)*** $(\varphi \circ \mu) \wedge \psi \vdash \varphi \circ (\mu \wedge \psi)$ *(inclusion conjonctive)*
- ***(R6)*** *Si $(\varphi \circ \mu) \wedge \psi$ est cohérent alors $\varphi \circ (\mu \wedge \psi) \vdash (\varphi \circ \mu) \wedge \psi$* *(vacuité conjonctive)*

La signification de ces postulats est la suivante : la nouvelle croyance est conservée dans la base de croyances révisée (R1). On garantit que, lorsque qu'il n'y a pas de conflit, la révision est effectuée de façon évidente (R2). Si la nouvelle croyance est contradictoire, la base de croyances révisée par cette croyance l'est aussi (R3). Le principe d'indépendance à la syntaxe est respecté (R4). La minimalité du changement est assurée par (R5) et (R6).

Théorème 45. *([KM91])*
*Soit $*$ un opérateur sur les théories et $\circ$ un opérateur de révision sur les formules propositionnelles correspondant (i.e. pour tout φ et tout μ, $Cn(\varphi) * \mu = Cn(\varphi \circ \mu)$). $*$ satisfait (K*1)-(K*8) ssi $\circ$ satisfait (R1)-(R6).*

Ce théorème nous montre que les opérateurs de révision satisfaisant les postulats (R1)-(R6) correspondent aux opérateurs de révision satisfaisant les postulats AGM (K*1)(K*8).

Théorème de représentation

Katsuno et Mendelzon ont aussi proposé un théorème de représentation permettant de donner une définition constructive d'un opérateur $\circ$ de révision AGM dans le cadre propositionnel standard.

Ce théorème, exprimant la révision comme une sélection de modèles minimaux de la nouvelle information suivant cette mesure de confiance sur les modèles, correspond à une méthode de révision basée sur les pré-ordres sur les mondes possibles, associés aux formules par un assignement fidèle.

Définition 46. *([KM91])*
Un assignement fidèle est une fonction qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre $\leq_\varphi$ sur les interprétations tel que :

1. *Si $I \vdash \varphi$ et $J \vdash \varphi$, alors $I \simeq_\varphi J$*

2. *Si* $I \vdash \varphi$ *et* $J \nvdash \varphi$*, alors* $I <_\varphi J$

3. *Si* $\varphi_1 \equiv \varphi_2$*, alors* $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$

Cela signifie que les modèles de φ sont tous équivalents pour le pré-ordre associé et sont strictement préférés aux contre-modèles de φ. Plus une interprétation est préférée, plus elle sera petite pour l'ordre. Lorsque l'on exécute une révision, ce sont alors les interprétations de la nouvelle information les plus crédibles pour la base courante qui forment les modèles de la nouvelle base de connaissances. C'est ce que décrit le théorème de représentation suivant.

Théorème 47. *([KM91])*
Un opérateur de révision $\circ$ *satisfait les postulats (R1)-(R6) ssi il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances* φ *un pré-ordre total* $\leq_\varphi$ *tel que* $Mod(\varphi \circ \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\varphi)$*.*

Exemple : Opérateur de Dalal

Soient deux interprétations I et J, la distance de Dalal (Hamming) entre I et J, notée $d_H(I, J)$, est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations différent. $d_H(I, J) = |\{x \in \mathscr{A} | I(x) \neq J(x)\}|$.

Soit une distance entre interprétations d, une formule φ et une interprétation I, la distance entre interprétation I et la formule φ est la distance minimale entre l'interprétation I et les modèles de la formule φ : $d(\varphi, I) = min_{J \in Mod(\varphi)} d(J, I)$.

Soit une distance entre une interprétation et une formule, on définit l'assignement correspondant : $I \leq_\varphi^D J$ ssi $d_H(I, \varphi) \leq d_H(J, \varphi)$.

L'opérateur de révision de Dalal est défini par $Mod(\varphi \circ_D \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\varphi^D)$

Nous pouvons déduire du théorème 47 que l'opérateur de révision de Dalal $\circ_D$ satisfait les postulats (R1)-(R6).

Deuxième partie

Contribution

Introduction

Comme nous avons pu le voir, les identités de Levi et Harper montrent un lien très étroit entre opérateurs de révision et opérateurs de contraction, qui peuvent tout deux être définis à partir de l'autre. On n'a donc pas réellement à étudier les deux types d'opérateurs, mais il suffit d'en étudier un, puis d'utiliser les identités pour définir l'autre.

La plupart des chercheurs en intelligence artificielle choisissent les opérateurs de révision comme opérateurs de base, en effet ceux-ci sont les plus utilisés dans les systèmes à bases de connaissances. Nous allons ici dévelloper le choix des logiciens et philosophes qui prennent les opérateurs de contractions comme opérateurs de base, puisque l'identité de Levi présente la révision comme une composition d'une contraction suivie d'une expansion.

Notre but dans cette partie du mémoire est donc d'arriver aux même résultats que Katsuno et Mendelzon, pour la révision dans le cadre de la logique propositionnelle finie, mais pour la contraction. Nous allons pour cela définir des postulats de rationalité pour la contraction, nous nous assurerons ensuite que les opérateurs de contraction ainsi définis correspondent aux opérateurs de révision définis via les postulats de Katsuno et Mendelzon. Enfin nous établirons un théorème de représentation pour la contraction en logique propositionnelle finie.

Chapitre 1

Définition des postulats

Dans ce chapitre, nous allons définir un ensemble de postulats pour les opérateurs de contraction dans le cadre de la logique propositionnelle. Nous vérifierons ensuite qu'il y a bien une correspondance entre les opérateurs de contraction satisfaisant les postulats AGM (K÷1)-(K÷8) et les opérateurs de contraction satisfaisant nos postulats.

Sommaire

1.1 Postulats de contraction en logique propositionnelle

Si nous fixons un moyen de représenter tout ensemble de coyances K par une formule propositionnelle φ telle que $K = \{\psi \mid \varphi \vdash \psi\}$, nous pouvons établir une correspondance directe entre $K \div \alpha$ et $\varphi - \alpha$. Nous pouvons ainsi énoncer les postulats suivants :

(C1) $\varphi \vdash \varphi - \alpha$ (inclusion)
(C2) Si $\varphi \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$ (vacuité)
(C3) Si $\varphi - \alpha \vdash \alpha$, alors $\vdash \alpha$ (succès)
(C4) Si $\varphi \vdash \alpha$, alors $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$ (restauration)
(C5) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, alors $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$ (préservation)
(C6) $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$ (intersection)
(C7) Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (conjonction)

La signification intuitive de ces postulats est la suivante : (C1) assure qu'après la contraction, aucune nouvelle information n'a été ajouté à la base de croyances. (C2) permet de montrer que si α n'est pas déductible de φ, aucun changement ne sera effectué sur la base de croyances. (C3) garantit que la seule possibilité, pour que la contraction de φ par α échoue, est que α soit une tautologie. (C4) nous dit que la conjonction de la contraction de φ par α et α nous donne une formule propositionnelle équivalente à φ (l'implication inverse de (C4) est une conséquence de (C1)). (C5) traduit le principe d'indépendance de la syntaxe. (C6) et (C7) expriment la minimalité du changement pour la conjonction.

Le théorème suivant nous montre que les postulats supplémentaires (C6) et (C7) impliquent, en présence de (C1)-(C5), une trichotomie. En effet, la contraction de φ par une conjonction $(\alpha \wedge \beta)$ ne peut avoir que trois résultats différents.

