Contraction en logique propositionnelle finie

Thomas Caridroit Sébastien Konieczny Pierre Marquis
CRIL CNRS UMR 8188, Université d'Artois, Lens, France
{caridroit,konieczny,marquis}@cril.fr

Résumé

Le modèle AGM pour la révision et la contraction d'ensembles de croyances fournit des ensembles de postulats pour chacune des deux situations de changement. Dans le cadre de la logique propositionnelle finie, Katsuno et Mendelzon ont proposé des postulats pour la révision de bases de croyances qui correspondent aux postulats de révision AGM pour les ensembles de croyances. Dans cet article, nous présentons des postulats pour la contraction de bases de croyances propositionelles qui correspondent aux postulats AGM pour les ensembles de croyances. Nous mettons en lumière les connexions existant avec la révision au sens de Katsuno et Mendelzon via les identités de Levi et de Harper et présentons un théorème de représentation pour les opérateurs de contraction de bases de croyances.

Abstract

The AGM model for the revision and contraction of beliefs sets provides sets of postulates for each of the two cases. In the context of finite propositional logic, Katsuno and Mendelzon printed out some sets of postulates for the revision of belief bases which correspond to the postulates AGM revision of beliefs sets. In this paper, we present postulates for the contraction of propositional beliefs bases which correspond to the AGM postulates for the contraction of beliefs sets. We highlight the existing connections with the revision of belief sets in the sense of Katsuno and Mendelzon thanks to Levi and Harper identities and present a representation theorem for operators of contraction of beliefs sets.

1 Introduction

Le changement de croyances est étudié depuis de longues années en philosophie, en bases de données, et en intelligence artificielle. Au début des années 1970, un débat sur les exigences de changement rationnel de croyances a pris place dans la communauté philosophique. Nous pouvons souligner deux étapes. La première est une série d'études réalisées par Isaac Levi [12, 13]. Levi a fourni une grande partie du cadre de base formel. Le travail de William Harper à la même époque a également eu une influence importante [7]. La seconde étape est le modèle AGM, ainsi nommé d'après ses trois initiateurs, Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors et David Makinson, modèle présenté dans un article qui a fourni un nouveau cadre formel beaucoup plus général et polyvalent pour les études de changement de croyances [1]. Depuis la publication de l'article en 1985, ses principaux concepts et constructions ont fait l'objet d'élaboration et de développement significatifs [4, 5, 14].

La révision de bases de croyances propositionnelles a en particulier été beaucoup étudiée. Ainsi, Katsuno et Mendelzon [10] ont proposé un ensemble de postulats pour les opérateurs de révision dans le cadre de la logique propositionnelle ainsi qu'un théorème de représentation en termes d'assignements fidèles. Ce théorème est à l'origine des approches proposées pour modéliser la révision itérée [3] et ses développements. Les opérateurs de révision et de contraction étant étroitement liés, nous pourrions nous attendre à l'existence de travaux sur la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle. Or, il n'en est rien. Ceci peut s'expliquer par l'existence des identités de Levi et Harper. En effet, ces identités permettent de définir des opérateurs de contraction à partir des opérateurs de révision et inversement.

Le but de cet article est de vérifier que les opérateurs de contraction propositionnelle conrrespondant aux opérateurs de révision de Katsuno et Mendelzon ont bien les propriétés attendues. Il s'agit d'un premier pas nécessaire pour étudier des opérateurs de contraction itérées. Nous reviendrons sur ce point dans la section sur les perspectives.

Dans la suite, nous proposons un ensemble de postulats pour les opérateurs de contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie, et établissons un théorème de représentation correspondant.

Cet article est organisé comme suit. À la section 2, nous donnons quelques préliminaires formels. À la section 3, nous définissons les postulats qu'un opérateur de contraction de bases de croyances doit satisfaire. Nous nous focalisons ensuite sur la correspondance entre contraction d'ensembles de croyances et contraction de bases de croyances propositionnelles. À la section 4, nous vérifions, en utilisant les identités de Levi et Harper, qu'il y a bien une correspondance entre les opérateurs de révision propositionnelle définis par les postulats de Katsuno et Mendelzon et les opérateurs de contraction propositionnelle définis par nos postulats. La section 5 présente un théorème de représentation pour la contraction de bases de croyances. À la section 6, nous concluons et nous discutons de quelques perspectives de travaux futurs.

2 Préliminaires formels

On considére un langage propositionnel fini L construit à partir d'un ensemble (fini) de symboles P et des connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ représentant respectivement la négation, la disjonction, la conjonction, l'implication matérielle et l'équivalence. $\perp$ et $\top$ représentent respectivement la contradiction et la tautologie.

Soit une base de croyances φ (c'est-à-dire un ensemble fini, conjonctivement interprété, de formules de L) et une formule μ. $\varphi - \mu$ désigne la contraction de φ par μ, qui est la nouvelle base de croyances obtenue en retirant la croyance μ des conséquences de φ.

Un ensemble de croyances K est un ensemble de formules déductivement clos.

Gärdenfors et ses collègues ont proposé les postulats suivants pour la contraction d'ensembles de croyances. Ces postulats sont formulés dans un cadre très général, mais nous limitons ici la discussion au cas de la logique propositionnelle finie. Étant donné un ensemble de croyances K et une formule μ, $K \div \mu$ désigne la contraction de K par μ.

(K÷1) $K \div \alpha$ est un ensemble de croyances (clôture)
(K÷2) $K \div \alpha \subseteq K$ (inclusion)
(K÷3) Si $\alpha \notin K$, alors $K \div \alpha = K$ (vacuité)
(K÷4) Si $\nvdash \alpha$, alors $\alpha \notin K \div \alpha$ (succès)
(K÷5) Si $\alpha \in K$, alors $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha$ (restauration)
(K÷6) Si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, alors $K \div \alpha = K \div \beta$ (préservation)
(K÷7) $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta)$ (intersection)
(K÷8) Si $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$, alors $K \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha$ (conjonction)

3 Définition des postulats

Pour définir des postulats de contraction en logique propositionnelle finie adaptés au cas des bases de croyances, il nous faut mettre en évidence les liens entre ensembles de croyances et bases de croyances.

La proposition 1, élémentaire, présente un ensemble de croyances comme la clôture déductive (Cn) d'une base de croyances.

