Changement de croyances et logiques modales

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 13 décembre 2016

en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université d'Artois

(Spécialité Informatique)

par

Thomas Caridroit

Rapporteurs :	Andreas Herzig	CNRS - Université Paul Sabatier
	Odile Papini	Aix-Marseille Université
Examinateurs :	François Schwarzentruber	ENS Rennes
	Sébastien Konieczny	CNRS - Université d'Artois, *Co-directeur de thèse*
	Tiago de Lima	Université d'Artois, *Co-encadrant de thèse*
	Pierre Marquis	Université d'Artois, *Co-directeur de thèse*

Centre de Recherche en Informatique de Lens – CNRS UMR 8188
Université d'Artois, rue Jean Souvraz, S.P. 18 F-62307, Lens Cedex France
Secrétariat : Tél.: +33 (0)3 21 79 17 23 – Fax : +33 (0)3 21 79 17 70
http://www.cril.fr

Mise en page avec memcril (B. Mazure, CRIL) et thloria (D. Roegel, LORIA).

À tous ceux qui liront cette thèse.

Remerciements

Merci, de rien, au revoir messieurs-dames.

(Perceval – *Kaamelott*, Livre II, *La Botte secrète II*)

Table des matières

Partie II Changement de croyances en logique épistémique

Annexes

Introduction générale

Au départ je devais vous guider vers la lumière, vers le Graal. Mais vous, vous préférez n'en faire qu'à votre tête...
(La Dame du Lac – *Kaamelott*, Livre IV, *La Révoquée*)

Le changement de croyances est étudié depuis de longues années en philosophie, en intelligence artificielle et en bases de données. Le problème du changement de croyances consiste à faire évoluer un ensemble d'informations en y ajoutant, modifiant ou retirant une information. Il est donc possible d'effectuer trois opérations différentes. Lorsqu'une nouvelle information est disponible, si celle-ci contredit l'ensemble existant, il n'est pas judicieux d'ajouter celle-ci directement dans l'ensemble. Dans ce cas, il faut au préalable retirer certains informations de l'ensemble afin de pouvoir ajouter la nouvelle information. Il ne serait également pas judicieux de retirer toutes les informations, puisque cela conduirait à perdre inutilement certaines informations. Le problème du changement de croyances est que les considérations logiques seules ne suffisent pas lorsque nous devons choisir quelles informations abandonner, cela doit être décidé par d'autres moyens. Ce qui rend les choses plus compliquées est que ces informations dans un ensemble peuvent avoir des conséquences logiques, ainsi, lorsque nous devons abandonner une information, nous devons également décider quelles autres informations doivent être conservées ou retirées.

En intelligence artificielle, c'est la cadre AGM (ainsi nommé d'après ses trois initiateurs, Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors et David Makinson) qui s'est imposé. Ces trois auteurs ont proposé des caractérisations logiques des opérateurs de changement de croyances, sous forme d'ensembles de propriétés qu'un opérateur d'expansion, de contraction ou de révision, rationnel doit satisfaire. Cette caractérisation logique correspond à des définitions constructives assez intuitives. Cette correspondance est ce que l'on appelle les théorèmes de représentation. Ce sont ces théorèmes qui donnent une consistance au cadre AGM.

Le changement de croyances vise à trouver des moyens adéquats pour faire évoluer les croyances d'un agent quand il est confronté à de nouvelles évidences. Dans la plupart des travaux sur la révision de croyances, l'ensemble de croyances d'un agent est composé de croyances au sujet de l'environnement (le monde) et est représenté par un ensemble de formules de la logique classique.

Katsuno et Mendelzon [Katsuno & Mendelzon 1992] ont proposé un ensemble de postulats pour les opérateurs de révision de bases de croyances dans le cadre de la logique propositionnelle finie. D'une manière générale, une base de croyances est tout simplement un ensemble de formules fini non déductivement clos. Dans [Katsuno & Mendelzon 1992], ainsi que dans cette thèse, une base de croyances peut également être vue comme une unique formule (la conjonction de ses éléments). La contraction de base de croyances pourrait également être appelée contraction basée sur une formule. Cela écarte de nombreux travaux où le terme « contraction de base de croyances » est utilisé pour désigner le changement de croyances dépendant de la syntaxe

[Hansson 1999].

Katsuno et Mendelzon ont proposé un théorème de représentation pour les opérateurs de révision en termes d'assignements fidèles [Katsuno & Mendelzon 1992]. Ces assignements correspondent à un cas particulier des systèmes de sphères de Grove [Grove 1988]. Ce théorème de représentation est important, puisqu'il est à l'origine des principales approches de révision de croyances itérée [Darwiche & Pearl 1997, Booth & Meyer 2006, Jin & Thielscher 2007, Konieczny & Pino Pérez 2008].

Les opérateurs de révision et de contraction d'ensembles de croyances sont étroitement liés, comme reflété par les identités de Levi et de Harper [Levi 1977, Levi 1980, Harper 1976]. Ces identités peuvent être utilisées pour définir des opérateurs de contraction à partir d'opérateurs de révision, et inversement. Ainsi, nous pourions nous attendre à l'existence de travaux sur la contraction dans le contexte de la logique propositionnelle finie. Cependant, pour autant que nous le sachions, cette question n'a pas été directement étudiée jusqu'à présent.

Les changements de croyances en logique propositionnelle classique ont suscité de nombreux travaux. Cependant, dans de nombreuses applications, les agents ont non seulement des croyances sur le monde, mais aussi des croyances sur les croyances des autres agents, ce qui rend la logique propositionnelle classique inadéquate. Ainsi, les croyances sur les croyances des autres agents constituent un élément d'information important pour l'agent, afin d'être en mesure de prendre les meilleures décisions et d'effectuer les meilleures actions. L'utilisation de croyances sur les croyances des autres agents est par exemple cruciale en théorie des jeux.

Les outils logiques les plus courants pour représenter les croyances sur les croyances des autres agents sont les logiques épistémiques. La sémantique typique pour le cadre épistémique (en fait, doxastique) multi-agents est basée sur des modèles de Kripke $KD45_n$. Ainsi, le changement de croyances dans les logiques épistémiques est une question importante.

Il existe quelques travaux sur les liens entre les logiques épistémiques et la théorie de changement de croyances, mais la plupart d'entre eux étudient l'encodage des opérateurs de changement de croyances dans les modèles à relations d'accessibilité codant différents niveaux de plausibilité de croyances, qui guident le processus de révision.

Dans certaines applications, une relation de plausibilité peut être facilement obtenue à partir de l'information fournie initialement. Cependant, dans de nombreux cas, une telle relation de plausibilité n'est pas directement disponible. Dans de tels cas, une relation de plausibilité peut être construite à partir d'une distance prédéfinie. Ainsi, par exemple, en logique propositionnelle (finie) classique, la distance de Hamming (aussi appelée distance de Dalal [Dalal 1988, Katsuno & Mendelzon 1992]), définie comme le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles deux valuations diffèrent, est souvent considérée. Lorsque nous n'avons pas d'information particulière sur l'application et sur les dépendances logiques des variables propositionnelles, une hypothèse raisonnable est de considérer que plus les valuations ont de variables en commun, plus elles sont proches. Par conséquent, dans le cadre propositionnel classique, de nombreux opérateurs de révision [Dalal 1988, Katsuno & Mendelzon 1992, Lehmann *et al.* 2001, Schlechta 1998], de mise à jour [Forbus 1989, Katsuno & Mendelzon 1991], de fusion [Konieczny & Pérez 2002, Konieczny *et al.* 2004] et d'autres opérateurs de changement sont en fait basés sur des distances.

D'autre part, bien que plusieurs travaux en logique épistémique aient pour objectif de modéliser la révision comme une modalité dynamique (voir, par exemple, [Segerberg 2001, van Ditmarsch 2005, Baltag & Smets 2006, Board 2004, van Benthem 2007, Baltag *et al.* 2014]), il y a très peu de travaux qui ont abordé le problème de la définition du changement de croyances pour les logiques épistémiques dans le cadre AGM standard (voir principalement [Aucher 2010]).

Ce document est divisé en deux parties. La première est dédiée au changement de croyances en logique propositionnelle. Tout d'abord nous présentons les notions essentielles à la compréhension de ce manuscrit : les bases de la théorie du changement de croyances. Nous présentons ainsi les cadres AGM et KM ; nous introduisons les différents postulats de changement de croyances de ces deux cadres, ainsi que certains théorèmes de représentations de ces cadres. Nous introduisons ensuite la première contribution de cette thèse, qui est la définition d'opérateurs de contraction dans le cadre KM. Après avoir défini un ensemble de postulats pour les opérateurs de contraction de bases de croyances, nous étudions la correspondance entre la contraction d'ensembles de croyances et la contraction de bases de croyances. Nous vérifions ensuite, via les identités de Levi et de Harper, l'existence d'un lien entre les opérateurs de révision satisfaisant les postulats de Katsuno et Mendelzon et les opérateurs de contraction satisfaisant nos postulats. Enfin, nous définissons un théorème de représentation pour ces opérateurs de contraction.

La seconde partie est dédiée au changement de croyances en logique épistémique. Ici également, nous commençons par introduire les notions importantes, qui seront nécessaires à la compréhension de la suite. Nous présentons donc une sémantique et une axiomatisation de la logique épistémique, avant de donner les définitions de plusieurs « outils techniques ». Nous décrivons ensuite un premier lien entre le changement de croyances et les logiques épistémiques : *les logiques épistémiques dynamiques*, en définissant les notions de modèle d'événement et de modèle produit, avant de donner une axiomatisation de ces logiques.

Dans un deuxième temps, nous présentons deux autres approches existantes pour les changements de croyances en logique épistémiques : la révision via communication entre les agents présentée par Tallon, Vergnaud et Zamir [Tallon *et al.* 2004], ainsi que la révision de modèles internes présentée par Aucher [Aucher 2008, Aucher 2010].

Nous décrivons ensuite deux autres contributions de cette thèse : la définition d'opérateurs de révision et d'expansion privées ainsi que la définition de distances entre modèles de Kripke et leurs utilisation pour la révision de croyances.

Dans le premier cas, nous étudions un cadre de changement multi-agents dans lequel les croyances des agents sont représentées par un modèle $KD45_n$. Nous ne considérons que le changement privé (un seul agent a accès à la nouvelle information) et nous voulons définir le nouveau modèle de Kripke qui représente la nouvelle situation épistémique. De plus, nous considérons uniquement des informations au sujet de l'environnement. Pour chaque opération (expansion et révision), nous présentons une traduction des postulats AGM pour le cadre multi-agents ainsi que des opérateurs particuliers.

Dans le second cas, nous introduisons une série de propriétés que des distances entre modèles de Kripke doivent satisfaire. Après avoir discuté des distances existantes, nous définissons plusieurs nouvelles distances. Pour chacune d'elle, nous identifions les propriétés qu'elle satisfait. Enfin, après avoir donné une réécriture des postulats de Katsuno et Mendelzon, nous vérifions pour chaque distance si elle peut être utilisée afin de définir un opérateur de révision.

Préliminaires

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas. (Albert Einstein)

Cette première partie présente les notions mathématiques de base qui seront utilisées dans cette thèse. La majorité de celles-ci ne présentent pas de réelle difficulté de compréhension. Cette partie est surtout utile pour fixer quelques notations qui apparaîtront dans cette thèse, mais également pour aider le lecteur à se familiariser avec certains des concepts mathématiques utilisés dans ce document.

Cette partie introduit les notions d'ensemble et de relation binaire, avant de présenter la logique propositionnelle.

Ensembles et relations

Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles de E, formellement $\mathcal{P}(E) = \{F|F \subseteq E\}$. $|E|$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E (aussi nommé cardinal de E). Un singleton est un ensemble contenant un unique élément, ainsi E est un singleton si et seulement si $|E| = 1$. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble ne contenant aucun élément, ainsi E est l'ensemble vide si et seulement si $|E| = 0$. Une relation binaire, notée $\mathcal{R}$, sur E est un sous-ensemble de $E \times E$, i.e. un ensemble de couples (x, y) avec $x, y \in E$. Nous utilisons parfois la notation $x\mathcal{R}y$ pour signifier que $(x, y) \in \mathcal{R}$. Une telle relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur $E \times E$, peut être :

- *réflexive* si pour tout x de E, $x\mathcal{R}x$.
- *irréflexive* si pour tout x de E, $x\not\mathcal{R}x$.
- *transitive* si pour tout x, y, z de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.
- *totale* si pour tout x, y de E, nous avons $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
- *symétrique* si pour tout x, y de E, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$.
- *anti-symétrique* si pour tout x, y de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$.
- *modulaire* si pour tout x, y, z de E, si $x\not\mathcal{R}y$, $y\not\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}x$ alors $z\mathcal{R}y$.
- *acyclique* si pour tout $x_1, \ldots, x_n$ de E, nous n'avons pas $x_1\mathcal{R}x_2\mathcal{R}\ldots\mathcal{R}x_n\mathcal{R}x_1$.

Une relation qui n'est pas totale est dite *partielle*. Un *pré-ordre* est une relation réflexive et transitive sur $E \times E$. Un pré-ordre sur un ensemble E est dit *nœthérien* si il n'existe pas de suite d'éléments de E qui soit infinie et strictement décroissante pour ce pré-ordre. Une *relation d'équivalence* est une relation réflexive, transitive et symétrique sur $E \times E$. Un *ordre* est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive sur $E \times E$. Un *ordre strict* est une relation irréflexive et transitive sur $E \times E$. Soit un pré-ordre $\leq$ défini sur $E \times E$, on définit l'ordre strict $<$ associé, comme $x < y$ si $x \leq y$ et $y \not\leq x$. On définit également la relation d'équivalence $\simeq$ induite par $\leq$, comme $x \simeq y$ si $x \leq y$ et $y \leq x$. Soient un pré-ordre $\leq$ défini sur $E \times E$ et F un sous-ensemble de E, on note $min(F, \leq)$ l'ensemble des éléments minimaux de F pour $\leq$, i.e. $min(F, \leq) = \{x \in F |\ \nexists y \in F \text{ tel que } y < x\}$.

Étant donné un ensemble E, il est intéressant pour bon nombre d'applications de savoir à quel point deux éléments de cet ensemble sont proches. Pour cela, il suffit d'établir une notion de distance entre les éléments d'un ensemble.

Définition 0.1 (Distance)**.**
Une distance d entre deux éléments d'un ensemble E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{indiscernabilité}} \quad & \forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y \\ \textbf{\textit{symétrie}} \quad & \forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x) \\ \textbf{\textit{sous-additivité}} \quad & \forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \\ \textbf{\textit{non-négativité}} \quad & \forall x, y \in E,\ d(x,y) \geq 0 \end{aligned}$$

Nous présentons maintenant une notion de distance bien connue, que nous allons utiliser dans la suite de cette thèse, il s'agit de la notion de distance drastique.

Définition 0.2 (Distance drastique)**.** *Soient E un ensemble, $\alpha \in \mathbb{N}$ et D une application de E^2 dans $\{0, \alpha\}$. D est la distance drastique paramétrée par α si et seulement si, pour tout x, y de E,*

$$D_\alpha(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ \alpha \text{ sinon} \end{cases}$$

Lorsque α vaut 1, nous retrouvons la distance drastique habituelle.

Nous considérons un langage propositionnel fini $\mathcal{L}_0$, construit à partir d'un ensemble fini de symboles propositionnels $\mathbb{P}$ et des connecteurs habituels. $\perp$ (respectivement $\top$) est la constante booléenne `faux` (respectivement `vraie`). Les formules sont interprétées de façon standard. $\vdash$ désigne la déduction logique, et $\equiv$ désigne l'équivalence logique. $\mathcal{P}(\mathcal{L}_0)$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble $\mathcal{L}_0$, i.e., l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{L}_0$.

Logique tarskienne

Soit $\mathcal{L}_0$ un langage comprenant un ensemble d'atomes fini $\mathbb{P} = \{p, q, r, \ldots\}$ et les connecteurs usuels $\neg$ (négation), $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\rightarrow$ (implication) et $\leftrightarrow$ (équivalence). $\perp$ dénote la contradiction et $\top$ la tautologie.

Nous considérons une opération de conséquence au sens de Tarski [Tarski 1956] définie par :

Définition 0.3 (Opération de conséquence)**.**
Une opération de conséquence sur un langage $\mathcal{L}_0$ est une fonction $Cn : \mathcal{P}(\mathcal{L}_0) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}_0)$ vérifiant les conditions suivantes pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\prime)$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_0$:

1. *$A \subseteq Cn(A)$* *(inclusion)*
2. *Si $A \subseteq B$, alors $Cn(A) \subseteq Cn(B)$* *(monotonie)*

3. $Cn(A) \supseteq Cn(Cn(A))$ *(idempotence)*

4. *Si* $A \vdash \alpha$*, alors* $\alpha \in Cn(A)$ *(supraclassicalité)*

5. *Si* $\beta \in Cn(A \cup \{\alpha\})$*, alors* $(\alpha \rightarrow \beta) \in Cn(A)$ *(déduction)*

6. *Si* $\alpha \in Cn(A)$*, alors* $\alpha \in Cn(A')$ *pour un sous-ensemble fini* A' *de* A *(compacité)*

Un ensemble de croyances est un ensemble fini de formules déductivement clos. Cet ensemble est infini, il n'est donc pas pratique pour une représentation efficace. Étant donné un élément K de $\mathcal{P}(\mathcal{L}_0)$, $Cn(K)$ désigne la clôture déductive de K. Lorsque K est un singleton $\{\varphi\}$, ou plus généralement, lorsque K est équivalent à une formule $\varphi \in \mathcal{L}_0$, nous écrivons $Cn(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{L}_0 \mid \varphi \vdash \psi\}$ pour désigner l'ensemble des conséquences de φ.

Une base de croyances est un ensemble de formules propositionnelles $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Nous supposons qu'une base de croyances est conjonctivement interprétée, i.e., $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est équivalent à $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Cette dernière hypothèse est habituellement sans risque lorsque nous supposons également l'indépendance à la syntaxe.

Une interprétation I est une application associant chaque symbole de $\mathbb{P}$ à une valeur de vérité. Si φ est une formule de $\mathcal{L}_0$, alors $Mod(\varphi)$ désigne l'ensemble de des modèles de cette formule. Inversement, si $\mathbb{I}$ est un ensemble d'interprétations sur $\mathbb{P}$, alors $\alpha_{\mathbb{I}}$ désigne la formule (unique, à l'équivalence logique près) dont les modèles sont ceux de $\mathbb{I}$.

Première partie

Changement de croyances en logique propositionnelle

Chapitre 1

Changement de croyances

You've been in my life so long, I can't remember anything else.

(Ellen Ripley – Alien[3])

On distingue la notion de croyance de celle de connaissance. Une connaissance d'un agent à propos du monde est une information certaine. La notion de croyance, en revanche, est plus permissive : il s'agit d'une information, a priori, mais qui peut évoluer sans que le monde ne change, par exemple parce que l'agent a obtenu des précisions sur une information qui était incertaine. Ces évolutions peuvent être de plusieurs types.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le cadre AGM, nommé d'après ses trois initiateurs Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors et David Makinson. Il s'agit du principal cadre formel pour modéliser le changement de croyances [Alchourrón *et al.* 1985]. Ses constructions et concepts clés ont fait l'objet de développements importants [Gärdenfors 1988, Gärdenfors & Makinson 1988, Rott 1993, Fermé & Hansson 2011]. Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont proposé un ensemble de postulats et théorèmes de représentation, établissant ainsi les bases pour un cadre adapté au problème du changement de croyances lorsque les croyances sont exprimées en utilisant une logique tarskienne.

Nous présenterons ensuite les travaux de Hirofumi Katsuno et Alberto O. Mendelzon sur la révision de bases de croyances propositionnelles [Katsuno & Mendelzon 1992]. En effet, Katsuno et Mandelzon ont proposé un ensemble de postulats pour les opérateurs de révision dans le cadre de la logique propositionnelle classique ainsi qu'un théorème de représentation en termes d'assignement fidèles. Nous appellerons ce cadre, le cadre KM. Ce cadre unifie les approches sémantiques qui ont été développées pour la révision de croyances [Dalal 1988, Spohn 1988, Borgida 1985]. Après avoir détaillé l'une de ces approches, à savoir l'opérateur de révision de Dalal [Dalal 1988], nous présenterons succinctement les approches syntaxiques pour la révision. Nous présenterons plus particulièrement l'approche de la révision par R-ensembles [Würbel *et al.* 2000, Ben-Naim *et al.* 2004].

Enfin, nous présenterons, très brièvement, les travaux sur la révision itérée [Lehmann 1995, Darwiche & Pearl 1997].

Sommaire

1.1 Le cadre AGM

Définition 1.1 (Ensemble de croyances)**.**
Un ensemble de croyances K est un sous-ensemble de $\mathcal{L}_0$. Un ensemble de croyances est dit clos déductivement si $K = Cn(K)$.

Lorsque cela ne sera pas précisé, on supposera que les ensembles de croyances sont clos déductivement.

Dans ce cas les ensembles de croyances sont également appelés *théories*. On notera $K_\perp$ l'ensemble de croyances trivial, i.e. celui contenant toutes les formules de $\mathcal{L}_0$ ($K_\perp = \mathcal{L}_0$).

1.1.1 Préliminaires

Pour un agent dont les croyances sont représentées par la base K, une formule α peut avoir trois états épistémiques différents :

1. $\alpha \in K$: l'agent **accepte** l'information α, il croit qu'elle est vraie.
2. $\neg\alpha \in K$: l'agent **refuse** l'information α, il croit qu'elle est fausse.
3. $\alpha \notin K$ et $\neg\alpha \notin K$: l'agent n'accepte pas l'information α, mais il ne la refuse pas non plus. Il ne croit rien sur α. On dit aussi que α est **indéterminée** (ou contingente).

Comme pour un être humain, les croyances d'un agent ne sont pas statiques. En effet, l'état épistémique d'une croyance peut changer au cours du temps. Un agent peut oublier une information, ou recevoir une nouvelle information qui va contredire les croyances actuelles de l'agent tout en étant plus plausible (car venant d'une source plus fiable).

Exemple 1.1 (Le pingouin manchot)**.**
Bob observe au loin un volatile, il suppose donc que celui-ci sait voler. Son ensemble de croyances est donc $\mathbf{K} = \{\mathbf{oiseau}, \mathbf{vole}\}$*. En s'approchant, Bob remarque que le volatile est noir et blanc, il lui semble également qu'il s'agit d'un manchot, or les manchots ne savent pas voler. Bob doit donc changer ses croyances, car son ensemble de croyances n'est pas cohérent avec cette nouvelle information. Formellement, cela signifie que Bob doit ajouter la formule* $\neg$**vole** *à ses croyances. Néanmoins, Bob peut ajouter* $\neg$**couleur** *à son ensemble de croyances, puisqu'il n'y a aucune information à ce sujet pour le moment dans sa base.*

Les opérateurs de changement peuvent alors être vus comme des changements d'attitude de l'agent envers une information :

- Lorsqu'une information passe de l'état indéterminé à l'état accepté ou refusé, nous effectuons une **expansion** (le fait d'ajouter de nouvelles croyances à l'ensemble).

- Lors du changement opposé, nous effectuons une **contraction** (le fait de supprimer une croyance d'un ensemble).
- Lorsqu'une information passe de l'état accepté à refusé (et inversement), nous effectuons une **révision** (le fait de modifier un ensemble de croyances en y ajoutant une croyance tout en restant cohérent).

Ces transitions entre états épistémiques sont illustrées sur la figure 1.1.

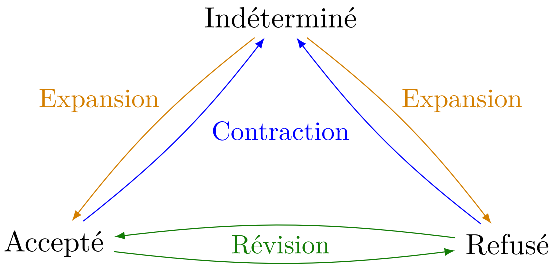


FIGURE 1.1 – Transitions entre états épistémiques

Ces trois opérations de changement de croyances doivent respecter des propriétés de rationalité, que l'on peut exprimer par trois principes :

- **Principe de succès** (ou **principe de primauté de la nouvelle information**) : le changement doit réussir, après l'opération l'information doit avoir l'état voulu.
- **Principe de cohérence** : on veut éviter la trivialisation de la base résultante, celle-ci doit être non triviale (donc cohérente).
- **Principe de changement minimal** : on veut modifier le moins possible les croyances de l'agent, on ne veut ni retirer ni ajouter plus que nécessaire.

1.1.2 Postulats et liens entre opérations de changement de croyances

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson [ALCHOURRÓN *et al.* 1985] ont proposé, pour ces trois types d'opérateurs de changement de croyances, une série de postulats de rationalité qui les caractérisent. Ces postulats sont des propriétés qu'un opérateur jugé *raisonnable* devrait satisfaire.

En reprenant l'exemple 1.1, si l'opération est supposée ajouter $\neg couleur$ à l'ensemble de croyances, il ne semble pas rationnel d'oublier tout le reste et de garder uniquement la nouvelle information.

Expansion

L'expansion est l'opération qui permet d'ajouter une information à un ensemble de croyances. Soient K un ensemble de croyances et α une nouvelle information, l'expansion de K par α est un ensemble de croyance noté $K + \alpha$.

Un opérateur d'expansion AGM $+$ doit satisfaire les postulats suivants :

(K + 1) $K + \alpha$ est une théorie (clôture)

(K + 2) $\alpha \in K + \alpha$ (succès)

(K + 3) $K \subseteq K + \alpha$ (inclusion)

(K + 4) Si $\alpha \in K$, alors $K + \alpha = K$ (vacuité)

(K + 5) Si $K \subseteq K'$, alors $K + \alpha \subseteq K' + \alpha$ (monotonie)

(K + 6) $K+\alpha$ est le plus petit ensemble de croyances satisfaisant $(K+1)-(K+5)$ (minimalité)

$(K + 1)$ assure que le résultat de l'expansion est bien une théorie. $(K + 2)$ exprime que la nouvelle information doit être vraie dans la théorie résultante. $(K + 3)$ certifie que l'on garde toutes les informations de K. $(K + 4)$ dit que si l'information appartient déjà à la théorie, alors cette dernière reste inchangée. $(K + 5)$ exprime la monotonie de l'expansion. $(K + 6)$ exprime la minimalité du changement, il assure donc que la nouvelle théorie ne contient pas de croyances non justifiées par l'ajout de la nouvelle information.

De ces postulats, Gärdenfors déduit qu'il n'y a qu'un opérateur d'expansion *rationnel* [Gärdenfors 1988].

Théorème 1.1 ([Gärdenfors 1988])**.**
L'opérateur d'expansion + satisfait les postulats $(K + 1) - (K + 5)$ si et seulement si $K + \alpha = Cn(K \cup \alpha)$.

Ce théorème nous montre que l'expansion est une opération simple. En effet, il suffit de prendre l'ensemble des conséquences logiques de l'union de l'ensemble de croyances et de la nouvelle information.

Exemple 1.2 (Le pingouin manchot, le retour)**.**
Reprenons l'exemple 1.1. Quand Bob se rend compte que le volatile pourrait être un manchot, utiliser l'opérateur d'expansion avec la nouvelle information $\neg$**vole** *n'est pas une bonne idée. En effet, puisque cette information n'est pas cohérente avec les croyances de Bob, la théorie résultante de l'expansion serait l'ensemble trivial* $\mathbf{K}_\perp$*.*
Cependant, puisque Bob n'a aucune croyance sur les couleurs du volatile, l'expansion de son ensemble de croyances par $\neg$**couleur** *ne pose aucun problème.*

Révision

L'opérateur d'expansion ne permet pas d'incorporer une information qui contredit les croyances d'un agent sans trivialiser ces dernières. L'opérateur de révision le permet. Il faut alors abandonner certaines croyances pour ne pas obtenir un ensemble contradictoire.

Soient K un ensemble de croyances et α une nouvelle information, la révision de K par α est un ensemble de croyances noté $K * \alpha$.

Un opérateur de révision AGM $*$ doit satisfaire les postulats suivants :

(K ∗ 1) $K * \alpha$ est une théorie (clôture)

(K ∗ 2) $\alpha \in K * \alpha$ (succès)

(K ∗ 3) $K * \alpha \subseteq K + \alpha$ (inclusion)

(K ∗ 4) Si $\neg\alpha \notin K$, alors $K + \alpha \subseteq K * \alpha$ (vacuité/préservation)

(K ∗ 5) Si $K * \alpha = K_\perp$, alors $\models \neg\alpha$ (cohérence)

(K ∗ 6) Si $\alpha \equiv \beta$, alors $K * \alpha \equiv K * \beta$ (extensionalité)

(K ∗ 7) $K * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (K * \alpha) + \beta$ (inclusion conjonctive)

(K ∗ 8) Si $\neg\beta \notin K * \alpha$, alors $(K * \alpha) + \beta \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$ (vacuité conjonctive)

$(K * 1)$ assure que le résultat de la révision est bien une théorie. $(K * 2)$ exprime que la nouvelle information doit appartenir à la nouvelle théorie. $(K * 3)$ implique que la révision ne peut pas ajouter une croyance qui ne soit pas une conséquence de la nouvelle information et de K. $(K*3)$ et $(K*4)$ expriment ensemble que lorsque K est cohérente avec la nouvelle information, alors la révision revient à une expansion. $(K*5)$ assure que l'ensemble révisé n'est contradictoire que si la nouvelle information l'est. $(K*6)$ dit que le résultat de la révision ne dépend pas de la syntaxe de la nouvelle information.

Ces six postulats sont les postulats de base pour les opérateurs de révision. $(K * 7)$ et $(K*8)$ sont des postulats supplémentaires qui expriment le bon comportement des opérateurs de révision en terme de minimalité de changement. Ils assurent que la révision par une conjonction de deux informations revient à une révision par la première suivie d'une expansion par la seconde, dès que cela est possible (i.e. quand la seconde ne contredit aucune croyance issue de la première révision).

Exemple 1.3 (Le pingouin manchot 3)**.**
Reprenons l'exemple 1.1. Pour incorporer l'information qu'il a observé, Bob peut réviser son ensemble de croyances par $\neg$**vole***. Puisque l'opérateur de révision doit maintenir la cohérence, le problème existant avec l'expansion ne se pose pas ici. Ainsi, le nouvel ensemble de croyances de Bob serait* $\mathbf{K} = \{\mathbf{oiseau}, \neg\mathbf{vole}, \neg\mathbf{couleur}\}$.

Contraction

Contrairement aux opérations d'expansion et de révision qui permettent d'ajouter une nouvelle information dans une théorie, l'opération de contraction, elle, a pour objectif de retirer une information d'une théorie. La minimalité du changement doit toujours être respectée : on ne veut retirer que ce qui est nécessaire pour ne plus impliquer l'information de la théorie.

Soient un ensemble de croyances K et une information α. La contraction de K par α est un ensemble de croyances noté $K \div \alpha$.