Théorème 48. *En présence de (C1)-(C5), (C6) et (C7) sont équivalents à :*

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \ \textit{ou} \\ \varphi - \beta \ \textit{ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases}$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$
(C6) : $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$
(C7) : Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

Par (C3), si $\alpha \wedge \beta$ n'est pas valide (i.e. α n'est pas valide ou β n'est pas valide) alors $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha \wedge \beta$.
Donc il y a 3 cas :

1. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \beta$
2. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$
3. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$

Si $\alpha \wedge \beta$ est valide, alors α est valide et β est valide. On a donc $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \equiv \beta$.
D'après (C4), on doit avoir : $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha \equiv \varphi - \beta \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$.
Nous allons donc étudier 3 cas :

1. (Hyp1) Soit $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \beta$

   (C6) et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \beta$
   $\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash [(\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)] \wedge \beta$
   $\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash [(\varphi - \alpha) \wedge \beta] \vee [(\varphi - \beta) \wedge \beta]$

   D'après (C5), $(\varphi - \beta) \wedge \beta \vdash \varphi$
   D'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \alpha$
   Donc $(\varphi - \beta) \wedge \beta \vdash \varphi - \alpha$
   Comme $(\varphi - \beta) \wedge \beta \vdash \beta$, on a $(\varphi - \beta) \wedge \beta \vdash (\varphi - \alpha) \wedge \beta$
   Donc $[(\varphi - \alpha) \wedge \beta] \vee [(\varphi - \beta) \wedge \beta] \equiv (\varphi - \alpha) \wedge \beta$
   D'après (C4), on dérive que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \wedge \beta$

   $\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha)$

   (C7) et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha \Rightarrow \varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

   $$\text{(C6) et (C7) } \Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \tag{1.1}$$

2. (Hyp2) Soit $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$
   Ce cas étant le symétrique du précédent, nous avons directement :

   $$\text{(C6) et (C7) } \Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \beta) \tag{1.2}$$

3. (Hyp3) Soit $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$

   (C7) et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha \Rightarrow \varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

   (C7) et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta \Rightarrow \varphi - \beta \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

   $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ et $\varphi - \beta \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$
   $\Rightarrow (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

   (C6) donne la réciproque.

   $$\text{(C6) et (C7) } \Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \tag{1.3}$$

(1) + (2) + (3) $\rightarrow$ en présence de (C1)-(C5),

$$\text{(C6) et (C7)} \Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \text{ ou} \\ \varphi - \beta \text{ ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases} \tag{Δ_1}$$

($\Leftarrow$)

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \text{ ou} \\ \varphi - \beta \text{ ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases}$$

Nous avons 3 cas à étudier :

1. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha$
   $\varphi - \alpha \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$
   $\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$ (C6)

   Comme $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha$, on a $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ donc (C7) est trivialement vérifiée.
   $$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha \Rightarrow \text{(C6) et (C7)} \tag{1.4}$$

2. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \beta$
   Ce cas étant le symétrique du précédent, nous avons directement :
   $$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \beta \Rightarrow \text{(C6) et (C7)} \tag{1.5}$$

3. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$
   $\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$ (C6)
   et $(\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ ce qui implique que $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$, donc (C7) est trivialement vérifiée.
   $$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \tag{1.6}$$

(4)+(5)+(6) $\rightarrow$ en présence de (C1)-(C5),

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \text{ ou} \\ \varphi - \beta \text{ ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases} \Rightarrow \text{(C6) et (C7)} \tag{Δ_2}$$

$\square$

Une signification de cette trichotomie peut être la suivante : dans la plupart des cas, quand $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, $\varphi - (\alpha \wedge \beta)$ est équivalent à $\varphi - \alpha$. Cependant, ce n'est pas le seul cas : si α et β sont aussi épistémologiquement enracinés (mais non logiquement équivalent), α et β ne doivent plus être impliqués par $\varphi - (\alpha \wedge \beta)$, alors que seul α sera rejeté dans $\varphi - \alpha$.

Nous retrouvons ici le même résultat que dans le cadre AGM classique ([Gär88]).

1.2 Correspondance entre la contraction d'ensemble de croyances et la contraction de bases de croyances.

La question est maintenant de savoir si les postulats (C1)-(C7) sont bien une formulation équivalente des postulats AGM classiques lorsque les bases de croyances sont exprimées dans un langage propositionnel fini. Pour ce faire, nous allons définir quelques outils logiques.

Proposition 49. *Pour tout ensemble de croyances K, il existe une base de croyances φ_K telle que K=Cn(φ_K) et réciproquement, pour toute base de croyances φ, il existe un ensemble de croyances $K_\varphi = Cn(\varphi)$.*

Soient E un ensemble d'ensemble de croyances et F un ensemble de bases de croyances quotienté par l'équivalence logique, Cn constitue une bijection de E dans F.

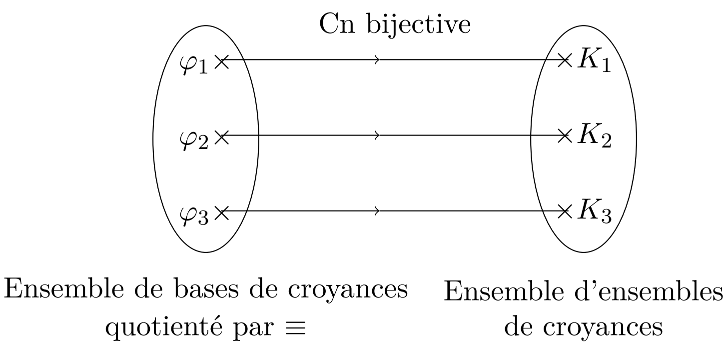

FIGURE 1.1 – Bijection entre ensemble d'ensembles de croyances et ensemble de bases de croyances

Ainsi, pour une base de croyance φ donnée, $K_\varphi = Cn(\varphi)$ et pour un ensemble de croyances K donné, $\varphi_K = Cn^{-1}(K)$.

Proposition 50. *Trivialement, nous avons $\varphi \equiv \varphi_{K_\varphi}$. De même nous avons $K = K_{\varphi_K}$.*

Ce résultat nous est donné par le fait que la relation Cn soit une bijection. En effet, en combinant les deux expressions suivantes : $K_\varphi = Cn(\varphi)$ et $\varphi_K = Cn^{-1}(K)$, nous obtenons $\varphi_{K_\varphi} = Cn^{-1}(Cn(\varphi))$. De même, nous obtenons $K_{\varphi_K} = Cn(Cn^{-1}(K))$.

Définition 51. *Etant donné un opérateur de contraction AGM sur les ensembles de croyances $\div$, on définit l'opérateur $-_{(\div)}$ par :*
$\varphi -_{(\div)} \mu = \varphi_{K_\varphi \div \mu}$

Définition 52. *Réciproquement, étant donné un opérateur de contraction AGM sur les bases de croyances $-$, on définit l'opérateur $\div_{(-)}$ par :*
$K \div_{(-)} \mu = K_{\varphi_K - \mu}$

La proposition suivante indique que si nous utilisons un opérateur de contraction d'ensemble de croyance $\div$ pour définir, via la définition 51, un opérateur de contraction de bases de croyances $-_{(\div)}$, alors l'opérateur de contraction d'ensemble de croyance définie, via la définition 52, par cet opérateur de contraction $-_{(\div)}$ sera l'opérateur de contraction initial $\div$. De la même manière, si nous utilisons un opérateur de contraction de bases de croyances $-$ pour définir, via la définition 52, un opérateur de contraction d'ensemble de croyances $\div_{(-)}$, alors l'opérateur de contraction de base de croyances définie, via la définition 51, par cet opérateur de contraction $\div_{(-)}$ sera l'opérateur de contraction initial $-$.