Proposition 1. *Pour tout ensemble de croyances K, il existe une base de croyances φ_K telle que K=$Cn(\varphi_K)$ et réciproquement, pour toute base de croyances φ, il existe un ensemble de croyances $K_\varphi = Cn(\varphi)$.*

En effet, si nous considérons l'ensemble F des ensembles de croyances et E l'ensemble des bases de croyances quotienté par l'équivalence logique, il apparaît clairement que Cn constitue une bijection de E dans F.

Ainsi, pour une base de croyance φ donnée, nous notons $K_\varphi = Cn(\varphi)$ et pour un ensemble de croyances K donné, nous notons $\varphi_K = Cn^{-1}(K)$.

Proposition 2. *Nous avons $\varphi \equiv \varphi_{K_\varphi}$. De même nous avons $K = K_{\varphi_K}$.*

Ce résultat se déduit trivialement du fait que la relation Cn est une bijection. En effet, en combinant les deux expressions suivantes : $K_\varphi = Cn(\varphi)$ et $\varphi_K = Cn^{-1}(K)$, nous obtenons $\varphi_{K_\varphi} = Cn^{-1}(Cn(\varphi))$. De même, nous obtenons $K_{\varphi_K} = Cn(Cn^{-1}(K))$.

Nous pouvons sur cette base établir une correspondance entre opérateurs de contraction AGM sur les ensembles de croyances et opérateurs de contraction sur les bases de croyances.

Définition 3. *Etant donné un opérateur de contraction AGM sur les ensembles de croyances $\div$, on définit l'opérateur $-_{(\div)}$ par :*

$$\varphi -_{(\div)} \mu = \varphi_{K_\varphi \div \mu}$$

Définition 4. *Réciproquement, étant donné un opérateur de contraction AGM sur les bases de croyances $-$, on définit l'opérateur $\div_{(-)}$ par :*

$$K \div_{(-)} \mu = K_{\varphi_K - \mu}$$

La proposition suivante indique que si nous utilisons un opérateur de contraction d'ensembles de croyances $\div$ pour définir, via la définition 3, un opérateur de contraction de bases de croyances $-_{(\div)}$, alors l'opérateur de contraction d'ensembles de croyances défini, via la définition 4, par cet opérateur de contraction $-_{(\div)}$ est l'opérateur de contraction initial $\div$. De la même manière, si nous utilisons un opérateur de contraction de bases de croyances $-$ pour définir, via la définition 4, un opérateur de contraction d'ensembles de croyances $\div_{(-)}$, alors l'opérateur de contraction de bases de croyances défini, via la définition 3, par cet opérateur de contraction $\div_{(-)}$ est l'opérateur de contraction initial $-$.

Proposition 5. *Nous avons $-_{(\div_{(-)})} = -$. De même nous avons $\div_{(-_{(\div)})} = \div$*

Soit un opérateur de contraction $\div$ d'ensembles de croyances et $-$ un opérateur de contraction de bases de croyances propositionnelles. On dit que les opérateurs $\div$ et $-$ se correspondent si $\div = \div_{(-)}$ et $- = -_{(\div)}$

Si nous fixons un moyen de représenter tout ensemble de croyances K par une formule propositionnelle φ telle que $K = \{\psi \mid \varphi \vdash \psi\}$, nous pouvons établir une correspondance directe entre $K \div \alpha$ et $\varphi - \alpha$. Nous pouvons ainsi énoncer les postulats suivants :

(C1) $\varphi \vdash \varphi - \alpha$ (inclusion)
(C2) Si $\varphi \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$ (vacuité)
(C3) Si $\varphi - \alpha \vdash \alpha$, alors $\vdash \alpha$ (succès)
(C4) Si $\varphi \vdash \alpha$, alors $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$ (restauration)
(C5) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, alors $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$ (préservation)
(C6) $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$ (intersection)
(C7) Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (conjonction)

La signification intuitive de ces postulats est la suivante : (C1) assure qu'après la contraction, aucune nouvelle information n'a été ajoutée à la base de croyances. (C2) permet de montrer que si α n'est pas déductible de φ, aucun changement ne sera effectué par la contraction sur la base de croyances. (C3) garantit que la seule possibilité, pour que la contraction de φ par α échoue, est que α soit une tautologie. (C4) nous dit que la conjonction de la contraction de φ par α et α nous donne une formule propositionnelle équivalente à φ (l'implication inverse de (C4) est une conséquence de (C1)). (C5) traduit le principe d'indépendance à la syntaxe. (C6) et (C7) expriment la minimalité du changement pour la conjonction.

La question est maintenant de déterminer si les postulats (C1)-(C7) constituent bien une formulation équivalente des postulats AGM classiques lorsque les bases de croyances sont exprimées dans un langage propositionnel fini.

La proposition suivante nous montre que les opérateurs de contraction satisfaisant les postulats (C1)-(C7) correspondent aux opérateurs de contraction satisfaisant les postulats AGM (K÷1)-(K÷8).

Proposition 6. *Soit $\div$ un opérateur de contraction sur des ensembles de croyances et $-$ ($= -_{(\div)}$) son correspondant sur les bases de croyances.*
Alors $\div$ satisfait (K÷1)-(K÷8) si et seulement si - satisfait (C1)-(C6).

Un premier résultat reliant nos postulats (C1)-(C7) et les postulats AGM (K÷1)-(K÷8) est donné par la proposition suivante. Celle-ci indique que les postulats supplémentaires (C6) et (C7) impliquent, en présence de (C1)-(C5), une trichotomie. En effet, la contraction de φ par une conjonction $(\alpha \wedge \beta)$ ne peut avoir que trois résultats différents (à l'équivalence logique près).

Nous retrouvons ici un résultat analogue à celui connu dans le cadre AGM classique [4].

Proposition 7. *En présence de (C1)-(C5), (C6) et (C7) sont équivalents à :*

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \ \mathit{ou} \\ \varphi - \beta \ \mathit{ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases}$$

Une signification de cette trichotomie peut être la suivante : quand $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, $\varphi - (\alpha \wedge \beta)$ est équivalent à $\varphi - \alpha$. Cependant, ce n'est pas le seul cas : si α et β sont aussi épistémologiquement enracinés (mais non logiquement équivalents), α et β ne doivent plus être impliqués par $\varphi - (\alpha \wedge \beta)$, alors que seul α sera rejeté dans $\varphi - \alpha$.