Un opérateur de contraction AGM $\div$ doit satisfaire les postulats suivants :

(K ÷ 1) $K \div \alpha$ est une théorie (clôture)
(K ÷ 2) $K \div \alpha \subseteq K$ (inclusion)
(K ÷ 3) Si $\alpha \notin K$, alors $K \div \alpha \supseteq K$ (vacuité/préservation)
(K ÷ 4) Si $\nvdash \alpha$, alors $\alpha \notin K \div \alpha$ (succès)
(K ÷ 5) $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha$ (restauration)
(K ÷ 6) Si $\alpha \equiv \beta$, alors $K \div \alpha = K \div \beta$ (extension)
(K ÷ 7) $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta)$ (intersection)
(K ÷ 8) Si $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$, alors $K \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha$ (conjonction)

$(K \div 1)$ assure que le résultat de la contraction est bien une théorie. $(K \div 2)$ garantit que, lors de la contraction, aucune nouvelle information n'est ajoutée à la théorie. $(K \div 3)$ dit que si l'information α n'est pas acceptée par l'agent, il n'y a rien à faire pour retirer α de K. $(K \div 4)$ assure le succès de la contraction, c'est-à-dire que si α n'est pas une tautologie, alors la contraction réussit. $(K \div 5)$ garantit que la contraction de K par α suivie de l'expansion par α redonne la théorie K comme résultat (l'inclusion inverse de $(K \div 5)$ étant une conséquence de $(K \div 1)$- $(K \div 4)$). $(K \div 6)$ dit que le résultat de la contraction ne dépend pas de la syntaxe.

Ces six postulats sont les postulats de base pour les opérateurs de contraction. $(K \div 7)$ et $(K \div 8)$ sont appelés postulats supplémentaires. $(K \div 7)$ assure que si l'information est à la fois dans la contraction par α et dans la contraction par β alors elle doit être dans la contraction par la conjonction $\alpha \wedge \beta$. $(K \div 8)$ exprime la minimalité du changement pour la conjonction.

Exemple 1.4 (Le pingouin manchot, la résurrection)**.**
Plus tard, Bob apprend qu'il a pu se tromper, qu'il s'agissait possiblement d'un pingouin. N'arrivant pas à se décider, Bob préfère mettre de côté le fait que ce volatile sache ou non voler. Il va donc devoir contracter son ensemble de croyances de façon à retirer $\neg$**vole** *de celui-ci. Ainsi, son nouvel ensemble de croyances sera* $\mathbf{K} = \{\mathbf{oiseau}, \neg\mathbf{couleur}\}$.

Identités

Comme suggéré par la figure 1.1, nous pouvons décomposer la révision (transition du statut accepté au statut refusé) en une contraction (transition du statut accepté vers le statut indéterminé) suivie d'une expansion (transition du statut indéterminé au statut refusé). C'est ce que nous dit l'**identité de Levi** [Gärdenfors 1988] :

$$K * \alpha = (K \div \neg\alpha) + \alpha \qquad \textbf{(Identité de Levi)}$$

Le théorème suivant montre que les opérateurs définis grâce à l'identité de Levi sont bien des opérateurs de révision.

Théorème 1.2. *([Gärdenfors 1988])*
Si l'opérateur de contraction $\div$ *satisfait* $(K \div 1)$-$(K \div 4)$ *et* $(K \div 6)$ *et l'opérateur* $+$ *satisfait* $(K + 1)$-$(K + 6)$*, alors l'opérateur de révision* $*$ *défini par l'identité de Levi satisfait* $(K * 1)$-$(K * 6)$*. De plus, si* $(K \div 7)$ *est satisfait, alors* $(K * 7)$ *est satisfait pour la révision ainsi définie, et si* $(K \div 8)$ *est satisfait, alors* $(K * 8)$ *est satisfait pour la révision ainsi définie.*

L'**identité de Harper** permet d'exprimer le fait que la correspondance inverse est vérifiée. Ainsi, si nous disposons d'un opérateur de révision, il est possible de définir un opérateur de contraction.

$$K \div \alpha = K \cap (K * \neg\alpha) \qquad \textbf{(Identité de Harper)}$$

Nous remarquons alors que les informations issues de la contraction de K par α sont celles n'ayant rien à voir avec la vérité de α.

Le théorème suivant montre que les opérateurs définis par l'identité de Harper sont bien des opérateurs de contraction.

Théorème 1.3. *([Gärdenfors 1988])*
Si l'opérateur de révision $*$ *satisfait* $(K * 1)$-$(K * 6)$*, alors l'opérateur de contraction* $\div$ *défini par l'identité de Harper satisfait* $(K \div 1)$-$(K \div 6)$*. De plus si* $(K * 7)$ *est satisfait alors* $(K \div 7)$ *l'est aussi, et si* $(K * 8)$ *est satisfait alors* $(K \div 8)$ *l'est aussi.*

Ces deux identités nous montrent bien l'étroit lien qui existe entre les opérateurs de contraction et les opérateurs de révision.

1.1.3 Théorèmes de représentation

Maintenant que les propriétés des opérateurs de changement de croyances sont définies, nous pouvons présenter des moyens pratiques pour définir ces opérateurs. C'est ici que les théorèmes de représentation entrent en jeu. Nous n'allons présenter que trois des multiples théorèmes de représentation dans cette partie : celui utilisant les intersections partielles, celui utilisant les enracinements épistémiques, et enfin celui utilisant les systèmes de sphères.

Contraction par intersection partielle

L'idée des opérateurs de contraction par intersection est de conserver le plus de formules de l'ancienne base. Pour ce faire, nous allons conserver l'ensemble de tous les sous-ensembles maximaux de la théorie n'impliquant pas la croyance que l'on veut oublier. La nouvelle théorie est alors l'ensemble des formules que l'on pourra déduire de tous ces sous-ensembles.

Définition 1.2 (Sous-théorie maximale).
Soient une théorie K et une proposition α. L'ensemble des sous-théories maximales de K n'impliquant pas α, noté $K \perp \alpha$, est l'ensemble de tous les K' qui vérifient :

- $K' \subseteq K$
- $K' \nvdash \alpha$
- *Si* $K' \subset K'' \subseteq K$ *alors* $K'' \vdash \alpha$

Définition 1.3 (Contraction par intersection totale).
La fonction de contraction par intersection totale $\div_f$ est définie comme

$$K \div_f \alpha = \begin{cases} \bigcap(K \perp \alpha) & \textit{si } K \perp \alpha \textit{ n'est pas vide, et} \\ K & \textit{sinon} \end{cases}$$

Cette définition pose problème. En effet, le résultat est l'ensemble des formules de K qui sont conséquences logiques de $\neg\alpha$. Nous avons en particulier :

Théorème 1.4 ([Alchourrón & Makinson 1982]).
Si une fonction de révision $*$ est définie à partir d'une fonction de contraction par intersection totale au moyen de l'identité de Levi, alors pour chaque proposition α telle que $\neg\alpha \in K$, on a $K * \alpha = Cn(\alpha)$.

Ce théorème nous montre que l'on oublie toutes les informations sur les anciennes croyances de l'agent. En effet, garder l'ensemble de toutes les sous-théories maximales de K n'impliquant pas α pose problème, cela nous force à retirer trop d'informations.

Nous allons donc garder uniquement les « meilleures ».

Définition 1.4 (Fonction de sélection).
Soit une théorie K, une fonction de sélection γ est une fonction qui associe à chaque proposition α l'ensemble $\gamma(K \perp \alpha)$, qui est un sous-ensemble non vide de $K \perp \alpha$ si celui-ci n'est pas vide et $\gamma(K \perp \alpha) = \{K\}$ sinon.

Définition 1.5 (Contraction par intersection partielle).
Une fonction de contraction par intersection partielle $\div$ est définie comme

$$K \div \alpha = \bigcap \gamma(K \perp \alpha)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de représentation, indiquant que tout opérateur satisfaisant les propriétés attendues pour la contraction peut être défini par un opérateur de contraction par intersection partielle.

Théorème 1.5 ([Alchourrón *et al.* 1985]).
$\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle si et seulement si $\div$ satisfait les postulats $(K \div 1)$-$(K \div 6)$.

En contraignant un peu la fonction de sélection, il est possible de satisfaire les deux derniers postulats.

Définition 1.6 (Fonction de sélection relationnelle)**.**
Une fonction de sélection γ est relationnelle si et seulement si pour tout K il existe une relation $\leq$ sur $K \times K$ telle que

$$\gamma(K \perp \alpha) = \{K' \in K \perp \alpha \mid K' \leq K'', \forall K'' \in K \perp \alpha\}$$

Si $\leq$ est une relation transitive alors γ est dite relationnelle transitive.

Théorème 1.6 ([ALCHOURRÓN *et al.* 1985])**.**
$\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle relationnelle transitive si et seulement si $\div$ satisfait les postulats $(K \div 1)$-$(K \div 8)$.

Ce résultat montre bien que les postulats supplémentaires expriment la minimalité du changement. En effet, l'existence d'une relation $\leq$ aidant la sélection des sous-théories n'est possible que par l'ajout des postulats $(K \div 7)$ et $(K \div 8)$.

Contraction par enracinement épistémique

Le principe ici est d'ordonner les formules de la théorie en fonction de leur importance. Lors d'une contraction, on prend en compte cet ordre pour éliminer uniquement les formules les moins importantes.

Définition 1.7 (Enracinement épistémique ([GÄRDENFORS 1988]))**.**
Soient deux formules α et β, la notation $\alpha \leq \beta$ signifie « β est au moins aussi enraciné que α ». $\leq$ est une relation de (comparaison de) enracinement épistémique s'il satisfait les propriétés suivantes :

- **(EE1)** *Si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \gamma$, alors $\alpha \leq \gamma$* *(transitivité)*
- **(EE2)** *Si $\alpha \vdash \beta$, alors $\alpha \leq \beta$* *(domination)*
- **(EE3)** *$\alpha \leq \alpha \wedge \beta$ ou $\beta \leq \alpha \wedge \beta$* *(conjonction)*
- **(EE4)** *Si $K \neq K_\perp$, $\alpha \notin K$ si et seulement si $\forall \beta\ \alpha \leq \beta$* *(minimalité)*
- **(EE5)** *Si, pour tout β, $\beta \leq \alpha$, alors $\models \alpha$* *(maximalité)*

Ce théorème nous dit que, si après la contraction de K par $\alpha \wedge \beta$ on ne peut plus déduire β, alors α était strictement plus enraciné que β.

Théorème 1.7. *([GÄRDENFORS 1988])*
Une fonction de contraction $\div$ satisfait $(K \div 1)$-$(K \div 8)$ si et seulement si il existe $\leq$ satisfaisant $(EE1)$-$(EE5)$, où $\beta < \alpha$ si et seulement si $\beta \notin K \div \alpha \wedge \beta$.

Systèmes de sphères

Le principe ici est d'organiser les mondes possibles en fonction de leur plausibilité. Un monde possible d'un ensemble de croyances est un sous-ensemble du langage, maximal parmi les sous-ensembles cohérents, tel que les formules de l'ensemble de croyances sont vraies dans ce sous-ensemble. Chaque monde possible est une façon de décrire entièrement le monde qui est cohérent avec les croyances de l'agent.

Définition 1.8 (Monde possible ([GROVE 1988])).

- *On appelle monde possible un sous-ensemble maximal cohérent du langage et on note $M_{\mathscr{L}}$ l'ensemble des mondes possibles du langage $\mathscr{L}$.*
- *Soit une théorie K. On définit $[K]$ comme suit :*

$$[K] = \begin{cases} \emptyset \text{ si } K = K_{\perp} \\ \{M \in M_{\mathscr{L}} \mid K \subseteq M\} \text{ sinon} \end{cases}$$

- *Soit un ensemble $S \in M_{\mathscr{L}}$, on définit l'ensemble K_S par $K_S = \bigcap\{M \mid M \in S\}$.*

Définition 1.9 (Système de sphères ([GROVE 1988])).
Un système de sphères centré sur [K] est une collection de sous-ensembles S de $M_{\mathscr{L}}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(S1) *Si $s, s' \in S$, alors $s \subseteq s'$ ou $s' \subseteq s$*
(S2) *$[K] \in S$*
(S3) *Si $s \in S$, alors $[K] \subseteq s$*
(S4) *$M_{\mathscr{L}} \in S$*
(S5) *Si α est une formule et si $[\alpha]$ intersecte une sphère de S, alors il existe une sphère minimale qui intersecte $[\alpha]$ (on note $C(\alpha) = [\alpha] \cap S_{\alpha}$).*

Une sphère est définie comme un ensemble de mondes possibles, et le système de sphères centré sur $[K]$ est construit de la façon suivante :

- Les sphères sont imbriquées les unes dans les autres.
- L'ensemble des mondes possibles de K est la plus petite sphère.
- L'ensemble des mondes possibles, $M_{\mathscr{L}}$, est la plus grande sphère.

Théorème 1.8 ([GROVE 1988]).
Soit une théorie K. Il existe un système de sphères S centré sur $[K]$ tel que pour toute formule α, $K * \alpha = K_{C(\alpha)}$ si et seulement si $*$ est un opérateur de révision satisfaisant $(K*1)$-$(K*8)$.

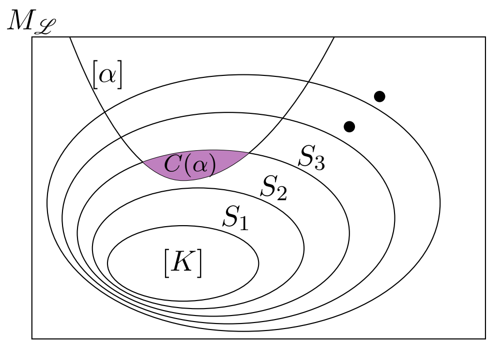


FIGURE 1.2 – Révision de K par α via un système de sphères centré sur $[K]$

Graphiquement, cela peut être représenté comme sur la figure 1.2 : les mondes possibles qui satisfont la théorie ($[K]$) sont les mondes les plus plausibles. Les autres mondes sont ensuite ordonnés suivant leur plausibilité (sphères S_1, S_2, ...). Lorsque l'on révise par une nouvelle croyance α, les mondes possibles de α qui appartiennent à la sphère la plus plausible (la plus « basse ») sont conservés.

1.2 Le cadre KM

Katsuno et Mendelzon ont proposé une formulation équivalente des postulats AGM instanciés au cadre propositionnel standard. Une base de croyances finie K est équivalente à une formule φ, la conjonction des formules de K. Dans ce cadre, la révision de φ par μ revient à rechercher les modèles de μ les plus proches de ceux de φ.

1.2.1 Postulats

Soient φ et μ deux formules propositionnelles où φ joue le rôle de la base de croyances et μ celui de la nouvelle croyance. La révision de φ par μ est une nouvelle formule notée $\varphi \circ \mu$ qui doit vérifier les postulats suivants [Katsuno & Mendelzon 1992] :

(R1) $\varphi \circ \mu \vdash \mu$ (succès)

(R2) Si $\varphi \wedge \mu$ est cohérent alors $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$ (vacuité/préservation)

(R3) Si μ est cohérent alors $\varphi \circ \mu$ est cohérent (cohérence)

(R4) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\varphi_1 \circ \mu_1 \equiv \varphi_2 \circ \mu_2$ (extensionalité)

(R5) $(\varphi \circ \mu) \wedge \psi \vdash \varphi \circ (\mu \wedge \psi)$ (inclusion conjonctive)

(R6) Si $(\varphi \circ \mu) \wedge \psi$ est cohérent alors $\varphi \circ (\mu \wedge \psi) \vdash (\varphi \circ \mu) \wedge \psi$ (vacuité conjonctive)

La signification de ces postulats est la suivante : la nouvelle croyance est conservée dans la base de croyances révisée ($R1$). On garantit que, lorsque qu'il n'y a pas de conflit, la révision est une conjonction ($R2$). Si la nouvelle croyance est cohérente, la base de croyances révisée par cette croyance l'est aussi ($R3$). Le principe d'indépendance à la syntaxe est respecté ($R4$). La minimalité du changement est assurée par ($R5$) et ($R6$).

Théorème 1.9 ([Katsuno & Mendelzon 1992]).
Soit $*$ un opérateur de révision sur les théories et $\circ$ un opérateur de révision sur les formules propositionnelles correspondant (i.e. pour tout φ et tout μ, $Cn(\varphi) * \mu = Cn(\varphi \circ \mu)$). L'opérateur $*$ satisfait $(K*1)$-$(K*8)$ si et seulement si $\circ$ satisfait $(R1)$-$(R6)$.

Ce théorème nous montre que les opérateurs de révision satisfaisant les postulats KM ($R1$)-($R6$) correspondent aux opérateurs de révision satisfaisant les postulats AGM $(K*1)$-$(K*8)$.

1.2.2 Théorème de représentation

Katsuno et Mendelzon ont aussi proposé un théorème de représentation permettant de donner une définition constructive d'un opérateur de révision AGM $\circ$ dans le cadre propositionnel standard. Ce théorème, exprimant la révision comme une sélection de modèles minimaux de la nouvelle information suivant une mesure de confiance sur les modèles, correspond à une méthode de révision basée sur les pré-ordres sur les mondes possibles, associés aux formules par un assignement fidèle.

Définition 1.10 (Assignement fidèle ([Katsuno & Mendelzon 1992])).
Un assignement fidèle est une fonction qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ sur les interprétations tel que :

1. *Si $I \models \varphi$ et $J \models \varphi$, alors $I \simeq_\varphi J$*

2. *Si $I \models \varphi$ et $J \not\models \varphi$, alors $I <_\varphi J$*

3. Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$*, alors* $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$

Cela signifie que les modèles de φ sont tous équivalents pour le pré-ordre associé et sont strictement préférés aux contre-modèles de φ. Plus une interprétation est préférée, plus elle sera petite pour l'ordre. Lorsque nous effectuons une révision, ce sont alors les interprétations de la nouvelle information les plus crédibles pour la base courante qui forment les modèles de la nouvelle base de connaissances. C'est ce qu'indique le théorème de représentation suivant.

Théorème 1.10 ([Katsuno & Mendelzon 1992]).
Un opérateur de révision $\circ$ *satisfait les postulats* $(R1)$-$(R6)$ *si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances* φ *un pré-ordre total* $\leq_\varphi$ *tel que* $Mod(\varphi \circ \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\varphi)$.

Nous avons le même mécanisme que les systèmes de sphères [Grove 1988], mais ici le système est plus simplement représenté par un pré-ordre total. Nous illustrons cette représentation sur la figure 1.3. Les interprétations (représentés sous forme de points) sont situés à des niveaux différents L_i. Deux interprétations au même niveau sont tout aussi plausibles (i.e. $I \simeq_\varphi J$). Une interprétation I apparaissant à un niveau plus petit qu'une autre interprétation J est strictement plus plausible (i.e. $I <_\varphi J$). Les interprétations apparaissant au niveau le plus bas (L_0) sont les modèles de la base de croyances φ.

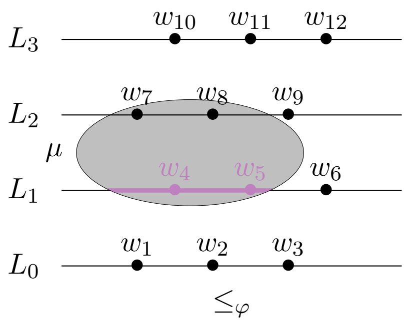


Figure 1.3 – Révision de φ par μ

Quand φ est révisé par μ, le résultat se compose des modèles de μ les plus plausibles selon le pré-ordre $\leq_\varphi$. Ceci représente le changement minimal pour déduire μ. Ces interprétations sont situés au niveau L_1 sur la figure 1.3.

1.2.3 Opérateurs de révision à base de distances

Nous présentons ici une famille d'opérateurs de révision particulière, qui satisfait les postulats KM, ainsi qu'un des opérateurs les plus connus de cette famille. Il s'agit de la famille des opérateurs de révision à base de distance, qui utilisent une distance entre interprétations pour définir l'assignement fidèle. Nous présentons en particulier l'opérateur de Dalal [Dalal 1988] qui peut être exprimé via une telle distance.

Définition 1.11 (Opérateur de révision à base de distance).
Soient d *une distance entre interprétations sur un ensemble de variables booléennes* $\mathcal{V}$ *et* φ *une formule du langage propositionnel* $\mathcal{L}_0$ *construit sur* $\mathcal{V}$*. Le pré-ordre total* $\leq^d_\varphi$ *est défini par*

$$I \leq^d_\varphi J \text{ si et seulement si } d(I, Mod(\varphi)) \leq d(J, Mod(\varphi)).$$

Pour toutes formules φ et μ, l'opérateur de révision $\circ_d$ basé sur la distance d est défini par

$$Mod(\varphi \circ_d \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\varphi^d).$$

Nous rappelons ici la notion de distance de Hamming [HAMMING 1950] entre interprétations qui est utilisée pour définir l'opérateur de révision de Dalal.

Définition 1.12 (Distance de Hamming entre interprétations ([HAMMING 1950]))**.**
Soient I et J deux interprétations sur un ensemble de variables booléennes $\mathbb{P}$. La distance de Hamming entre ces deux interprétations, notée $h(I, J)$, est le nombre de de variables propositionnelles de $\mathbb{P}$ qui diffèrent entre ces deux interprétations. Formellement,

$$h(I, J) = |\{x \in \mathbb{P} : I(x) \neq J(x)\}|,$$

où $I(x)$ est la valeur de vérité de l'atome x dans I.

Nous avons maintenant toutes les notions requises pour définir l'opérateur de Dalal :

Définition 1.13 (Opérateur de révision de Dalal)**.**
L'opérateur de révision de Dalal $\circ_D$ est l'opérateur de révision à base de distance défini à partir de la distance de Hamming h. Ainsi, la révision de Dalal de φ par μ est définie par

$$Mod(\varphi \circ_D \mu) = min(Mod(\mu), \leq_\varphi^h).$$

Le pré-ordre total associé à la distance de Hamming satisfait les propriétés des assignements fidèles, et, par conséquent, $\circ_D$ est un opérateur de révision KM (i.e. il satisfait les postulats ($R1$)-($R6$)).

De manière générale, tout pré-ordre défini via une distance satisfait les propriétés des assignements fidèles, c'est pourquoi les opérateurs de révision à base de distance satisfont les postulats KM.

Illustrons cet opérateur de révision sur notre exemple du pingouin manchot.

Exemple 1.5 (Le pingouin manchot vs. opérateur de révision de Dalal)**.**
Reprenons une dernière fois l'exemple 1.1. Soit $\mathcal{L}_0$ un langage contenant trois variables propositionnelles $\{oiseau, vole, bec\}$. Bob observe au loin un volatile, il suppose que celui-ci sait voler. Sa base de croyances est donc $\varphi = oiseau \wedge vole$. En s'approchant, il semble à Bob qu'il s'agit d'un manchot, or les manchots ne savent pas voler ($\mu = \neg vole$). Bob doit donc réviser ses croyances. La troisième colonne du tableau suivant indique la distance entre chaque modèle de μ ($\{000, 001, 100, 101\}$) et de φ ($\{110, 111\}$).

	110	111	φ
000	2	3	2
001	3	2	2
100	1	2	1
101	2	1	1

Le résultat est l'ensemble des modèles de μ les plus proches de φ :

$$Mod(\varphi \circ_D \mu) = \{100, 101\}$$
$$\varphi \circ_D \mu \equiv oiseau \wedge \neg vole$$

L'opérateur de Dalal, comme tout opérateur se basant sur les postulats du cadre KM, est un opérateur sémantique de révision. Il existe également différentes approches syntaxiques pour la révision.

1.3 Approches syntaxiques pour la révision

Des approches syntaxiques, aussi connues comme des approches basées sur des formules, ont également été étudiées pour la révision. Parmis ces approches, nous trouvons la semi-révision [Hansson 1997], la révision sélective [Hansson 1999] ou encore la révision par R-ensembles [Papini 1992, Würbel *et al.* 2000], que nous détaillons dans la suite de cette section.

La révision par R-ensembles

L'approche syntaxique de la révision par R-ensembles [Papini 1992, Würbel *et al.* 2000] traite de la révision d'un ensemble de formules propositionnelles par un ensemble de formules propositionnelles. Les formules sont mises sous forme normale conjonctive (CNF) [1]. Les auteurs considèrent les formules comme des ensembles finis de clauses. Soient Σ et Λ deux ensembles finis de clauses cohérents. La révision par R-ensembles consiste à choisir les ensembles minimaux de clauses de Σ, appelés *R-ensembles*, afin de restaurer la cohérence de $\Sigma \cup \Lambda$.

Définition 1.14 (R-ensemble)**.**
Soient Σ et Λ deux ensembles finis de clauses cohérents tels que $\Sigma \cup \Lambda$ est incohérent. $R \subseteq \Sigma$ est un R-ensemble de $\Sigma \cup \Lambda$ si et seulement si

- $(\Sigma \setminus R) \cup \Lambda$ *est cohérent ;*
- *pour tout $R' \subseteq \Sigma$, si $(\Sigma \setminus R') \cup \Lambda$ est cohérent, alors $|R| \leq |R'|$.*

L'ensemble des R-ensembles de $\Sigma \cup \Lambda$ est noté $\mathcal{R}(\Sigma \cup \Lambda)$. La révision par R-ensembles est alors définie comme suit :

Définition 1.15 (Révision par R-ensembles)**.**
Soient Σ et Λ deux ensembles finis de clauses cohérents, et $\circ_{RSR}$ l'opérateur de révision par R-ensembles. La révision par R-ensembles de Σ par Λ est définie comme suit :

$$\Sigma \circ_{RSR} \Lambda = \bigvee_{R \in \mathcal{R}(\Sigma \cup \Lambda)} Cn((\Sigma \setminus R) \cup \Lambda).$$

1.4 Révision itérée

Il existe une approche étendue de la révision, appelée révision itérée [Lehmann 1995, Darwiche & Pearl 1997]. Celle-ci permet la révision d'une base de croyances par une séquence de nouvelles informations $(\varphi_1, ...\varphi_n)$, où, comme d'habitude, chaque information φ_i est préférée aux croyances initiales. De plus, φ_j est préférée à φ_i, pour $1 < i < j < n$. Une caractérisation logique de la révision itérée a été proposée par Darwiche et Pearl dans [Darwiche & Pearl 1997]. Il existe plusieurs opérateurs pour la révision itérée, tels que l'opérateur de révision naturel proposé par Boutilier [Boutilier 1993], les opérateurs de révision rangée de Lehmann [Lehmann 1995], l'opération de révision probabiliste [Benferhat *et al.* 2002b], ou encore l'approche de révision basée sur des polynômes [Benferhat *et al.* 2002a].

1. Une formule est une CNF si et seulement si elle est une conjonction d'une ou plusieurs disjonction(s) d'un ou plusieurs litéraux.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie du changement de croyances comme proposée par AGM et KM. La théorie du changement de croyances vise à formaliser l'évolution des croyances d'un agent quand il est confronté à de nouvelles informations. Le principal cadre théorique pour le changement de croyances est la théorie AGM. En particulier, pour réviser un ensemble de croyances par une formule, nous avons présenté l'approche par système de sphères. Cette méthode est basée sur un classement des mondes possibles, et garde comme résultat de la révision les mondes possibles minimaux (en respectant le classement) qui sont cohérents avec la formule de révision. Nous avons également présenté un cas particulier du système de sphères lorsque nous révisons une base de croyances par une formule. Il s'agit des opérateurs de révision en termes d'assignements fidèles. Cette approche de la révision dans le cadre de la logique propositionnelle est à l'origine d'une des contributions décrites dans cette thèse. En effet, dans le chapitre suivant, nous présentons nos travaux sur la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie.

Chapitre 2

Contraction en logique propositionnelle finie

Un bachelier est un homme qui apprend, et un docteur un homme qui oublie.
(Antoine Furetière – Le Roman Bourgeois)

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, Hirofumi Katsuno et Alberto O. Mendelzon [Katsuno & Mendelzon 1992] ont donné un théorème de représentation pour les opérateurs de révision en terme d'assignements fidèles. Ce théorème de représentation est important puisqu'il est à l'origine des principales approches de révision itérée de croyances [Darwiche & Pearl 1997, Booth & Meyer 2006, Jin & Thielscher 2007, Konieczny & Pino Pérez 2008].

Nous avons également vu que les identités de Levi et Harper peuvent être utilisées pour définir des opérateurs de contraction via des opérateurs de révision et inversement. Ceci montre bien que ces deux opérations sont étroitement liées. Ainsi, des travaux sur la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie peuvent être attendus. Cependant, ce problème n'avait pas été étudié jusqu'à présent.

Le but de ce chapitre est de donner une définition des opérateurs de contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie correspondant aux opérateurs de révision introduits par Katsuno et Mendelzon, et de vérifier que ces opérateurs offrent des propriétés attendues. Dans un premier temps, nous rappelons la connexion entre les ensembles de croyances et les bases de croyances. Nous donnons un ensemble de postulats pour les opérateurs de contraction de base de croyances. Nous étudions ensuite la correspondance entre la contraction d'ensembles de croyances et la contraction entre bases de croyances ; nous vérifions, en utilisant les identités de Levi et Harper, qu'il existe un lien entre les opérateurs de révision satisfaisant les postulats de Katsuno et Mendelzon et les opérateurs de contraction satisfaisant nos postulats. Nous établissons ensuite un théorème de représentation pour ces opérateurs de contraction de bases de croyances, que nous illustrons en définissant un opérateur de contraction de Dalal. Nous concluons en discutant des perspectives de recherche de cette première contribution.

Les résultats obtenus ne sont pas très surprenants, puisque la plupart d'entre eux peuvent être obtenus comme corollaires de théorèmes existants (en particulier les théorèmes de représentation précédents et les identités de Levi et Harper). Néanmoins, nous considérons que prouver ces résultats directement (et non pas comme un sous-produit de résultats existants) est important pour un certain nombre de cadres dans lesquels nous ne pouvons pas appliquer directement toute la « machinerie » AGM.

Sommaire

2.1 Des ensembles de croyances vers les bases de croyances

Notre objectif est de définir des opérateurs de contraction de bases de croyances dans le cadre de la logique propositionnelle finie. Soient deux formules φ et α. $\varphi - \alpha$ désigne la contraction de φ par α, qui est la nouvelle formule obtenue en supprimant la croyance α (des conséquences) de la base de croyances φ.

Afin de relier les ensembles de croyances de la théorie AGM et la notion de base de croyances propositionnelle, nous devons dans un premier temps poser un lien formel entre les ensembles de croyances et les bases de croyances. Tel est le but de la proposition suivante :

Proposition 2.1.
Dans le cadre propositionnel fini, l'application Cn de $\mathcal{L}_0 \equiv$ vers l'ensemble de tous les ensembles de croyances, associant un ensemble de croyances $K = Cn(\varphi)$ à toute base de croyances représentée par une formule φ considérée à l'équivalence logique près, est bijective.

Démonstration. Soient un ensemble de formules $E = \mathcal{L}_0 \equiv$ considérées à l'équivalence logique près et l'ensemble des ensembles de croyances F. Nous voulons montrer que Cn est une bijection de E vers F.

Nous commençons par montrer que Cn est une surjection de E vers F. Cela revient à montrer que pour chaque ensemble de croyances K de F, nous pouvons construire une formule φ telle que φ est équivalente à la conjonction de toutes les formules de K. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que chaque formule α de K est une formule CNF, de sorte que K est équivalent à l'ensemble (infini) des clauses δ apparaissant dans la représentation d'au moins une des formules α de K. En logique propositionnelle finie, cet ensemble infini de clauses est équivalent à l'ensemble fini de ses éléments les plus forts logiquement. Et puisque cet ensemble est fini, la conjonction de ses éléments est une formule φ satisfaisant la condition attendue : $K = Cn(\varphi)$.

Il reste à montrer que Cn est une injection de E vers F.