Proposition 53. *Nous avons* $-_{(\div_{(-)})} = -$. *De même nous avons* $\div_{(-_{(\div)})} = \div$

Démonstration.
Montrons que $-_{(\div_{(-)})} = -$
Il suffit pour cela de montrer que $\varphi -_{(\div_{(-)})} \mu \equiv \varphi - \mu$

$\varphi -_{(\div_{(-)})} \mu = \varphi_{K_\varphi \div_{(-)} \mu} = \varphi_{K_{\varphi_{K_\varphi} - \mu}}$ d'après la définition 51
$\varphi_{K_{\varphi_{K_\varphi} - \mu}} \equiv \varphi_{K_{\varphi - \mu}}$ en utilisant la proposition 50

$\varphi_{K_{\varphi-\mu}} = Cn^{-1}(K_{\varphi-\mu}) = Cn^{-1}(Cn(\varphi - \mu)) \equiv \varphi - \mu$

Donc $\varphi -_{(\div_{(-)})} \mu \equiv \varphi - \mu$, d'où $-_{(\div_{(-)})} = -$.

Montrons maintenant que $\div_{(-_{(\div)})} = \div$.
Il suffit pour cela de montrer que $K \div_{(-_{(\div)})} \mu \equiv K \div \mu$

$K \div_{(-_{(\div)})} \mu = K_{\varphi_K -_{(\div)} \mu} = K_{\varphi_{K_{\varphi_K} \div \mu}}$ d'après la définition 51
$K_{\varphi_{K_{\varphi_K} \div \mu}} = K_{\varphi_{K \div \mu}}$en utilisant le proposition 50

$K_{\varphi_{K \div \mu}} = Cn(\varphi_{K \div \mu}) = Cn(Cn^{-1}(K \div \mu)) \equiv K \div \mu$

Donc $K \div_{(-_{(\div)})} \mu \equiv K \div \mu$, d'où $\div_{(-_{(\div)})} = \div$

□

Soit un opérateur de contraction $\div$ sur des théories et $-$ un opérateur de contraction sur des bases de croyances propositionnelles. On dit que les opérateurs $\div$ et $-$ se correspondent si $\div = \div_{(-)}$ et $- = -_{(\div)}$

Le théorème suivant nous montre que les opérateurs de contraction satisfaisant les postulats (C1)-(C7) correspondent aux opérateurs de contraction satisfaisant les postulats AGM (K÷1)-(K÷8). Il fait écho au théorème 45 présenté ci-avant et qui constitue son analogue pour la révision.

Théorème 54. *Soit* $\div$ *un opérateur de contraction sur des ensembles de croyances et - son correspondant sur les bases de croyances.*
Alors $\div$ *satisfait (K÷1)-(K÷8) si et seulement si - satisfait (C1)-(C6).*

Démonstration.

- Montrons d'abord que (K÷2) correspond à (C1) :

$$\begin{array}{rcl} K \div \alpha \subseteq K & \Leftrightarrow & Cn(\varphi) \div \alpha \subseteq Cn(\varphi) \\ & \Leftrightarrow & Cn(\varphi - \alpha) \subseteq Cn(\varphi) \\ & \Leftrightarrow & \varphi \vdash \varphi - \alpha \end{array}$$

- Montrons ensuite que (K÷3) correspond à (C1) et (C2) :
  - Commençons par montrer que (K÷3) $\Rightarrow$ (C2).
    Si $\alpha \notin$K alors K÷α=K
    $\Rightarrow$ Si $\alpha \notin$K alors K $\subseteq K \div \alpha$
    $\Rightarrow$ Si $\varphi \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$
    $\Rightarrow$ Si $\varphi \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$
  - Montrons maintenant que (C1) et (C2) $\Rightarrow$ (K÷3).
    (Si $\varphi \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$) et $\varphi \vdash \varphi - \alpha$
    $\Rightarrow$ (Si $\alpha \notin$K alors K $\subseteq K \div \alpha$) et $K \div \alpha \subseteq K$
    $\Rightarrow$ Si $\alpha \notin$K alors (K $\subseteq K \div \alpha$ et $K \div \alpha \subseteq K$)
    $\Rightarrow$ Si $\alpha \notin$K alors K $=K \div \alpha$

- Montrons maintenant que (K÷4) correspond à (C3) :
  Si $\nvdash \alpha$ alors $\alpha \notin$K÷α $\Leftrightarrow$ si $\alpha \in$K÷α alors $\vdash \alpha$
  $\alpha \in K \div \alpha \Leftrightarrow \alpha \in Cn(\varphi) \div \alpha \Leftrightarrow \varphi - \alpha \vdash \alpha$
  Donc si $\alpha \in$K÷α alors $\vdash \alpha$ $\Leftrightarrow$ si $\varphi - \alpha \vdash \alpha$ alors $\vdash \alpha$

- Montrons ensuite que (K÷5) correspond à (C4) :
  Si $\alpha \in$K alors K$\subseteq$(K÷α) + α
  $\alpha \in$K $\Leftrightarrow \varphi \vdash \alpha$
  $$\begin{array}{lll} \text{K}\subseteq(\text{K}\div\alpha)+\alpha & \Leftrightarrow & \text{Cn}(\varphi)\subseteq(\text{Cn}(\varphi)\div\alpha)+\alpha \\ & \Leftrightarrow & \text{Cn}(\varphi)\subseteq\text{Cn}((\varphi-\alpha)\wedge\alpha) \\ & \Leftrightarrow & (\varphi-\alpha)\wedge\alpha\vdash\varphi \end{array}$$
  Donc si $\alpha \in$K alors K$\subseteq$(K÷α) + α $\Leftrightarrow$ si $\varphi \vdash \alpha$ alors $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$

- Montrons à présent que (K÷6) correspond à (C5) :
  Si $\alpha \equiv \beta$ et $K_1 = K_2$ alors $K_1 \div \alpha = K_2 \div \beta \Leftrightarrow$
  Si $\alpha \equiv \beta$ et Cn(φ)=Cn(ψ) alors Cn(φ) ÷ α=Cn(ψ) ÷ β $\Leftrightarrow$
  Si $\alpha \equiv \beta$ et $\varphi \equiv \psi$ alors $\varphi - \alpha$=$\varphi - \beta$

- Montrons maintenant que (K÷7) correspond à (C6) :
  $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta)$

  $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) =$
  $(Cn(\varphi - \alpha) \cap (Cn(\varphi - \beta) =$
  $Cn((\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)) \equiv$
  $(\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$

  K÷$(\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

  Donc $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$

- Il reste à montrer que (K÷8) correspond à (C7) :
  Si $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$ alors K÷$(\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha$

  $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$

  K÷$(\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha \Leftrightarrow$
  Cn(φ)÷$(\alpha \wedge \beta)$ $\subseteq$Cn(φ)÷α $\Leftrightarrow$

$\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

Donc si $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$ alors K$\div(\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha \Leftrightarrow$
Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

$\square$

Chapitre 2

Equivalence Contraction/Révision

Maintenant que nous avons défini de bonnes propriétés pour les opérateurs de contraction dans le cadre de la logique propositionnelle, nous pouvons vérifier que ces opérateurs de contraction ainsi définis correspondent aux opérateurs de révision définis par les postulats de Katsuno et Mendelzon. Nous utiliserons les identités de Levi et Harper afin de montrer que les opérateurs de révision propositionnelle peuvent être définis à partir des opérateurs de contraction propositionnelle et inversement.