4 Equivalence contraction/révision

Maintenant que nous avons défini des postulats pour les opérateurs de contraction de bases de croyances, nous pouvons vérifier que ces opérateurs de contraction correspondent aux opérateurs de révision définis par les postulats de Katsuno et Mendelzon.

Soient φ et μ deux formules propositionnelles où φ joue le rôle de la base de croyances et μ celui de la nouvelle croyance. La révision de φ par μ est notée $\varphi \circ \mu$ et doit vérifier les postulats suivants :

(R1) $\varphi \circ \mu \vdash \mu$ (succès)
(R2) Si $\varphi \wedge \mu$ est cohérent alors $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$ (vacuité)
(R3) Si μ est cohérent alors $\varphi \circ \mu$ est cohérent (cohérence)
(R4) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\varphi_1 \circ \mu_1 \equiv \varphi_2 \circ \mu_2$ (extensionalité)
(R5) $(\varphi \circ \mu) \wedge \psi \vdash \varphi \circ (\mu \wedge \psi)$ (inclusion conjonctive)

(R6) Si $(\varphi \circ \mu) \wedge \psi$ est cohérent alors $\varphi \circ (\mu \wedge \psi) \vdash (\varphi \circ \mu) \wedge \psi$

(vacuité conjonctive)

Nous utilisons les identités de Levi et Harper afin de montrer que les opérateurs de révision propositionnelle peuvent être définis à partir des opérateurs de contraction propositionnelle et inversement.

Notons $\circ_{(-)}$ l'opérateur de révision AGM sur les bases de croyances défini via l'identité de Levi et $-_{(\circ)}$ l'opérateur de contraction AGM sur les bases de croyances défini via l'identité de Harper.

Définition 8. *Dans le cadre de la contraction et de la révision de bases de croyances, les identités de Levi et Harper peuvent s'exprimer comme suit :*
$\varphi \circ_{(-)} \alpha \equiv (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha$ ***(Identité de Levi)***
$\varphi -_{(\circ)} \alpha \equiv \varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)$ ***(Identité de Harper)***

Les opérateurs obtenus au moyens de ces identités satisfont bien les propriétés attendues :

Proposition 9. *Si l'opérateur de contraction $-$ satisfait (C1)-(C5) alors l'opérateur de révision $\circ$ $(= \circ_{(-)})$ défini par l'identité de Levi satisfait (R1)-(R4). De plus si (C6) est satisfait, alors (R5) est satisfait pour la révision ainsi définie, et si (C7) est satisfait, alors (R6) est satisfait pour la révision ainsi définie.*

Démonstration. Supposons (C1)-(C5) satisfait.

- Montrons que (R1) est satisfait : nous avons trivialement $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \vdash \alpha$. Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

- Montrons ensuite que (R2) est satisfait : supposons que $\varphi \wedge \alpha$ est cohérent, nous avons donc $\varphi \nvdash \neg\alpha$. D'après (C1) et (C2), on a $\varphi - \neg\alpha \equiv \varphi$. D'où $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$. Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$.

- Montrons maintenant que (R3) est satisfait : supposons que α est cohérent, nous avons donc $\nvdash \neg\alpha$. D'après (C3), on a $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha$. D'où $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \nvdash \bot$. Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \nvdash \bot$.

- Montrons enfin que (R4) est satisfait : supposons maintenant $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. D'après (C5), on a $\varphi_1 - \neg\alpha_1 \equiv \varphi_2 - \neg\alpha_2$. Donc $(\varphi_1 - \neg\alpha_1) \wedge \alpha_1 \equiv (\varphi_2 - \neg\alpha_2) \wedge \alpha_2$. Ce qui nous donne $\varphi_1 \circ \alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \alpha_2$.

Supposons (C6) satisfait et soit γ tel que $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. On veut montrer que $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma$.

Comme $\neg\alpha \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$, d'après (C5), il suffit montrer, en utilisant l'identité de Levi, que $[\varphi - (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta))] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$. D'après (C6), il suffit de montrer que $[\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$ et $[\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$.

- Comme $(\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$ d'après Levi, par hypothèse, $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. On a donc aussi $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma$, ce qui permet de conclure.

- L'une des conséquences de (R2) est $\varphi \wedge \alpha \vdash \varphi \circ \alpha$ (R2.2)

  Comme $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$, d'après (R2.2) $\varphi \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. D'où $\varphi \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$.

  Il y a 2 cas :

  - Si $\varphi \nvdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, d'après (C2) on a $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \varphi$. D'où $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$. Donc $[\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$.
  - Si $\varphi \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, d'après (C4) on a $(\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \varphi$. D'où $(\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$. Donc $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma)$. Or nous avons $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$. Ce qui nous donne $\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$. Nous avons donc $[\varphi - (\alpha \Rightarrow \beta)] \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$

Supposons (C7) satisfait. On veut montrer que (R6) est satisfait pout tout α et β. Comme $\neg\alpha \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha$, d'après (C5), nous avons $\varphi - \neg\alpha \equiv \varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$. Supposons maintenant que $\varphi \circ \alpha \nvdash \neg\beta$. Comme $\varphi \circ \alpha \equiv (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha$, nous avons $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha \vee \neg\beta$. (C5) nous donne $\varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \nvdash \neg\alpha \vee \neg\beta$. D'après (C7), $\varphi - (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$. D'où $(\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)) \wedge \alpha \wedge \beta \vdash (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \wedge \beta$. Donc $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$.

□

Donc les opérateurs de révision de bases de croyances propositionnelles selon Katsuno et Mendelzon peuvent être définis par l'identité de Levi en partant des opérateurs de contraction de bases de croyances propositionnelles que nous avons introduits.

De la même manière nos opérateurs de contraction de bases de croyances propositionnelles peuvent être définis par l'identité de Harper en partant des opérateurs de révision de bases de croyances propositionnelles selon Katsuno et Mendelzon :

Proposition 10. *Si l'opérateur de révision $\circ$ satisfait (R1)-(R4) alors l'opérateur de contraction $-$ $(= -_{(\circ)})$ défini par l'identité de Harper satisfait (C1)-(C5). De plus, si (R5) est satisfait, alors (C6) est satisfait pour la contraction ainsi définie, et si (R6) est satisfait, alors (C7) est satisfait pour la contraction ainsi définie.*

Démonstration. Supposons (R1)-(R4) satisfais.