Considérons deux formules φ et ψ de E telles que $\varphi \not\equiv \psi$. Puisque $\varphi \not\equiv \psi$, il y a un modèle I de φ qui n'est pas un modèle de ψ, ou un modèle de ψ qui n'est pas un modèle de φ. Supposons que I soit un modèle de $\varphi \wedge \neg\psi$ (le cas restant est symétrique à celui-ci). D'une part, puisque $I \models \varphi$ il n'est pas possible que $\varphi \models \neg\alpha_{\{I\}}$, d'où $\neg\alpha_{\{I\}} \notin Cn(\varphi)$. D'autre part, puisque $I \models \neg\psi$, nous avons $\psi \models \neg\alpha_{\{I\}}$, d'où $\neg\alpha_{\{I\}} \in Cn(\psi)$.

Par conséquent, $Cn(\varphi) \neq Cn(\psi)$, et cela conclut la preuve. □

Ainsi, pour une base de croyances φ, la notation $K_\varphi = Cn(\varphi)$ est bien définie. De même, pour un ensemble de croyances K, la notation $\varphi_K \equiv Cn^{-1}(K)$ est bien définie.

Corollaire 2.1.
Nous avons $\varphi \equiv \varphi_{K_\varphi}$. De même, nous avons $K = K_{\varphi_K}$.

Démonstration. Ce résultat découle directement du fait que Cn est une bijection. En effet, à partir de la proposition 2.1, $\varphi_{K_\varphi} = Cn^{-1}(K_\varphi) = Cn^{-1}(Cn(\varphi)) = \varphi$. Et $K_{\varphi_K} = Cn(\varphi_K) = Cn(Cn^{-1}(K)) = K$. □

Dans ce cas, dans le cadre de la logique propositionnelle finie, une correspondance entre les opérateurs de contraction AGM d'ensembles de croyances et les opérateurs de contraction de bases de croyances peut être établie :

Définition 2.1 (Correspondance entre opérateurs de contraction)**.**
Étant donné un opérateur de contraction d'ensembles de croyances $\div$, l'opérateur de contraction de bases de croyances $-_{(\div)}$ est défini par : $\varphi -_{(\div)} \alpha = \varphi_{K_\varphi \div \alpha}$.

Inversement, étant donné un opérateur de contraction de bases de croyances $-$, l'opérateur de contraction d'ensembles de croyances $\div_{(-)}$ est défini par : $K \div_{(-)} \alpha = K_{\varphi_K - \alpha}$.

Soient un opérateur de contraction d'ensembles de croyances $\div$ et un opérateur de contraction de bases de croyances $-$. On dit que les opérateurs $\div$ et $-$ correspondent l'un à l'autre si $\div = \div_{(-)}$ et $- = -_{(\div)}$.

La proposition suivante montre que si nous utilisons un opérateur de contraction d'ensemble de croyances $\div$ pour définir, via la définition 2.1, un opérateur de contraction de bases de croyances $-_{(\div)}$, alors l'opérateur de contraction d'ensembles de croyances correspondant défini via la définition 2.1 est l'opérateur de contraction initial $\div$ (et inversement).

Proposition 2.2.
Nous avons $-_{(\div_{(-)})} = -$. De même, nous avons $\div_{(-_{(\div)})} = \div$.

Démonstration. Nous voulons montrer que $\varphi -_{(\div_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$. À partir de la définition 2.1, $\varphi -_{(\div_{(-)})} \alpha = \varphi_{K_\varphi \div_{(-)} \alpha} = \varphi_{K_{\varphi_{K_\varphi} - \alpha}}$. Nous avons, en utilisant la proposition 2.1, $\varphi_{K_{\varphi_{K_\varphi} - \alpha}} \equiv \varphi_{K_{\varphi - \alpha}}$. Ainsi, $\varphi_{K_{\varphi-\alpha}} = Cn^{-1}(K_{\varphi-\alpha}) = Cn^{-1}(Cn(\varphi - \alpha)) \equiv \varphi - \alpha$.

Nous avons donc $\varphi -_{(\div_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$.

Nous montrons maintenant que $K \div_{(-_{(\div)})} \alpha = K \div \alpha$. À partir de la définition 2.1, $K \div_{(-_{(\div)})} \alpha = K_{\varphi_K -_{(\div)} \alpha} = K_{\varphi_{K_{\varphi_K} \div \alpha}}$. En utilisant la proposition 2.1, nous avons $K_{\varphi_{K_{\varphi_K} \div \alpha}} = K_{\varphi_{K \div \alpha}}$. Ainsi, $K_{\varphi_{K \div \alpha}} = Cn(\varphi_{K \div \alpha}) = Cn(Cn^{-1}(K \div \alpha)) = K \div \alpha$.

Nous avons donc $K \div_{(-_{(\div)})} \alpha = K \div \alpha$. □

2.2 Postulats de contraction

Nous définissons maintenant un ensemble de postulats pour la contraction de bases de croyances propositionnelles. Dans la suite, φ, α et β sont des formules de $\mathcal{L}_0$:

- **(C1)** $\varphi \vdash \varphi - \alpha$ (inclusion)
- **(C2)** Si $\varphi \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$ (vacuité/préservation)
- **(C3)** Si $\varphi - \alpha \vdash \alpha$, alors $\vdash \alpha$ (succès)
- **(C4)** $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$ (restauration)
- **(C5)** Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, alors $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$ (extension)
- **(C6)** $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$ (intersection)

(C7) Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$, alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (conjonction)

La signification intuitive de ces postulats est la suivante : (C1) veille à ce que, après la contraction, aucune nouvelle information n'est ajoutée à la base de croyances. (C2) indique que si α n'est pas déductible de φ, alors aucune modification n'est apportée à la base de croyances au cours de la contraction. (C3) assure que la seule possibilité pour que la contraction de φ par α échoue est que α soit une tautologie. (C4) indique que la conjonction de la contraction de φ par α et α donne une formule propositionnelle qui est équivalente à φ (l'implication inverse est une conséquence de (C1) lorsque $\varphi \vdash \alpha$). (C5) reflète le principe d'indépendance à la syntaxe. (C6) et (C7) expriment la minimalité du changement pour la conjonction. En particulier, (C6) indique que la contraction de φ par une conjonction $(\alpha \wedge \beta)$ implique toujours la disjonction des contractions de φ par α et de φ par β. Et (C7) indique que, si α n'a pas été retirée au cours de la contraction par $\alpha \wedge \beta$, alors la contraction par α doit impliquer la contraction par la conjonction.

La proposition suivante montre que les opérateurs de contraction satisfaisant les postulats (C1)-(C7) correspondent aux opérateurs de contraction satisfaisant les postulats AGM $(K \div 1)$-$(K \div 8)$.

Proposition 2.3.
Soient un opérateur de contraction d'ensembles de croyances $\div$ et l'opérateur de contraction de bases de croyances $-$ $(= -_{(\div)})$ qui lui correspond. L'opérateur $\div$ satisfait les postulats (K÷1)-(K÷8) si et seulement si l'opérateur $-$ satisfait les postulats (C1)-(C7).

Démonstration. Soient un ensemble de croyances K, une formule φ de $\mathcal{L}_0$ telle que $K = Cn(\varphi)$, et des formules α, β, φ_1, φ_2, α_1, et α_2 de $\mathcal{L}_0$.

- Nous montrons dans un premier temps que $\div$ satisfait (K÷2) si et seulement si $-$ satisfait (C2) :
  $K \div \alpha \subseteq K \Leftrightarrow Cn(\varphi) \div \alpha \subseteq Cn(\varphi) \Leftrightarrow Cn(\varphi - \alpha) \subseteq Cn(\varphi) \Leftrightarrow \varphi \vdash \varphi - \alpha$.

- Nous montrons que si $\div$ satisfait (K÷3) alors $-$ satisfait (C2) et si $-$ satisfait (C1) et (C2) alors $\div$ satisfait (K÷3) :
  - Nous montrons d'abord que si $\div$ satisfait (K÷3), alors $-$ satisfait (C2).
    Si $\alpha \notin K$ alors $K \div \alpha = K$. Ainsi, d'après (K÷3), si $\alpha \notin K$ alors $K \subseteq K \div \alpha$, ce qui signifie pour l'opérateur correspondant $-$ que si $\varphi \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$.
  - Nous montrons maintenant que si $-$ satisfait (C1) et (C2), alors $\div$ satisfait (K÷3).
    (Si $\varphi \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$) et $\varphi \vdash \varphi - \alpha \Rightarrow$ (Si $\alpha \notin K$ alors $K \subseteq K \div \alpha$) et $K \div \alpha \subseteq K$ $\Rightarrow$ Si $\alpha \notin K$ alors $(K \subseteq K \div \alpha$ et $K \div \alpha \subseteq K) \Rightarrow$ Si $\alpha \notin K$ alors $K = K \div \alpha$

- Nous montrons que $\div$ satisfait (K÷4) si et seulement si $-$ satisfait (C3) :
  Si $\nvdash \alpha$ alors $\alpha \notin K \div \alpha \Leftrightarrow$ si $\alpha \in K \div \alpha$ alors $\vdash \alpha$. $\alpha \in K \div \alpha \Leftrightarrow \alpha \in Cn(\varphi) \div \alpha \Leftrightarrow \varphi - \alpha \vdash \alpha$.
  Ainsi, si $\alpha \in K \div \alpha$ alors $\vdash \alpha \Leftrightarrow$ si $\varphi - \alpha \vdash \alpha$ alors $\vdash \alpha$.

- Nous montrons que si $-$ satisfait (C4) alors $\div$ satisfait (K÷5), et que si $\div$ satisfait (K÷5) et (K÷3) alors $-$ satisfait (C4) :
  Si $\alpha \in K$ alors $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha$
  $\alpha \in K \Leftrightarrow \varphi \vdash \alpha$
  $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha \Leftrightarrow Cn(\varphi) \subseteq (Cn(\varphi) \div \alpha) + \alpha \Leftrightarrow Cn(\varphi) \subseteq Cn((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) \Leftrightarrow (\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$.
  Ainsi, si $\alpha \in K$ alors $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha \Leftrightarrow$ si $\varphi \vdash \alpha$ alors $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$.
  Si $\alpha \notin K$ alors, d'après (K÷3), $K \subseteq (K \div \alpha)$, ainsi $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha$, et nous montrons de la même manière qu'au point précédent que si $\varphi \nvdash \alpha$ alors $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$.

- Nous montrons que $\div$ satisfait (K$\div$6) si et seulement si $-$ satisfait (C5) :
  Soient deux formules φ_1 et φ_2 telles que $Cn(\varphi_1) = Cn(\varphi_2) = K$. Si $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ alors $K \div \alpha_1 = K \div \alpha_2 \Leftrightarrow$ Si $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ et $Cn(\varphi_1) = Cn(\varphi_2)$ alors $Cn(\varphi_1) \div \alpha_1 = Cn(\varphi_2) \div \alpha_2 \Leftrightarrow$ Si $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$

- Nous montrons que $\div$ satisfait (K$\div$7) si et seulement si $-$ satisfait (C6) :
  $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta)$
  $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) = (Cn(\varphi - \alpha) \cap (Cn(\varphi - \beta) = Cn((\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)) \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$
  $K \div (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - (\alpha \wedge \beta)$
  Ainsi $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$

- Nous montrons finalement que $\div$ satisfait (K$\div$8) si et seulement si $-$ satisfait (C7) :
  Si $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$ alors $K \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha$
  $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$
  $K \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha \Leftrightarrow Cn(\varphi) \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq Cn(\varphi) \div \alpha \Leftrightarrow \varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$
  Ainsi, si $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$ alors $K \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha \Leftrightarrow$ Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

□

De plus, il apparaît que la contraction d'une formule φ par une conjonction de formules $(\alpha \wedge \beta)$ ne peut avoir que trois résultats différents (à l'équivalence logique près). Un tel résultat trichotomique est similaire à celui obtenu dans le cadre AGM classique [Gärdenfors 1988].

Proposition 2.4.
En présence de (C1)-(C5), la conjonction de (C6) et (C7) est équivalente à (Tri) :

$$\textbf{(Tri)} \quad \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \ \textit{ou} \\ \varphi - \beta \ \textit{ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases}$$

Démonstration. Soient les formules φ, α, et β de $\mathcal{L}_0$. ($\Rightarrow$)
Supposons que (C6) et (C7) sont satisfaits :
(C6) : $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$
(C7) : Si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$

Si $\alpha \wedge \beta$ est valide, alors α est valide et β est valide. Nous avons donc $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \equiv \beta$. D'après (C5), nous avons : $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha \equiv \varphi - \beta \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$.

Si $\alpha \wedge \beta$ n'est pas valide (i.e., α n'est pas valide or β n'est pas valide) alors, par (C3), $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha \wedge \beta$.
Ainsi, il y a trois cas :

1. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \beta$
2. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$
3. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$

Nous considérons les trois cas suivants :

1. (Hyp1) Supposons que
$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha \qquad (\triangleleft)$$

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \beta \qquad (\triangleright)$$

D'après (C6), $\varphi-(\alpha\wedge\beta) \vdash (\varphi-\alpha)\vee(\varphi-\beta)$. D'après $(\triangleright)$, $\varphi-(\alpha\wedge\beta) \vdash [(\varphi-\alpha)\vee(\varphi-\beta)]\wedge\beta$. Ainsi,

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash [(\varphi - \alpha) \wedge \beta] \vee [(\varphi - \beta) \wedge \beta] \qquad (\diamond)$$

D'après (C4) et (C1), $(\varphi - \beta) \wedge \beta \vdash \beta$ et $\varphi \vdash \varphi - \alpha$. Ainsi, $(\varphi - \beta) \wedge \beta \vdash \varphi - \alpha$. Et donc, $(\varphi - \beta) \wedge \beta \vdash (\varphi - \alpha) \wedge \beta$. Ce qui implique que $[(\varphi - \alpha) \wedge \beta] \vee [(\varphi - \beta) \wedge \beta] \equiv (\varphi - \alpha) \wedge \beta$.

D'après $(\diamond)$ nous pouvons déduire que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \wedge \beta$. Ainsi

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \qquad (\Delta)$$

D'après (C7) et $(\triangleleft)$, nous dérivons que

$$\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta) \qquad (\nabla)$$

Enfin, d'après (Δ) et (∇) nous déduisons que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha)$.

$$\text{(C6) et (C7)} \;\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \tag{2.1}$$

2. (Hyp2) Supposons que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$.
Ce cas étant symétrique au précédent, nous avons par symétrie :

$$\text{(C6) et (C7)} \;\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \beta) \tag{2.2}$$

3. (Hyp3) Supposons que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$ et $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \beta$.
(C7) et $\varphi-(\alpha\wedge\beta) \nvdash \alpha \Rightarrow \varphi-\alpha \vdash \varphi-(\alpha\wedge\beta)$. (C7) et $\varphi-(\alpha\wedge\beta) \nvdash \beta \Rightarrow \varphi-\beta \vdash \varphi-(\alpha\wedge\beta)$. $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ and $\varphi - \beta \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$. (C6) donne l'implication inverse.

$$\text{(C6) et (C7)} \;\Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \tag{2.3}$$

(1) + (2) + (3) impliquent que, en présence de (C1)-(C5),

$$\text{(C6) et (C7)} \Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \text{ ou} \\ \varphi - \beta \text{ ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases} \tag{Δ_1}$$

$(\Leftarrow)$

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \text{ ou} \\ \varphi - \beta \text{ ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases}$$

Nous avons trois cas à considérer :

1. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha$
$\varphi - \alpha \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$ (C6)
Comme $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha$, nous avons $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ ainsi (C7) est trivialement satisfait.

$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha \Rightarrow \text{(C6) et (C7)} \tag{2.4}$$

2. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \beta$
   Ce cas étant symétrique au précédent, nous avons par symétrie :
$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \beta \Rightarrow \text{(C6) et (C7)} \tag{2.5}$$

3. $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \Rightarrow \varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$ (C6)
   et $(\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ ce qui implique que $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$, ainsi (C7) est trivialement satisfait.
$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \tag{2.6}$$

(4)+(5)+(6) impliquent que, en présence de (C1)-(C5),
$$\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \begin{cases} \varphi - \alpha \text{ ou} \\ \varphi - \beta \text{ ou} \\ (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \end{cases} \Rightarrow \text{(C6) et (C7)} \tag{Δ_2}$$

□

En regardant la preuve de cette proposition, nous pouvons observer que si $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \beta$, alors $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi - \alpha$. Ce qui signifie que, quand β est plus enraciné (i.e., plus important/plausible) que α, ainsi lorsque nous devons retirer $\alpha \wedge \beta$, la contraction à effectuer est exactement la contraction par α uniquement.

2.3 Correspondance entre contraction et révision

Maintenant que nous avons défini des postulats pour les opérateurs de contraction de bases de croyances, nous pouvons vérifier que les opérateurs de contraction satisfaisant ces postulats correspondent aux opérateurs de révision au sens de Katsuno et Mendelzon [Katsuno & Mendelzon 1992].

Nous montrons dans un premier temps que les identités de Levi et de Harper sont également valides dans ce cadre propositionnel. Nous notons $\circ_{(-)}$ l'opérateur de révision de bases de croyances défini depuis $-$ à l'aide de l'identité de Levi, et $-_{(\circ)}$ l'opérateur de contraction de bases de croyances défini depuis $\circ$ à l'aide de l'identité de Harper.

Définition 2.2 (Identités de Levi et Harper).
Les identités de Levi et de Harper dans le cadre propositionnel peuvent être exprimées comme suit. Soient deux formules φ et α de $\mathcal{L}_0$:
$\varphi \circ_{(-)} \alpha = (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha$ ***(identité de Levi)***
$\varphi -_{(\circ)} \alpha = \varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)$ ***(identité de Harper)***

Ces identités sont des traductions directes des identités habituelles. Remarquons simplement que l'opérateur d'expansion utilisé habituellement dans l'identité Levi se traduit ici (comme prévu) par une conjonction.

Les opérateurs obtenus en utilisant ces identités satisfont les propriétés attendues, comme nous allons le montrer ci-dessous.

De la contraction vers la révision

Proposition 2.5.
Si l'opérateur de contraction $-$ satisfait (C1)-(C5), alors l'opérateur de révision $\circ_{(-)}$ défini en utilisant l'identité de Levi satisfait (R1)-(R4). De plus, si (C6) est satisfait par $-$, alors (R5) est satisfait par $\circ_{(-)}$; et si (C7) est satisfait par $-$, alors (R6) est satisfait par $\circ_{(-)}$.

Démonstration. Soient φ, α, β, et γ des formules de $\mathcal{L}_0$. Supposons que (C1)-(C5) sont satisfaits.

- (R1) : nous avons directement $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \vdash \alpha$. Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

- (R2) : supposons que $\varphi \wedge \alpha$ soit cohérent, ainsi nous avons $\varphi \nvdash \neg\alpha$. D'après (C1) et (C2), nous avons $\varphi - \neg\alpha \equiv \varphi$. Ainsi $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$. Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$.

- (R3) : supposons que α soit cohérent, ainsi nous avons $\nvdash \neg\alpha$. D'après (C3), nous avons $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha$. Ainsi $(\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \nvdash \bot$. Ce qui nous donne $\varphi \circ \alpha \nvdash \bot$.

- (R4) : supposons que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. D'après (C5), nous avons $\varphi_1 - \neg\alpha_1 \equiv \varphi_2 - \neg\alpha_2$. Ainsi $(\varphi_1 - \neg\alpha_1) \wedge \alpha_1 \equiv (\varphi_2 - \neg\alpha_2) \wedge \alpha_2$. Ce qui nous donne $\varphi_1 \circ \alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \alpha_2$.

Supposons que (C6) soit satisfait et qu'il existe une formule γ telle que $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. Nous voulons montrer que $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma$.

Comme $\neg\alpha \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$, d'après (C5), il suffit de montrer, en utilisant l'identité de Levi, que $[\varphi - (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \beta))] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$. D'après (C6), il suffit de montrer que $[\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$ et $[\varphi - (\alpha \rightarrow \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$.

- Comme $(\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$ d'après l'identité de Levi, par hypothèse, $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. Ainsi, nous avons également $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma$, ce qui nous permet de conclure.

- $\varphi \wedge \alpha \vdash \varphi \circ \alpha$ est une conséquence de (R2) (R2.2)
  Comme $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$, d'après (R2.2) $\varphi \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. D'où $\varphi \vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$.

  Nous avons deux cas à considérer :

  - Si $\varphi \nvdash (\alpha \rightarrow \beta)$, d'après (C2) nous avons $\varphi - (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \varphi$. D'où $\varphi - (\alpha \rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$. Ainsi $[\varphi - (\alpha \rightarrow \beta)] \wedge \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$.
  - Si $\varphi \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$, d'après (C4) nous avons $(\varphi - (\alpha \rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \varphi$. D'où $(\varphi - (\alpha \rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$. Ainsi $\varphi - (\alpha \rightarrow \beta) \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$. Nous avons donc $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$. Ce qui nous donne $\varphi - (\alpha \rightarrow \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$. Nous pouvons donc conclure que $[\varphi - (\alpha \rightarrow \beta)] \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$

Enfin, supposons que (C7) soit satisfait. Nous voulons montrer que (R6) est satisfait. Comme $\neg\alpha \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha$, d'après (C5), nous avons $\varphi - \neg\alpha \equiv \varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$. Supposons maintenant que $\varphi \circ \alpha \nvdash \neg\beta$. Comme $\varphi \circ \alpha \equiv (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha$, nous avons $\varphi - \neg\alpha \nvdash \neg\alpha \vee \neg\beta$. (C5) nous donne $\varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \nvdash \neg\alpha \vee \neg\beta$. D'après (C7), $\varphi - (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \varphi - [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$. D'où $(\varphi - \neg(\alpha \wedge \beta)) \wedge \alpha \wedge \beta \vdash (\varphi - \neg\alpha) \wedge \alpha \wedge \beta$. Ainsi $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$.

□

Par conséquent, les opérateurs de révision de bases de croyances propositionnelles (au sens de Katsuno et Mendelzon) peuvent être définis, en utilisant l'identité de Levi, à partir des opérateurs de contraction de bases de croyances que nous avons proposés. Réciproquement, les opérateurs de contraction de bases de croyances propositionnelles peuvent être définis, en utilisant l'identité de Harper, à partir des opérateurs de révision de bases de croyances (au sens de Katsuno et Mendelzon).

De la révision vers la contraction

Proposition 2.6.
Si l'opérateur de révision $\circ$ satisfait (R1)-(R4), alors l'opérateur de contraction $-_{(\circ)}$ défini, en utilisant l'identité de Harper, satisfait (C1)-(C5). De plus, si (R5) est satisfait par $\circ$, alors (C6) est satisfait par $\circ_{(-)}$; et si (R6) est satisfait par $\circ$, alors (C7) est satisfait par $-_{(\circ)}$.

Démonstration. Soient φ, α, β, et γ des formules de $\mathcal{L}_0$. Supposons que (R1)-(R4) soient satisfaits.

- (C1) : Nous avons directement $\varphi \vdash \varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha)$. Ce qui nous donne $\varphi \vdash \varphi - \alpha$, en utilisant l'identité de Harper.

- (C2) : Supposons que $\varphi \nvdash \alpha$. D'après (R2), $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \varphi \wedge \neg\alpha$. D'où $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \varphi$. Ainsi $\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha) \vdash \varphi$. Ce qui nous donne $\varphi - \alpha \vdash \varphi$.

- (C3) : Supposons que $\nvdash \alpha$. Nous savons donc que $\neg\alpha$ est cohérent. Ainsi, d'après (R3), $\varphi\circ\neg\alpha$ est cohérent. De plus, d'après (R1), $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$. Ainsi $\varphi \circ \neg\alpha \nvdash \alpha$. D'où $\varphi \vee (\varphi \circ \neg\alpha) \nvdash \alpha$. L'identité de Harper nous donne $\varphi - \alpha \nvdash \alpha$.

- (C4) : D'après (R1), nous avons $\varphi \circ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$. Ceci nous donne $(\varphi \circ \neg\alpha) \vee \varphi \vdash \neg\alpha \vee \varphi$, nous pouvons donc en déduire que $[(\varphi \circ \neg\alpha) \vee \varphi] \wedge \alpha \vdash \varphi$. D'après l'identité de Harper, nous avons $(\varphi \circ \neg\alpha) \vee \varphi = \varphi - \alpha$, ainsi $[\varphi - \alpha] \wedge \alpha \vdash \varphi$.

- (C5) : Supposons que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. D'après (R4), nous avons $\varphi_1 \circ \neg\alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \neg\alpha_2$. Ainsi $\varphi_1 \vee (\varphi_1 \circ \neg\alpha_1) \equiv \varphi_2 \vee (\varphi_2 \circ \neg\alpha_2)$. Ce qui nous donne $\varphi_1 - \alpha_1 \equiv \varphi_2 - \alpha_2$.

- (C6) : Supposons que (R5) soit satisfait et qu'il existe une formule γ telle que $(\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta) \vdash \gamma$. Nous voulons montrer que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.

  - Supposons que $\varphi \vdash \alpha \wedge \beta$. Comme $\alpha \equiv \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$, d'après (R4), nous avons $\varphi - \alpha \equiv \varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$. D'où $\varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha) \vdash \gamma$. D'après (R5), nous avons $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \wedge \neg\alpha \vdash \varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha]$. L'identité de Levi nous donne $\varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vdash \varphi - \neg((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha)$. D'où $\varphi \circ [(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha] \vdash \gamma$. Ce qui nous donne, d'après (R5), $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \wedge \neg\alpha \vdash \gamma$. Ce qui est équivalent à $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \vdash \alpha \vee \gamma$. De la même manière, nous avons $[\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta)] \vdash \beta \vee \gamma$. De plus, d'après (R1), nous avons $\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$. Nous pouvons déduire que $\varphi \circ (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \gamma$. L'identité de Levi nous donne $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ (*). Ayant supposé que $\varphi \vdash \alpha \wedge \beta$, (C4) nous donne $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi$. D'après (C1) $\varphi \vdash \varphi - \alpha$. Comme nous avons supposé $\varphi - \alpha \vdash \gamma$ et $\varphi - \beta \vdash \gamma$, nous avons $\varphi \vdash \gamma$. Le fait que $\vdash$ soit transitif nous donne $(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ (**). D'après (*) et (**), nous avons $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.
  - Supposons maintenant que $\varphi \nvdash \alpha \wedge \beta$, d'après (C2) $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi$. De plus, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \alpha$. Nous avons donc $\varphi \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$. D'où $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi - \alpha) \vee (\varphi - \beta)$. Ce qui nous donne $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.

- (C7) : Supposons que (R6) est satisfait et que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. Nous voulons montrer que $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$.

  - Supposons que $\varphi \nvdash \alpha$, d'après (C2) nous avons $\varphi - \alpha \vdash \varphi$. De plus, d'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$. Nous obtenons ainsi $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$.

- Supposons maintenant que $\varphi \vdash \alpha$. Par l'absurde, supposons que $[\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$. Ce qui est équivalent à $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \alpha$. Nous avons ainsi, $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha$, ce qui contredit l'hypothèse $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. Nous avons donc $[\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. L'identité de Levi nous donne $\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. D'après (R6), comme $[\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$ est cohérent, nous avons $\varphi \circ [\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha] \vdash [\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$. Cependant, d'après (R4), nous avons $\varphi \circ [\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\alpha] \equiv \varphi \circ \neg\alpha$. De plus, l'identité de Levi nous donne $\varphi \circ \neg\alpha \equiv (\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha$. D'où $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash [\varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg\alpha$. Nous avons $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash \varphi \circ \neg(\alpha \wedge \beta)$. L'identité de Levi nous donne $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash [\varphi - (\alpha \wedge \beta)] \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$. Nous avons $(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (1). D'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$. Comme $\varphi \vdash \alpha$, d'après (C4), nous avons $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi$. Le fait que $\vdash$ soit transitif nous donne $(\varphi - \alpha) \wedge \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$ (2). (1) et (2) nous donnent $\varphi - \alpha \vdash \varphi - (\alpha \wedge \beta)$.

□

La propriété suivante montre que si nous utilisons un opérateur de révision $\circ$ pour définir, via l'identité de Harper, un opérateur de contraction $-_{(\circ)}$, alors l'opérateur de révision défini vie l'identité de Levi, à partir de $-_{(\circ)}$, est l'opérateur de révision initial $\circ$.

Et inversement, si nous utilisons un opérateur de contraction $-$ pour définir, via l'identité de Levi, un opérateur de révision $\circ_{(-)}$, alors l'opérateur de contraction défini, via l'identité de Harper, à partir de $\circ_{(-)}$ est l'opérateur de contraction initial $-$.

Proposition 2.7.

- *si $\circ$ est un opérateur de révision, alors*
  $\circ_{(-_{(\circ)})} = \circ$
- *si $-$ est un opérateur de contraction, alors*
  $-_{(\circ_{(-)})} = -$

Démonstration. Nous montrons dans un premier temps que $\circ_{(-_{(\circ)})} = \circ$. Il suffit de montrer que pour toutes formules φ et α, $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv \varphi \circ \alpha$. $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv (\varphi -_{(\circ)} \neg\alpha) \wedge \alpha \equiv [\varphi \vee (\varphi \circ \alpha)] \wedge \alpha$ $\equiv (\varphi \wedge \alpha) \vee [(\varphi \circ \alpha) \wedge \alpha]$. D'après (R1), nous avons $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv (\varphi \wedge \alpha) \vee (\varphi \circ \alpha)$. De plus :

- Si $\varphi \wedge \alpha$ est cohérent, d'après (R2) nous avons $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$. Ainsi $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv (\varphi \wedge \alpha) \vee (\varphi \wedge \alpha)$ $\equiv \varphi \wedge \alpha \equiv \varphi \circ \alpha$.
- Si $\varphi \wedge \alpha$ est incohérent, nous avons $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv \varphi \circ \alpha$

Nous avons donc $\varphi \circ_{(-_{(\circ)})} \alpha \equiv \varphi \circ \alpha$, d'où $\circ_{(-_{(\circ)})} = \circ$.

Nous montrons maintenant que $-_{(\circ_{(-)})} = -$. Pour ce faire, nous montrons que pour toutes formules φ et α, $\varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$. $\varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha \equiv \varphi \vee (\varphi \circ_{(-)} \neg\alpha) \equiv \varphi \vee [(\varphi - \alpha) \wedge \neg\alpha] \equiv$ $(\varphi \vee \neg\alpha) \wedge [\varphi \vee (\varphi - \alpha)]$. D'après (C1), nous avons $\varphi \vee (\varphi - \alpha) \equiv \varphi - \alpha$. De plus :

- Si $\varphi \vdash \alpha$, alors, d'après (C4), nous avons $\varphi - \alpha \vdash \neg\alpha \vee \varphi$. Dans ce cas, nous avons $\varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$.
- Si $\varphi \nvdash \alpha$, alors, d'après (C1) et (C2), $\varphi - \alpha \equiv \varphi$. Ainsi $(\varphi \vee \neg\alpha) \wedge (\varphi - \alpha) \equiv \varphi \equiv \varphi - \alpha$. Ce qui nous donne $\varphi -_{(\circ_{(-)})} \alpha \equiv \varphi - \alpha$.

□

Nos postulats pour la contraction de bases de croyances correspondent donc étroitement aux postulats de révision de bases de croyances définis par Katsuno et Mendelzon.

2.4 Théorème de représentation

Nous allons maintenant vérifier que nous pouvons énoncer un théorème de représentation pour la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie, qui est une contrepartie du théorème de représentation de Katsuno et Mendelzon pour la révision.

Lemme 2.1.
Soit un opérateur de contraction $-$ satisfaisant (C1)-(C7). Soient une interprétation I et une formule φ de $\mathcal{L}_0$. Nous avons

$$\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \equiv \varphi \vee \alpha_{\{I\}}$$

Démonstration. Si $\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi$, alors $\varphi \nvdash \neg\alpha_{\{I\}}$. Ainsi, d'après (C1) et (C2), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \equiv \varphi$. D'après $\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi$ nous savons également que $\varphi \vee \alpha_{\{I\}} \equiv \varphi$. Ce qui nous permet de conclure.