Sommaire

2.1 Préliminaires

Définition 55. *Dans le cadre de la contraction et de la révision de bases de croyances, les identités de Levi et Harper peuvent s'exprimer comme suit :*

$\varphi \circ_{(-)} \alpha \equiv (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha$ ***(Identité de Levi)***

$\varphi -_{(\circ)} \alpha \equiv \varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)$ ***(Identité de Harper)***

La proposition suivante indique que si nous utilisons un opérateur de révision $\circ$ pour définir, via l'identité de Harper, un opérateur de contraction $-_{(\circ)}$, alors l'opérateur de révision définie, via l'identité de Levi, par cet opérateur de contraction $-_{(\circ)}$ sera l'opérateur de révision initial $\circ$. De la même manière, si nous utilisons un opérateur de contraction $-$ pour définir, via l'identité de Levi, un opérateur de révision $\circ_{(-)}$, alors l'opérateur de contraction définie, via l'identité de Harper, par cet opérateur de révision $\circ_{(-)}$ sera l'opérateur de contraction initial $-$.

Proposition 56.

- *si $\circ$ est un opérateur de révision AGM, alors $\circ_{(-_{(\circ)})} = \circ$*
- *si $-$ est un opérateur de contraction AGM, alors $-_{(\circ_{(-)})} = -$*

Démonstration.
Montrons d'abord que $\circ_{(-_{(\circ)})} = \circ$
Il nous suffit de montrer que pour tout φ et α, $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv \varphi \circ \alpha$

$$\begin{aligned} \varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha &\equiv (\varphi -_{(\circ)} \neg\alpha) \wedge \alpha \\ &\equiv [\varphi \vee (\varphi \circ \alpha)] \wedge \alpha \\ &\equiv (\varphi \wedge \alpha) \vee [(\varphi \circ \alpha) \wedge \alpha] \end{aligned}$$

D'après (R1), nous avons $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv (\varphi \wedge \alpha) \vee (\varphi \circ \alpha)$

- Si $\varphi \wedge \alpha$ est cohérent, d'après (R2) on a $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$
  D'où $$\begin{aligned} \varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha &\equiv (\varphi \wedge \alpha) \vee (\varphi \wedge \alpha) \\ &\equiv \varphi \wedge \alpha \\ &\equiv \varphi \circ \alpha \end{aligned}$$
- Si $\varphi \wedge \alpha$ n'est pas cohérent, on a $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv \varphi \circ \alpha$

Nous avons donc $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv \varphi \circ \alpha$, d'où $\circ_{(-_{(\circ)})} = \circ$

Montrons maintenant que $-_{(\circ_{(-)})} = -$
Pour ce faire, montrons que pour tout φ et α, $\varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$

$$\begin{aligned} \varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha &\equiv \varphi \vee (\varphi \circ_{(-)} \neg\alpha) \\ &\equiv \varphi \vee [(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha] \\ &\equiv (\varphi \vee \neg\alpha) \wedge [\varphi \vee (\varphi - \alpha)] \end{aligned}$$

D'après (C1), on a $\varphi \wedge (\varphi - \alpha) \equiv \varphi - \alpha$

- Si $\varphi \vdash \alpha$ alors par (C4) on a $\varphi - \alpha \vdash \neg\alpha \vee \varphi$
  Dans ce cas, nous avons donc $\varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$

- Si $\varphi \nvdash \alpha$ alors par (C1) et (C2), $\varphi - \alpha \equiv \varphi$
  Donc $(\varphi \vee \neg\alpha) \wedge (\varphi - \alpha) \equiv \varphi \equiv \varphi - \alpha$
  Ainsi $\varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$

□

2.2 De contraction vers révision

Le théorème suivant montre que les opérateurs de révision de bases de croyances propositionnelles peuvent être définis par l'identité de Levi en partant des opérateurs de contraction de bases de croyances propositionnelles.

Théorème 57. *Si l'opérateur de contraction $-$ satisfait (C1)-(C5) alors l'opérateur de révision $\circ$ défini par l'identité de Levi satisfait (R1)-(R4). De plus si (C6) est satisfait, alors (R5) est satisfait pour la révision ainsi définie, et si (C7) est satisfait, alors (R6) est satisfait pour la révision ainsi définie.*

Démonstration. Supposons (C1)-(C5) satisfait.

- Montrons que (R1) est satisfait :
  Nous avons trivialement $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \vdash \alpha$
  Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$

- Montrons ensuite que (R2) est satisfait :
  Supposons que $\varphi \wedge \alpha$ est cohérent, nous avons donc $\varphi \nvdash \neg\alpha$
  D'après (C1) et (C2), on a $\varphi - \neg\alpha \equiv \varphi$
  D'où $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$
  Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$

- Montrons maintenant que (R3) est satisfait :
  Supposons que α est cohérent, nous avons donc $\nvdash \neg\alpha$
  D'après (C3), on a $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha$
  D'où $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \nvdash \bot$
  Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \nvdash \bot$

- Montrons enfin que (R4) est satisfait :
  Supposons maintenant $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$
  D'après (C5), on a $\varphi_1 - \neg\alpha_1 \equiv \varphi_2 - \neg\alpha_2$
  Donc $(\varphi_1 - \neg\alpha_1) \wedge \alpha_1 \equiv (\varphi_2 - \neg\alpha_2) \wedge \alpha_2$
  Ce qui nous donne $\varphi_1 \circ \alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \alpha_2$

Supposons (C6) satisfait et soit γ tel que $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.
On veut montrer que $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma$

Comme $\neg\alpha \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$
D'après (C5), il suffit montrer, en utilisant l'identité de Levi, que
$[\varphi - (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta))] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$
D'après (C6), il suffit de montrer que $[\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$
et $[\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$

- Comme $(\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$ d'après Levi,
  par hypothèse, $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$
  On a donc aussi $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma$, ce qui permet de conclure.

- L'une des conséquences de (R2) est $\varphi \wedge \alpha \vdash \varphi \circ \alpha$ (R2.2)
  Comme $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$, d'après (R2.2) $\varphi \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$
  D'où $\varphi \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$

  Il y a 2 cas :

  - Si $\varphi \nvdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, d'après (C2) on a $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \varphi$
    D'où $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$
    Donc $[\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$
  - Si $\varphi \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, d'après (C4) on a $(\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \varphi$
    D'où $(\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$
    Donc $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma)$
    Or nous avons
    $$\begin{aligned} (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma) &\equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \\ &\equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \\ &\equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \end{aligned}$$
    Ce qui nous donne $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$
    Nous avons donc $[\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)] \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$

Supposons (C7) satisfait.
On veut montrer que (R6) est satisfait pout tout α et β.
Comme $\neg\alpha \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha$
D'après (C5), nous avons $\varphi - \neg\alpha \equiv \varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$
Supposons maintenant que $\varphi \circ \alpha \nvdash \neg\beta$
Comme $\varphi \circ \alpha \equiv (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha$, nous avons $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha \vee \neg\beta$
(C5) nous donne $\varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \nvdash \neg\alpha \vee \neg\beta$
D'après (C7), $\varphi - (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$
D'où $(\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)) \wedge \alpha \wedge \beta \vdash (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \wedge \beta$
Donc $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$

□

2.3 De révision vers contraction

Le théorème suivant montre que les opérateurs de contraction de bases de croyances propositionnelles peuvent être définis par l'identité de Harper en partant des opérateurs de révision de bases de croyances propositionnelles.