- Montrons d'abord que (C1) est satisfait : Il est clair que $\varphi \vdash \varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)$. Ce qui nous donne $\varphi \vdash \varphi - \alpha$ par l'identité de Harper.

- Montrons maintenant que (C2) est satisfait : Supposons que $\varphi \nvdash \alpha$. D'après (R2), $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \varphi \wedge \neg\alpha$. D'où $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \varphi$. Donc $\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha) \vdash \varphi$. Ce qui nous donne $\varphi - \alpha \vdash \varphi$.
- Montrons ensuite que (C3) est satisfait : Supposons $\nvdash \alpha$. Nous avons $\neg\alpha$ cohérent. Donc d'après (R3), $\varphi \circ \neg\alpha$ est cohérent. De plus, d'après (R1), $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$. Donc $\varphi \circ \neg\alpha \nvdash \alpha$. D'où $\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha) \nvdash \alpha$. L'identité de Harper nous donne $\varphi - \alpha \nvdash \alpha$.
- Montrons maintenant que (C4) est satisfait : Supposons que $\varphi \vdash \alpha$. Nous avons $\varphi \wedge \alpha \vdash \varphi$ et d'après (R1) $(\varphi \circ \neg\alpha) \vdash \neg\alpha$. D'où $(\varphi \circ \neg\alpha) \wedge \alpha \vdash \perp$. Donc $(\varphi \wedge \alpha) \vee ((\varphi \circ \neg\alpha) \wedge \alpha) \vdash \varphi$. D'où $[\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)] \wedge \alpha \vdash \varphi$. Ce qui nous donne $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$.
- Montrons enfin que (C5) est satisfait : Supposons $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. D'après (R4), $\varphi_1 \circ \neg\alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \neg\alpha_2$. Donc $\varphi_1 \vee (\varphi_1 \circ \neg\alpha_1) \equiv \varphi_2 \vee (\varphi_2 \circ \neg\alpha_2)$. Ce qui nous donne $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$.

Supposons (R5) satisfait et soit γ tel que $(\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \vdash \gamma$. Nous voulons montrer que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.

- Si $\varphi \vdash \alpha \wedge \beta$. Comme $\alpha \equiv \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$, d'après (R4), nous avons $\varphi - \alpha \equiv \varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$. D'où $\varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha) \vdash \gamma$. D'après (R5), nous avons $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \wedge \neg\alpha \vdash \varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$. L'identité de Levi montre que $\varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vdash \varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$. D'où $\varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vdash \gamma$. Ce qui nous donne, d'après (R5), $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \wedge \neg\alpha \vdash \gamma$. Ou encore $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \vdash \alpha \vee \gamma$. Par symétrie sur α et β, nous avons $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \vdash \beta \vee \gamma$. De plus, d'après (R1), $\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$. Nous pouvons donc en déduire que $\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \gamma$. L'identité de Levi nous donne $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ (*). Ayant supposé $\varphi \vdash \alpha \wedge \beta$, (C4) nous donne $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi$. D'après (C1) $\varphi \vdash \varphi - \alpha$. Comme on a supposé $\varphi - \alpha \vdash \gamma$ et $\varphi - \beta \vdash \gamma$, nous avons donc $\varphi \vdash \gamma$. Par transitivité de $\vdash$, $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ (**). D'après (*) et (**), nous avons donc $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.
- Si $\varphi \nvdash \alpha \wedge \beta$, d'après (C2) $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi$. Or, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \alpha$. Nous avons donc $\varphi \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$. D'où $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$. Ce qui nous donne $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.

Supposons (R6) satisfait et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. Nous voulons montrer que $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$.

- Si $\varphi \nvdash \alpha$, d'après (C2) nous avons $\varphi - \alpha \vdash \varphi$. De plus, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$. Nous avons donc $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$.
- Si $\varphi \vdash \alpha$, par l'absurde supposons $[\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$. Cela entraîne $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \alpha$. Soit $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$ ce qui est exclu par hypothèse. Nous avons donc $[\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. L'identité de Levi nous donne $\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. D'après (R6), comme $[\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$ est cohérent, on a $\varphi \circ [\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha] \vdash [\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$. Or, d'après (R4), $\varphi \circ [\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha] \equiv \varphi \circ \neg\alpha$. De plus, l'identité de Levi nous donne $\varphi \circ \neg\alpha \equiv (\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha$. D'où $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash [\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$. Nous avons $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash \varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)$. L'identité de Levi nous donne $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash [\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$. Nous avons $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (1). D'après (C1) $\varphi \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$. Comme $\varphi \vdash \alpha$, d'après (C4), $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$. Par transitivité de $\vdash$, nous avons donc $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (2). (1) et (2) nous donnent $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$.

□

La proposition suivante indique que si nous utilisons un opérateur de révision $\circ$ pour définir, via l'identité de Harper, un opérateur de contraction $-_{(\circ)}$, alors l'opérateur de révision défini, via l'identité de Levi, par cet opérateur de contraction $-_{(\circ)}$ est l'opérateur de révision initial $\circ$. De la même manière, si nous utilisons un opérateur de contraction $-$ pour définir, via l'identité de Levi, un opérateur de révision $\circ_{(-)}$, alors l'opérateur de contraction défini, via l'identité de Harper, par cet opérateur de révision $\circ_{(-)}$ est l'opérateur de contraction initial $-$.

Proposition 11.

- *si $\circ$ est un opérateur de révision AGM, alors* $\circ_{(-_{(\circ)})} = \circ$
- *si $-$ est un opérateur de contraction AGM, alors* $-_{(\circ_{(-)})} = -$

Nos postulats de contraction sur les bases de croyances sont donc bien en correspondance étroite avec les postulats de révision sur les bases de croyances de Katsuno et Mendelzon. Nous pouvons maintenant nous pencher sur l'établissement d'un théorème de représentation pour la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie, qui constitue une contrepartie au théorème de représentation de Katsuno et Mendelzon pour la révision :

Théorème 12. [10] *Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats (R1)-(R6) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ tel que*

$$Mod(\varphi \circ \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\varphi)$$

5 Théorème de représentation

Commençons par introduire une notation qui nous sera utile dans la suite. Pour toute formule α et pour tout monde I, on note $\alpha_{\{I\}}$ toute formule ayant l'interprétation I pour unique modèle. Plus généralement, si S est un ensemble fini d'interprétations, α_S dénote toute formule ayant exactement les éléments de S pour modèles.