Le cas intéressant est quand $\alpha_{\{I\}} \nvdash \varphi$. Nous avons alors $\varphi \vdash \neg\alpha_{\{I\}}$. D'après (C4), $(\varphi - \neg\alpha_{\{I\}}) \wedge \neg\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi$. D'où $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi \vee \alpha_{\{I\}}$.

D'après (C1), $\varphi \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I\}}$. De plus, le postulat (C3) nous donne $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \nvdash \neg\alpha_{\{I\}}$ (car $\nvdash \alpha_{\{I\}}$). Ainsi, nous avons $\alpha_{\{I\}} \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I\}}$. Par conséquent, $\varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \equiv \varphi \vee \alpha_{\{I\}}$. □

Ce lemme indique que, avec une formule α ayant un unique modèle, la contraction de φ par la négation de α est équivalent à la disjonction de φ et α (le cas intéressant étant celui où α n'implique pas φ).

L'idée du théorème de représentation est d'exprimer l'ensemble des modèles de la contraction d'une base de croyances φ par une nouvelle information α comme étant l'union des modèles de φ avec les contre-modèles minimaux de α par rapport au pré-ordre total $\leq_\varphi$. Formellement :

Théorème 2.1.
Un opérateur de contraction $-$ satisfait les postulats ***(C1) - (C7)*** *si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ sur l'ensemble des interprétations tel que*

$$Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$$

Démonstration. Soit un opérateur de contraction $-$ satisfaisant les postulats (C1)-(C7). Pour chaque formule φ, nous définissons un pré-ordre total $\leq_\varphi$ en utilisant l'opérateur $-$: pour toutes interprétations I, J, nous définissons la relation $\leq_\varphi$ par $I \leq_\varphi J$ si et seulement si $I \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}})$.

Nous montrons dans un premier temps que la relation $\leq_\varphi$ est un pré-ordre total.

- **Totale :** soient deux interprétations I et J. Comme $\alpha_{\{I,J\}}$ admet au moins un modèle, $\neg\alpha_{\{I,J\}}$ admet au moins un contre-modèle. Nous pouvons en déduire que $\nvdash \neg\alpha_{\{I,J\}}$, ce qui nous permet de conclure, d'après (C3), que $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}} \nvdash \neg\alpha_{\{I,J\}}$. Ainsi, nous savons qu'il existe une interprétation $L \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}})$ telle que $L \in Mod(\alpha_{\{I,J\}}) = \{I, J\}$. Par conséquent, soit $I \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}})$ et ainsi $I \leq_\varphi J$ ou $J \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}})$ et ainsi $J \leq_\varphi I$. Le relation $\leq_\varphi$ est donc totale.

- **Réflexive :** chaque relation binaire qui est totale est nécessairement réflexive.

- **Transitive :** supposons que $I \leq_\varphi J$ et $J \leq_\varphi L$. Considérons le cas où les trois interprétations I, J et L sont deux à deux distinctes, et aucune d'elles n'est un modèle de φ. En effet, dans le cas où deux d'entre elles sont égales, la transitivité est trivialement satisfaite.

Si une des interprétations est un modèle de φ, alors le résultat est également trivialement vrai, d'après (C1). Si $J \models \varphi$, alors, d'après (C1), $I \models \varphi$. Et si $L \models \varphi$, alors les hypothèses et (C1) nous permettent de déduire que J et I sont également des modèles de φ. Et si $I \models \varphi$ alors, par construction, $I \leq_\varphi M$ pour toute interprétation M, donc, en particulier pour $M = L$.

Nous considérons maintenant le cas général. Par l'absurde, supposons que $I \not\leq_\varphi L$. Comme $\leq_\varphi$ est totale, nous avons $L <_\varphi I$, par conséquent $L \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$ et $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$. D'après (Tri), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$ ou $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv \varphi - \neg\alpha_{\{J\}}$ ou $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv (\varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}) \vee (\varphi - \neg\alpha_{\{J\}})$.

• Cas (1) $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$. D'après (C6) et le lemme 2.1, nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}} \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I\}} \vee \varphi - \neg\alpha_{\{L\}} \equiv \varphi \vee \alpha_{\{I\}} \vee \alpha_{\{L\}}$. Puisque $J \not\models \varphi \vee \alpha_{\{I\}} \vee \alpha_{\{L\}}$, nous avons $J \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}$, ainsi $J \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. Puisque $L \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$ et $L \not\models \neg\alpha_{\{J,L\}}$, nous pouvons déduire que $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \nvdash \neg\alpha_{\{J,L\}}$. Ainsi, d'après (C7), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{J,L\}} \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. Comme $J \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$, nous avons $J \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{J,L\}}$, ce qui signifie, par définition, que $J \not\leq_\varphi L$. Contradiction.

• Cas (2) $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv \varphi - \neg\alpha_{\{J\}} \equiv \varphi \vee \alpha_{\{J\}}$. Ce qui signifie en particulier que $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$ et $J \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. Ainsi, nous savons que $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \nvdash \neg\alpha_{\{I,J\}}$. Donc, d'après (C7), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}} \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. Comme $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$, nous avons $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}}$, ce qui signifie, par définition, que $I \not\leq_\varphi J$. Contradiction.

• Cas (3) $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \equiv (\varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}) \vee (\varphi - \neg\alpha_{\{J\}}) \equiv (\varphi - \neg\alpha_{\{I,L\}}) \vee (\varphi \vee \alpha_{\{J\}})$. Cette équivalence implique que $J \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$, $L \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$, et $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. Puisque $J \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$ et $J \not\models \neg\alpha_{\{I,J\}}$, nous pouvons déduire que $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}} \nvdash \neg\alpha_{\{I,J\}}$. Ainsi, d'après (C7), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}} \vdash \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$. Comme $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J,L\}}$, nous avons $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}}$, ce qui signifie, par définition, que $I \not\leq_\varphi J$. Contradiction.

Nous avons montré que la relation $\leq_\varphi$ est totale, réflexive et transitive. Il s'agit par conséquent d'un pré-ordre total. Nous montrons alors que l'application $\varphi \mapsto \leq_\varphi$ est un assignement fidèle.

- La première condition (si $I \models \varphi$ et $J \models \varphi$, alors $I \simeq_\varphi J$) découle de (C1) : $\varphi \vdash \varphi - \neg\alpha$, ainsi, si $I_1 \in Mod(\varphi)$, alors $I_1 \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}})$ et si $I_2 \in Mod(\varphi)$, alors $I_2 \in Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}})$. Donc, par définition, nous avons $I_1 \leq_\varphi I_2$ et $I_2 \leq_\varphi I_1$, d'où $I_1 \simeq_\varphi I_2$.

- Montrons maintenant que la deuxième condition (si $I_1 \models \varphi$ et $I_2 \not\models \varphi$, alors $I_1 <_\varphi I_2$) est satisfaite. D'après la définition de $\leq_\varphi$ et (C1), nous pouvons déduire de $I_1 \models \varphi$ que $I_1 \leq_\varphi I_2$. Il reste à montrer que $I_2 \not\leq_\varphi I_1$. Nous considérons deux cas :

  - Si $\varphi \vdash \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, alors, nous avons $\varphi \vdash \neg\alpha_{\{I_1\}} \wedge \neg\alpha_{\{I_2\}}$. Ainsi, en particulier, $\varphi \vdash \neg\alpha_{\{I_1\}}$, ce qui contredit le fait que $I_1 \models \varphi$, montrant que ce cas est impossible.
  - Si $\varphi \nvdash \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, alors, d'après (C2), $\varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}} \vdash \varphi$. Nous pouvons donc en déduire que $I_2 \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, d'où $I_2 \not\leq_\varphi I_1$.

  La deuxième condition est donc satisfaite.

- La troisième condition (si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, alors $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$) découle de (C5). En effet, si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, alors $\varphi_1 - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}} \equiv \varphi_2 - \neg\alpha_{\{I_1,I_2\}}$, d'où $I_1 \leq_{\varphi_1} I_2$ si et seulement si $I_1 \leq_{\varphi_2} I_2$, ainsi $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$.

Enfin, il reste à montrer que

$$Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi).$$

Nous considérons deux cas :

- $\varphi \nvdash \alpha$. D'après (C1) et (C2), nous avons $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$. Soit $J \in min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi$). Pour chaque $L \in Mod(\neg\alpha)$, nous avons $J \leq_\varphi L$. Puisque $\varphi \nvdash \alpha$, il existe une interprétation $I \in Mod(\varphi)$ telle que $I \in Mod(\neg\alpha)$. D'où $J \leq_\varphi I$, ce qui implique que $I \not<_\varphi J$. Alors, d'après la deuxième condition des assignements fidèles, nous devons avoir $J \in Mod(\varphi)$. Ce qui montre que $min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \subseteq Mod(\varphi)$, nous permettant de conclure.

- $\varphi \vdash \alpha$. D'après (C4), nous avons $\varphi - \alpha \vdash \varphi \vee \neg\alpha$. Considérerons donc successivement les deux cas (a) et (b) ci-dessous.

  (a) Supposons dans un premier temps que $\vdash \alpha$. Nous avons alors $\varphi - \alpha \vdash \varphi$ puisque $\neg\alpha$ est incohérent. De plus, d'après (C1), nous avons $\varphi \vdash \varphi - \alpha$. Par conséquent, $\varphi - \alpha \equiv \varphi$. Nous avons donc $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ puisque $Mod(\neg\alpha) = \emptyset = min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ quand α est valide.

  (b) Supposons maintenant que $\nvdash \alpha$. Nous voulons tout d'abord montrer que $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Soit une interprétation I telle que $I \models \varphi - \alpha$: nous voulons montrer que $I \in Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Si $I \models \varphi$, alors nous pouvons conclure directement. Supposons donc que $I \not\models \varphi$. Dans ce cas, nous voulons montrer que $I \in min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Puisque nous avons montré que $\varphi - \alpha \vdash \varphi \vee \neg\alpha$, d'après $I \models \varphi - \alpha$ et $I \not\models \varphi$, nous avons $I \models \neg\alpha$.

  Par l'absurde, supposons que $I \notin min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Cela signifie qu'il existe une interprétation J telle que $J \models \neg\alpha$ et $J <_\varphi I$. D'après la définition de $\leq_\varphi$, cela signifie que $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}}$ (*) et que $J \models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}}$.

  Considérons maintenant la formule $\gamma = \neg\alpha \wedge \neg\alpha_{\{I,J\}}$. Nous avons clairement $\neg\alpha \equiv \gamma \vee \alpha_{\{I,J\}}$. Ainsi, d'après (C5), nous avons $\varphi - \alpha \equiv \varphi - \neg(\gamma \vee \alpha_{\{I,J\}}) \equiv \varphi - (\neg\gamma \wedge \neg\alpha_{\{I,J\}})$. D'après (C6), nous avons $\varphi - (\neg\gamma \wedge \neg\alpha_{\{I,J\}}) \vdash (\varphi - \neg\gamma) \vee (\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}})$. Nous avons supposé que $I \models \varphi - \alpha$, d'où $I \models \varphi - (\neg\gamma \wedge \neg\alpha_{\{I,J\}})$. De l'implication précédente, nous obtenons que $I \models (\varphi - \neg\gamma) \vee (\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}})$. Mais, d'après (*), nous avons $I \not\models \varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}}$, nous devons donc avoir $I \models (\varphi - \neg\gamma)$. Or, puisque $\varphi \vdash \alpha$, nous avons également $\varphi \vdash \neg\gamma$. D'après (C4), nous obtenons alors $(\varphi - \neg\gamma) \wedge \neg\gamma \vdash \varphi$. Puisque $I \models \neg\gamma$, si $I \models \varphi - \neg\gamma$, alors nous devons avoir $I \models \varphi$, contradiction.

  Par conséquent, nous avons $Mod(\varphi - \alpha) \subseteq Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$.

  Montrons maintenant que $Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$.

  - Si $I \in Mod(\varphi)$, alors, puisque d'après (C1), nous avons $\varphi \vdash \varphi - \alpha$, nous pouvons conclure que $I \in Mod(\varphi - \alpha)$.
  - Supposons maintenant que $I \notin Mod(\varphi)$ et $I \in min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Supposons également que $I \notin Mod(\varphi - \alpha)$. Dans ce cas, $min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ n'est pas vide, ce qui signifie que $\nvdash \alpha$. Donc, d'après (C3), $\varphi - \alpha \nvdash \alpha$. Nous pouvons déduire qu'il existe une interprétation $J \in Mod(\varphi - \alpha)$ telle que $J \in Mod(\neg\alpha)$.

    Considérons les deux cas possibles : $J \in Mod(\varphi)$ et $J \notin Mod(\varphi)$. Si $J \in Mod(\varphi)$, alors, d'après la deuxième condition des assignements fidèles, nous avons $J <_\varphi I$.

Mais comme $J \in Mod(\neg\alpha)$, cela signifie que

$$I \notin min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi).$$

Contradiction. Si $J \notin Mod(\varphi)$, alors, nous avons $J \in Mod(\varphi - \alpha)$ et $I \notin Mod(\varphi - \alpha)$. Ainsi $\varphi - \alpha \nvdash \neg\alpha_{\{I,J\}}$, d'où, d'après (C7), nous avons $\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}} \vdash \varphi - \alpha$. Comme $I \notin Mod(\varphi - \alpha)$, nous avons $I \notin Mod(\varphi - \neg\alpha_{\{I,J\}})$. D'après la définition (et (C3)) cela signifie que $J <_\varphi I$. Mais nous savons également que $J \in Mod(\neg\alpha)$, cela implique donc que $I \notin min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$. Contradiction.

($\Leftarrow$) Supposons que nous ayons un assignement fidèle qui associe φ à un pré-ordre total $\leq_\varphi$. Un opérateur de contraction $-$ est défini par :

$$Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \quad (\delta)$$

Nous montrons que $-$ satisfait les postulats (C1)-(C7).

(C1) : depuis $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$, nous obtenons $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha)$ d'où $\varphi \vdash \varphi - \alpha$.

(C2) : si $\varphi \nvdash \alpha$, alors $\varphi \wedge \neg\alpha$ admet un modèle. Puisque l'assignement est fidèle, $min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) = Mod(\varphi \wedge \neg\alpha)$. Ainsi $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$. (C2) est donc satisfait.

(C3) : supposons que $\nvdash \alpha$, nous avons $Mod(\neg\alpha) \neq \emptyset$. D'après (δ), il existe une interprétation I appartenant à $Mod(\varphi - \alpha)$ telle que I appartient également à $Mod(\neg\alpha)$. Ceci nous montre que $Mod(\varphi - \alpha) \nsubseteq Mod(\alpha)$. Ainsi (C3) est satisfait.

(C4) : nous avons $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi - \alpha) \cap Mod(\alpha)$. Ainsi (δ) nous donne $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = (Mod(\varphi) \cap Mod(\alpha)) \cup (Min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cap Mod(\alpha))$. Nous avons $min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cap Mod(\alpha) = \emptyset$. D'où $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) = Mod(\varphi) \cap Mod(\alpha)$. Ainsi $Mod((\varphi - \alpha) \wedge \alpha) \subseteq Mod(\varphi)$ (C4) est donc satisfait.

(C5) : supposons que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Nous avons $Mod(\varphi_1) = Mod(\varphi_2)$ et $Mod(\alpha_1) = Mod(\alpha_2)$. D'après la définition de l'assignement fidèle, nous avons $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$.
D'où $min(Mod(\neg\alpha_1), \leq_{\varphi_1}) = min(Mod(\neg\alpha_2), \leq_{\varphi_2})$. Ainsi $Mod(\varphi_1) \cup min(Mod(\neg\alpha_1), \leq_{\varphi_1}) = Mod(\varphi_2) \cup min(Mod(\neg\alpha_2), \leq_{\varphi_2})$. Par conséquent $Mod(\varphi_1 - \alpha_1) = Mod(\varphi_2 - \alpha_2)$. (C5) est donc satisfait.

(C6) :$Mod(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi) = Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha) \cup Mod(\neg\beta), \leq_\varphi)$ Or, nous avons $min(Mod(\neg\alpha) \cup Mod(\neg\beta), \leq_\varphi) \subseteq min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cup min(Mod(\neg\beta), \leq_\varphi)$. Nous avons donc $Mod(\varphi - (\alpha \wedge \beta)) \subseteq Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \cup min(Mod(\neg\beta), \leq_\varphi) \subseteq Mod(\varphi - \alpha) \cup Mod(\varphi - \beta)$. (C6) est donc satisfait.

(C7) : supposons que $\varphi - (\alpha \wedge \beta) \nvdash \alpha$. Il existe donc une interprétation $I \in Mod(\varphi) \cup min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi)$ telle que $I \in Mod(\neg\alpha)$. Nous avons deux cas à considérer :

- $I \in Mod(\varphi \wedge \neg\alpha)$. Dans ce cas, l'assignement étant fidèle, nous avons $Mod(\varphi - \alpha) = Mod(\varphi)$. Le fait que (C1) soit satisfait par $-$ nous permet de conclure.

- $I \in Mod(\neg\varphi \wedge \neg\alpha) \cap min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta), \leq_\varphi)$. Pour prouver que (C7) est satisfait, il nous suffit de montrer que $min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi) \subseteq min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi) \quad (A)$. Puisque $\neg\alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$, nous avons nécessairement $I \in min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ puisque $I \models \neg\alpha$. Comme $\leq_\varphi$ est un pré-ordre total, chaque interprétation $J \in min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi)$ satisfait $J \simeq_\varphi I$. Supposons qu'il existe une interprétation $L \in Mod(\neg(\alpha \wedge \beta))$ telle que $L <_\varphi J$. Ceci contredit le fait que $I \in min(Mod(\neg(\alpha \wedge \beta)), \leq_\varphi)$. Ainsi (A) est satisfait et par conséquent (C7) est également satisfait.

$\square$

Notons qu'une construction similaire a été utilisée dans [ZHUANG & PAGNUCCO 2012] pour la contraction d'ensembles de croyances dans le cadre des formules de Horn.

2.5 Exemple d'opérateur de contraction propositionnelle

Soient deux interprétations I et J et une formule φ de $\mathcal{L}_0$. La distance de Dalal [DALAL 1988] h (qui est une distance de Hamming [HAMMING 1950] entre interprétations) entre I et J est le nombre de symboles propositionnels sur lesquels les deux interprétations diffèrent :

$$h(I,J) = |\{x \in \mathbb{P} | I(x) \neq J(x)\}|$$

La distance entre la formule φ et l'interprétation I est définie comme suit :

$$d(\varphi, I) = \min_{J \in Mod(\varphi)} h(J, I)$$

Nous pouvons maintenant définir un assignement fidèle $\leq_\varphi$ tel que $I \leq_\varphi J$ si et seulement si $d(\varphi, I) \leq_\varphi d(\varphi, J)$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, cette distance ainsi que l'assignement fidèle qui lui correspond peuvent être utilisés pour définir un opérateur de révision satisfaisant les postulats de révision de bases de croyances de Katsuno et Mendelzon.

Nous pouvons également définir un opérateur de contraction de Dalal $-_D$ comme suit :

$$Mod(\varphi -_D \alpha) = Mod(\varphi) \cup Mod(min(Mod(\neg\alpha), \leq_\varphi))$$

Le théorème 2.1 nous assure que l'opérateur de contraction de Dalal $-_D$ satisfait les postulats (C1)-(C7).

Considérons l'exemple suivant pour illustrer cet opérateur.

Exemple 2.1 (Le pingouin manchot vs. opérateur de contraction de Dalal)**.**
Nous reprenons ici l'exemple 1.4 du chapitre précédent (il s'agit donc de la suite de l'exemple 1.5). Soit $\mathcal{L}_0$ *un langage contenant trois variables propositionnelles* $\{oiseau, vole, bec\}$*. Nous nous trouvons maintenant dans la situation suivante : Bob a observé, à distance, un volatile (il a donc supposé que celui-ci pouvait voler). En s'approchant, il lui a semblé que le volatile était un manchot. Or, les manchots ne sachant pas voler, il a dû réviser ses croyances. Sa base de croyances est maintenant* $\varphi = oiseau \wedge \neg vole$*.*

Plus tard, Bob apprend qu'il a pu se tromper, qu'il s'agissait possiblement d'un pingouin. N'arrivant pas à se décider, Bob préfère mettre de côté le fait que ce volatile sache ou non voler. Il va donc devoir contracter sa base de croyances afin de retirer $\neg$**vole** *de celle-ci. La troisième colonne du tableau suivant indique la distance entre chaque modèle de* $\neg\alpha = vole$ *(*$\{011, 010, 110, 111\}$*) et* $\varphi = oiseau \wedge \neg vole$ *(*$\{100, 101\}$*).*

	100	*101*	φ
011	*3*	*2*	*2*
010	*2*	*3*	*2*
110	*1*	*2*	*1*
111	*2*	*1*	*1*

L'ensemble des modèles de la base de croyances contractée est l'union des modèles de φ *et des modèles de* $\neg\alpha$ *qui sont les plus proches des modèles de* φ *:* $Mod(\varphi -_D \alpha) = \{100, 101, 111, 110\}$*. Ainsi* $\varphi -_D \alpha \equiv oiseau$*.*

Nous illustrons maintenant le théorème de représentation (théorème 2.1) sur la figure 2.1. Les interprétations (représentées par des points) sont situées à différents niveau L_i. Deux interprétations I et J au même niveau sont tout aussi plausibles (i.e., $I \simeq_\varphi J$). Une interprétation I située à un niveau inférieur à une autre interprétation J est strictement plus plausible (i.e., $I <_\varphi J$). Les interprétations situées au niveau le plus bas (L_0) sont les modèles de la base de croyances φ.

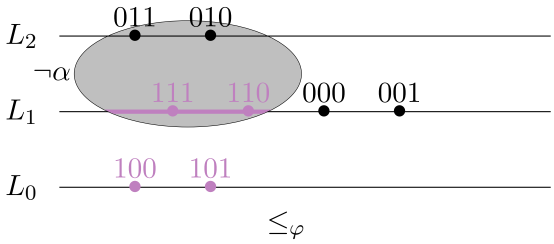


FIGURE 2.1 – Contraction de φ par α

Le résultat de la contraction de φ par α est constitué des modèles de φ auxquels sont ajoutés les modèles de $\neg\alpha$ les plus plausibles par rapport au pré-ordre $\leq_\varphi$ associé à φ par l'assignement fidèle. Ceci représente le changement minimal nécessaire pour ne plus impliquer α. Ces interprétations sont situées au niveau L_1 sur la figure 2.1. Les interprétations minimales de $\neg\alpha$ (au niveau L_1) sont ajoutées aux interprétations de φ (au niveau L_0).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la contraction de croyances dans le cadre de la logique propositionnelle finie. Le but était, comme dans les travaux de Katsuno et Mendelzon pour la révision, de définir des postulats pour les opérateurs de contraction. Nous avons vérifié que les opérateurs de contraction caractérisés par nos postulats correspondent aux opérateurs de révision caractérisés par les postulats de Katsuno et Mendelzon. Nous avons également proposé un théorème de représentation en terme d'assignement fidèle pour la contraction.

Le but était de s'assurer que la traduction des postulats de contraction AGM d'ensembles de croyances dans le cadre propositionnel fini offrait les propriétés attendues.

Définir des opérateurs de contraction itérées est l'une des principales perspectives de ce travail. En effet, la traduction des postulats de révision AGM, par Katsuno et Mendelzon, est à la base de l'étude des opérateurs de révision itérées de Darwiche et Pearl [DARWICHE & PEARL 1997, BOOTH & MEYER 2006, JIN & THIELSCHER 2007, KONIECZNY & PINO PÉREZ 2008]. Il y a eu très peu de travaux sur la contraction itérée. En effet, à notre connaissance, seul l'article [HILD & SPOHN 2008] aborde ce problème, mais dans un cadre différent de celui de Darwiche et Pearl. Définir des opérateurs de contraction « à la Darwiche et Pearl » permettrait d'étudier les liens entre [HILD & SPOHN 2008] et [DARWICHE & PEARL 1997].

Il serait également intéressant de définir des opérateurs de contraction dans le cadre de logiques plus faibles que la logique propositionnelle classique, cadre dans lequel les identités de Levi et de Harper ne sont pas garanties. Des travaux ont déjà été réalisés dans le cadre de la logique de Horn [DELGRANDE 2008, DELGRANDE & WASSERMANN 2013]. Plus récemment, Creignou, Ktari et Papini [CREIGNOU *et al.* 2016] ont proposé une approche de la contraction dans des fragments de la logique propositionnelle (incluant le fragment Horn, mais non restreint à celui-ci). Cette approche est une application des résultat que nous avons présentés dans ce chapitre.

Enfin, définir des opérateurs de contraction dans un cadre multi-agents est une autre perspective de ce travail. En effet, comme nous le verrons dans le seconde partie de cette thèse, la traduction des postulats de révision AGM dans le cadre propositionnel est également à la base des travaux de Aucher [Aucher 2008], plus particulièrement pour la définition d'opérateurs de révision entre modèles internes.

Deuxième partie

Changement de croyances en logique épistémique

Chapitre 3

Logique épistémique

Prise en trop grande quantité, la logique, comme le whisky, perd sa vertu bénéfique.
(Lord Dunsany – My Ireland)

La logique épistémique est une logique modale [BLACKBURN *et al.* 2001] qui concerne l'étude des notions de croyances et de connaissances. Le travail formel, basé sur la logique modale, qui a initié la recherche en logique épistémique est dû à Hintikka [HINTIKKA 1962]. Dans ce travail, Hintikka suggère d'utiliser des modalités pour capturer la sémantique des croyances plutôt que les déclarations aléthiques généralement abordées en logique modale.

La logique épistémique dynamique (DEL) est un terme générique pour un certain nombre d'extensions de la logique épistémique avec des opérateurs dynamiques qui permettent de formaliser le raisonnement sur le changement de l'information. Elle est issue de la linguistique formelle, de l'informatique et de logique philosophique. L'approche dominante en logique épistémique dynamique est celle proposée dans [BALTAG *et al.* 1998, BALTAG & MOSS 2004] par Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss et Slawomir Solecki. Cette approche est très intuitive et est à la base de nombreux articles dans le domaine : en effet, beaucoup se réfèrent à cette approche simplement par « DEL ». Nous utiliserons le terme « système BMS » pour se référer à cette approche.

Dans ce chapitre, nous allons décrire l'approche modale de la logique épistémique initiée par Hintikka, en se concentrant sur le cas multi-agents. Nous définissons d'abord la sémantique de la logique épistémique basée sur la notion de modèles épistémiques. Nous décrivons ensuite une axiomatisation de cette logique, avant de rappeler des notions et résultats de logique modale, comme la bisimulation, qui seront utilisés dans la suite de cette partie. Enfin, nous allons présenter le système BMS. Nous introduisons dans un premier temps les modèles d'événement ainsi que les modèles produit. Nous présentons ensuite une axiomatisation de cette logique.

Sommaire

3.1 Syntaxe et sémantique

Nous considérons le langage $\mathcal{L}_0$ construit à partir d'un ensemble fini de variables propositionnelles $\mathbb{P}$ ainsi que des connecteurs $\neg$, $\wedge$ représentant respectivement la négation et la conjonction. $\top$ représente la tautologie.

Soit $\mathbb{A} = \{1, \ldots, n\}$ un ensemble fini d'agents, nous supposons que le nombre d'agents de cet ensemble est supérieur à 1. Considérons maintenant le langage $\mathcal{L}$ contenant le langage propositionnel $\mathcal{L}_0$ augmenté par un opérateur de croyance modal B_a pour chaque agent a de $\mathbb{A}$.

Définition 3.1 (Langage $\mathcal{L}$).
Le langage $\mathcal{L}$ est défini comme suit :

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathrm{B}_a\varphi$$

où $p \in \mathbb{P}$ et $a \in \mathbb{A}$. De plus, $\varphi \vee \psi$ est une abréviation pour $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; $\varphi \Rightarrow \psi$ est une abréviation de $\neg\varphi \vee \psi$; et $\perp$ est une abréviation de $\neg\top$.

Intuitivement, $\mathrm{B}_a p$ signifie que l'agent a croit que p est vraie. Dans ce langage, nous pouvons exprimer les croyances des agents à propos du monde, mais aussi les croyances des agents à propos des croyances des autres agents et ainsi de suite. Ceci est illustré par des formules de la forme $\mathrm{B}_a\mathrm{B}_i p$ ou $\mathrm{B}_a\mathrm{B}_j\mathrm{B}_i q \ldots$ Ces croyances sont appelées *croyances d'ordre supérieur*. La notion de *degré modal* est utilisée pour quantifier l'imbrication des opérateurs de croyances.

Définition 3.2 (Degré d'une formule épistémique).
Le degré $\deg(\varphi)$ d'une formule épistémique φ est défini par induction comme suit :

- $\deg(p) = \deg(\top) = 0$ *;*
- $\deg(\neg\varphi) = \deg(\varphi)$ *;*
- $\deg(\varphi \wedge \psi) = max\{\deg(\varphi), \deg(\psi)\}$ *;*
- $\deg(\mathrm{B}_a\varphi) = 1 + \deg(\varphi)$.

Comme dit plus tôt, la logique épistémique est une logique modale. Ainsi, ce que nous appelons modèle épistémique est un modèle de Kripke particulier comme ceux utilisés en logique modale. La différence est que nous considérons un ensemble de relations d'accessibilité, une pour chaque agent, au lieu d'une seule.

Dans la suite, nous utiliserons les modèles de Kripke finis pointés définis comme suit :

Définition 3.3 (Modèle de Kripke fini pointé).
Un modèle de Kripke fini pointé M est un tuple $M = \langle W, R, V, w\rangle$ tel que :

- *W est un ensemble fini non vide de mondes possibles,*
- *$R = \{R_a \mid a \in \mathbb{A}\}$, où $R_a \subseteq W \times W$ est la relation d'accessibilité de l'agent a,*
- *$V = \{V_v \mid v \in W\}$, où $V_v : \mathbb{P} \to \{0, 1\}$ est une fonction de valuation qui définit la valeur de vérité de chaque variable propositionnelle du monde v,*
- *et $w \in W$ est le monde réel.*

Nous utilisons $R_a(v)$ pour désigner l'ensemble de mondes possibles qui sont accessibles depuis v par l'agent a, formellement, $R_a(v) = \{v' \mid (v, v') \in R_a\}$.

Un modèle épistémique pointé $M = \langle W, R, V, w \rangle$ représente comment le monde réel w est perçu par les agents de $\mathbb{A}$ d'un point de vue extérieur. Les mondes possibles de W sont les mondes pertinents nécessaires pour définir une telle représentation. Les fonctions de valuation de V spécifient quelles variables propositionnelles sont vraies dans ces mondes. Enfin, la relation d'accessibilité R_a modélise la notion de croyance. Nous utilisons $v \in R_a(w)$ quand le monde v est compatible avec les croyances de l'agent a dans le monde w.

Nous pouvons maintenant donner un sens aux formules de $\mathcal{L}$ en définissant les conditions de vérité de ces formules sur ces modèles épistémiques.