Théorème 58. *Si l'opérateur de révision $\circ$ satisfait (R1)-(R4) alors l'opérateur de contraction $-$ défini par l'identité de Harper satisfait (C1)-(C5). De plus, si (R5) est satisfait, alors (C6) est satisfait pour la contraction ainsi définie, et si (R6) est satisfait, alors (C7) est satisfait pour la contraction ainsi définie.*

Démonstration. Supposons (R1)-(R4) satisfais.

- Montrons d'abord que (C1) est satisfait :
  Il est clair que $\varphi \vdash \varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)$
  Ce qui nous donne $\varphi \vdash \varphi - \alpha$ par l'identité de Harper

- Montrons maintenant que (C2) est satisfait :
  Supposons que $\varphi \nvdash \alpha$
  D'après (R2), $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \varphi \wedge \neg\alpha$
  D'où $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \varphi$
  Donc $\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha) \vdash \varphi$
  Ce qui nous donne $\varphi - \alpha \vdash \varphi$

- Montrons ensuite que (C3) est satisfait :
  Supposons $\nvdash \alpha$
  Nous avons $\neg\alpha$ cohérent
  Donc d'après (R3), $\varphi \circ \neg\alpha$ est cohérent
  De plus, d'après (R1), $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$
  Donc $\varphi \circ \neg\alpha \nvdash \alpha$
  D'où $\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha) \nvdash \alpha$
  L'identité de Harper nous donne $\varphi - \alpha \nvdash \alpha$

- Montrons maintenant que (C4) est satisfait :
  Supposons maintenant que $\varphi \vdash \alpha$
  Nous avons $\varphi \wedge \alpha \vdash \varphi$ et d'après (R1) $(\varphi \circ \neg\alpha) \vdash \neg\alpha$
  D'où $(\varphi \circ \neg\alpha) \wedge \alpha \vdash \perp$
  Donc $(\varphi \wedge \alpha) \vee ((\varphi \circ \neg\alpha) \wedge \alpha) \vdash \varphi$
  D'où $[\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)] \wedge \alpha \vdash \varphi$
  Ce qui nous donne $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$

- Montrons enfin que (C5) est satisfait :
  Supposons $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$
  D'après (R4), $\varphi_1 \circ \neg\alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \neg\alpha_2$
  Donc $\varphi_1 \vee (\varphi_1 \circ \neg\alpha_1) \equiv \varphi_2 \vee (\varphi_2 \circ \neg\alpha_2)$
  Ce qui nous donne $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$

Supposons (R5) satisfait et soit γ tel que $(\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \vdash \gamma$
Nous voulons montrer que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$

- Si $\varphi \vdash \alpha \wedge \beta$
  Comme $\alpha \equiv \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$
  D'après (R4), nous avons $\varphi - \alpha \equiv \varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$
  D'où $\varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha) \vdash \gamma$
  D'après (R5), nous avons $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \wedge \neg\alpha \vdash \varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$
  L'identité de Levi montre que $\varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vdash \varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$
  D'où $\varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vdash \gamma$
  Ce qui nous donne, d'après (R5), $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \wedge \neg\alpha \vdash \gamma$
  Ou encore $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \vdash \alpha \vee \gamma$
  Par symétrie sur α et β, nous avons $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \vdash \beta \vee \gamma$
  De plus, d'après (R1), $\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$
  Nous pouvons donc en déduire que $\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \gamma$
  L'identité de Levi nous donne $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ (*)

  Ayant supposé $\varphi \vdash \alpha \wedge \beta$, (C4) nous donne $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi$
  D'après (C1) $\varphi \vdash \varphi - \alpha$
  Comme on a supposé $\varphi - \alpha \vdash \gamma$ et $\varphi - \beta \vdash \gamma$, nous avons donc $\varphi \vdash \gamma$
  Par transitivité de $\vdash$ $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ (**)

  D'après (*) et (**), nous avons donc $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$

- Si $\varphi \nvdash \alpha \wedge \beta$
  D'après (C2) $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi$
  Or, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \alpha$
  Nous avons donc $\varphi \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$
  D'où $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$
  Ce qui nous donne $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$

Supposons (R6) satisfait et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$.
Nous voulons montrer que $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$.

- Si $\varphi \nvdash \alpha$, d'après (C2) nous avons $\varphi - \alpha \vdash \varphi$
  De plus, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$
  Nous avons donc $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

- Si $\varphi \vdash \alpha$
  Par l'absurde supposons $[\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$
  Cela entraine $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \alpha$
  Soit $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$ ce qui est exclu par hypothèse
  Nous avons donc $[\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$
  L'identité de Levi nous donne $\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$
  D'après (R6), comme $[\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$ est cohérent,
  on a $\varphi \circ [\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha] \vdash [\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$
  Or, d'après (R4), $\varphi \circ [\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha] \equiv \varphi \circ \neg\alpha$
  De plus, l'identité de Levi nous donne $\varphi \circ \neg\alpha \equiv (\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha$
  D'où $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash [\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$
  Nous avons $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash \varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)$

L'identité de Levi nous donne $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash [\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$
Nous avons $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (1)
D'après (C1) $\varphi \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$
Comme $\varphi \vdash \alpha$, d'après (C4), $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$
Par transitivité de $\vdash$, nous avons donc $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (2)
(1) et (2) nous donne $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

$\square$

Chapitre 3

Théorème de représentation

Nous pouvons à présent proposer un théorème de représentation, nous permettant ainsi de donner une définition constructive des opérateurs $-$ de contraction AGM de bases de croyances propositionnelles.

Sommaire

3.1 Préliminaires

Commençons par introduire une notation qui nous sera utile dans la suite. Pour toute formule α et pour tout monde I, on note $\alpha_{\{I\}}$ toute formule ayant l'interprétation I pour unique modèle. Plus généralement, si S est un ensemble fini d'interprétations, α_S dénote toute formule ayant exactement les éléments de S pour modèle.

Ce lemme nous indique que si une formule α, ne possédant qu'un seul modèle, n'implique pas une formule φ, alors la formule résultant de la contraction de φ par la négation de α est équivalente à la disjonction de φ et α.

Lemme 59. *Si $\alpha_{\{I\}} \nvdash \varphi$ alors $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \equiv \varphi \vee \alpha_{\{I\}}$.*

Démonstration.
Comme $\alpha_{\{I\}} \nvdash \varphi$, nous avons $\varphi \vdash \neg\alpha_{\{I\}}$.
D'après (C4), $(\varphi - \neg\alpha_{\{I\}}) \wedge \neg\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi$, d'où $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi \vee \alpha_{\{I\}}$.