Lemme 13. *Soit $-$ un opérateur de contraction satisfaisant (C1)-(C7).*

$$\textit{Si } \alpha_{\{I\}} \nvdash \varphi \textit{ alors } \varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \equiv \varphi \vee \alpha_{\{I\}}$$

Ce lemme nous indique que si une formule α, ne possédant qu'un seul modèle, n'implique pas une formule φ, alors la formule résultant de la contraction de φ par la négation de α est équivalente à la disjonction de φ et α.

L'idée du théorème de représentation est d'exprimer la contraction d'une base φ par une croyance α comme l'union des contre-modèles minimaux de α pour $\leq_\varphi$ et des modèles de φ.

Théorème 14. *Un opérateur de contraction $-$ satisfait les postulats **(C1) - (C7)** si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ tel que $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.*

Démonstration.
(sens direct) Supposons qu'il existe un opérateur de contraction $-$ qui satisfait les postulats (C1) à (C7).

Pour chaque formule φ, on définit un pré-ordre total $\leq_\varphi$ en utilisant l'opérateur $-$: $\forall I, I'$ deux interprétations, on définit la relation $I \leq_\varphi I'$ si et seulement si $I \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$.
Montrons d'abord que $\leq_\varphi$ est un pré-ordre total.

- **Total :** soient I et I' deux interprétations, comme $\alpha_{\{I,I'\}}$ possède au moins un modèle, $\neg\alpha_{\{I,I'\}}$ possède au moins un contre-modèle. Nous pouvons donc en déduire que $\nvdash \neg\alpha$, ce qui nous permet de conclure, d'après (C3), que $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha$. Nous savons donc qu'il existe $J \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$ tel que $J \in Mod(\alpha_{\{I,I'\}}) = \{I, I'\}$. Par conséquent, soit $I \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$ et donc $I \leq_\varphi I'$, soit $I' \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,I'\}})$ et donc $I' \leq_\varphi I$. On a donc bien une relation totale.

- **Réflexif :** si $I = I'$ dans la preuve ci-dessus, on obtient $I \leq_\varphi I$. On a donc bien une relation réflexive.

- **Transitif :** supposons qu'on ait $I \leq_\varphi J$ et $J \leq_\varphi L$. Plaçons-nous dans le cas où I,J et L sont distinctes deux à deux. En effet, si deux d'entre elles sont égales, la transitivité est trivialement vérifiée. Par l'absurde, supposons $I \not\leq_\varphi L$. Comme $\leq_\varphi$ est totale, nous avons $L <_\varphi I$, soit $L \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$ et $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$.

Nous avons clairement,

$$\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv \begin{cases} \beta_{\{I,J\}} \vee \gamma_{\{L\}} \text{ ou} & (1) \\ \beta_{\{I,L\}} \vee \gamma_{\{J\}} \text{ ou} & (2) \\ \beta_{\{J,L\}} \vee \gamma_{\{I\}} & (3) \end{cases}$$

D'après (C6), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \vdash$
$$\begin{cases} (\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{L\}}) \text{ ou} & (1) \\ (\varphi - \neg\beta_{\{I,L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{J\}}) \text{ ou} & (2) \\ (\varphi - \neg\beta_{\{J,L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{I\}}) & (3) \end{cases}$$

De même, d'après (C6), nous avons $\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}} \vdash (\varphi - \neg\mu_{\{I\}}) \vee (\varphi - \neg\rho_{\{L\}})$. De plus, nous savons que $I \models \varphi - \neg\beta_{\{I,J\}}$ donc $\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}} \nvdash \neg\mu_{\{I\}}$. Nous pouvons donc déduire, d'après (C7), que $\varphi - \neg\beta_{\{I,J\}} \equiv \varphi - \neg\mu_{\{I\}}$. De la même manière, nous pouvons montrer que $\varphi - \neg\beta_{\{I,L\}} \equiv \varphi - \neg\mu_{\{L\}}$ et $\varphi - \neg\beta_{\{J,L\}} \equiv \varphi - \neg\mu_{\{J\}}$. Nous avons donc $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \vdash$
$$\begin{cases} (\varphi - \neg\mu_{\{I\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{L\}}) \text{ ou} & (1) \\ (\varphi - \neg\mu_{\{L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{J\}}) \text{ ou} & (2) \\ (\varphi - \neg\mu_{\{J\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{I\}}) & (3) \end{cases}$$

4 cas sont à considérer :

- Si I, J et L ne sont pas des modèles de φ.
  Nous pouvons déduire du lemme 13 que
  $$\begin{cases} (\varphi - \neg\mu_{\{I\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{L\}}) \equiv \varphi \vee \mu_{\{I\}} \vee \gamma_{\{L\}} \\ (\varphi - \neg\mu_{\{L\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{J\}}) \equiv \varphi \vee \mu_{\{L\}} \vee \gamma_{\{J\}} \\ (\varphi - \neg\mu_{\{J\}}) \vee (\varphi - \neg\gamma_{\{I\}}) \equiv \varphi \vee \mu_{\{J\}} \vee \gamma_{\{I\}} \end{cases}$$

  D'où :
  $$\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \vdash \begin{cases} \varphi \vee \mu_{\{I\}} \vee \gamma_{\{L\}} \text{ ou} & (1) \\ \varphi \vee \mu_{\{L\}} \vee \gamma_{\{J\}} \text{ ou} & (2) \\ \varphi \vee \mu_{\{J\}} \vee \gamma_{\{I\}} & (3) \end{cases}$$

  Comme $J \not\models \varphi$, nous avons $J \not\models \varphi \vee \alpha_{\{I\}} \vee \alpha_{\{L\}}$. D'où $J \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. De la même manière, nous pouvons déduire que $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$ et $L \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. Or, nous savons d'après (C3) que $Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}})$ est un sous-ensemble non vide de $\{I, J, L\}$, nous avons donc une contradiction.

- Si $I \models \varphi$, d'après (C1), nous avons $I \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$, donc $I \leq_\varphi L$. Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ ($L <_\varphi I$).