Définition 3.4 (Conditions de vérité pour $\mathcal{L}$)**.**
Soit $M = \langle W, R, V, w \rangle$ un modèle de Kripke fini pointé. $M \models \varphi$ est défini par induction comme suit :

$$\begin{array}{lll}
M \models \top & & \\
M \models p & \textit{si et seulement si} & V_w(p) = 1 \\
M \models \neg\varphi & \textit{si et seulement si} & M \not\models \varphi \\
M \models \varphi \wedge \psi & \textit{si et seulement si} & M \models \varphi \textit{ et } M \models \psi \\
M \models \mathrm{B}_a\varphi & \textit{si et seulement si} & \textit{pour tout } v \in R_a(\varphi),\ \langle W, R, V, v \rangle \models \varphi
\end{array}$$

Ainsi, l'agent a croit que φ est vraie dans le monde w (formellement $M \models \mathrm{B}_a\varphi$) si φ est vraie dans tous les mondes que l'agent a considère possible (depuis le monde w).

Pour des raisons de lisibilité, nous utiliserons $\|\varphi\|_M$ pour désigner l'ensemble des mondes de M qui satisfont la formule φ. Soit $\|\varphi\|_M = \{v \mid v \in W$ et $\langle W, R, V, v \rangle \models \varphi\}$.

La notion de croyance peut se conformer à certaines contraintes (ou axiomes) telle que $\mathrm{B}_a\varphi \Rightarrow \mathrm{B}_a\mathrm{B}_a\varphi$: si l'agent a croit quelque chose, il croit qu'il y croit. Ces contraintes peuvent affecter la nature de la relation d'accessibilité R_a qui devrait alors se conformer à certaines propriétés supplémentaires. Nous allons maintenant définir certaines classes de modèles épistémiques qui ajoutent des contraintes supplémentaires sur la relation d'accessibilité R_a. Nous verrons dans la section suivante que ces contraintes correspondent à des axiomes particuliers pour l'opérateur de croyances B_a.

Définition 3.5 (Propriétés des relations d'accessibilité)**.** *Nous listons ici certaines propriétés pour les relations d'accessibilité R_a :*

- *sérialité : pour tout w, $R_a(w) \neq \emptyset$*
- *transitivité : pour tout w, v, u, si $v \in R_a(w)$ et $u \in R_a(v)$, alors $u \in R_a(w)$*
- *euclidianité : pour tout w, v, u, si $v \in R_a(w)$ et $u \in R_a(w)$, alors $v \in R_a(u)$*
- *réflexivité : pour tout w, $w \in R_a(w)$*

Nous listons ici certaines classes de modèles épistémiques :

- *modèles K_n : aucune restriction*
- *modèles $KD45_n$: les relations d'accessibilité sont sérielles, transitives et euclidiennes*
- *modèles $S4_n$: les relations d'accessibilité sont réflexives et transitives*
- *modèles $S5_n$: les relations d'accessibilité sont réflexives et euclidiennes (et donc transitives)*

Exemple 3.1 (The Walking Cat)**.**
Prenons l'exemple bien connu du chat de Monsieur S.

« Carol et Daryl entrent dans une pièce dans laquelle Monsieur S tient un chat dans ses bras. Il dépose ce chat dans une boîte contenant du poison. Monsieur S peut voir si le chat mange le poison et meurt, mais Carol et Daryl ne le voient pas. »

Cette situation est modélisée par le modèle épistémique pointé $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ de la figure 3.1. Monsieur S n'est pas considéré comme un agent ici, il n'est donc pas représenté dans ce modèle épistémique. Les relations d'accessibilité sont représentées par des flèches indexées par 1 *(représentant Carol) ou* 2 *(représentant Daryl) ; p correspond à la proposition "le chat est vivant" et le monde doublement cerclé w_0 représente le monde réel. Dans chaque monde, Carol et Daryl considèrent le monde dans lequel le chat est vivant et celui dans lequel le chat est mort comme étant possibles. Ainsi, chaque monde est accessible depuis chaque monde pour* 1 *et* 2*.*

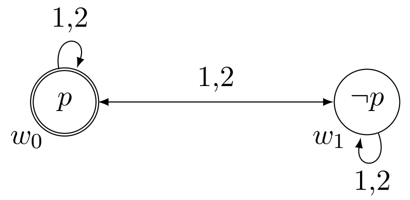


FIGURE 3.1 – The Walking Cat

Le langage $\mathcal{L}$ nous permet d'exprimer formellement ce qui est vrai dans cette situation. Par exemple, $M \models p \wedge (\neg \mathrm{B}_1 \neg p \wedge \neg \mathrm{B}_1 p) \wedge (\neg \mathrm{B}_2 \neg p \wedge \neg \mathrm{B}_2 p)$ signifie que le chat est vivant mais que Carol et Daryl ne savent pas s'il est vivant ou mort. $M \models \mathrm{B}_2(\neg \mathrm{B}_1 \neg p \wedge \neg \mathrm{B}_1 p) \wedge \mathrm{B}_1(\neg \mathrm{B}_2 \neg p \wedge \neg \mathrm{B}_2 p)$ signifie que Daryl croit que Carol ne croit pas que le chat n'est ni vivant ni mort, et il en va de même pour Carol à propos de Daryl.

Les modèles épistémiques sont une façon de modéliser des états épistémiques multi-agents. D'autres cadres sémantiques ont été proposé : par exemple, les "*interpreted systems*" [FAGIN *et al.* 1995] utilisés dans les systèmes distribués, les "*N-agent frame*" de Cantwell [CANTWELL 2005]. Ces formalismes peuvent néanmoins être associés à (certains types de) modèles épistémiques équivalents.

3.2 Axiomatisation

En nous aidant de logiques (modales) particulières, nous allons axiomatiser les sémantiques que nous venons de définir. De manière générale, une logique modale L est construite à partir d'un ensemble d'axiomes et de règles d'inférences, appelés *système de preuve*. Ainsi, une formule φ appartient à cette logique si elle est un axiome, ou si elle est dérivable en appliquant successivement des règles d'inférence aux axiomes. Dans ce cas, on dit que φ est *L-prouvable* ou que φ est un *théorème* de L et nous l'écrivons $\vdash_L \varphi$. Une formule est *L-cohérente* si sa négation n'est pas *L-prouvable*, formellement $\nvdash_L \neg\varphi$. (voir [BLACKBURN *et al.* 2001] pour plus de détails.)

Un modèle épistémique est obtenu en joignant n logiques modales ensemble (rappelons que n est la cardinalité de $\mathbb{A}$). Nous supposons que les axiomes sont les mêmes pour tous les agents, cela signifie que les agents raisonnent en suivant les mêmes principes.

Nous définissons la logique épistémique la plus simple, K_n obtenue en joignant n logiques modales K (où K est la logique modale la plus simple ayant une sémantique en terme de mondes possibles).

Définition 3.6 (Système de preuve de K_n).
La logique K_n est définie en suivant les axiomes et règles d'inférences suivants :

Taut $\vdash_{K_n} \varphi$ *pour toutes les tautologies propositionnelles* φ

K $\vdash_{K_n} \mathrm{B}_a(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\mathrm{B}_a\varphi \Rightarrow \mathrm{B}_a\psi)$ *pour chaque* $a \in \mathbb{A}$ *(Distribution)*

Nec *Si* $\vdash_{K_n} \varphi$ *alors* $\vdash_{K_n} \mathrm{B}_a\varphi$ *pour chaque* $a \in \mathbb{A}$ *(Nécessité)*

MP *Si* $\vdash_{K_n} \varphi$ *et* $\vdash_{K_n} \varphi \Rightarrow \psi$ *alors* $\vdash_{K_n} \psi$ *(Modus Ponens)*

Le raisonnement des agents dans une logique épistémique découle directement des axiomes de celle-ci. Par exemple, l'axiome K combiné avec la règle d'inférence MP implique que si un agent a croit φ ($\mathrm{B}_a\varphi$) et qu'il croit également que φ implique ψ ($\mathrm{B}_a(\varphi \Rightarrow \psi)$), alors cet agent croit ψ ($\mathrm{B}_a\psi$).

Des contraintes plus fortes peuvent être ajoutées à une logique épistémique. Les contraintes suivantes sont souvent utilisées dans la littérature.

D $\neg\mathrm{B}_a \perp$ (Cohérence)

4 $\mathrm{B}_a\varphi \Rightarrow \mathrm{B}_a\mathrm{B}_a\varphi$ (Introspection Positive)

5 $\mathrm{B}_a\neg\varphi \Rightarrow \mathrm{B}_a\neg\mathrm{B}_a\varphi$ (Introspection Négative)

T $\mathrm{B}_a\varphi \Rightarrow \varphi$ (Propriété de la Connaissance)

Intuitivement, l'axiome D signifie que les croyances des agents ne peuvent pas être incohérentes. Les axiomes 4 et 5 signifient que les agents croient ce qu'ils croient et ne croient pas. L'axiome T est plus adapté à la notion de connaissances, en effet, cet axiome signifie que tout ce qu'un agent croit est vrai (ce qui n'est généralement pas le cas lorsque nous raisonnons sur des croyances). Les logiques habituellement utilisées sont spécifiées comme suit :

$$\begin{array}{ll} KD45_n : & K_n + D + 4 + 5 \\ S4_n : & K_n + T + 4 \\ S5_n : & K_n + T + 5 \end{array}$$

Un fait intéressant en logique épistémique (et au-delà, en logique modale) est que nous pouvons faire correspondre les contraintes des axiomes sur l'opérateur de croyances B_a avec les contraintes sur les relations d'accessibilité. Par exemple, les relations d'accessibilité des modèles de toute logique contenant l'axiome 5 seront euclidiennes, ainsi, l'axiome D correspond à la sérialité, l'axiome T correspond à la réflexivité, l'axiome B correspond à la symétrie et l'axiome 4 correspond à la transitivité.

Enfin, toute les logiques introduites ici sont décidables. Intuitivement, cela signifie que nous pouvons exécuter un algorithme qui décide si une formule donnée est cohérente ou non (voir [Blackburn *et al.* 2001] pour plus de détails). Nous listons ici les résultats de Halpern et Moses [Halpern & Moses 1992], donnant la complexité du problème de cohérence pour ces logiques.

- NP – complet pour $n = 1$ dans $KD45_n$ et $S5_n$;
- PSPACE – complet pour $n > 2$ dans $KD45_n$ et $S5_n$;
- PSPACE – complet pour tout n dans K_n et $S4_n$.

3.3 Outils techniques

Dans cette section, nous listons des concepts et techniques venant de la logique modale qui seront utilisés dans la suite de cette thèse.

3.3.1 Bisimulations

Deux modèles épistémiques finis pointés différents peuvent satisfaire le même ensemble de formules. Une telle paire de modèles est alors considérée comme équivalente. Cela signifie que les deux modèles représentent exactement la même situation. Nous définissons cette équivalence via la notion de bisimulation, comme suit.

Définition 3.7 (Bisimulation[Blackburn *et al.* 2001])**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles épistémiques pointés. Soit $Z \subseteq W \times W'$. Z est une bisimulation entre M et M' si et seulement si wZw' et pour tout couple (v, v') tel que vZv' :

1. *$V_v = V_{v'}$;*
2. *s'il existe un $u \in W$ tel que $u \in R_a(v)$, alors il existe un $u' \in W'$ tel que $u' \in R'_a(v')$ et uZu' ;*
3. *s'il existe un $u' \in W'$ tel que $u' \in R'_a(v')$, alors il existe un $u \in W$ tel que $u \in R_a(v)$ et uZu'.*

Définition 3.8 (Bisimilarité)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles épistémiques pointés. M et M' sont bisimilaires, noté $M \leftrightarroweq M'$, si et seulement si il existe une bisimulation $Z \subseteq W \times W'$ telle que wZw'.

Deux modèles sont bisimilaires si et seulement si il existe une relation de bisimulation entre eux.

La propriété principale de la bisimulation est la suivante.

Proposition 3.1 ([Blackburn *et al.* 2001])**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles épistémiques finis pointés. $M \leftrightarroweq M'$ si et seulement si pour toute formule φ de $\mathcal{L}$, $M \models \varphi$ si et seulement si $M' \models \varphi$.

Intuitivement, deux modèles épistémiques sont bisimilaires si ils contiennent les mêmes informations.

Nous pouvons approximer finiment une bisimulation. La notion de n-bisimulation que nous allons définir est légèrement différente de celle que nous pouvons trouver dans la littérature [Aucher 2008, Balbiani & Herzig 2007, Blackburn *et al.* 2001]. En effet, nous n'imposons pas de condition pour la 0-bisimulation, autorisant ainsi tout modèle à être 0-bisimilaire à un autre, même quand ceux-ci sont complètement différents.

Définition 3.9 (n-Bisimulation)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles épistémiques pointés. Soit $Z \subseteq W \times W'$.

- *Z est une 0-bisimulation ;*
- *Z est une 1-bisimulation si et seulement si wZw' et $V_w = V_{w'}$;*

- *Z est une $(n+1)$-bisimulation ($n \geq 1$) si et seulement si wZw' et pour chaque vZv' :*
    1. *$V_v = V_{v'}$ et*
    2. *s'il existe $u \in W$ tel que $u \in R_a(v)$, alors il existe $u' \in W'$ tel que $u' \in R'_a(v')$ et il existe une relation Z' telle que $uZ'u'$ et Z' est une n-bisimulation, et*
    3. *s'il existe $u' \in W'$ tel que $u' \in R'_a(v')$, alors il existe $u \in W$ tel que $u \in R_a(v)$ et il existe une relation Z' telle que $uZ'u'$ et Z' est une n-bisimulation.*

Définition 3.10 (n-Bisimilarité)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles épistémiques pointés. M et M' sont n-bisimilaires, noté $M \leftrightarroweq_n M'$, si et seulement si il existe une n-bisimulation $Z \subseteq W \times W'$ telle que wZw'.

Ainsi, deux modèles sont n-bisimilaires (avec $n \geq 1$), si et seulement si il existe une relation de n-bisimulation entre eux.

Intuitivement, deux modèles sont n-bisimilaires si ils ont la même structure modale jusqu'à une profondeur $n-1$. Par conséquent, deux modèles n-bisimilaires satisfont les mêmes formules ayant un degré modal d'au plus $n-1$.

Le lemme suivant découle immédiatement des définitions 3.8 et 3.10.

Lemme 3.1 ([Blackburn *et al.* 2001])**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles épistémiques pointés.

$$M \leftrightarroweq M' \text{ si et seulement si, pour tout } n,\ M \leftrightarroweq_n M'$$

Le fait que le langage $\mathcal{L}$ contienne un nombre fini de variables propositionnelles nous permet de montrer cette équivalence.

3.3.2 Hauteur, restriction et modèles minimaux

Nous définissons la notion de hauteur d'un monde et d'un modèle ainsi que la notion de restriction d'un modèle.

Définition 3.11 (Hauteur d'un monde et d'un modèle [Blackburn *et al.* 2001])**.**
Soit $M = \langle W, R, V, w\rangle$ un modèle épistémique pointé. La notion de hauteur d'un monde v dans le modèle M, notée $\mathrm{height}_{\mathrm{M}}(v)$, est définie par induction. Le seul monde de hauteur 0 est le monde réel ; les mondes de hauteur $n+1$ sont les successeurs immédiats des mondes de hauteur n auxquels une hauteur plus petite que $n+1$ n'a pas encore été assignée.

La hauteur d'un modèle M, notée $\mathrm{height}(M)$, est le plus grand n tel qu'il existe un monde de M dont la hauteur est de n.

Définition 3.12 (Restriction d'un modèle [Blackburn *et al.* 2001])**.**
Soit $M = \langle W, R, V, w\rangle$ un modèle épistémique pointé. Pour un entier naturel k, la restriction de M à k, notée $(M \restriction k)$, est définie comme le sous-modèle contenant uniquement les mondes de hauteur au plus k. Formellement, $(M \restriction k) = \langle W_k, R_k, V_k, w\rangle$ où

- $W_k = \{v \in W \mid \mathrm{height}_{\mathrm{M}}(v) \leq k\}$;
- $R_k = \{R_{a,k} \mid a \in \mathbb{A}\}$ *tel que* $R_{a,k} = R_a \cap (W_k \times W_k)$;
- $V_k = \{V_v \in V \mid v \in W_k\}$.

Ainsi, la restriction de M à k contient tous les mondes atteignables depuis le monde réel en au plus k étapes en suivant les relations d'accessibilité. Généralement, cela ne va pas donner un modèle équivalent. Mais, comme le montre le lemme suivant, étant donnée une formule φ de degré k satisfaite par M, la restriction de M à k contient tous les mondes qui sont nécessaires pour satisfaire φ. Autrement dit, nous pouvons simplement supprimer les mondes qui se trouvent au-delà de « l'horizon k ».

Lemme 3.2 ([Blackburn *et al.* 2001]).
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ un modèle épistémique pointé et k un entier naturel.

$$(M \upharpoonright k) \leftrightarroows_k M$$

Deux modèles bisimilaires peuvent avoir des nombres de mondes différents. Ainsi, lorsque nous souhaitons comparer de tels modèles, nous devons nous concentrer sur les informations transmises par chaque modèle, et ne pas se laisser distraire par une représentation particulière. Nous avons donc besoin d'une forme normale. Nous prenons les modèles minimaux correspondants comme « formes normales ».

Définition 3.13 (Modèle de Kripke pointé minimal). *Soit $M = \langle W, R, V, w\rangle$ un modèle de Kripke pointé. M est* minimal *si et seulement si il n'y a aucun modèle $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ tel que $M \leftrightarrows M'$ et $|W| > |W'|$.*

Étant donné un modèle de Kripke fini pointé M, le problème de trouver un modèle minimal qui lui est associé est similaire au problème de minimiser le nombre d'états dans un automate fini déterministe. Un algorithme pour cela peut être facilement adapté de celui donné dans [Hopcroft 1971]. En effet, il suffit de considérer que les mondes du modèle de Kripke sont les états de l'automate, dans ce cas tout les états sont finaux, et les relations du modèle sont les transitions de l'automate. Notons que, comme dans le cas des automates finis déterministes, le modèle minimal est unique. Nous désignons par $\mu(M)$ le modèle de Kripke fini pointé minimal correspondant à M. Nous avons clairement $M \leftrightarrows \mu(M)$.[2]

3.4 Logique épistémique dynamique

Les informations étant communiquées, les connaissances et les croyances ne sont aucunement statiques. Il n'est donc pas surprenant que de nombreux logiciens aient pris cela en compte. Dans le cadre de la logique épistémique, il existe de nombreuses approches différentes. Nous nous focalisons ici sur l'approche que nous appelons « système BMS », d'après ses trois initiateurs : Baltag, Moss et Solecki [Baltag *et al.* 1998, Baltag & Moss 2004].

Modèle d'événement

Comme tous les systèmes proposés en logique épistémique dynamique, le système BMS est basé sur la logique épistémique. L'idée clé est que les événements modifiant l'information peuvent être modélisés de la même manière que les situations concernant des informations. Étant donnée une situation, comme dans l'exemple 3.1 lorsque *Carol* et *Daryl* ne savent pas si le chat de *Monsieur S* est vivant ou mort, nous pouvons facilement fournir un modèle de Kripke pour une telle situation. Nous considérons simplement les états qui peuvent se produire et parmi eux, ceux qui ne peuvent être distingués par les agents. Nous pouvons faire la même chose avec les

2. Cette minimisation correspond également à la bisimulation par contraction [Blackburn *et al.* 2006].

événements concernant des informations. En effet, la façon dont un agent perçoit un événement peut également être décrite en terme de croyances. Pour reprendre l'exemple 3.1, *Monsieur S* peut montrer à *Carol* que son chat est vivant (événement e_a) alors que *Daryl* continu de croire qu'il ne s'est rien passé (événement e_b). Cela nous mène à définir la notion de modèle d'événement. Cette définition est très similaire à celle des modèles épistémiques.

Définition 3.14 (Modèle d'événement)**.**
Un modèle d'événement pointé N est un tuple $N = \langle E, R, \mathrm{pre}, e\rangle$ tel que :

- *E est un ensemble fini non vide d'événements possibles ;*
- *$R = \{R_a \mid a \in \mathbb{A}\}$, où $R_a \subseteq E \times E$ est la relation d'accessibilité de l'agent a ;*
- *$\mathrm{pre} : E \to \mathcal{L}$ est une fonction qui associe à chaque événement $e \in E$, une formule de $\mathcal{L}$ représentant sa précondition ;*
- *et $e \in E$.*

Nous utilisons $R_a(e_i)$ pour désigner l'ensemble des événements possibles qui sont accessibles depuis e_i par l'agent a, formellement, $R_a(e_i) = \{e_j \mid (e_i, e_j) \in R_a\}$.

La principale différence avec la définition d'un modèle épistémique est que nous n'avons plus de fonction de valuation V, mais plutôt une fonction pre. Cette fonction spécifie sous quelle condition un événement peut avoir lieu dans un monde possible.

Exemple 3.2 (The Walking Cat)**.**

- *Supposons que Monsieur S annonce en privé à Carol que son chat est vivant (p). Cet événement est représenté par le modèle pointé $N = \langle E, R, \mathrm{pre}, e\rangle$ de la figure 3.2. L'événement e représente le fait que Monsieur S annonce que le chat est vivant, et l'événement e_1 représente le fait que rien ne se passe. Le double rectangle correspond à l'événement actuel. Dans ce cas, l'annonce de Monsieur S pousse Carol à croire que le chat est vivant (e) alors que Daryl croit qu'il ne s'est rien passé (e_1) ; ceci explique la relation d'accessibilité indexée par 2 (représentant Daryl) entre e et e_1. La précondition de l'événement e est que le chat est bien vivant (p), tandis que celle de l'événement e_1 est une tautologie ($\top$) puisque l'événement où il ne se passe rien peut avoir lieu dans tout monde.*

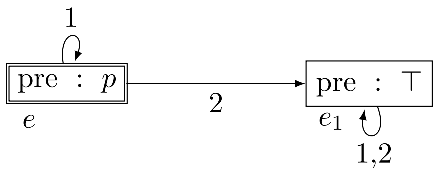


FIGURE 3.2 – Annonce privée de p à Carol

- *Supposons que Monsieur S annonce publiquement que son chat est vivant (p). Cet événement est représenté par le modèle pointé $N' = \langle E', R', \mathrm{pre}', e'\rangle$ de la figure 3.3. L'événement e' représente le fait que Monsieur S annonce que le chat est vivant. Comme cet événement est perçu par Carol et Daryl, celui-ci est le seul qu'ils considèrent possible. La précondition de cet événement doit être que le chat est vivant (p).*

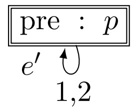


FIGURE 3.3 – Annonce publique de p

Modèle produit

Durant un tel événement e, les agents mettent à jour leurs croyances en prenant en compte ces deux informations : l'événement e ainsi que la situation initiale s. Ce qui conduit à une nouvelle situation $s \times e$. Formellement, cette mise à jour se fait via le produit entre un modèle épistémique pointé et un modèle d'événement pointé.

Définition 3.15 (Modèle produit)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ un modèle épistémique pointé et $N = \langle E, R, \text{pre}, e\rangle$ un modèle d'événement pointé tels que $M \models \text{pre}(e)$. Nous définissons le modèle produit $M \otimes N = M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ comme étant un modèle épistémique pointé tel que :

- $W' = \{v.f \mid v \in W, f \in E \text{ et } \langle W, R, V, v\rangle \models \text{pre}(f)\}$,
- $v.f \in R'_a(w.e)$ *si et seulement si* $v \in R_a(w)$ *et* $f \in R_a(e)$,
- $V' = \{V'_{v.f} \mid v.f \in W'\}$, *où* $V'_{v.f} = V_v$,
- *et* $w' = w.e$.

Intuitivement, l'ensemble de mondes possibles que nous considérons possible après la mise à jour sont, pour chaque événement e du modèle d'événement N, les mondes possibles du modèle M qui satisfont la précondition de e. Le fait que les événements ne changent pas l'état des mondes implique que la valuation des mondes reste inchangée.

Exemple 3.3 (The Walking Cat)**.**

- *Supposons que Monsieur S annonce en privé à Carol que son chat est vivant (p). Les croyances de Carol et Daryl sont représentées par le modèle pointé $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ de la figure 3.4. Ce modèle est obtenu après la mise à jour du modèle de la figure 3.1 par le modèle d'événement de la figure 3.2. Dans ce modèle, Carol (représentée par la relation* 1*) croit que le chat est vivant (p), mais Daryl (représenté par la relation* 2*) ne sait pas si le chat est vivant ou non.*

- *Supposons que Monsieur S annonce publiquement que son chat est vivant (p). Les croyances de Carol et Daryl sont représentées par le modèle pointé $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ de la figure 3.5. Ce modèle est obtenu après la mise à jour du modèle de la figure 3.1 par le modèle d'événement de la figure 3.3. Dans ce modèle, Carol (représentée par la relation* 1*) et Daryl (représenté par la relation* 1*) croient que le chat est vivant (p).*

Langage et axiomatisation

Il est naturel d'augmenter la langage de la logique épistémique pour intégrer cette fonctionnalité dynamique. Pour se faire, nous introduisons une modalité $[f]$.

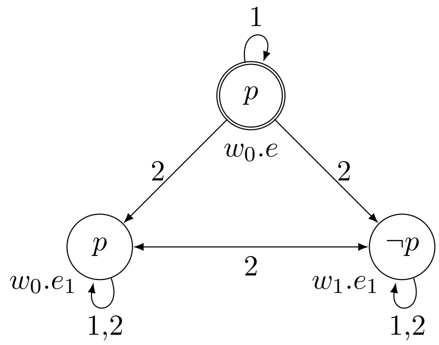


FIGURE 3.4 – Situation après l'annonce privé de p à Carol

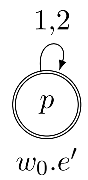


FIGURE 3.5 – Situation après l'annonce publique de p

Définition 3.16 (Langage $\mathcal{L}_N$)**.**
Soit $N = \langle E, R, \mathrm{pre}, e\rangle$ un modèle d'événement. Le langage $\mathcal{L}_N$ est défini comme suit :

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathrm{B}_a\varphi \mid [f]\varphi$$

où $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{A}$ et $f \in E$.

Nous pouvons maintenant donner la condition de vérité pour $\mathcal{L}_N$.

Définition 3.17 (Conditions de vérité pour $\mathcal{L}_N$)**.**
Soit $M = \langle W, R, V, w\rangle$ un modèle de Kripke fini pointé.

$$M \models [f]\varphi \textit{ si et seulement si } (\textit{si } M \models \mathrm{pre}(f) \textit{ alors } M \otimes N \models \varphi).$$

Ainsi, $[f]$ doit être lue « après l'exécution de l'événement f, φ est vraie ». Soit C une classe de modèles épistémiques et soit $\varphi \in \mathcal{L}_N$. Nous disons que φ est C-valide, noté $\models_C \varphi$ si et seulement si pour tout modèle épistémique $M = \langle W, R, V, w\rangle$ de C et tout monde possible $v \in W$, $\langle W, R, V, v\rangle \models \varphi$.

Nous pouvons maintenant axiomatiser la sémantique de la logique BMS.

Définition 3.18 (Système de preuve de BMS)**.**
La logique BMS est définie par le système de preuve de K_n ainsi que par les axiomes et règles d'inférences suivant :

R1 $\vdash_{BMS} [e]p \Leftrightarrow (\mathrm{pre}(e) \Rightarrow p)$

R2 $\vdash_{BMS} [e]\neg\varphi \Leftrightarrow (\mathrm{pre}(e) \Rightarrow \neg[e]\varphi)$

R3 *Si* $\vdash_{BMS} \mathrm{pre}(e)$, *alors* $([e]\mathrm{B}_a\varphi \Leftrightarrow \neg\, \mathrm{pre}(e) \vee \mathrm{B}_a([e_1]\varphi \wedge \cdots \wedge [e_n]\varphi)$
où $e_1, \dots e_n$ *est la liste d'événements* e_i *telle que* $e_i \in R_a(e)$

Nec *Si* $\vdash_{BMS} \varphi$, *alors* $\vdash_{BMS} [e]\varphi$ *(Nécessité)*

Distr $\vdash_{BMS} ([e](\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ([e]\varphi \Rightarrow [e]\psi))$ *(Distribution)*

R1, **R2** et **R3** sont appelés axiomes de réduction. Ils permettent de prouver que toute formule de $\mathcal{L}_N$ est logiquement équivalente à une formule de $\mathcal{L}$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques notions centrales en logique épistémique. La logique épistémique est le sous-domaine de la logique modale qui est concernée par le raisonnement sur la connaissance et la croyance. L'approche que nous avons décrite est celle du cas multi-agents initiée par Hintikka [Hintikka 1962]. Après avoir défini la sémantique basée sur les modèles épistémiques, nous avons donné une axiomatisation de celle-ci. Enfin, nous avons rappelé des notions de logique modale qui seront utilisées dans la suite de cette thèse. Nous avons également introduit la logique épistémique dynamique. La logique épistémique dynamique (DEL) est un cadre logique traitant de la connaissance et de la croyance ainsi que des changements d'information. En règle générale, DEL se concentre sur des situations impliquant plusieurs agents et étudie comment leurs connaissances et croyances changent lorsque des événements se produisent. Nous avons décrit ici l'approche de Baltag, Moss et Solecki que nous avons appelée « système BMS ». Après avoir défini la sémantique basée sur les modèles d'événement et les modèles produits, nous avons donné une axiomatisation de celle-ci. La logique épistémique dynamique est un des liens qui existent entre les logiques épistémiques et le changement de croyances. Dans le chapitre suivant nous présenterons d'autres approches pour le changement de croyances en logique épistémique.

Chapitre 4

Approches pour les changements de croyances en logique épistémique

Those who cannot remember the past are condemned to repeat it.
(George Santayana)

De nombreux travaux sur les liens entre les logiques épistémiques et le changement de croyances existent dans la littérature. Comme nous l'avons indiqué, la logique épistémique dynamique a pour objet l'étude du changement de croyances. Les travaux en logique épistémique dynamique étudient comment encoder les opérateurs de changement de croyances au sein d'un modèle épistémique [Baltag & Smets 2006, Board 2004, van Benthem 2007, van Ditmarsch 2005]. Fondamentalement, le problème est d'essayer d'effectuer la révision de croyances au sein du modèle épistémique (voir chapitre 3, section 3.4). Il existe aussi une autre approche formelle du changement de croyances qui est également basée sur la logique, à savoir la théorie de la révision de croyances AGM. Contrairement à la logique épistémique dynamique, la théorie de changement de croyances AGM est conçue pour un seul agent. Elle porte généralement sur les changements que doit subir la représentation du monde d'un agent après qu'il a reçu des informations (possiblement) en contradiction avec ses croyances. Cela diffère également des systèmes de logique épistémique dynamique présentés jusqu'à présent car, dans ces systèmes, l'information entrante est supposée compatible avec les croyances des agents. Certains travaux étudient la façon d'effectuer le changement de croyances directement sur les modèles épistémiques représentant les croyances d'un groupe d'agents. Nous allons en présenter certains dans ce chapitre.

Dans [Tallon *et al.* 2004], les auteurs étudient ce qu'ils appellent la révision des modèles $KD45_n$ due à la communication entre les agents. Certains agents annoncent publiquement l'intégralité de leurs croyances aux autres agents. Cette approche est plus proche de l'expansion que d'une véritable révision, et ne concerne que les croyances subjectives.

Dans [Aucher 2008, Aucher 2010], l'auteur considère un modèle interne du problème. À savoir, un modèle de la situation du point de vue de chaque agent. Ainsi, il n'a pas utilisé un modèle $KD45_n$ pour modéliser le système, mais un modèle interne par agent. Il adopte une notion de mondes possibles multi-agents afin de calculer le résultat de la révision. L'opérateur de révision qu'il propose est basé sur un degré de similarité entre mondes possibles multi-agents. Ainsi, le résultat de la révision est un ensemble de ces mondes multi-agents.