D'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I\}}$.
De plus, le postulat de succès (C3) nous donne, $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \nvdash \neg\alpha_{\{I\}}$.
Soit $Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I\}}) \nsubseteq Mod(\neg\alpha_{\{I\}})$
Ce qui nous donne $\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I\}}$.

Nous avons la double implication, donc $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \equiv \varphi \vee \alpha_{\{I\}}$.

□

3.2 Définition du théorème de représentation

L'idée de ce théorème de représentation est d'exprimer la contraction d'une base φ par une croyance α comme l'union des minimaux des contre-modèles de α pour $\leq_\varphi$ et des modèles de φ.

Théorème 60. *Un opérateur de contraction $-$ satisfait les postulats* **(C1) - (C7)** *si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ tel que $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.*

Démonstration.
(sens direct) Supposons qu'il existe un opérateur de contraction $-$ qui satisfait les postulats (C1) à (C7).

Pour chaque formule φ, on définit un pré-ordre total $\leq_\varphi$ en utilisant l'opérateur $-$: $\forall I, I'$ deux interprétations, on définit la relation $I \leq_\varphi I'$ si et seulement si $I \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$.
Montrons d'abord que $\leq_\varphi$ est un pré-ordre total.

- **Total :** soient I et I' deux interprétations, comme $\alpha_{\{I,I'\}}$ possède au moins un modèle, $\neg\alpha_{\{I,I'\}}$ possède au moins un contre-modèle. Nous pouvons donc en déduire que $\nvdash \neg\alpha$, ce qui nous permet de conclure, d'après (C3), que $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha$.
  Nous savons donc qu'il existe $\omega \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$ tel que $\omega \in Mod(\alpha_{\{I,I'\}}) = \{I, I'\}$.
  Par conséquent, soit $I \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$ et donc $I \leq_\varphi I'$, soit $I' \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$ et donc $I' \leq_\varphi I$. On a donc bien une relation totale.
- **Réflexif :** si $I = I'$ dans la preuve ci-dessus, on obtient $I \leq_\varphi I$. On a donc bien une relation réflexive.

- **Transitif :** supposons qu'on a $I \leq_\varphi J$ et $J \leq_\varphi L$.
Plaçons nous dans le cas où I,J et L sont distinctes deux à deux.
En effet si deux d'entre elles sont équivalentes, la transitivité est trivialement vérifiée.
Par l'absurde, supposons $I \not\leq_\varphi L$. Comme $\leq_\varphi$ est totale, nous avons $L <_\varphi I$, soit $L \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$ et $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$.
Nous avons clairement, $\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv \begin{cases} \beta_{\{I,J\}} \vee \gamma_{\{L\}} \text{ ou} & (1) \\ \beta_{\{I,L\}} \vee \gamma_{\{J\}} \text{ ou} & (2) \\ \beta_{\{J,L\}} \vee \gamma_{\{I\}} & (3) \end{cases}$

D'après (C6), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \vdash \begin{cases} (\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{L\}}) \text{ ou} & (1) \\ (\varphi - \neg\beta_{\{I,L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{J\}}) \text{ ou} & (2) \\ (\varphi - \neg\beta_{\{J,L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{I\}}) & (3) \end{cases}$

De même, d'après (C6), nous avons $\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}} \vdash (\varphi - \neg\mu_{\{I\}}) \vee (\varphi - \neg\rho_{\{L\}})$.
De plus, nous savons que $I \models \varphi - \neg\beta_{\{I,J\}}$ donc $\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}} \not\vdash \neg\mu_{\{I\}}$.
Nous pouvons donc déduire, d'après (C7), que $\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}} \equiv \varphi - \neg\mu_{\{I\}}$.
De la même manière, nous pouvons montrer que $\varphi - \neg\beta_{\{I,L\}} \equiv \varphi - \neg\mu_{\{L\}}$ et $\varphi - \neg\beta_{\{J,L\}} \equiv \varphi - \neg\mu_{\{J\}}$.
Nous avons donc $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \vdash \begin{cases} (\varphi - \neg\mu_{\{I\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{L\}}) \text{ ou} & (1) \\ (\varphi - \neg\mu_{\{L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{J\}}) \text{ ou} & (2) \\ (\varphi - \neg\mu_{\{J\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{I\}}) & (3) \end{cases}$

4 cas sont à considérer :

  - Si I, J et L ne sont pas des modèles de φ.
  Nous pouvons déduire du lemme 59 que $\begin{cases} (\varphi - \neg\mu_{\{I\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{L\}}) \equiv \varphi \vee \mu_{\{I\}} \vee \gamma_{\{L\}} \\ (\varphi - \neg\mu_{\{L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{J\}}) \equiv \varphi \vee \mu_{\{L\}} \vee \gamma_{\{J\}} \\ (\varphi - \neg\mu_{\{J\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{I\}}) \equiv \varphi \vee \mu_{\{J\}} \vee \gamma_{\{I\}} \end{cases}$

  D'où, $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \vdash \begin{cases} \varphi \vee \mu_{\{I\}} \vee \gamma_{\{L\}} \text{ ou} & (1) \\ \varphi \vee \mu_{\{L\}} \vee \gamma_{\{J\}} \text{ ou} & (2) \\ \varphi \vee \mu_{\{J\}} \vee \gamma_{\{I\}} & (3) \end{cases}$

  Comme $J \not\models \varphi$, nous avons $J \not\models \varphi \vee \alpha_{\{I\}} \vee \alpha_{\{L\}}$.
  D'où $J \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$.
  De la même manière, nous pouvons déduire que $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$ et $L \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$.
  Or, nous savons d'après (C3) que $Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}})$ est un sous-ensemble non vide de $\{I, J, L\}$, nous avons donc une contradiction.

  - Si $I \models \varphi$, d'après (C1), nous avons $I \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$, donc $I \leq_\varphi L$.
  Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ ($L <_\varphi I$).

  - Si $J \models \varphi$, d'après (C1), nous avons $J \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}}$ donc $J \leq_\varphi I$, d'où $I \simeq_\varphi J$. Nous pouvons donc en déduire que $I \leq_\varphi L$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ ($L <_\varphi I$).

- Si $L \models \varphi$, d'après (C1), nous avons $L \models \varphi - \neg\alpha_{\{J,L\}}$ donc $L \leq_\varphi J$, d'où $J \simeq_\varphi L$. Nous pouvons donc en déduire que $I \leq_\varphi L$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ ($L <_\varphi I$).

Nous avons donc $I \leq_\varphi L$. La relation $\leq_\varphi$ est donc transitive.

Nous avons montré que $\leq_\varphi$ est une relation totale, réflexive et transitive, c'est donc bien un pré-ordre total. Ensuite nous devons montrer que l'association de φ à $\leq_\varphi$ est bien un assignement fidèle.