- Si $J \models \varphi$, d'après (C1), nous avons $J \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}}$ donc $J \leq_\varphi I$, d'où $I \simeq_\varphi J$. Nous pouvons donc en déduire que $I \leq_\varphi L$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ ($L <_\varphi I$).

- Si $L \models \varphi$, d'après (C1), nous avons $L \models \varphi - \neg\alpha_{\{J,L\}}$ donc $L \leq_\varphi J$, d'où $J \simeq_\varphi L$. Nous pouvons donc en déduire que $I \leq_\varphi L$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ ($L <_\varphi I$).

Nous avons donc $I \leq_\varphi L$. La relation $\leq_\varphi$ est donc transitive.

Nous avons montré que $\leq_\varphi$ est une relation totale, réflexive et transitive, c'est donc bien un pré-ordre total. Ensuite nous devons montrer que l'association de φ à $\leq_\varphi$ est bien un assignement fidèle.

- La première condition pour que l'assignement soit fidèle se déduit facilement de la définition de $\leq_\varphi$ et (C1). En effet, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \neg\alpha$, donc si $I_1 \in Mod(\varphi)$ alors $I_1 \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}})$ et si $I_2 \in Mod(\varphi)$ alors $I_2 \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}})$. Donc par définition, on a, $I_1 \leq_\varphi I_2$ et $I_2 \leq_\varphi I_1$, d'où $I_1 \simeq_\varphi I_2$.
- La troisième condition (si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, alors $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$) vient de (C5). En effet, si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors $\varphi_1 - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}} \equiv \varphi_2 - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, d'où $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$.
- Montrons à présent que la deuxième condition (si $I_1 \models \varphi$ et $I_2 \not\models \varphi$ alors $I_1 <_\varphi I_2$) est satisfaite. Depuis la définition de $\leq_\varphi$ et (C1), nous pouvons déduire de $I_1 \models \varphi$ que $I_1 \leq_\varphi I_2$. Il nous reste à montrer que $I_2 \not\leq_\varphi I_1$, nous allons étudier 2 cas :
  - Si $\varphi \nvdash \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, alors, d'après (C2), $\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}} \vdash \varphi$. Nous en déduisons donc que $I_2 \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, d'où $I_2 \not\leq_\varphi I_1$.
  - Si $\varphi \vdash \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, nous avons $\varphi \vdash \neg\beta_{\{I_1\}} \wedge \neg\gamma_{\{I_2\}}$. Donc, en particulier, $\varphi \vdash \neg\beta_{\{I_1\}}$, ce qui contredit le fait que $I_1 \models \varphi$, ce cas est donc impossible.

  La deuxième condition pour que l'assignement soit fidèle est donc vérifiée.

  Finalement, il reste à montrer que
  $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.

Nous pouvons considérer 2 cas :

- Si $\varphi \nvdash \alpha$, d'après (C1) et (C2), $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$. De plus, $\exists I \in Mod(\varphi)$ tel que $I \in Mod(\neg\alpha)$. La deuxième condition de l'assignement fidèle nous permet de déduire que $Mod(\varphi) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Ce qui nous permet de conclure.
- Si $\varphi \vdash \alpha$, nous supposerons $\nvdash \alpha$. En effet, si $\vdash \alpha$ alors $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ se déduit trivialement de (C1) et de (C4), qui nous dit que $\varphi - \alpha \vdash \varphi \vee \neg\alpha$ puisque $Mod(\neg\alpha) = \emptyset = Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ quand $\vdash \alpha$. (C4) nous permet donc de déduire que $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Soit une interprétation I telle que $I \models \varphi - \alpha$, nous pouvons déduire de (C4) que $I \models \varphi$ ou $I \models \neg\alpha$.
  - Si $I \models \varphi$, l'inclusion, $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ est trivialement vérifiée.
  - Si $I \models \neg\varphi$ et $I \models \neg\alpha$, nous voulons montrer que $I \models min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe une interprétation $J \models \neg\alpha$ telle que $J <_\varphi I$. Par définition de l'assignement fidèle, nous avons $I \not\models \varphi - (\neg\gamma_{\{I,J\}})$. De plus, nous savons que $I \models \neg\alpha$ et $J \models \neg\alpha$, soit $\alpha \vdash \neg\gamma_{\{I,J\}}$. Ce qui nous permet de dire que $\exists\beta$ tel que $\alpha \equiv (\neg\gamma_{\{I,J\}}) \wedge \beta$. Par (C6), $\varphi - \alpha \vdash (\varphi - (\neg\gamma_{\{I,J\}})) \vee (\varphi - \beta)$, nous savons aussi que $\varphi - (\neg\gamma_{\{I,J\}} \vee \neg\beta) \nvdash \neg\gamma_{\{I,J\}}$ car $I \models \varphi - \alpha$ (par hypothèse). Par (C6) et (C7), nous avons $\varphi - \alpha \equiv \varphi - \neg\gamma_{\{I,J\}}$. Ce qui contredit notre hypothèse, $I \not\models \varphi - \neg\gamma_{\{I,J\}}$.

  Nous avons donc $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Supposons maintenant que $Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \not\subseteq Mod(\varphi - \alpha)$. Deux cas sont à considérer :

  - Soit $\exists I \in Mod(\varphi)$ tel que $I \notin Mod(\varphi - \alpha)$. D'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \alpha$, soit $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$. Ce qui contredit notre hypothèse ($Mod(\varphi) \not\subseteq Mod(\varphi - \alpha)$).
  - Soit $\exists I \in Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ tel que $I \notin Mod(\varphi - \alpha)$. Dans ce cas, $Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ est non vide, ce qui implique que $\nvdash \alpha$. Donc, d'après (C3), $\varphi - \alpha \nvdash \alpha$. Nous pouvons donc en déduire que $\exists J \in Mod(\varphi - \alpha)$ tel que $J \in Mod(\neg\alpha)$, la deuxième condition de l'assignement fidèle nous permet de déduire que $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi - \alpha) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Ce qui contredit notre hypothèse ($Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \not\subseteq Mod(\varphi - \alpha)$).

  Ce qui nous donne $Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$. Nous avons donc la double inclusion, et par conséquent,

$$Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$$

(Sens réciproque) Supposons que l'on dispose d'un assignement fidèle qui associe φ à un pré-ordre total $\leq_\varphi$. On définit un opérateur de contraction $-$ par

$$Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \quad (\delta)$$

Montrons que $-$ satisfait les postulats (C1)-(C7).