Sommaire

4.1 Révision via communication entre agents

Dans [Tallon *et al.* 2004], les auteurs proposent une règle de révision qui précise comment les croyances des agents évoluent, après qu'ils ont communiqué entre eux. Plus précisément, ils travaillent avec des structures de Kripke KD45 [Chellas 1980] et permettent aux agents de communiquer leurs croyances. Le problème est de trouver une règle précisant comment les croyances initiales qui sont contredites par l'annonce d'un autre agent sont modifiées pour faire face à cette contradiction. En l'absence de croyances fausses (par exemple, en logique $S5$), le processus est simple : chaque agent « abandonne » simplement ses croyances qui sont en contradiction avec les annonces. Cependant, en présence de croyances initiales erronées, la règle doit proposer un moyen de corriger ces croyances.

Dans un premier temps, les auteurs spécifient une fonction de sélection pour chaque agent. Celle-ci précise les croyances initiales qu'un agent va conserver après avoir entendu l'annonce d'un autre agent. Ces fonctions de sélection permettent donc, à chaque agent, d'éliminer certaines de leurs croyances initiales. Les auteurs n'imposent qu'une restriction à ces fonctions de sélections, celle de cohérence minimale. Cette contrainte s'exprime comme suit : un état, initialement cru possible, qui n'est pas contredit par les annonces reste considéré comme possible après la révision. La relation d'accessibilité des agents est également modifiée afin que les croyances annoncées par l'agent deviennent croyances communes. Les auteurs montrent que cette règle est toujours bien définie, dans le sens où elle conduit à une structure de Kripke KD45.

4.1.1 Préliminaires

Soient $I = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ un ensemble fini d'agents et S un ensemble de valeurs qu'un état peut prendre. Une structure de Kripke est une représentation des croyances des agents à propos du monde et des croyances des autres agents.

Définition 4.1 (Structure de Kripke minimale)**.**
Une structure de Kripke minimale (MKS) est un tuple $\langle \Omega, \omega_0, s, (t_i)_{i \in I} \rangle$, où Ω est un ensemble d'états, satisfaisant les conditions suivantes :

(i) s *est une application de* Ω *vers* S*,*

(ii) $\forall i \in I$, t_i *est une application de* Ω *vers* 2^{Ω}*,*

(iii) $\forall i \in I$, $\forall \omega \in \Omega$, *si* $\omega' \in t_i(\omega)$ *alors* $t_i(\omega') = t_i(\omega)$*,*

(iv) $\omega_0 \in \Omega$ *est l'état du monde réel,*

(v) Il n'existe pas de $\Omega' \subset \Omega$ *tel que* $\langle \Omega', \omega_0, s\,|_{\Omega'}, (t_i\,|_{\Omega'})_{i \in I} \rangle$ *satisfait les conditions (i) à (iv), où* $t_i\,|_{\Omega'}$ *est la restriction de* t_i *à* Ω'*.* [3]

3. Formellement, $t_i\,|_{\Omega'} \colon \Omega' \longrightarrow 2^{\Omega}$ et $t_i\,|_{\Omega'}(\omega) = t_i(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega'$.

Soit $\omega \in \Omega$, nous notons $\omega = (s(\omega), t_1(\omega), \ldots, t_n(\omega))$ où $s(\omega)$ est la valeur de l'état ω, $t_i(\omega)$ est l'ensemble des états que l'agent i considère possible depuis l'état ω.

L'exemple classique des enfants sales (*« muddy children »*) peut être exprimé dans ce formalisme comme suit.

Exemple 4.1 (*Muddy children*).
Trois enfants rentrent chez eux après avoir joué dans le jardin. Ils peuvent avoir le front propre (P) ou sale (S). Chaque enfant peut voir le front des autres enfants mais ne peut pas voir si le sien est propre ou non. Supposons que les trois enfants ont le front sale. Nous désignons la valeur des états par $F_1F_2F_3$ où $F_i \in \{P, S\}$ est l'état du front de l'enfant i. Nous représentons cette situation par un MKS donné par $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_7\}$ où

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= (SSS, \{\omega_0, \omega_4\}, \{\omega_0, \omega_2\}, \{\omega_0, \omega_1\}) \\
\omega_1 &= (SSP, \{\omega_1, \omega_5\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_0, \omega_1\}) \\
\omega_2 &= (SPS, \{\omega_2, \omega_6\}, \{\omega_0, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}) \\
\omega_3 &= (SPP, \{\omega_3, \omega_7\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}) \\
\omega_4 &= (PSS, \{\omega_0, \omega_4\}, \{\omega_4, \omega_6\}, \{\omega_4, \omega_5\}) \\
\omega_5 &= (PSP, \{\omega_1, \omega_5\}, \{\omega_5, \omega_7\}, \{\omega_4, \omega_5\}) \\
\omega_6 &= (PPS, \{\omega_2, \omega_6\}, \{\omega_4, \omega_6\}, \{\omega_6, \omega_7\}) \\
\omega_7 &= (PPP, \{\omega_3, \omega_7\}, \{\omega_5, \omega_7\}, \{\omega_6, \omega_7\})
\end{aligned}$$

L'exemple suivant illustre une situation dans laquelle deux agents ont des croyances erronées sur l'état du monde réel.

Exemple 4.2 (Un autre exemple).
Soient $S = \{\alpha, \beta\}$, $I = \{1, 2\}$ et $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_3\}$ tels que :

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}) \\
\omega_1 &= (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}) \\
\omega_2 &= (\beta, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}) \\
\omega_3 &= (\beta, \{\omega_3\}, \{\omega_3\})
\end{aligned}$$

Afin de décrire la situation qui est représentée dans cette structure, nous allons introduire certains éléments de syntaxe. Pour simplifier la notation, nous désignons pas α le fait que la valeur de l'état du monde réel est α. Nous considérons l'opérateur de croyances individuelles B_i, ainsi qu'un opérateur de croyances communes cb. [4] Ainsi, l'exemple précédent représente une situation dans laquelle la proposition $\alpha \wedge \mathrm{B}_1\mathrm{cb}(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_2\mathrm{cb}\beta$ est vraie. En d'autre termes, il s'agit de la situation dans laquelle la valeur de l'état du monde réel est α, l'agent 1 croit que $\alpha \vee \beta$ est croyance commune et l'agent 2 croit que β est croyance commune.

Lorsque les agents ont des croyances erronées sur l'état du monde réel, ils n'ont pas nécessairement tous la même vision du monde. La définition suivante introduit la notion d'horizon de croyances d'un agent.

4. L'opérateur de croyances communes cb signifie intuitivement que tout le monde croit que tout le monde croit que... un nombre infini de fois [Bonanno 1996].

Définition 4.2 (Horizon de croyances).
Soit un MKS $\langle \Omega, \omega_0, s, (t_i)_{i\in I}\rangle$*. L'horizon de croyances d'un agent* i*, notée* $BH_i(\omega_0, t)$ *est le sous-ensemble minimal* Υ *de* Ω *tel que :*

(i) $t_i(\omega_0) \subseteq \Upsilon$

(ii) $\forall \omega \in \Upsilon, \forall j \in I, t_j(\omega) \subseteq \Upsilon$

Ainsi, $BH_i(\omega_0, t)$ est le plus petit ensemble d'états tel que l'agent i croit possible ces états et croit que ces états sont croyances communes. Dans l'exemple 4.2, on a $BH_1(\omega_0, t) = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $BH_2(\omega_0, t) = \{\omega_3\}$

4.1.2 Communication et révision

Tallon, Vergnaud et Zamir [Tallon *et al.* 2004] se sont intéressés à l'évolution des croyances des agents quand ceux-ci peuvent communiquer des croyances aux autres et ainsi modifier leurs croyances en accord avec les communications reçues. Les auteurs se concentrent sur le cas où les agents communiquent, honnêtement et précisément, leurs croyances.

Une communication peut être identifiée par $I^C \subseteq I$, le groupe d'agents qui communique leurs croyances.

Définition 4.3 (Communication).
Soit un MKS $\langle \Omega, \omega_0, s, (t_i)_{i\in I}\rangle$*. Une communication est simplement un sous-ensemble* I^C *de* I*, d'agents qui annoncent leurs croyances (i.e.,* $(t_i(\omega_0))_{i\in I^C}$*).*

Fonction de sélection

Avant d'introduire leur règle de révision, les auteurs ajoute une sorte *d'attitude personnelle* des agents comme faisant partie des données du modèle. Étant donné un MKS $\langle \Omega, \omega_0, s, (t_i)_{i\in I}\rangle$ et une communication I^C, les fonctions de sélection satisfaisant la définition suivante sont considérées.

Définition 4.4 (Fonction de sélection).
Une fonction de sélection $f_i^{I^C}$ *est une application de* Ω *vers* 2^Ω *qui satisfait :*

(i) $\forall \omega \in \Omega, f_i^{I^C}(\omega) \subseteq t_i(\omega)$

(ii) $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ *tels que* $t_i(\omega) = t_i(\omega')$ *nous avons* $f_i^{I^C}(\omega) = f_i^{I^C}(\omega')$

(iii) Cohérence : $\forall \omega \in \Omega$*, si* $t_i(\omega) \cap \{\omega' \in \Omega \mid t_j(\omega') = t_j(\omega_0), \forall j \in I^C\} \neq \emptyset$*, alors* $f_i^{I^C}(\omega) = t_i(\omega) \cap \{\omega' \in \Omega \mid t_j(\omega') = t_j(\omega_0), \forall j \in I^C\}$

La condition de cohérence indique que chaque état initialement considéré possible par un agent i et qui est compatible avec l'annonce d'un autre agent doit être conservé. De plus, si de tels états existent, ils seront les seuls à être conservés.

La fonction de sélection suivante, introduite dans [Tallon *et al.* 2004] est à la base de leur règle de révision, cette fonction est en outre supposée être commune pour tous les agents.

$$\forall \omega \in \Omega, f_i(\omega) = \begin{cases} t_i(\omega) \cap \{\omega' \in \Omega \mid t_j(\omega') = t_j(\omega_0), \forall j \in I^C\} \text{ si non vide,} \\ t_i(\omega) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple de révision

La règle de révision proposée est définie pour prendre en compte des annonces pouvant contredire les croyances des agents. À partir d'un MKS et d'une communication, cette règle satisfait deux contraintes :

(i) chaque agent i conserve les états selon la fonction de sélection f_i et ce processus de sélection est communément cru par les agents

(ii) toutes les annonces faites deviennent croyances communes.

Définition 4.5 (Règle de révision)**.**
Soient un MKS $\langle \Omega, \omega_0, s, (t_i)_{i\in I}\rangle$, une communication I^C et un ensemble de fonctions de sélection $(f_i)_{i\in I}$. La révision de $\langle \Omega, \omega_0, s, (t_i)_{i\in I}\rangle$ est le MKS $\langle \Omega^C, \omega_0, s, (t_i^C)_{i\in I}\rangle$ où $t_i^C(.)$ est définie comme suit :

- $\forall \omega \in \Omega,\ \forall i \in I \setminus I^C,\ t_i^C(\omega) = f_i(\omega)$
- $\forall \omega \in \Omega,\ \forall i \in I^C,\ t_i^C(\omega) = f_i(\omega_0)$

et $\Omega^C = \{\omega_0\} \cup (\cup_{i\in I} BH_i(\omega_0, t^C))$

Pour comprendre la logique de cette règle de révision, examinons en détail les exemples suivant.

Exemple 4.3 (suite de l'exemple 4.2)**.**
Considérons d'abord une communication simple de l'agent 2. Pour l'agent 1, il y a trois fonctions de sélections possibles, correspondant aux trois possibles sous-ensembles non vides de $\{\omega_1, \omega_2\}$. La fonction de sélection f_2 de l'agent 2 est simplement égale à t_2. Considérons, par exemple, la fonction de sélection « conservative » pour f_1, soit : $f_1(\omega_0) = f_1(\omega_1) = f_1(\omega_2) = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $f_1(\omega_3) = \{\omega_3\}$.

La règle de révision conduit au MKS suivant :

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),\\
\omega_1 &= (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),\\
\omega_2 &= (\beta, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),\\
\omega_3 &= (\beta, \{\omega_3\}, \{\omega_3\}).
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que, dans ce MKS, ω_0 et ω_1 expriment la même hiérarchie de croyances. Ainsi, nous pouvons réduire ce MKS comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),\\
\omega_2 &= (\beta, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),\\
\omega_3 &= (\beta, \{\omega_3\}, \{\omega_3\}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'un point de vue syntaxique, nous sommes partis d'une situation dans laquelle la proposition $\alpha \wedge \mathrm{B}_1\mathrm{cb}(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_2\mathrm{cb}\beta$ était vraie (l'état du monde réel est α, l'agent 1 croit que $\alpha \vee \beta$ est croyance commune et l'agent 2 croit que β est croyance commune) et nous sommes arrivés à une situation dans laquelle la proposition $\alpha \wedge \mathrm{B}_1(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\beta \wedge \mathrm{B}_2\beta$ est vraie (l'état du monde réel est α, l'agent 1 croit $\alpha \vee \beta$ et que l'agent 2 croit que β est croyance commune, et l'agent 2 croit que β est croyance commune).

Ce résultat semble intuitif :

- *l'agent* 2 *n'a aucune raison de changer ses croyances puisqu'il ne reçoit aucune annonce et croit que son annonce n'apporte rien de nouveau à l'agent* 1
- *l'agent* 1 *modifie ses croyances en fonction de l'annonce de l'agent* 2.

Ceci est en fait un cas particulier, puisqu'il s'agit d'un simple processus de révision mono-agent. L'annonce est prise littéralement dans les croyances de l'agent 1. Ceci ne doit pas toujours être le cas, en général, comme nous pouvons le voir dans ce qui suit.

Exemple 4.4 (suite de l'exemple 4.3)**.**

Considérons maintenant une communication complète et utilisons les fonctions de sélection « conservatives », soit : $f_1(\omega_0) = f_1(\omega_1) = f_1(\omega_2) = f_2(\omega_1) = f_2(\omega_2) = \{\omega_1, \omega_2\}$ *et* $f_1(\omega_3) = f_2(\omega_0) = f_2(\omega_3) = \{\omega_3\}$.

La règle de révision conduit au MKS suivant :

$$\omega_0 = (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_1 = (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_2 = (\beta, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_3 = (\beta, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}).$$

Nous pouvons réduire ce MKS comme suit :

$$\omega_0 = (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_2 = (\beta, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}).$$

La situation, après révision, est celle dans laquelle la proposition $\alpha \wedge \mathrm{cb}(\mathrm{B}_1(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_2\beta)$ *est vraie (l'état du monde réel est* α*, et le fait que l'agent* 1 *croit* $\alpha \vee \beta$ *et que l'agent* 2 *croit* β *est croyance commune).*

Contrairement à l'exemple précédent, l'agent 1 *n'incorpore pas uniquement l'annonce de l'agent* 2 *à ses croyances. En effet, le fait que l'agent* 2 *croit que l'agent* 1 *croit* β *(i.e.,* $\mathrm{B}_2\mathrm{B}_1\beta$*) n'est plus vraie puisque l'agent* 1 *a annoncé* $\mathrm{B}_1(\alpha \vee \beta)$*. De la même manière, nous ne pouvons plus considérer que l'agent* 1 *va croire que l'agent* 2 *croit que l'agent* 1 *croit* β *(i.e.,* $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_1\beta$*). Ainsi, à partir des annonces, les agents déduisent de nouvelles croyances en fonction de la façon dont les autres agents déduisent leurs nouvelles croyances... La règle de révision proposée peut être considérée comme un raccourci pour ce processus de déduction croisée. Le résultat obtenu est assez naturel.*

Cet exemple illustre des problèmes de transposition de l'axiome AGM de succès dans un cadre multi-agents. En effet, les croyances sont ici révisées par les annonces des deux agents, i.e., $\mathrm{B}_1\mathrm{cb}(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_2\mathrm{cb}\beta$, néanmoins, cette annonce n'est plus vraie dans le MKS révisé.

Exemple 4.5 (suite de l'exemple 4.4)**.**
Considérons une nouvelle fois une communication complète, mais en changeant la fonction de sélection de l'agent 1 *:* $f_1(\omega_0) = f_1(\omega_1) = f_1(\omega_2) = \{\omega_1\}$ *et* $f_1(\omega_3) = \{\omega_3\}$*, la fonction de sélection de l'agent* 2 *reste inchangée.*

La règle de révision conduit alors au MKS :

$$\omega_0 = (\alpha, \{\omega_1\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_1 = (\alpha, \{\omega_1\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_2 = (\beta, \{\omega_1\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_3 = (\beta, \{\omega_1\}, \{\omega_3\}).$$

Nous pouvons réduire ce MKS comme suit :

$$\omega_0 = (\alpha, \{\omega_1\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_2 = (\beta, \{\omega_1\}, \{\omega_3\}).$$

La situation, après révision, est celle dans laquelle la proposition $\alpha \wedge \mathrm{cb}(\mathrm{B}_1\alpha \wedge \mathrm{B}_2\beta)$ *est vraie (l'état du monde réel est* α*, et le fait que l'agent* 1 *croit* α *et que l'agent* 2 *croit* β *est croyance commune).*

Par rapport au cas où nous utilisons des fonctions de sélection « conservatives », nous pouvons voir que l'agent 1 *a également révisé ses croyances sur l'état du monde réel, bien que rien n'explique pourquoi l'agent* 1 *devrait déduire que* β *est vraie. Il semblerait donc raisonnable d'imposer des conditions plus restrictives sur les fonctions de sélection. Néanmoins, le type de restriction à imposer n'est pas très clair. En effet, dans des exemples plus complexes, rien ne nous impose de nous limiter uniquement aux fonctions de sélection « conservatives ».*

Finalement, nous illustrons dans ce dernier exemple ce qui peut se produire lorsque les agents communiquent leurs croyances de manière moins précise.

Exemple 4.6 (suite (et fin) de l'exemple 4.2)**.**

Considérons le cas dans lequel l'agent 1 *annonce simplement qu'il croit* $\alpha \vee \beta$ *(i.e.,* $\mathrm{B}_1(\alpha \vee \beta)$*. Ceci est vrai dans les états* $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$*. Il est naturel de penser que les croyances des agents vont changer de la manière suivante : alors que nous avions* $\alpha \wedge \mathrm{B}_1\mathrm{cb}(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_2\mathrm{cb}\beta$*, nous avons maintenant* $\alpha \wedge \mathrm{B}_1\mathrm{cb}(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_2\mathrm{cb}(\mathrm{B}_1(\alpha \vee \beta) \wedge \mathrm{B}_2\beta)$*. Dans cette sémantique, le MKS correspondant à ce changement est :*

$$\omega_0 = (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_1 = (\alpha, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}),$$

$$\omega_2 = (\beta, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}),$$

$$\omega_3 = (\beta, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_3\}),$$

$$\omega_4 = (\alpha, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_4\}).$$

Face à ce type de communication partielle, la règle de révision générale n'apparait pas clairement.

Des travaux antérieurs (voir [Gerbrandy & Groeneveld 1997]) ont abordé cette question pour des communications quelconques. Cependant, ils ne considèrent pas la sémantique de Kripke, mais une représentation basée sur des ensembles non fondés. Cela signifie, grossièrement, qu'ils tolèrent des ensembles de croyances vides lorsqu'il y a des contradictions : les agents ne tentent pas de résoudre les incohérences auxquelles ils sont confrontés.

4.2 Révision de modèles internes

La théorie AGM de révision de croyances [Alchourrón *et al.* 1985] a été conçue pour un seul agent. Une idée naturelle est de l'étendre au cas multi-agent. Comme dans le cadre AGM classique, Aucher [Aucher 2008, Aucher 2010] considère les croyances d'un agent, qu'il nomme Y (pour *You*). Néanmoins, dans ce cas, les croyances de cet agent comprennent ses croyances sur le monde mais également ses croyances sur les croyances des autres agents sur le monde. Ainsi, Aucher généralise la sémantique d'un seul agent afin de prendre en compte l'aspect multi-agents.

4.2.1 Préliminaires

Dans le cadre AGM classique, un seul agent Y est considéré. Les mondes possibles introduits sont censés représenter la façon dont l'agent Y perçoit le monde. Étant le seul agent, ces mondes possibles ne traitent que de faits propositionnels sur le monde. Comme nous supposons qu'il existe d'autres agents que l'agent Y, un monde possible pour Y doit également traiter de la façon dont les autres agents perçoivent le monde. Ces « mondes possibles multi-agents » doivent donc traiter de faits propositionnels mais également de faits épistémiques.

Monde possible multi-agents

Pour représenter les croyances des autres agents (possiblement à propos des croyances de l'agent Y) dans un monde possible multi-agents, Aucher introduit une structure modale aux mondes possibles comme suit.

Définition 4.6 (Monde possible multi-agents).
Un monde possible multi-agents (M, w) *est un modèle épistémique finie pointé* $M = \langle W, \{R_j | j \in \mathbb{A}\}, V, w\rangle$ *tel que, pour tout* j, R_j *est sérielle, transitive et euclidienne, et*

- $R_Y(w) = \{w\}$,
- *il n'existe pas de* $v \in W$ *et* $j \neq Y$ *tels que* $w \in R_j(v)$.

La première condition assure que, dans le cas où Y est le seul agent, un monde possible multi-agent est juste une interprétation, comme dans le cadre AGM classique. En fait, les autres mondes possibles d'un monde possible multi-agents sont juste présents pour des raisons techniques : ils expriment les croyances des autres agents (dans le monde w). Nous reviendrons sur la seconde condition plus tard.

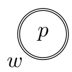


Figure 4.1 – Un monde possible (mono-agent)

Nous pouvons voir sur les figures 4.1 et 4.2 qu'un monde possible multi-agents est bien une généralisation d'un monde possible.

Modèles internes

L'état épistémique de l'agent étant représenté sémantiquement par un ensemble fini de mondes possibles dans le cadre AGM classique, la notion analogue de modèle interne dans un cadre multi-agents a été étudiée dans [Aucher 2008, Aucher 2010]

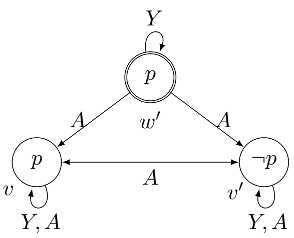


FIGURE 4.2 – Un monde possible multi-agents

Définition 4.7 (Modèle interne).
Un modèle interne est une union finie disjointe de mondes possibles multi-agents.

Dans le cas d'un unique agent, un modèle interne se résume à un ensemble (non vide) de mondes possibles, représentant ainsi un ensemble de croyances. Intuitivement, un modèle interne est le modèle formel que l'agent Y a « en tête » et représente la façon dont il perçoit le monde réel. Cette représentation diffère des modèles épistémiques introduits par Hintikka ($M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$), rencontrés habituellement en logique épistémique, qui représentent d'un point de vue extérieur la façon dont tous les agents perçoivent le monde réel w_0.

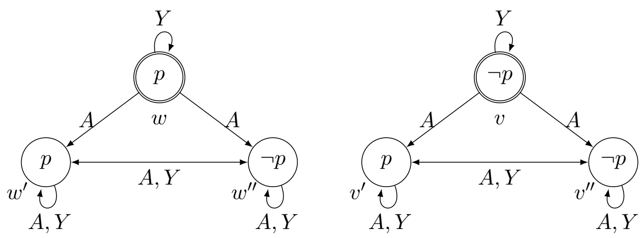


FIGURE 4.3 – Un modèle interne : deux mondes possibles multi-agents, (M_1, w) (à gauche) et (M_2, v) (à droite)

Exemple 4.7 (Modèle interne : exemple).
Un exemple de modèle interne est représenté sur la figure 4.3. Dans ce modèle interne, l'agent Y ne sait pas si p est vrai ou non (formellement $\neg \mathrm{B}_Y p \wedge \neg \mathrm{B}_Y \neg p$). En effet, $M_1 \models p$ et $M_2 \models \neg p$. L'agent Y croit également que l'agent A ne sait pas si p est vrai ou non (formellement $\mathrm{B}_Y(\neg \mathrm{B}_A p \wedge \neg \mathrm{B}_A \neg p)$). En effet, $M_1 \models \neg \mathrm{B}_A p \wedge \neg \mathrm{B}_A \neg p$ et $M_2 \models \neg \mathrm{B}_A p \wedge \neg \mathrm{B}_A \neg p$. Enfin, l'agent Y croit que l'agent A croit que l'agent Y ne sait pas si p est vrai ou non (formellement $\mathrm{B}_Y \mathrm{B}_A(\neg \mathrm{B}_Y p \wedge \neg \mathrm{B}_Y \neg p)$). En effet, $M_1 \models \mathrm{B}_A(\neg \mathrm{B}_Y p \wedge \neg \mathrm{B}_Y \neg p)$ et $M_2 \models \mathrm{B}_A(\neg \mathrm{B}_Y p \wedge \neg \mathrm{B}_Y \neg p)$.

Définition 4.8 (Modèle interne, une autre représentation).
Soit un modèle interne $\{(M_1, w_1), \ldots, (M_n, w_n)\}$, où $M_i = \langle W_i, \{R^i_j | j \in \mathbb{A}\}, V^i, w_i \rangle$. Le modèle épistémique pointé associé à $\{(M_1, w_1), \ldots, (M_n, w_n)\}$ est le modèle épistémique KD45$_n$ pointé $M = \langle W, \{R_j | j \in \mathbb{A}\}, V, \{w_i\} \rangle$ défini comme suit :

- $W = W_1 \cup \cdots \cup W_n$
- $R_j = R^1_j \cup \cdots \cup R^n_j$ *pour* $j \neq Y$
- $R_Y = R^1_Y \cup \cdots \cup R^n_Y \cup \{(w_i, w_k) | i, k \in [\![1; n]\!]\}$
- $V_w = V^i_w$ *si* $w \in W_i$

Exemple 4.8 (Modèle interne : exemple 2).
Le modèle interne $\{(M_1, w), (M_2, v)\}$ *est représenté sur la figure 4.3. Le modèle épistémique associé à* $\{(M_1, w), (M_2, v)\}$ *est représenté sur la figure 4.4. Un modèle épistémique bisimilaire à celui de la figure 4.4 est représenté sur la figure 4.5*

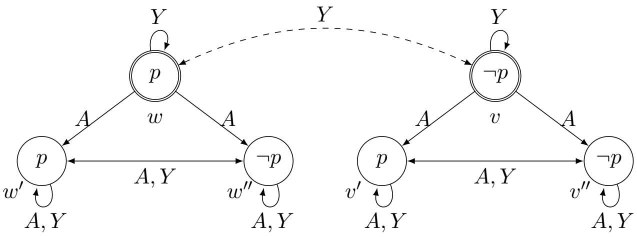


FIGURE 4.4 – Modèle épistémique associé à $\{(M_1, w), (M_2, v)\}$

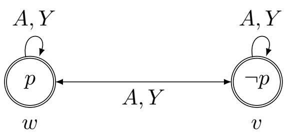


FIGURE 4.5 – Modèle épistémique bisimilaire au modèle épistémique de la figure 4.4

Nous pouvons maintenant revenir sur la seconde condition de la définition 4.6. En effet, si cette condition n'était pas satisfaite, une partie des croyances de l'agent j sur les croyances de l'agent Y (avec $j \neq Y$) dépendrait des autres mondes possibles multi-agents du modèle interne. Cet aspect de la notion de modèle interne apparait dans la définition de la notion de modèle épistémique associé à un modèle interne. La seconde condition assure que les croyances de l'agent j dans un monde possible multi-agents d'un modèle interne donné dépendent uniquement de la structure du monde possible multi-agents.

Le second type de représentation est plus proche des modèles épistémiques usuels de la logique épistémique standard. Néanmoins, l'interprétation des modèles internes [AUCHER 2008, AUCHER 2010] est différente de celle des modèles épistémiques en logique épistémique standard. En effet, ces modèles internes sont construits par l'agent Y afin de représenter le monde réel comme il le perçoit, alors que les modèles de la logique épistémique sont construits par un observateur extérieur et représentent la façon dont tous les agents perçoivent le monde réel. Formellement, la principale différence est qu'ils ont un monde réel unique, alors que les modèles internes ont un ensemble de « mondes réels » (les racines des mondes possibles multi-agents) représentant l'incertitude de l'agent Y sur le monde réel.

Cette représentation, via modèles internes, basée sur les mondes possibles multi-agents, permet de généraliser les concepts et méthodes de la théorie AGM de révision de croyances.

4.2.2 Un opérateur de révision

Aucher a proposé un opérateur de révision basé sur un degré de similarité entre mondes possibles multi-agents défini de la même manière que dans [SCHLECHTA *et al.* 1996].

Préliminaires

Rappelons dans un premier temps la définition d'un ordre lexicographique.

Définition 4.9 (Ordre anti-lexicographique).
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $(l_0, \ldots, l_k), (l'_0, \ldots, l'_k) \in [0;1]^{k+1}$. Nous fixons

$$(l_0, \ldots, l_k) < (l'_0, \ldots, l'_k) \textit{ si et seulement si } \begin{cases} l_k < l'_k \textit{ ou} \\ l_k = l'_k, \ldots, l_{k-j+1} = l'_{k-j+1} \textit{ et} l_{k-j} < l'_{k-j} \\ \textit{ pour un certain } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

Nous définissons maintenant le *supremum* d'un ensemble de k-uplets par rapport à l'ordre anti-lexicographique, en utilisant le supremum *Sup* des nombres réels.

Définition 4.10 (Supremum).
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\{(l_0^i, \ldots, l_k^i) | i \in S\} \subseteq [0;1]^{k+1}$, où S est un ensemble d'index possiblement infini. $Sup^k\{(l_0^i, \ldots, l_k^i)|i \in S\} = (A_0, \ldots, A_k)$ est défini comme suit.

$A_k = Sup\{l_k^i | i \in S\}$ *et pour tout* $m < k$,

$$A_m = \begin{cases} Sup\{l_m^i | l_j^i = A_j \textit{ pout tout } k \geq j > m, i \in S\} \\ \qquad \textit{si il existe un } i \textit{ tel que } l_j^i = A_j \textit{ pour tout } k \geq j > m \\ Sup\{l_m^i | i \in S\} \\ \qquad \textit{sinon} \end{cases}$$

où Sup est le supremum usuel des nombres réels.

Le fait que le supremum d'un ensemble non vide de nombres réels, ayant un majorant existe toujours, suffit à assurer que cette définition est bien fondée. Enfin, Aucher vérifie que ce supremum de tuples correspond au maximum des k-uplets lorsque celui-ci existe.

Proposition 4.1. *Soient $L = \{(l_0^i, \ldots, l_k^i)|i \in S\} \subseteq [0;1]^{k+1}$ et $(l_0^{i_0}, \ldots, l_k^{i_0}) \in L$, où S est un ensemble d'index possiblement infini.*

$$\textit{Si } (l_0^{i_0}, \ldots, l_k^{i_0}) \geq (l_0^i, \ldots, l_k^i) \textit{ pour tout } i \in S, \textit{ alors } (l_0^{i_0}, \ldots, l_k^{i_0}) = Sup^k(L).$$

Aucher introduit ensuite un résultat intéressant concernant la n-bisimulation. En effet, il montre qu'il suffit que deux modèles épistémiques soient n-bisimilaires jusqu'à une certaine profondeur modale pour qu'ils soient bisimilaires.

Proposition 4.2.
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles épistémiques. Soit $k = |W| \cdot |W'| + 1$. Nous avons

$$M \leftrightarroweq_k M' \textit{ si et seulement si } M \leftrightarroweq M'.$$

Définition de l'opérateur de révision

Afin de définir son opérateur de révision, Aucher introduit, dans un premier temps, un degré de similarité entre deux mondes possibles multi-agents qui permet d'obtenir un ordre anti-lexicographique.