- La première condition pour que l'assignement soit fidèle se déduit facilement de la définition de $\leq_\varphi$ et (C1).
  En effet, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \neg\alpha$, donc si $I_1 \in Mod(\varphi)$ alors $I_1 \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}})$ et si $I_2 \in Mod(\varphi)$ alors $I_2 \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}})$. Donc par définition, on a, $I_1 \leq_\varphi I_2$ et $I_2 \leq_\varphi I_1$, d'où $I_1 \simeq_\varphi I_2$

- La troisième condition (si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, alors $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$) vient de (C5).
  En effet, si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors $\varphi_1 - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}} \equiv \varphi_2 - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, d'où $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$

- Montrons à présent que la deuxième condition (si $I_1 \models \varphi$ et $I_2 \not\models \varphi$ alors $I_1 <_\varphi I_2$) est satisfaite.
  Depuis la définition de $\leq_\varphi$ et (C1), nous pouvons déduire de $I_1 \models \varphi$ que $I_1 \leq_\varphi I_2$.
  Il nous reste à montrer que $I_2 \not\leq_\varphi I_1$, nous allons étudier 2 cas :

  - Si $\varphi \nvdash \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, alors, d'après (C2), $\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}} \vdash \varphi$.
    Nous en déduisons donc que $I_2 \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, d'où $I_2 \not\leq_\varphi I_1$.
  - Si $\varphi \vdash \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, nous avons $\varphi \vdash \neg\beta_{\{I_1\}} \wedge \neg\gamma_{\{I_2\}}$.
    Donc, en particulier, $\varphi \vdash \neg\beta_{\{I_1\}}$, ce qui contredit le fait que $I_1 \models \varphi$, ce cas est donc impossible.

  La deuxième condition pour que l'assignement soit fidèle est donc vérifiée.

Finalement, il reste à montrer que $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.
Nous pouvons considérer 2 cas :

- Si $\varphi \nvdash \alpha$, d'après (C1) et (C2), $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$.
  De plus, $\exists I \in Mod(\varphi)$ tel que $I \in Mod(\neg\alpha)$. La deuxième condition de l'assignement fidèle nous permet de déduire que $Mod(\varphi) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.
  Ce qui nous permet de conclure.

- Si $\varphi \vdash \alpha$, nous supposerons $\nvdash \alpha$.
  En effet si $\vdash \alpha$ $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ se déduit trivialement de (C1) et de (C4), qui nous dit que $\varphi - \alpha \vdash \varphi \vee \neg\alpha$ puisque $Mod(\neg\alpha) = \emptyset = Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ quand $\vdash \alpha$.
  (C4) nous permet donc de déduire que $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.

  Soit une interprétation I telle que $I \models \varphi - \alpha$, nous pouvons déduire de (C4) que $I \models \varphi$ ou $I \models \neg\alpha$.

  - Si $I \models \varphi$, l'inclusion, $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$, est trivialement vérifiée.

- Si $I \models \neg\varphi$ et $I \models \neg\alpha$. Nous voulons montrer que $I \models min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe une interprétation $J \models \neg\alpha$ telle que $J <_\varphi I$.
Par définition de l'assignement fidèle, nous avons $I \not\models \varphi - (\neg\gamma_{\{I,J\}})$. De plus, nous savons que $I \models \neg\alpha$ et $J \models \neg\alpha$, soit $\alpha \vdash \neg\gamma_{\{I,J\}}$.
Ce qui nous permet de dire que $\exists\beta$ tel que $\alpha \equiv (\neg\gamma_{\{I,J\}}) \wedge \beta$.
Par (C6), $\varphi - \alpha \vdash (\varphi - (\neg\gamma_{\{I,J\}})) \vee (\varphi - \beta)$, nous savons aussi que $\varphi - (\neg\gamma_{\{I,J\}} \vee \neg\beta) \nvdash \neg\gamma_{\{I,J\}}$ car $I \models \varphi - \alpha$ (par hypothèse).
Par (C6) et (C7), nous avons $\varphi - \alpha \equiv \varphi - \neg\gamma_{\{I,J\}}$. Ce qui contredit notre hypothèse, $I \not\models \varphi - \neg\gamma_{\{I,J\}}$.

D'où $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.

Supposons maintenant que $Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \nsubseteq Mod(\varphi - \alpha)$.
Deux cas sont à considérer :

- Soit $\exists I \in Mod(\varphi)$ tel que $I \notin Mod(\varphi - \alpha)$.
D'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \alpha$, soit $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$.
Ce qui contredit note hypothèse ($Mod(\varphi) \nsubseteq Mod(\varphi - \alpha)$).
- Soit $\exists I \in Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ tel que $I \notin Mod(\varphi - \alpha)$.
Dans ce cas, $Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ est non vide, ce qui implique que $\nvdash \alpha$.
Donc, d'après (C3), $\varphi - \alpha \nvdash \alpha$. Nous pouvons donc en déduire que $\exists J \in Mod(\varphi - \alpha)$ tel que $J \in Mod(\neg\alpha)$, la deuxième condition de l'assignement fidèle nous permet de déduire que $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi - \alpha) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Ce qui contredit notre hypothèse ($Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \nsubseteq Mod(\varphi - \alpha)$).

D'où $Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$.
Nous avons donc la double inclusion, et par conséquent,

$$Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$$

(Sens réciproque) Supposons que l'on dispose d'un assignement fidèle qui associe φ à un pré-ordre total $\leq_\varphi$. On définit un opérateur de contraction $-$ par

$$Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \quad (\iota)$$

Montrons que $-$ satisfait les postulats (C1)-(C7).
Le postulat (C1) est trivialement satisfait, par la définition de l'opérateur $-$.
En effet, depuis $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$, on obtient facilement $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$ d'où $\varphi \vdash \varphi - \alpha$.

Montrons que (C2) est satisfait.
Si $\varphi \nvdash \alpha$, alors $\exists\omega \vdash \varphi \wedge \neg\alpha$
Comme l'assignement est fidèle, $Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) = Mod(\neg\alpha \wedge \varphi)$
Donc $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$
Ceci montre que (C2) est satisfait.

Montrons que (C3) est satisfait.
Supposons que $\nvdash \alpha$, nous avons donc $Mod(\neg\alpha) \neq \emptyset$.

D'après (ι), il existe donc une interprétation I appartenant à $Mod(\varphi - \alpha)$ telle que I appartient également à $Mod(\neg\alpha)$.
Ce qui montre clairement que $Mod(\varphi - \alpha) \nsubseteq Mod(\alpha)$.
Ceci montre que (C3) est satisfait.

Montrons que (C4) est satisfait.
Nous avons $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi - \alpha) \cap Mod(\alpha)$
(ι) nous donne $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = (Mod(\varphi) \cap Mod(\alpha)) \cup (Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cap Mod(\alpha))$
Nous avons clairement $Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cap Mod(\alpha) = \emptyset$
D'où $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi) \cap Mod(\alpha)$
Supposons maintenant que $\varphi \vdash \alpha$, soit $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\alpha)$
Nous avons alors $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi)$
Ceci montre que (C4) est satisfait.

Montrons maintenant que (C5) est satisfait.
Posons $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$
Nous avons clairement $Mod(\varphi_1) = Mod(\varphi_2)$ et $Mod(\alpha_1) = Mod(\alpha_2)$
Par définition des assignements fidèles, nous avons $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$
D'où $Min(Mod(\neg\alpha_1), \leq_{\varphi_1}) = Min(Mod(\neg\alpha_2), \leq_{\varphi_2})$
Nous pouvons donc conclure que
$Mod(\varphi_1) \cup Min(Mod(\neg\alpha_1), \leq_{\varphi_1}) = Mod(\varphi_2) \cup Min(Mod(\neg\alpha_2), \leq_{\varphi_2})$
Ainsi $Mod(\varphi_1 - \alpha_1) = Mod(\varphi_2 - \alpha_2)$
Ceci montre que (C5) est satisfait.