Le postulat (C1) est trivialement satisfait, d'après la définition de l'opérateur $-$. En effet, depuis $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$, on obtient facilement $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$ d'où $\varphi \vdash \varphi - \alpha$.

Montrons que (C2) est satisfait. Si $\varphi \nvdash \alpha$, alors $\exists\omega \vdash \varphi \wedge \neg\alpha$. Comme l'assignement est fidèle, $Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) = Mod(\neg\alpha \wedge \varphi)$. Donc $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$. Ceci montre que (C2) est satisfait.

Montrons que (C3) est satisfait. Supposons que $\nvdash \alpha$, nous avons donc $Mod(\neg\alpha) \neq \emptyset$. D'après (δ), il existe donc une interprétation I appartenant à $Mod(\varphi - \alpha)$ telle que I appartient également à $Mod(\neg\alpha)$. Ce qui montre clairement que $Mod(\varphi - \alpha) \nsubseteq Mod(\alpha)$. Ceci montre que (C3) est satisfait.

Montrons que (C4) est satisfait. Nous avons $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi - \alpha) \cap Mod(\alpha)$, (δ) nous donne $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = (Mod(\varphi) \cap Mod(\alpha)) \cup (Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cap Mod(\alpha))$. Nous avons clairement $Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cap Mod(\alpha) = \emptyset$. D'où $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi) \cap Mod(\alpha)$. Supposons maintenant que $\varphi \vdash \alpha$, soit $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\alpha)$. Nous avons alors $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi)$. Ceci montre que (C4) est satisfait.

Montrons maintenant que (C5) est satisfait. Posons $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Nous avons clairement $Mod(\varphi_1) = Mod(\varphi_2)$ et $Mod(\alpha_1) = Mod(\alpha_2)$. Par définition des assignements fidèles, nous avons $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$. D'où $Min(Mod(\neg\alpha_1), \leq_{\varphi_1}) = Min(Mod(\neg\alpha_2), \leq_{\varphi_2})$. Nous pouvons donc conclure que

$$Mod(\varphi_1) \cup Min(Mod(\neg\alpha_1), \leq_{\varphi_1}) =$$
$$Mod(\varphi_2) \cup Min(Mod(\neg\alpha_2), \leq_{\varphi_2})$$

Ainsi $Mod(\varphi_1 - \alpha_1) = Mod(\varphi_2 - \alpha_2)$. Ceci montre que (C5) est satisfait.

Montrons maintenant que (C6) est satisfait.

$$Mod(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) =$$
$$Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi) =$$
$$Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha) \cup Mod(\neg\beta), \leq_\varphi)$$

Or, nous avons

$$Min(Mod(\neg\alpha) \cup Mod(\neg\beta), \leq_\varphi) \subseteq$$
$$Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cup Min(Mod(\neg\beta), \leq_\varphi)$$

Nous avons donc

$$Mod(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \subseteq$$
$$Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cup Min(Mod(\neg\beta), \leq_\varphi) \subseteq$$
$$Mod(\varphi - \alpha) \cup Mod(\varphi - \beta)$$

Ceci nous montre que (C6) est satisfait.

Montrons enfin que (C7) est satisfait. Soit $\omega \models \varphi - \alpha$. Par définition, $\omega \in Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Il suffit donc de montrer que

$$Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \subseteq Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi) \qquad (A)$$

Comme par hypothèse $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, il existe $\omega \in Mod(\varphi) \cup Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi)$ tel que $\omega \in Mod(\neg\alpha)$. Il y a 2 cas :

- Soit $\exists \omega \in Mod(\varphi \wedge \neg\alpha)$. Dans ce cas, puisque l'assignement est fidèle, on a $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$. Et la conclusion est vérifiée d'après (C1) qui a été prouvé satisfait par -.
- Soit $\exists \omega \in Mod(\neg\varphi \wedge \neg\alpha) \cap Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta), \leq_\varphi)$ et on a $\varphi \vdash \alpha$. Comme $\neg\alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$, on a forcément $\omega \in Min(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ puisque $\omega \vdash \neg\alpha$. Puisque $\leq_\varphi$ est un pré-ordre total, tout $\omega' \in Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ vérifie $\omega' \simeq_\varphi \omega$. Donc s'il existait $\omega'' \in Mod(\alpha \wedge \neg\beta)$ tel que $\omega'' <_\varphi \omega$, ceci contredirait le fait que $\omega \in Min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta), \leq_\varphi)$. Ainsi (A) est vérifié et donc (C7) l'est aussi.

□

On a le même mécanisme que les systèmes de sphères [6], mais ici le système est plus simplement représenté par un pré-ordre total. Nous illustrons cette représentation à la figure 1.

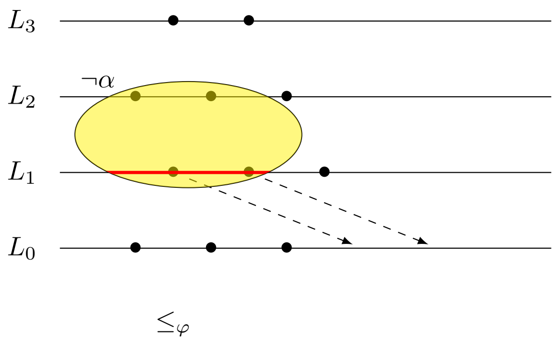

FIGURE 1 – Contraction de φ par α

Les interprétations sont réparties sur différents niveaux, deux interprétations sur un même niveau sont aussi plausibles l'une que l'autre (i.e. $I \simeq_\varphi J$) et une interprétation I apparaissant à un niveau inférieur à une autre J est strictement plus plausible (i.e. $I <_\varphi J$). Les interprétations apparaissant au niveau le plus bas sont les modèles de la bases de croyances φ.

Lorsque l'on contracte par une information α, le résultat est constitué de l'ensemble des modèles de φ auquel on ajoute l'ensemble des modèles de $\neg\alpha$ les plus plausibles suivant le pré-ordre de plausibilité $\leq_\varphi$ associé à φ par l'assignement fidèle, soient les interprétations situées sur le segment L_1 sur la figure 1. Les deux interprétations minimales de $\neg\alpha$ (sur le segment L_1) sont ajoutées à côté des interprétations de φ (sur le segment L_0).