Définition 4.11 (Degré de similarité).
Soient deux mondes possibles multi-agents (M, w) et (M', w') tels que $M = \langle W, \{R_j | j \in \mathbb{A}\}, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', \{R'_j | j \in \mathbb{A}\}, V', w'\rangle$. Soient S et S' deux ensembles finis de mondes possibles, et soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux ensembles (possiblement infinis) de mondes possibles multi-agents. Soient $n = |W| \cdot |W'| + 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Si E est un ensemble fini de nombres réels, nous désignons par $m(E)$ la moyenne des éléments de E.

- $\sigma(v,v') = max\{\frac{i}{n} | \langle W, \{R_j | j \in \mathbb{A}\}, V, v\rangle \leftrightarrows_i \langle W', \{R'_j | j \in \mathbb{A}\}, V', v'\rangle$ *et* $i \in [\![1;n]\!]\}$

- $\sigma(S,S') = \frac{1}{2}(m(\{\sigma(s,S') | s \in S\}) + m(\{\sigma(S,s') | s' \in S'\}))$ *où* $\sigma(s,S') = max\{\sigma(s,s') | s' \in S'\}$ *et* $\sigma(S,s') = max\{\sigma(s,s') | s \in S\}$

- $s^k((M,w),(M',w')) = (\sigma(w,w'), m(\{R_j(w), R'_j(w') | j \in \mathbb{A}, j \neq Y\}), \ldots, m(\{\sigma(R_{j_1} \circ \cdots \circ R_{j_k}(w), R'_{j_1} \circ \cdots \circ R'_{j_k}(w')) | j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{A}, j_i \neq j_{i+1}, j_1 \neq Y\})$

- $s^k(\mathcal{M},\mathcal{M}') = Sup^k\{s^k((M,w),(M',w')) | (M,w) \in \mathcal{M}, (M',w') \in \mathcal{M}'\}$

$\sigma(v,v')$ mesure un degré de similarité entre les mondes v et v'. De même, $\sigma(S,S')$ mesure un degré de similarité entre les ensembles de mondes S et S'. Et plus précisément, $\sigma(v,S')$ est le degré de similarité entre un monde v et un ensemble de mondes S'. Donc le degré de similarité entre S et S' est juste la moyenne de ces deux degrés. $s^k(M,M')$ est un n-uplet qui représente à quel point deux mondes possibles multi-agents sont similaires par rapport à leur profondeur modale respective. Pour une profondeur modale donnée, seul le degré de similarité des mondes ayant le même historique (i.e., accessibles depuis w et w' par la même séquence de relations d'accessibilité $R_{j_1}, \ldots, R_{j_k}$) sont comparés. Ainsi, dans sa comparaison, Aucher prend en compte la structure modale des deux mondes possibles multi-agents. Il suppose également que $j_i \neq j_{i+1}$, dans le cas contraire, par transitivité et euclidiannité de la relation d'accessibilité, nous aurions $R_{j_1} = R_{j_1} \circ R_{j_1+1}$.

Définition 4.12 (Opérateur de révision)**.**
Soient $\varphi \in \mathcal{L}$ et $k = \deg(\varphi) + 1$. Nous assignons à φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ sur les mondes possibles multi-agents défini comme suit :

$$(M,w) \leq_\varphi (M',w') \text{ si et seulement si } s^k(Mod(\varphi), \{(M,w)\}) \geq s^k(Mod(\varphi), \{(M',w')\}).$$

L'opérateur de révision $\circ$ associé à ce pré-ordre $\leq_\varphi$ est défini sémantiquement de manière habituelle (voir théorème 1.10) par :

$$Mod(\varphi \circ \psi) = Min(Mod(\psi), \leq_\varphi).$$

Ainsi, (M,w) est plus proche de φ que (M',w') quand son degré de similarité avec les modèles de φ est plus grand que celui de similarité de (M',w') avec les modèles de φ.

Proposition 4.3.
L'assignement défini dans la définition 4.12 est un assignement fidèle. Par conséquent, l'opérateur $\circ$ défini dans cette définition satisfait les postulats (R1)-(R6).

Exemple concret

L'opérateur de révision $\circ$ présenté dans la section précédente est syntaxique. Il est tout de même possible de définir des opérateurs de révision directement sur les modèles internes. En effet, les modèles internes étant des représentations formelles de ce que l'agent Y à « en tête », il est nécessaire d'avoir des mécanismes de révision que cet agent pourrait utiliser pour réviser sa représentation quand il reçoit une information sous forme d'une formule épistémique. Ces opérateurs de révision auraient alors un modèle interne et une formule comme arguments et donneraient un autre modèle interne. Un exemple d'un tel opérateur de révision est donné dans la définition suivante.

Définition 4.13 (Un opérateur de révision)**.**
Soient un ensemble de mondes possibles multi-agents $\mathcal{M}$ et une formule cohérente $\varphi \in \mathcal{L}$. Nous définissons la révision de $\mathcal{M}$ par φ, notée $\mathcal{M} * \varphi$, comme suit :

$$\mathcal{M} * \varphi = Min(Mod(\varphi), \leq_{\mathcal{M}})$$

où pour tous mondes possibles multi-agents (M, w) et (M', w'),

$$(M, w) \leq_{\mathcal{M}} (M', w') \text{ si et seulement si } s^k(\mathcal{M}, \{(M, w)\}) \geq^k s^k(\mathcal{M}, \{(M', w')\})$$

où $k = \deg(\varphi) + 1$.

Notons que si $\mathcal{M}$ est un modèle interne, $\mathcal{M} * \varphi$ pourrait, à première vue, être infini et donc ne pas être un modèle interne. La proposition suivante assure que ce n'est pas le cas.

Proposition 4.4. *[*Aucher *2008]*
Soient un modèle interne $\mathcal{M}$ et une formule cohérente $\varphi \in \mathcal{L}$. $\mathcal{M} * \varphi$ est un modèle interne.

Exemple 4.9. *Reprenons l'exemple 4.7. Le modèle interne initial de l'agent Y, $\{(M, w), (M', w')\}$, est représenté sur la figure 4.6.*

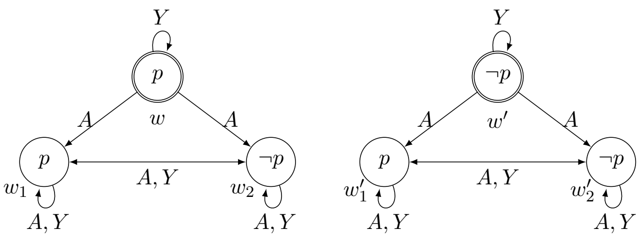


Figure 4.6 – Modèle interne initial de l'agent Y, $\{(M, w), (M', w')\}$

Le modèle épistémique associé à $\{(M, w), (M', w')\}$ est représenté sur la figure 4.7.

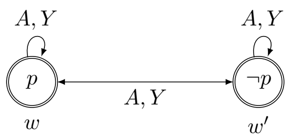


Figure 4.7 – Modèle épistémique associé à celui de la figure 4.6

Supposons maintenant qu'un agent extérieur annonce à l'agent Y, en privé, que l'agent A croit que p est vrai (formellement $\mathrm{B}_A p$). Cette annonce contredit les croyances de l'agent Y, celui-ci doit donc réviser son modèle interne. Le modèle interne $\{(M^r, w^r), (M^{r'}, w^{r'})\} = \{(M, w), (M', w')\} * \mathrm{B}_A p$ est représenté sur la figure 4.8.

Le modèle épistémique associé à $\{(M^r, w^r), (M^{r'}, w^{r'})\}$ est représenté sur la figure 4.9.

Si nous comparons ce modèle interne avec celui de la figure 4.7, nous constatons que l'agent Y ne sait toujours pas si p est vrai ou non. Voilà ce à quoi nous devrions nous attendre, puisque l'annonce était uniquement à propos des croyances de l'agent A et n'a donné aucune information sur l'état du monde réel. Bien sûr, les croyances de l'agent Y sur les croyances de l'agent A ont changé, puisqu'il croit maintenant que l'agent A croit p. Mais, les croyances de l'agent Y à propos des croyances de l'agent A à propos des croyances de l'agent Y n'ont pas changé. Ceci est

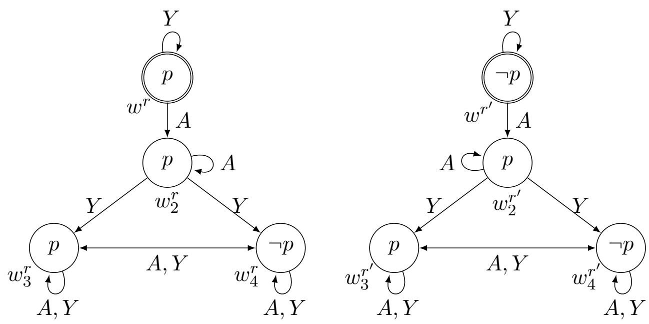


FIGURE 4.8 – Modèle interne révisé $\{(M^r, w^r), (M^{r'}, w^{r'})\}$ après l'annonce privé, que l'agent A croit p, à l'agent Y

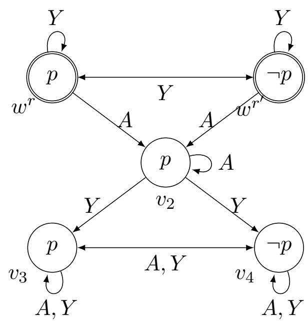


FIGURE 4.9 – Modèle épistémique associé à celui de la figure 4.8

également ce à quoi nous devrions nous attendre. En effet, l'agent A ne sait rien de l'annonce privée qu'a reçue l'agent Y, ainsi ses croyances sur les croyances de l'agent Y ne changent pas, et l'agent Y le sait. Et puisque ces croyances sont indépendantes de ses croyances sur p, les croyances de l'agent Y à propos des croyances de l'agent A à propos des croyances de l'agent A ne devraient pas changer au cours de la révision. Plus généralement, les croyances de l'agent Y à propos des croyances de degré supérieur à 1 (i.e., d'un degré supérieur au degré de $\mathrm{B}_A p$*) ne devraient pas changer.*

Chapitre 5

Opérateurs de changement de croyances privés

When I talk about belief, why do you always assume I'm talking about God ?
(Shepherd Book – Serenity)

Dans de nombreuses applications, un agent n'est pas seul dans l'environnement, mais le partage avec d'autres agents, qui ont aussi des croyances. Les outils logiques les plus courants pour représenter les croyances sur les croyances des autres agents sont les logiques épistémiques. Ainsi le changement de croyances dans les logiques épistémiques est une question importante. Comme nous l'avons vu plus tôt, il existe quelques travaux sur les liens entre les logiques épistémiques et la théorie de changement de croyances, mais la plupart d'entre eux étudient l'encodage des opérateurs de changement de croyances dans les modèles épistémiques, où la relation d'accessibilité code les différents niveaux de plausibilité des informations qui guident le processus de révision [van Ditmarsch 2005, Baltag & Smets 2006, Board 2004, van Benthem 2007].

Nous nous intéressons dans ce chapitre à une autre connexion entre les logiques épistémiques et la théorie du changement de croyances, plus proche des travaux que nous avons présentés dans le chapitre précédent [Aucher 2008, Aucher 2010, Tallon *et al.* 2004]. Nous sommes intéressés par la définition d'opérateurs qui modifient les croyances des agents dans les modèles $\mathrm{KD45}_n$ standard. Cette tâche est plus compliquée que dans le cadre AGM usuel, parce que, dans un contexte multi-agents, les nouvelles informations peuvent prendre différentes formes. Par exemple, chaque nouvelle information peut être observée/transmise/disponible à tous les agents ou seulement à certains d'entre eux. Ce genre de question a déjà été étudiée en logique épistémique dans le cadre des annonces publiques et privées [van Ditmarsch *et al.* 2008, Aucher 2012]. Une annonce est un moyen d'obtenir une nouvelle information, mais ce n'est pas le seul (observation directe, etc.). Nous allons donc utiliser les termes « changement public » et « changement privé » dans ce chapitre. Un changement public est un changement qui est produit par une information qui est rendue disponible pour chaque agent. Dans ce cas, nous restons dans le cadre AGM standard, et nous pouvons utiliser ses résultats (postulats, théorèmes de représentation, etc) afin de définir des opérateurs de changement de croyances adéquats. Un changement privé est un changement qui est produit par une information qui est rendue disponible pour un seul agent. Cela signifie que les croyances de cet agent doivent changer, alors que les croyances des autres doivent rester inchangées. Dans ce cas, nous ne pouvons pas appliquer directement les définitions AGM. Des définitions particulières sont nécessaires, c'est ce que nous proposons dans ce chapitre.

Ainsi, notre but ici est de proposer un cadre de changement de croyances multi-agents, où les croyances des agents sont représentées par un modèle KD45$_n$. Nous considérons le changement privé, où un agent donné reçoit une nouvelle information, et nous voulons définir un modèle KD45$_n$ qui représente la nouvelle situation épistémique. Nous considérons uniquement des informations objectives, c'est-à-dire des informations au sujet de l'environnement (du monde). Nous étudions à la fois l'expansion et la révision. Pour chaque cas, nous présentons une traduction des postulats AGM pour le cadre multi-agents et des opérateurs particuliers.

Sommaire

Avant-propos

Dans la suite de ce chapitre, nous faisons l'hypothèse que la nouvelle information est toujours une formule cohérente. Faire un changement par une formule incohérente est permis par les postulats AGM, mais n'a pas beaucoup d'intérêt dans les applications pratiques. De plus, l'axiome **D** ne nous permet pas l'usage de croyances contradictoires.

Ici, un modèle de Kripke fini pointé KD45$_n$ $M = \langle W, R, V, w\rangle$ représente un ensemble de n ensembles de croyances K_i^M, un pour chaque agent $i \in \mathbb{A}$, où $K_i^M = \{\varphi | M \models \mathrm{B}_i\varphi\}$. Nous définissons également l'ensemble des croyances objectives de l'agent i (ce que l'agent i croit à propos de l'état du monde réel).

Définition 5.1 (Ensemble de croyances objectives)**.**
Soit un modèle de Kripke fini pointé KD45$_n$ $M = \langle W, R, V, w\rangle$. L'ensemble O_i^M des croyances objectives d'un agent i de M est défini comme suit :

$$O_i^M = K_i^M \cap \mathcal{L}_0$$

où K_i^M est l'ensemble des croyances de l'agent i dans le modèle M ($K_i^M = \{\varphi | M \models \mathrm{B}_i\varphi\}$) et $\mathcal{L}_0$ est le langage propositionnel classique des formules objectives.

Nous commençons par définir des opérateurs d'expansion privée : un seul agent augmente ses croyances. En effet, suite à une annonce privée, les croyances des autres agents ainsi que les croyances d'ordre supérieur de tous les agents restent inchangées.

5.1 Expansion privée

Notre objectif, dans un premier temps, est de proposer une formulation équivalente des postulats AGM dans un cadre multi-agents.

5.1.1 Postulats

Soient un modèle de Kripke $\mathrm{KD45}_n$ fini pointé $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et une formule φ de $\mathcal{L}_0$. Le résultat de l'expansion privée du modèle M par la formule φ pour l'agent a est noté $M +_a \varphi = \langle W', R', V', w'\rangle$.

Les postulats d'expansion AGM peuvent être réécrits comme suit :

($\mathbf{E_n0}$) $V'(w') = V(w)$

($\mathbf{E_n1}$) Si $M \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, alors $M +_a \varphi$ est un modèle $\mathrm{KD45}_n$

($\mathbf{E_n2}$) $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\varphi$

($\mathbf{E_n3}$) $M \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$, pour tout $i \neq a$

($\mathbf{E_n4}$) Si $M \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, alors $M \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$, pour tout $i \neq a$ et $k \geq 1$

($\mathbf{E_n5}$) Pour toute formulle objective ψ, si $M \models \mathrm{B}_a\psi$, alors $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$

($\mathbf{E_n6}$) Si $M \models \mathrm{B}_a\varphi$, alors $M +_a \varphi \leftrightarroweq M$

($\mathbf{E_n7}$) Pour toute formulle objective ψ, si $M_1 \models \mathrm{B}_i\psi$ implique $M_2 \models \mathrm{B}_i\psi$, alors $M_1 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$ implique $M_2 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$

($\mathbf{E_n8}$) Pour tout M', si M' satisfait ($\mathbf{E_n0}$)-($\mathbf{E_n7}$), alors $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$ implique $M' \models \mathrm{B}_a\psi$

La plupart de ces postulats sont une traduction des postulats AGM sur les modèles $\mathrm{KD45}_n$. Les autres expriment surtout sur le fait que les seules choses qui changent sont les croyances de l'agent a sur l'état du monde. ($\mathbf{E_n0}$) exprime le fait que le monde réel ne change pas ; comme d'habitude en révision de croyances, le monde ne change pas, seules les croyances de l'agent évoluent. En effet, quand le monde évolue, il faut utiliser la mise à jour [Katsuno & Mendelzon 1991, Herzig *et al.* 2005]. ($\mathbf{E_n1}$) dit que, dans le cas où la nouvelle information ne contredit pas les croyances de l'agent, le modèle résultant de l'expansion privée est toujours un modèle $\mathrm{KD45}_n$. En effet, lorsque l'expansion se fait par une formule qui contredit les croyances de l'agent, le résultat viole l'axiome **D** pour l'agent. Le modèle n'est donc plus $\mathrm{KD45}_n$. ($\mathbf{E_n2}$) est le postulat de succès. Il affirme que, après l'expansion privée par φ, l'agent a croit φ. Le postulat ($\mathbf{E_n3}$) indique que les croyances de tous les agents sauf a ne changent pas. ($\mathbf{E_n4}$) indique, lui, que les croyances de l'agent a à propos des croyances des autres agents ne changent pas. Les postulats ($\mathbf{E_n5}$) et ($\mathbf{E_n6}$) assurent que si φ est déjà crue par l'agent a, alors l'expansion privée ne change rien, ainsi le modèle résultant de l'expansion est bisimilaire au modèle initial. ($\mathbf{E_n7}$) est la traduction de la propriété de monotonie. Il indique que, si un modèle permet plus d'inférences que l'autre, alors l'expansion du premier permet plus d'inférences que l'expansion du second. Enfin, le postulat ($\mathbf{E_n8}$) est le postulat de minimalité. Il indique que le résultat de l'expansion du modèle par φ est un changement de croyances minimal.

La propriété suivante est directement impliquée par ces postulats :

Proposition 5.1.
Il y a un unique opérateur d'expansion privée satisfaisant les postulats ($\mathbf{E_n0}$)-($\mathbf{E_n8}$).

Démonstration. Ceci est une conséquence des postulats ($\mathbf{E_n0}$), ($\mathbf{E_n3}$) et ($\mathbf{E_n8}$). Supposons qu'il existe deux opérateurs $+^1$ et $+^2$ satisfaisant ces postulats. Pour tout modèle M, toutes formules φ et ψ de $\mathcal{L}_0$ et χ de $\mathcal{L}$, nous avons :

- d'après ($\mathbf{E_n0}$), nous avons $M +^1_a \varphi \models \psi$ si et seulement si $M +^2_a \varphi \models \psi$, pour toute formulle objective ψ
- d'après ($\mathbf{E_n3}$), nous avons $M +^1_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $M +^2_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$, pour tout $i \neq a$ et toute formulle objective χ
- en appliquant deux fois ($\mathbf{E_n8}$), nous avons $M +^1_a \varphi \models \mathrm{B}_a\chi$ si et seulement si $M +^2_a \varphi \models \mathrm{B}_a\chi$, pour toute formulle objective χ

Par conséquent, $M +^1_a \varphi \leftrightarroweq M +^2_a \varphi$. Ainsi, ces deux opérateurs donneront toujours des résultats bisimilaires. □

Nous montrons ainsi, à l'instar de l'opérateur d'expansion du cadre AGM [Gärdenfors 1988], qu'il n'existe qu'un seul opérateur d'expansion rationnel dans ce cadre multi-agents.

La propriété suivante montre que les postulats que nous proposons ci-dessus forment une extension conservatrice des postulats d'expansion du cadre AGM. En effet, nous montrons que le comportement de cet opérateur sur des formules objectives est identique à celui de l'opérateur AGM classique.

Proposition 5.2.
Soit $+_i$ un opérateur d'expansion privée satisfaisant les postulats ($\mathbf{E_n0}$)-($\mathbf{E_n8}$). *L'opérateur $+$ défini par $O_i^M + \varphi = O_i^{M+_i\varphi}$ est un opérateur d'expansion AGM (il satisfait les postulats* ($\mathbf{K+1}$)-($\mathbf{K+6}$)*).*

Démonstration. Soient $+_i$ un opérateur d'expansion privée satisfaisant les postulats ($\mathbf{E_n0}$)-($\mathbf{E_n8}$), et $+$ l'opérateur d'expansion défini par $O_i^M + \varphi = O_i^{M+_i\varphi}$. Rappelons dans un premier temps que l'opérateur d'expansion satisfaisant tout les postulats AGM est unique [Gärdenfors 1988]. Notons dans un second temps que, le fait d'utiliser uniquement des formules objectives lors de l'expansion privée suffit à montrer que l'opérateur $+_i$ satisfait tout les postulats AGM. En effet, la plupart des postulats d'expansion privée étant une traduction des postulats d'expansion AGM, nous avons directement : ($\mathbf{E_n1}$) implique ($\mathbf{K+1}$), ($\mathbf{E_n2}$) implique ($\mathbf{K+2}$), ($\mathbf{E_n5}$) implique ($\mathbf{K+3}$), ($\mathbf{E_n6}$) implique ($\mathbf{K+4}$), ($\mathbf{E_n7}$) implique ($\mathbf{K+5}$) et ($\mathbf{E_n8}$) implique ($\mathbf{K+6}$). □

Nous proposons maintenant une définition constructive de l'opérateur d'expansion privée caractérisé par nos postulats.

5.1.2 Un opérateur d'expansion privée

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la notation suivante pour les mondes nouvellement créés (par expansion ou révision).

Définition 5.2 (Monde copie)**.**
Soient un monde possible w et une valuation ϑ. Nous désignons par v_w^ϑ la « copie » du monde w ayant pour valuation ϑ.

En d'autres termes, un monde v_w^ϑ aura le même comportement que le monde w dont il est la copie, à l'exception du fait que la valuation de celui-ci (ϑ) pourra être différente. Cette copie est essentielle pour éviter de perdre les croyances d'ordre supérieur de l'agent qui effectue l'expansion ou la révision.

Nous pouvons maintenant donner une définition constructive de l'opérateur d'expansion privée.

Définition 5.3 (Expansion de M par φ pour l'agent a)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ un modèle de Kripke fini pointé KD45$_n$, et φ une formule objective cohérente ($\varphi \in \mathcal{L}_0$). Nous définissons l'expansion privée de M par φ pour l'agent a comme $M +_a \varphi = \langle W', R', V', w'_0 \rangle$, avec :

- $\Theta = \{V_w \mid w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M\}$
- $W' = W \cup W^\varphi \cup \{w'_0\}$ *où*
  - $W^\varphi = \bigcup_{w \in R_a(w_0)} W^\varphi_w$ *et*
  - $W^\varphi_w = \bigcup_{\vartheta \in \Theta} \{v^\vartheta_w\}$
- $R'_a = R_a \cup R^\varphi_a \cup R^0_a$ *où*
  - $R^\varphi_a = \{(w^\varphi_1, w^\varphi_2) \mid w^\varphi_1, w^\varphi_2 \in W^\varphi\}$ *et*
  - $R^0_a = \{(w'_0, w^\varphi) \mid w^\varphi \in W^\varphi\}$
- $R'_i = R_i \cup R^{\overrightarrow{\varphi}}_i \cup R^0_i$*, pour tout $i \neq a$, où*
  - $R^{\overrightarrow{\varphi}}_i = \{(v^\vartheta_w, w') \mid (w, w') \in R_i$ *et* $v^\vartheta_w \in W^\varphi\}$*, pour tout $i \neq a$, et*
  - $R^0_i = \{(w'_0, w) \mid (w_0, w) \in R_i\}$*, pour tout $i \neq a$*
- $V'_w = V_w$*, pour tout $w \in W$*
- $V'_{v^\vartheta_w} = \vartheta$*, pour tout $v^\vartheta_w \in W^\varphi$*
- $V'_{w'_0} = V_{w_0}$

Lorsque l'agent a étend ses croyances, le modèle doit changer afin d'intégrer ce changement. Mais les croyances des autres agents doivent rester inchangées.

Le nouvel ensemble de mondes possibles W' contient tous les mondes du modèle initial, un nouveau monde réel w'_0 et un ensemble de mondes W^φ représentant les nouvelles croyances de l'agent a. L'ensemble W^φ contient une copie des mondes de $R_a(w_0)$ qui ne contredisent pas φ.

La nouvelle relation d'accessibilité R'_a contient la relation initiale R_a et les ensembles R^φ_a et R^0_a. L'ensemble R^0_a est constitué de l'ensemble des couples (w'_0, w^φ) où $w^\varphi \in W^\varphi$, modifiant ainsi les croyances de l'agent effectuant l'expansion. L'ensemble R^φ_a est constitué de l'ensemble des couples $(w^\varphi_1, w^\varphi_2) \in W^\varphi$. Les mondes de W^φ forment ainsi une clique, car ils sont tous également plausibles pour l'agent effectuant l'expansion.

Chaque relation d'accessibilité R'_i, pour tout $i \neq a$, contient la relation initiale R_i ainsi que les ensembles R^0_i et $R^{\overrightarrow{\varphi}}_i$. L'ensemble R^0_i, pour tout $i \neq a$, est constitué de l'ensemble des couples (w'_0, w) tels que $(w_0, w) \in R_i$, préservant ainsi les croyances des agents qui n'effectuent pas l'expansion ainsi que les croyances d'ordre supérieur de tous ces agents. L'ensemble $R^{\overrightarrow{\varphi}}_i$, pour tout $i \neq a$, est constitué de l'ensemble des couples (v^ϑ_w, w'), où $v^\vartheta_w \in W^\varphi_w$ tel que $(w, w') \in R_i$, préservant ainsi les croyances d'ordre supérieur de l'agent effectuant l'expansion.

Nous pouvons maintenant montrer que cet opérateur satisfait les propriétés attendues.

Proposition 5.3.
L'opérateur $+_a$ satisfait les postulats ($\mathbf{E_n0}$)-($\mathbf{E_n8}$).

Démonstration. Nous montrons que l'opérateur d'expansion privée $+_a$ défini à la définition 5.3 satisfait les postulats d'expansion privée ($\mathbf{E_n0}$)-($\mathbf{E_n8}$). Soient $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ un modèle de Kripke fini pointé KD45$_n$, et φ une formule objective cohérente ($\varphi \in \mathcal{L}_0$). Soit $M' = \langle W', R', V', w'_0 \rangle$ un modèle de Kripke fini pointé KD45$_n$ tel que $M' = M +_a \varphi$. D'après la définition 5.3, nous avons $R'_i = R^0_i \cup R^{\overrightarrow{\varphi}}_i \cup R_i$, $R'_a = R^0_a \cup R^{\varphi}_a \cup R_a$ et $W' = \{w'_0\} \cup W^{\varphi} \cup W$.

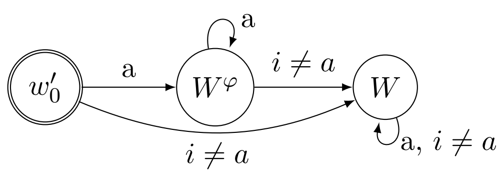
De plus, nous avons, $\forall (w, w') \in R'_i$,

- si $(w, w') \in R^0_i$, alors $w = w'_0$ et, par construction de R^0_i, $w' \in W$
- si $(w, w') \in R^{\overrightarrow{\varphi}}_i$, alors $w \in W^{\varphi}$ et, par construction de $R^{\overrightarrow{\varphi}}_i$, $w' \in W$
- si $(w, w') \in R_i$, alors $(w, w') \in W$

Et $\forall (w, w') \in R'_a$,

- si $(w, w') \in R^0_a$, alors $w = w'_0$ et, par construction de R^0_a, $w' \in W^{\varphi}$
- si $(w, w') \in R^{\varphi}_a$, alors $w \in W^{\varphi}$ et $w' \in W^{\varphi}$ par construction de R^{φ}_a
- si $(w, w') \in R_a$, alors $(w, w') \in W$

Ainsi, nous pouvons schématiser le nouveau modèle M' somme suit :



Dans le reste de la preuve, lorsque nous mentionnons une paire $(w, w') \in R'_i$, nous considérons uniquement les cas possibles :

- $(w, w') \in R'_a$ si et seulement si
  - $w = w'_0$ et $w' \in W^{\varphi}$, ou
  - w et $w' \in W^{\varphi}$, ou
  - w et $w' \in W$.
- $(w, w') \in R'_i$, $i \neq a$, si et seulement si
  - $w = w'_0$ et $w' \in W$, ou
  - $w \in W^{\varphi}$ et $w' \in W$, ou
  - w et $w' \in W$.

($\mathbf{E_n0}$) Par construction de $M' = M +_a \varphi$, nous avons $V'_{w'_0} = V_{w_0}$.

($\mathbf{E_n1}$) Nous devons montrer que, si $M \not\models \mathrm{B}_a(\neg\varphi)$, alors pour tout $i \in \mathbb{A}$, la relation R'_i est sérielle, transitive et euclidienne.

sérielle Soit un monde possible $w \in W'$ où, rappelons le, $W' = \{w'_0\} \cup W^{\varphi} \cup W$. Plusieurs cas sont à considérer :

- si $w \in W$, alors R_i (resp. R_a) étant sérielle, nous savons qu'il existe un $w' \in W$ tel que $(w, w') \in R_i$ (resp. R_a).