Montrons maintenant que (C6) est satisfait.

$$\begin{aligned} Mod(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) &= Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi) \\ &= Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha) \cup Mod(\neg\beta), \leq_\varphi) \end{aligned}$$

Or, nous avons $Min(Mod(\neg\alpha) \cup Mod(\neg\beta), \leq_\varphi) \subseteq Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cup Min(Mod(\neg\beta), \leq_\varphi)$
Nous avons donc

$$\begin{aligned} Mod(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) &\subseteq Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cup Min(Mod(\neg\beta), \leq_\varphi) \\ &\subseteq Mod(\varphi - \alpha) \cup Mod(\varphi - \beta) \end{aligned}$$

Ceci nous montre que (C6) est satisfait.

Montrons enfin que (C7) est satisfait.
Soit $\omega \models \varphi - \alpha$. Par définition, $\omega \in Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$
Il suffit donc de montrer que

$$Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \subseteq Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi) \quad (A)$$

Comme par hypothése $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, Il existe $\omega \in Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi)$ tel que $\omega \in Mod(\neg\alpha)$
Il y a 2 cas :

- Soit $\exists\omega \in Mod(\varphi \wedge \neg\alpha)$. Dans ce cas, puisque l'assignement est fidèle, on a $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$. Et la conclusion est vérifiée d'après (C1) qui a été prouvé satisfait par -.
- Soit $\exists\omega \in Mod(\neg\varphi \wedge \neg\alpha) \cap Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta), \leq_\varphi)$ et on a $\varphi \vdash \alpha$. Comme $\neg\alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$, on a forcément $\omega \in Min(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ puisque $\omega \vdash \neg\alpha$.

Puisque $\leq_\varphi$ est un pré-ordre total, tout $\omega' \in Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ vérifie $\omega' \simeq_\varphi \omega$. Donc s'il existait $\omega'' \in Mod(\alpha \wedge \neg\beta)$ tel que $\omega'' <_\varphi \omega$, ceci contredirait le fait que $\omega \in Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta), \leq_\varphi)$.
Ainsi (A) est vérifié et donc (C7) l'est aussi.

□

On a le même mécanisme que les systèmes de sphères, mais ici le système est plus simplement représenté par un pré-ordre total. Nous pouvons illustrer cette représentation par la figure 3.1 :

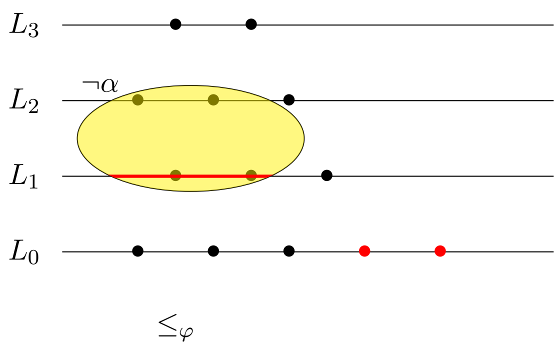

FIGURE 3.1 – Contraction de φ par α

Les interprétations sont réparties sur différents niveaux, deux interprétations sur un même niveau sont aussi plausibles l'une que l'autre (i.e. $I \simeq_\varphi J$) et une interprétation I apparaissant à un niveau inférieur à une autre J est strictement plus plausible (i.e. $I <_\varphi J$). Les interprétations apparaissant au niveau le plus bas sont les modèles de la bases de croyances φ.

La traduction entre systèmes de sphères et le pré-ordre associé à φ par l'assignement fidèle est directe. Chaque niveau correspond à une sphère (L_0 à $[K]$, et chaque L_i à $S_i - S_{i\text{-}1}$).

Lorsque l'on contracte par une information α, le résultat est constitué de l'ensemble des modèles de φ auquel on ajoute l'ensemble des modèles de $\neg\alpha$ les plus plausibles suivant le pré-ordre de plausibilité $\leq_\varphi$ associé à φ par l'assignement fidèle, soient les interprétations situées sur le segment L_1 sur la figure 3.1. Les interprétations de $\neg\alpha$ qui sont ajoutées à celles de φ sont représentées en rouge sur la figure.

Conclusion et perspectives

Lors du stage, nous nous sommes intéressés à la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie. Le but était, à l'instar de Katsuno et Mendelzon pour la révision, de définir le bon comportement des opérateurs de contraction dans ce cadre. Ainsi, nous avons définie des postulats pour les opérateurs de contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie correspondant aux postulats de contraction dans le cadre AGM classique. Après avoir vérifié que les opérateurs contraction définis par nos postulats correspondaient aux opérateurs de révision définis par les postulats de Katsuno et Mendelzon, nous avons proposé un théorème de représentation en termes d'assignement fidèles.

Les perspectives de recherches sont nombreuses. Tout d'abord, concernant le contraction dans le cadre de la logisue propositionnelle finie, maintenant que nous avons définie un théorème de représentation, nous avons un bon point de départ pour débuter l'étude des opérateurs de contraction itérée, contrepartie des opérateurs de révision itérée. En effet, cette problématique de la contraction itérée n'a été abordé, à notre connaissance, que dans un seul article ([HS08]), contrairement à la révision itérée qui a engendrée une large littérature.

Une autre perspective serait d'étudier comment définir d'autres opérateurs de changement de croyances en logique propositionnelle finie, comme les opérateurs de fusion, de mise à jour, etc. . .

Bibliographie

[AGM85] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors, et David Makinson. « On The Logic Of Theory Change : Partial Meet Contraction And Revision Functions ». *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985. *6 citations pages 1, 11, 13, 14, 16, et 17*

[AM82] Carlos E. Alchourrón et David Makinson. « On the Logic of Theory Change : Contraction Functions and their associated revision functions ». *Theoria*, 48 :14–37, 1982. *Cité page 16*

[DP97] Adnan Darwiche et Judea Pearl. « On the logic of iterated belief revision ». *Artificial Intelligence*, 89(1-2) :1–29, 1997. *Cité page 1*

[Gär88] Peter Gärdenfors. *Knowledge In Flux*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988. *6 citations pages 1, 11, 13, 15, 17, et 28*

[GM88] Peter Gärdenfors et David Makinson. « Revisions of knowledge systems using epistemic entrenchment ». *Proceeding of the Second Conference on Theorical Aspects of Reasoning about Knowledge*, pages 83–95, 1988. *2 citations pages 1 et 11*

[Gro88] Adam Grove. « Two Modellings for Theory Change ». *Journal of Philosophical Logic*, 17 :157–170, 1988. *2 citations pages 17 et 18*

[Har77] William L. Harper. « Rational Conceptual Change ». *PSA : Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association 1976*, Volume Two : Symposia and Invited Papers :462–494, 1977. *Cité page 1*

[HS08] Matthias Hild et Wolfgang Spohn. « The measurement of ranks and the laws of iterated contraction ». *Artificial Intelligence*, 172(10) :1195–1218, 2008. *Cité page 49*

[KM91] Hirofumi Katsuno et Alberto O. Mendelzon. « Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change ». *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991. *3 citations pages 1, 19, et 20*

[Lev77] Isaac Levi. « Subjunctives, dispositions of chances ». *Synthese*, 34 :423–455, 1977. *Cité page 1*

[Lev80] Isaac Levi. *The Enterprise of Knowlede*. The MIT Press, 1980. *Cité page 1*

[Rot93] Hans Rott. « Belief Contraction in the Context of the General Theory of Rational Choice ». *The Journal of Symbolic Logic*, 58 :1426–1450, 1993. *Cité page 1*