Exemple : Opérateurs de Dalal.

Soient deux interprétations I et J et une formule φ, la distance de Dalal entre I et J est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations différent.
La distance entre φ et I est définie par $dist(\varphi, I) = \min_{J \in Mod(\varphi)} dist(J, I)$.

Nous pouvons maintenant définir un assignement fidèle $\leq_\varphi$ tel que $I \leq_\varphi J$ si et seulement si $dist(\varphi, I) \leq dist(\varphi, J)$.

L'opérateur de révision de Dalal est défini par : $Mod(\varphi \circ_D \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\varphi)$.

D'après la définition 12, l'opérateur de révision de Dalal $\circ_D$ satisfait les postulats (R1)-(R6).

Soit $-_D$ l'opérateur de contraction de Dalal, l'identité de Harper nous donne $\varphi -_D \mu = \varphi \vee (\varphi \circ_D \neg\mu)$.
Nous avons $Mod(\varphi -_D \mu) = Mod(\varphi) \cup Mod(\varphi \circ_D \neg\mu)$.
Soit $Mod(\varphi -_D \mu) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\mu), \leq_\varphi)$.

D'après le théorème 14, l'opérateur de contraction de Dalal $-_D$ satisfait les postulats (C1)-(C7).

Considèrons l'exemple suivant pour illustrer ces définitions d'opérateurs de Dalal : Soit un langage $\mathcal{A}$ contenant trois variables propositionnelles $\{oiseau, vole, bec\}$. Nous observons au loin un volatile, nous supposons que celui-ci sait voler ($\varphi = oiseau \wedge vole$). En nous approchant, il nous semble qu'il s'agit d'un manchot, or les manchots ne savent pas voler ($\mu = \neg vole$). Nous devons donc réviser nos croyances. La troisième colonne du tableau suivant nous indique la distance entre chaque modèle de μ ($\{000, 001, 100, 101\}$) et φ ($Mod(\varphi) = \{110, 111\}$).

	110	111	φ
000	2	3	2
001	3	2	2
100	1	2	1
101	2	1	1

Le résultat est l'ensemble des modèles de μ les plus proches de φ :

$$Mod(\varphi \circ_D \mu) = \{100, 101\}$$
$$\varphi \circ_D \mu = oiseau \wedge \neg vole$$

Plus tard, nous apprenons que nous avons pu nous tromper, qu'il s'agissait peut-être d'un pingouin ($\mu' = \neg vole$). Nous préférons donc mettre de côté le fait que cet oiseau sache voler ou non. Il nous faut contracter nos croyances. Le tableau suivant nous indique la distance entre les modèles de $\neg\mu'$ ($\{011, 010, 110, 111\}$) et φ' ($Mod(\varphi') = \{100, 101\}$).

	100	101	φ'
011	3	2	2
010	2	3	2
110	1	2	1
111	2	1	1

Le résultat est l'union des modèles de φ' et de l'ensemble des modèles de $\neg\mu'$ les plus proches de φ' :

$$Mod(\varphi' -_D \mu') = \{100, 101, 110, 111\}$$
$$\varphi' -_D \mu' = oiseau$$

6 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie. Le but était, à l'instar de Katsuno et Mendelzon pour la révision, de définir des postulats pour les opérateurs de contraction dans ce cadre. Après avoir vérifié que les opérateurs de contraction définis par nos postulats correspondent aux opérateurs de révision définis par les postulats de Katsuno et Mendelzon, nous avons proposé un théorème de représentation en terme d'assignement fidèle.

Le but de ce travail était de s'assurer que la traduction de la contraction AGM dans le cadre propositionnel avait bien les propriétés attendues. Cette étape est nécessaire pour attaquer le problème qui nous intéresse : la définition d'opérateurs de contraction itérée, qui est la perspective principale de ce travail.

En effet, la traduction Katsuno-Mendelzon des postulats AGM est celle sur laquelle repose l'étude des opérateurs de révisions itérées de Darwiche et Pearl [3, 2, 9, 11]. Il y a eu très peu de travaux sur la contraction itérée. En fait, à notre connaissance, seul l'article [8] aborde ce problème, mais dans un cadre différent du cadre de Darwiche et Pearl. Définir ces opérateurs de contraction itérée « à la Darwiche et Pearl » nous permettrait d'étudier les liens entre [8] et [3].

Références

[1] Carlos E. Alchourrón and Peter Gärdenfors and David Makinson. On The Logic Of Theory Change : Partial Meet Contraction And Revision Functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510-530, 1985

[2] Richard Booth and Thomas Meyer. Admissible and restrained revision. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 26 :127-151, 2006

[3] Adnan Darwiche et Judea Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89(1-2) :1-29, 1997

[4] Peter Gärdenfors. Knowledge In Flux. *Cambridge University Press*, Cambridge, UK, 1988

[5] Peter Gärdenfors et David Makinson. Revisions of knowledge systems using epistemic entrenchment.

Proceeding of the Second Conference on Theorical Aspects of Reasoning about Knowledge, 83-95, 1988

[6] Adam Grove. Two Modellings for Theory Change. *Journal of Philosophical Logic*, 17 :157-170, 1988

[7] William L. Harper. Rational Conceptual Change. *PSA : Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association 1976*, Volume Two : Symposia and Invited Papers :462-494, 1977

[8] Matthias Hild et Wolfgang Spohn. The measurement of ranks and the laws of iterated contraction. *Artificial Intelligence*, 172(10) :1195-1218, 2008

[9] Yi Jin and Michael Thielscher. Iterated belief revision, revised. *Artificial Intelligence*, 171 :1-18, 2007

[10] Hirofumi Katsuno et Alberto O. Mendelzon. Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change. *Artificial Intelligence*, 52 :263-294, 1991

[11] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Improvement operators. *Eleventh Inter-national Conference on Principles of Knowledge representation and Reasoning (KR'08)*, 177-186, 2008

[12] Isaac Levi. Subjunctives, dispositions of chances. *Synthese*, 34 :423-455, 1977

[13] Isaac Levi. The Enterprise of Knowlede. *The MIT Press*, Cambridge, MA, 1980

[14] Hans Rott. Belief Contraction in the Context of the General Theory of Rational Choice. *The Journal of Symbolic Logic*, 58 :1426-1450, 1993