- si $w \in W^{\varphi}$ et $i \neq a$. Notons que, dans ce cas, w est un v_u^{ϑ}. Ainsi, il existe un monde $w' \in W$ tel que $(w, w') \in R_i^{\overrightarrow{\varphi}}$, par construction de $R_i^{\overrightarrow{\varphi}}$.
- si $w \in W^{\varphi}$. Notons que, dans ce cas également, w est un v_u^{ϑ}. Ainsi, il existe un monde $w' \in W^{\varphi}$ tel que $(w, w') \in R_a^{\varphi}$, par construction de R_a^{φ}.
- si $w = w'_0$ et $i \neq a$, alors il existe un monde $w' \in W$ tel que $(w'_0, w') \in R_i^0$, par construction de R_i^0.
- si $w = w'_0$, alors il existe un monde $w' \in W^{\varphi}$ tel que $(w'_0, w') \in R_a^0$, par construction de R_a^0.

transitive Soient w_1, w_2 et w_3 trois mondes de W' tels que $(w_1, w_2) \in R'_i$ et $(w_2, w_3) \in R'_i$. Nous voulons montrer que $(w_1, w_3) \in R'_i$. Plusieurs cas sont à considérer :

- si $w_1, w_2, w_3 \in W$, alors R_i étant transitive, nous avons $(w_1, w_3) \in R'_i$
- si $w_1 = w'_0$, $w_2, w_3 \in W$ et $i \neq a$, alors, par construction de R_i^0, nous avons $(w_0, w_2) \in R_i$. De plus R_i étant sérielle, nous avons $(w_0, w_3) \in R_i$. Par construction de R_i^0, nous avons $(w_1, w_3) \in R'_i$.
- si $w_1 \in W^{\varphi}$, $w_2, w_3 \in W$ et $i \neq a$, alors il existe un monde $w \in W$ tel que $(w, w_2) \in R_i$. De plus, nous avons $(w_2, w_3) \in R_i$, R_i étant sérielle, nous avons $(w, w_3) \in R_i$. Par construction de $R_i^{\overrightarrow{\varphi}}$, nous avons $(w_1, w_3) \in R'_i$
- si $w_1, w_2, w_3 \in W^{\varphi}$, alors, par construction de R_a^{φ}, nous avons $(w_1, w_3) \in R'_a$
- si $w_1 = w'_0$ et $w_2, w_3 \in W^{\varphi}$, alors par construction de R_a^0, nous avons $(w_1, w_3) \in R'_a$

euclidienne Soient w_1, w_2 et w_3 trois mondes de W' tels que $(w_1, w_2) \in R'_i$ et $(w_1, w_3) \in R'_i$. Nous devons montrer que $(w_2, w_3) \in R'_i$. Plusieurs cas sont à considérer :

- si $w_1, w_2, w_3 \in W$, alors, R_i étant euclidienne, nous avons $(w_2, w_3) \in R_i$ ainsi $(w_2, w_3) \in R'_i$
- si $w_1 = w'_0$, $w_2, w_3 \in W$ et $i \neq a$, alors par construction de R_i^0, nous avons $(w_0, w_2) \in R_i$ et $(w_0, w_3) \in R_i$. De plus, R_i étant euclidienne, nous avons $(w_2, w_3) \in R'_i$
- si $w_1 \in W^{\varphi}$, $w_2, w_3 \in W$ et $i \neq a$, alors il existe un monde $w \in W$ tel que $(w, w_2) \in R_i$ et $(w, w_3) \in R_i$. R_i étant euclidienne, nous avons $(w_2, w_3) \in R'_i$
- si $w_1, w_2, w_3 \in W^{\varphi}$, alors, par construction de R_a^{φ}, nous avons $(w_2, w_3) \in R'_a$
- si $w_1 = w'_0$ et $w_2, w_3 \in W^{\varphi}$, alors, par construction de R_a^{φ}, nous avons $(w_2, w_3) \in R'_a$

($\mathbf{E_n 2}$) Nous devons montrer que $M' \models \mathrm{B}_a\varphi$. Ceci est vrai si et seulement si $\langle W', R', V', w' \rangle \models \varphi$, pour tout w' tel que $(w'_0, w') \in R'_a$. Par construction de R'_a (plus particulièrement de R_a^0) nous savons que chaque w' est un $v_w^{\vartheta} \in W^{\varphi}$, pour un certain $w \in R_a(w_0)$. Nous avons également $V'_{v_w^{\vartheta}} = \vartheta$ et $\vartheta \models \varphi$.

($\mathbf{E_n 3}$) Nous devons montrer que, pour tout agent $i \neq a$, $M \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M' \models \mathrm{B}_i\psi$. Ceci revient à montrer que $\langle W, R, V, w \rangle \models \psi$, pour tout w tel que $(w_0, w) \in R_i$, si et seulement si $\langle W', R', V', w' \rangle \models \psi$, pour tout w' tel que $(w'_0, w') \in R'_i$. D'après la construction de R'_i, il est facile de voir que, pour tout $i \neq a$, $w \in R_i(w_0)$ si et seulement si $w \in R'_i(w'_0)$. Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout $w \in R'_i(w'_0)$, $\langle W, R, V, w \rangle \leftrightarroweq \langle W', R', V', w \rangle$. D'après la construction de R'_i et R'_a, nous pouvons voir que, pour tout $w \in W$, $R'_i(w) = R_i(w)$ et $R'_a(w) = R_a(w)$ et les valuations sont également les mêmes. Ceci nous permet de conclure.

($\mathbf{E_n4}$) Nous devons montrer que, pour tout agent $i \neq a$, $M \models \mathrm{B}_a\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M' \models \mathrm{B}_a\mathrm{B}_i\psi$. Ceci revient à montrer que $\langle W, R, V, w\rangle \models \psi$, pour tout $w \in R_i \circ R_a(w_0)$, si et seulement si $\langle W', R', V', w'\rangle \models \psi$, pour tout $w' \in R'_i \circ R'_a(w'_0)$. D'après la construction des relations R'_a et R'_i, et en suivant le même raisonnement que celui du point précédent, nous savons que $w \in R_i \circ R_a(w_0)$ si et seulement si $w' \in R'_i \circ R'_a(w'_0)$. Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout $w \in R'_i \circ R'_a(w'_0)$, $\langle W, R, V, w\rangle \leftrightarrows \langle W', R', V', w\rangle$. D'après la construction de R'_i et R'_a, nous pouvons voir que, pour tout $w \in W$, $R'_i(w) = R_i(w)$ et $R'_a(w) = R_a(w)$ et les valuations sont également les mêmes. Ceci nous permet de conclure.

($\mathbf{E_n5}$) Il suffit de montrer que, pour toutes formules objectives ψ, si $M \models \mathrm{B}_a\psi$, alors $M' \models \mathrm{B}_a\psi$. Les autres cas ont déjà été montré dans la preuve des postulats (**$\mathbf{E_n3}$**) et (**$\mathbf{E_n4}$**). Supposons que $M \models \mathrm{B}_a\psi$, pour toutes formules objectives ψ. Nous devons donc montrer que, pour tout $w' \in R'_a(w'_0)$, $\langle W', R', V', w'\rangle \models \psi$. Notons que chaque $w' \in W^\varphi$, ce qui signifie que w' est un v_u^ϑ et que $V_{w'} = \vartheta$. Par hypothèse, $\vartheta \models \psi$. Par conséquent, $\langle W', R', V', w'\rangle \models \psi$. Ainsi $M' \models \mathrm{B}_a\psi$.

($\mathbf{E_n6}$) Nous devons montrer que, si $M \models \mathrm{B}_a\varphi$, alors $M \leftrightarrows M'$. Puisque $M \models \mathrm{B}_a\varphi$, nous avons $\Theta = \{V_w | w \in R_a(w_0)\}$. Rappelons que $W' = \{w'_0\} \cup W^\varphi \cup W$. Soit une relation $Z = \{(w_0, w'_0)\} \cup \{(w, v_w^\vartheta) | V_w = \vartheta,\ w \in R_a(w_0) \text{ et } w \in \|\varphi\|_M\} \cup \{(w, w) | w \in W\}$. Nous montrons que Z est une bisimulation entre M et M'. Soit wZw' :

(1) Nous montrons que $V_w = V'_{w'}$:

i. si $w = w'$, nous avons alors, par construction $V_w = V'_{w'}$.

ii. si $w = w_0$ et $w' = w'_0$, nous avons alors, par construction $V_w = V_{w_0} = V'_{w'_0} = V'_{w'}$.

iii. si w' est un $v_w^\vartheta \in W^\varphi$ et $V_w = \vartheta$, nous avons alors, par construction $V_{v_w^\vartheta} = \vartheta = V_w$.

(2) Nous montrons maintenant que, si wZw', alors l'existence d'un monde $v \in R(w)$ implique l'existence d'un monde $v' \in R'(w')$ tel que vZv') :

i. Soient w et w' tels que $w = w'$. Il suffit de voir que R' contient R.

ii. Soient $w = w_0$ et $w' = w'_0$:

- supposons qu'il existe un monde $u \in R_a(w_0)$, ainsi $u \in \|\varphi\|_M$ puisque $M \models \mathrm{B}_a\varphi$. Il existe donc un monde $v_u^\vartheta \in W_u^\varphi$ tel que $V_u = \vartheta$ et $v_u^\vartheta \in R_a^0(w'_0) \subseteq R'_a(w'_0)$. De plus, par définition de Z, nous avons uZv_u^ϑ.
- supposons qu'il existe un monde $v \in R_i(w_0)$ pour tout agent $i \neq a$, ainsi il existe un monde $v' \in R_i^0(w'_0)$ tel que $v = v'$, par définition de R_i^0. Ainsi, d'après le point *(2.i)* ci-dessus, nous avons vZv'.

iii. Soient $w' = v_w^\vartheta$ et $V_w = \vartheta$, $w \in R_a(w_0)$ et $w \in \|\varphi\|_M$: $(*)$ Notons que $v_w^\vartheta \in R_a(w'_0)$ par définition de R_a^0.

- supposons qu'il existe un monde $u \in R_a(w)$. Par transitivité, $u \in R_a(w_0)$ et $u \in \|\varphi\|_M$, puisque $M \models \mathrm{B}_a\varphi$. Ainsi, il existe un monde $v_u^{\vartheta'} \in W_u^\varphi$ tel que $V_u = \vartheta'$. D'après la définition de R_a^0, nous avons $v_u^{\vartheta'} \in R_a^0(w'_0) \subseteq R'_a(w'_0)$. Ainsi, $v_u^{\vartheta'} \in R'_a(v_w^\vartheta)$, d'après $(*)$ et le fait que R'_a soit euclidienne (que nous avons prouvé plus tôt, au point (**$\mathbf{E_n1}$**)). De plus, d'après la définition de Z, $vZv_u^{\vartheta'}$.

- supposons qu'il existe un monde $u \in R_i(w)$ pour tout agent $i \neq a$, ainsi $u \in R'_i(v^\vartheta_w) \subseteq R_i^{\overrightarrow{\varphi}}(v^\vartheta_w)$, par définition de $R_i^{\overrightarrow{\varphi}}$ et uZu d'après le point *(2.i)* ci-dessus.

(3) Nous montrons que, si wZw', alors l'existence d'un monde $v' \in R'(w')$ implique l'existence d'un monde $v \in R(w)$ tel que vZv' :

i. Soient w et w' tels que $w = w'$. Il suffit de voir que R' contient R.

ii. Soient $w = w_0$ et $w' = w'_0$:

- supposons qu'il existe un monde $u' \in R'_a(w'_0)$, ainsi $u' \in R^0_a(w'_0)$. Le monde u' est par conséquent un $v^\vartheta_u \in W^\varphi_u$, pour un certain $u \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$ et $V(u) = \vartheta$. De plus, uZu' par définition de Z.
- supposons qu'il existe un monde $v' \in R'_i(w'_0)$ pour tout agent $i \neq a$, ainsi $v' = v \in R_i(w_0)$, par définition de R^0_i. De plus, d'après le point *(3.i)* ci-dessus, vZv'.

- Soient $w' = v^\vartheta_w$ et $V_w = \vartheta$, $w \in R_a(w_0)$ et $w \in \|\varphi\|_M$:
  - supposons qu'il existe un monde $u' \in R'_a(v^\vartheta_w)$, ainsi $u' = v^\vartheta_u \in R^\varphi_a(v^\vartheta_w)$ par définition de R'_a. Ainsi, il existe un monde $u \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$ et $V_u = \vartheta'$. De plus, d'après la définition de Z, uZu'
  - supposons qu'il existe un monde $u' \in R'_i(v^\vartheta_w)$ pour tout agent $i \neq a$, ainsi $u' = u \in R_i(w)$, d'après la définition de R'_i. De plus, d'après le point *(3.i)* ci-dessus, nous avons uZu'.

($\mathbf{E_n 7}$) Supposons que $M^1 \models \mathrm{B}_i\psi$ implique que $M^2 \models \mathrm{B}_i\psi$. Nous devons montrer que $M^1 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$ implique que $M^2 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$. D'après ($\mathbf{E_n 3}$), nous savons que $M^1 \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M^1 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$ et $M^2 \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M^2 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$ pour tout agent $i \neq a$. Et, d'après ($\mathbf{E_n 4}$), nous savons que $M^1 \models \mathrm{B}^n_a\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M^1 +_a \models \mathrm{B}^n_a\mathrm{B}_i\psi$ et $M^2 \models \mathrm{B}^n_a\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M^2 +_a \models \mathrm{B}^n_a\mathrm{B}_i\psi$ pour tout agent $i \neq a$. Ainsi, $M^1 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$ implique $M^2 +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$ et $M^1 +_a \varphi \models \mathrm{B}^n_a\mathrm{B}_i\psi$ implique $M^2 +_a \varphi \models \mathrm{B}^n_a\mathrm{B}_i\psi$. Nous devons maintenant montrer que $M^1 +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\chi$ implique $M^2 +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\chi$ pour toute formule objective χ. Supposons que $M^1 +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\chi$ Pour toute valuation $\vartheta^1 \in \Theta^1 = \{V^1_{w^1} | w^1 \in R^1_a(w^1_0) \cap \|\varphi\|_{M^1}\}$, $\vartheta^1 \models \chi$. Ainsi, pour tout monde $w^1 \in R^1_a(w^1_0)$, $V^1_{w^1} \models (\varphi \Rightarrow \psi)$. Nous avons donc $M^1 \models \mathrm{B}_a(\varphi \Rightarrow \psi)$. Par conséquent, l'hypothèse nous conduit à $M^2 \models \mathrm{B}_a(\varphi \Rightarrow \psi)$. Donc, pour tout monde $w^2 \in R^2_a(w^2_0)$, $V^2_{w^2} \models (\varphi \Rightarrow \psi)$ et, pour toute valuation $\vartheta^2 \in \Theta^2 = \{V^2_{w^2} | w^2 \in R^2_a(w^2_0) \cap \|\varphi\|_{M^2}\}$, $\vartheta^2 \models \psi$. D'où, $M^2 +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$.

($\mathbf{E_n 8}$) Supposons que $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$. Nous avons trois cas à considérer :

- Si ψ est une formule objective, alors, pour toute valuation $\vartheta \in \Theta = \{V(w) \mid w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M\}$, $\vartheta \models \psi$. Ainsi, pour tout monde $w \in R_a(w_0)$, $V(w) \models \varphi$ implique $V(w) \models \psi$. Nous avons donc, pour tout monde $w \in R_a(w_0)$, $V(w) \models (\varphi \Rightarrow \psi)$. Ainsi $M \models \mathrm{B}_a(\varphi \Rightarrow \psi)$. D'après ($\mathbf{E_n 5}$), nous savons que $M' \models \mathrm{B}_a(\varphi \Rightarrow \psi)$. Notons que nous avons également $M' \models \mathrm{B}_a\varphi$ d'après ($\mathbf{E_n 2}$). L'axiome **K** nous permet de conclure que $M' \models \mathrm{B}_a\psi$.
- Si ψ est une formule de la forme $\mathrm{B}_i\chi$ et que $M \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, ($\mathbf{E_n 4}$) nous permet de conclure que $M' \models \mathrm{B}_a\mathrm{B}_i\chi$.
- Si ψ est une formule de la forme $\mathrm{B}_i\chi$ et que $M \models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, d'après ($\mathbf{E_n 2}$) et ($\mathbf{E_n 5}$), nous avons $M' \models \mathrm{B}_a \perp$. Nous pouvons donc conclure que, $M' \models \mathrm{B}_a\mathrm{B}_i\chi$.

□

Nous savons que l'opérateur ainsi défini est l'unique opérateur d'expansion privée. En effet, ceci est une conséquence directe de la proposition 5.1. L'exemple qui suit illustre le comportement de cet opérateur d'expansion privée.

Exemple 5.1. *Prenons le modèle KD45$_n$ M de la figure 5.1. Dans cette situation, l'agent* 1 *croit* $\neg p$ *et il croit que l'agent* 2 *croit* $\neg p$*. L'agent* 2 *croit* $\neg p \wedge \neg q$*, et il croit que l'agent* 1 *croit* $\neg p$*. Donc, l'agent* 2 *a des croyances vraies à propos des croyances de l'agent* 1*.*

Supposons maintenant que l'agent 1 *obtienne, via une source quelconque, une information disant que* q *est vraie. L'agent* 1 *peut ici étendre librement ses croyances (il ne croit pas que* q *est faux) sur le monde. Ce faisant, les croyances de l'agent* 1 *sur les croyances de l'agent* 2 *n'ont aucune raison de changer. Il en va de même pour les croyances de l'agent* 2*.*

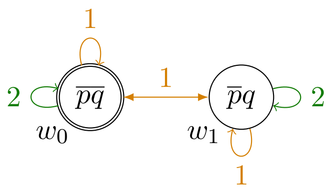


FIGURE 5.1 – Un modèle de Kripke KD45$_n$ M

Après l'expansion par q*, illustrée sur la figure 5.2, l'agent* 1 *doit donc croire* $\neg p \wedge q$*. Le monde ayant pour valuation* $\neg p \wedge q$ *doit être dupliqué afin de maintenir les croyances d'ordre supérieur de l'agent* 1*. Ainsi, les mondes* w'_1 *et* w'_2 *sont respectivement les copies des mondes* w_0 *et* w_1*, pour lesquels la valuation a été remplacée par* $\neg p \wedge q$*. A contrario les croyances de l'agent* 2 *restent inchangées, en particulier, l'agent 2 croit toujours que l'agent* 1 *croit* $\neg p$*.*

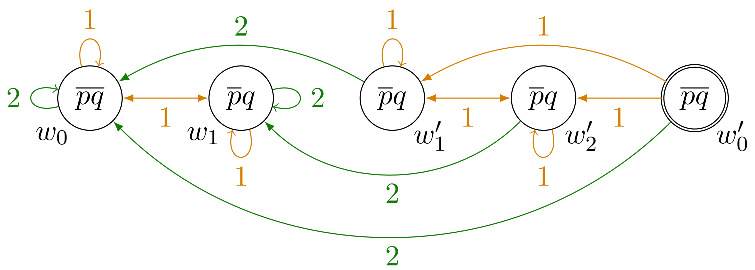


FIGURE 5.2 – Modèle résultant de l'expansion privée du modèle M, de la figure 5.1, par q pour l'agent 1

5.1.3 Liens avec les logiques épistémiques dynamiques

Notre approche de l'expansion privée peut être définie à l'aide d'un modèle produit M^N entre le modèle pointé initial M et un modèle d'événement pointé N particulier, que nous appelons *modèle d'événement d'expansion*, défini comme suit :

Définition 5.4 (Modèle d'événement d'expansion)**.**
Soit une formule φ *de* $\mathcal{L}_0$*, nous appelons modèle d'événement d'expansion le modèle d'événement*

$N^{+_a} = \langle E, R, \text{pre}, e_0 \rangle$ *défini comme suit :*

$$\begin{aligned}
E &= \{e_0, e_\varphi, e_\top\} \\
R_a &= \{(e_0, e_\varphi), (e_\varphi, e_\varphi), (e_\top, e_\top)\} \\
R_i &= \{(e_0, e_\top), (e_\varphi, e_\top), (e_\top, e_\top)\}, \ \textit{pour tout } i \neq a \\
\text{pre}(e_0) &= \bigwedge_{p \in V_{w_0}} p \wedge \bigwedge_{p \in \mathbb{P} \setminus V_{w_0}} \neg p \\
\text{pre}(e_\varphi) &= \varphi \\
\text{pre}(e_\top) &= \top
\end{aligned}$$

La propriété suivante montre que la notion d'expansion donnée à la définition 5.3 est équivalente à un produit de modèles spécifiques. Plus précisément, $M +_a \varphi$ et $M^{N^{+a}}$ sont bisimilaires (où N^{+_a} est un modèle d'événement d'expansion).

Proposition 5.4.
$M +_a \varphi \leftrightarroweq M^{N^{+a}}$.

Démonstration. Soient un modèle de Kripke KD45$_n$ fini pointé $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$, un modèle d'événement d'expansion $N^{+_a} = \langle E, Rels, pre, e_0 \rangle$ et une formule φ de $\mathcal{L}_0$. Soient $M' = \langle W', R', V', w'_0 \rangle$ et $M^{N^{+a}} = \langle W^{N^{+a}}, R^{N^{+a}}, V^{N^{+a}}, w_0.e_0 \rangle$ deux modèles de Kripke KD45$_n$ finis pointés tels que $M' = M +_a \varphi$ et $M^{N^{+a}} = M \otimes N^{+_a}$.

Considérons la relation $Z = W' \times W^{N^{+a}}$ telle que $Z = \{(w, w.e_\top) : w \in W\} \cup \{(w'_0, w_0.e_0)\} \cup \{(v, w.e_\varphi) : v \in W^\varphi$ et $w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$ tel que $V'_v = V_w\}$.

Notons que tous les mondes de $W^{N^{+a}}$ sont dans cette relation, puisque w_0 est le seul monde tel que pre(e_0) est vrai. Nous montrons que Z est une bisimulation entre M' et $M^{N^{+a}}$:

1. Si $(u, u') \in Z$, alors $V'_u = V^{N^{+a}}_{u'}$. En effet, puisque :
   (a) $V'_w = V^{N^{+a}}_{w.e_\top}$, d'après les définitions de V' et $V^{N^{+a}}$.
   (b) $V'_{w'_0} = V_{w_0} = V^{N^{+a}}_{w_0.e_0}$, d'après les définitions de V' et $V^{N^{+a}}$.
   (c) $V'(v) = V(w) = V(w.e_\varphi)$, d'après les définitions de Z et $V^{N^{+a}}$.
2. Nous montrons que si $(u, u') \in Z$, alors le fait qu'il existe un monde $v \in R'_i(u)$ implique qu'il existe un monde $v' \in R^{N^{+a}}_i(u')$ tel que $(v, v') \in Z$, pour tout $i \in \mathbb{A}$. Nous avons trois cas à considérer :
   (a) Soit $u \in W$ et $u' = u.e_\top$. Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_i(u)$, pour un certain $i \in \mathbb{A}$. Puisque $R'_i(u) = R_i(u)$, nous savons que $v \in W$. Notons que $\langle W, R, V, v \rangle \models$ pre$(e_\top)$, $(u, v) \in R_i$ et $(e_\top, e_\top) \in R_i$. Par conséquent, il existe un monde $v' = v.e_\top \in R^{N^{+a}}_i(u.e_\top)$. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.
   (b) Soit $u = w'_0$ et $u' = w_0.e_0$.
      - Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_a(w'_0)$. Dans ce cas, $v \in R^0_a(w'_0)$. Plus précisément, v est un certain $y \in W^\varphi$ tel que $V(y) = V(w)$ pour un certain $w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$, d'après la définition de R^0_a. Notons que $\langle W, R, V, w \rangle \models$ pre(e_φ), $(w_0, w) \in R_a$ et $(e_0, e_\varphi) \in R^{N^{+a}}_a$. Par conséquent, il existe un monde $v' = w.e_\varphi \in R^{N^{+a}}_a(w_0.e_0)$. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

- Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_i(w'_0)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, $v \in R^0_i(w'_0)$, ainsi $v \in R_i(w_0)$. Notons que $\langle W, R, V, v\rangle \models \mathrm{pre}(e_\top)$, $(w_0, v) \in R_i$ et $(e_0, e_\top) \in R_i$. Par conséquent, il existe un monde $v' = v.e_\top \in R_i^{N+a}(w_0.e_0)$. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

(c) Soit $u \in W^\varphi$ et $u' = w.e_\varphi$ pour un certain $w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$ tel que $V'_u = V_w$.

- Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_a(u)$. Dans ce cas, $v \in W^\varphi$, d'après la définition de R'_a. De plus, il existe un monde $w' \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$ tel que $V'_v = V_{w'}$. Notons que $\langle W, R, V, w'\rangle \models \mathrm{pre}(e_\varphi)$ et $(w, w') \in R_a$ (puisque $w, w' \in R_a(w_0)$ et R_a est euclidienne) et $(e_\varphi, e_\varphi) \in R_a$. Par conséquent, il existe un monde $v' = w'.e_\varphi \in R_a^{N+a}(w.e_\varphi)$. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.
- Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_i(u)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, $v \in R_i(w)$, d'après la définition de R'_i. Notons que $\langle W, R, V, v\rangle \models \mathrm{pre}(e_\top)$, $(w, v) \in R_i$ et $(e_\varphi, e_\top) \in R_i$. Par conséquent, il existe un monde $v' = v.e_\top \in R_i^{N+a}(w.e_\varphi)$. Notons également que $v \in W$. Ainsi, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

3. Nous montrons que si $(u, u') \in Z$, alors le fait qu'il existe un monde $v' \in R_i^{N+a}(u')$ implique l'existence d'un monde $v \in R'_i(u)$ tel que $(v, v') \in Z$, pour tout $i \in \mathbb{A}$. Nous avons trois cas à considérer :

(a) Soit $u' = u.e_\top$ et $u \in W$. Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_i^{N+a}(u.e_\top)$, pour un certain $i \in \mathbb{A}$. Dans ce cas, v' est un certain $v.e$ tel que $v \in W$, $\langle W, R, V, v\rangle \models \mathrm{pre}(e)$, $(u, v) \in R_i$ et $(e_\top, e) \in R_i$. Par conséquent, $e = e_\top$, ce qui signifie que $v' = v.e_\top$. Ainsi, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

(b) Soit $u' = w_0.e_0$ et $u = w'_0$.

- Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_a^{N+a}(w_0.e_0)$. Dans ce cas, v' est un certain $w.e$ tel que $w \in W$, $\langle W, R, V, w\rangle \models \mathrm{pre}(e)$, $(w_0, w) \in R_a$ et $(e_0, e) \in R_a$. Ainsi, $e = e_\varphi$, ce qui signifie que $v' = w.e_\varphi$ et, par conséquent, $w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$. Il existe donc un monde $v' \in W^\varphi$ tel que $V'_{v'} = V(w)$, d'après la définition de W^φ. Ainsi $v' \in R'_a(w'_0)$, d'après la définition de R'_a. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.
- Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_i^{N+a}(w_0.e_0)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, v' est un certain $v.e$ tel que $v \in W$, $\langle W, R, V, v\rangle \models \mathrm{pre}(e)$, $(w'_0, v) \in R_i$ et $(e_0, e) \in R_i$. Par conséquent, $e = e_\top$, ce qui signifie que $v' = v.e_\top$. Ainsi, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

(c) Soit $u' = w.e_\varphi$ et $u \in W^\varphi$ pour un certain $w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$ tel que $V'(u) = V(w)$.

- Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_a^{N+a}(w.e_\varphi)$. Dans ce cas, v' est un certain $w'.e$ tel que $w' \in W$, $\langle W, R, V, w'\rangle \models \mathrm{pre}(e)$, $(w, w') \in R_a$ et $(e_\varphi, e) \in R_a$. Ainsi, $e = e_\varphi$, ce qui signifie que $v' = w'.e_\varphi$ et, par conséquent, $w' \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M$ (puisque R_a est symétrique et transitive). Il existe donc un monde $v \in W^\varphi$ tel que $V'(v) = V(w')$, d'après la définition de W^φ. Ainsi $v \in R'_a(w_0)$, d'après la définition de R'_a. De plus, $v \in R'_a(u)$, une nouvelle fois, d'après la définition de R'_a. Ainsi, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.
- Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_i^{N+a}(w.e_\varphi)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, v' est un certain $v.e$ tel que $v \in W$, $\langle W, R, V, v\rangle \models \mathrm{pre}(e)$, $(w, v) \in R_i(w)$ et $(e_\varphi, e) \in R_i$. Par conséquent, $e = e_\top$ et $v \in R'_i(u)$, puisque $R'_i(u) = R_i^{\overrightarrow{\varphi}}(u) = R_i(w)$. Ainsi, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

□

5.2 Révision privée

Passons maintenant aux opérateurs de révision privée. Ces opérateurs se comportent comme les opérateurs d'expansion lorsqu'il n'y a pas de contradiction entre les croyances de l'agent et la nouvelle information. Mais, contrairement à l'expansion, ces opérateurs ne conduisent pas à un résultat trivial lorsque tel n'est pas le cas.

5.2.1 Postulats

Soient un modèle de Kripke KD45$_n$ fini pointé $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et une formule φ de $\mathcal{L}_0$. Le résultat de la révision privée du modèle M par la formule φ pour l'agent a est noté $M \star_a \varphi = \langle W', R', V', w'\rangle$.

Les postulats de révision AGM peuvent être réécrits comme suit :

($\mathbf{R_n0}$) $V'(w') = V(w)$

($\mathbf{R_n1}$) $M \star_a \varphi$ est un modèle KD45$_n$

($\mathbf{R_n2}$) $M \star_a \varphi \models \mathrm{B}_a\varphi$

($\mathbf{R_n3}$) $M \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M \star_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$

($\mathbf{R_n4}$) $M \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M \star_a \varphi \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$

($\mathbf{R_n5}$) Si $M \star_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$, alors $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$

($\mathbf{R_n6}$) Si $M \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, alors $M +_a \varphi \leftrightarroweq M \star_a \varphi$

($\mathbf{R_n7}$) Si $M^1 \leftrightarroweq M^2$ et $\vdash \varphi \equiv \psi$, alors $M^1 \star_a \varphi \leftrightarroweq M^2 \star_a \psi$

($\mathbf{R_n8}$) Si $M \star_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_i\chi$, alors $(M \star_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_i\chi$

($\mathbf{R_n9}$) Si $M \star_a \varphi \not\models \mathrm{B}_a\neg\psi$, alors $(M \star_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_i\chi$ implique $M \star_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_i\chi$

Tout comme les postulats d'expansion privée, la plupart de ces postulats sont une traduction des postulats AGM sur les modèles KD45$_n$. ($\mathbf{R_n0}$) exprime le fait que le monde réel ne change pas. ($\mathbf{R_n1}$) veille à ce que le modèle obtenu après une révision soit toujours un modèle KD45$_n$. ($\mathbf{R_n2}$) est le postulat de succès, il indique que φ est crue par a après la révision. ($\mathbf{R_n3}$) indique que les croyances de tous les agents sauf a ne changent pas. ($\mathbf{R_n4}$) indique que les croyances de l'agent a à propos des croyances des autres agents ne changent pas. ($\mathbf{R_n5}$) et ($\mathbf{R_n6}$) indiquent que lorsque la nouvelle information est cohérente avec les croyances de l'agent, la révision est juste une expansion. ($\mathbf{R_n7}$) est le postulat d'indépendance à la syntaxe, affirmant que si deux formules sont logiquement équivalentes, alors la révision par l'une ou l'autre de ces formules conduit au même résultat. ($\mathbf{R_n8}$) et ($\mathbf{R_n9}$) expriment quand la révision par une conjonction peut être obtenue pas une révision suivie d'une expansion.

La propriété suivante montre que, comme pour les postulats d'expansion privée, les postulats que nous proposons ci-dessus forment une extension conservatrice des postulats de révision du cadre AGM. En effet, nous montrons que le comportement d'un opérateur satisfaisant ces postulats sur des formules objectives est identique à celui d'un opérateur AGM classique.

Proposition 5.5.
Soit $\star_i$ un opérateur de révision privée satisfaisant les postulats $(\mathbf{R_n0})$-$(\mathbf{R_n9})$*. L'opérateur $\star$ défini par $O_i^M \star \varphi = O_i^{M \star_i \varphi}$ est un opérateur de révision AGM (il satisfait les postulats* $(\mathbf{K*1})$-$(\mathbf{K*6})$*).*

Démonstration. Soient $\star_i$ un opérateur de révision privée satisfaisant les postulats $(\mathbf{R_n0})$-$(\mathbf{R_n9})$, et $\star$ l'opérateur de révision défini par $O_i^M \star \varphi = O_i^{M \star_i \varphi}$. Rappelons dans un premier temps que le postulat $(\mathbf{K*5})$ est garanti par le fait que la formule φ, utilisée pour effectuer la révision, est toujours cohérente. Notons dans un second temps que le fait d'utiliser uniquement des formules objectives lors de la révision privée suffit à montrer que l'opérateur $\star_i$ satisfait tous les postulats AGM. En effet, la plupart des postulats de révision privée étant une traduction des postulats de révision AGM, nous avons directement : $(\mathbf{R_n1})$ implique $(\mathbf{K*1})$, $(\mathbf{R_n2})$ implique $(\mathbf{K*2})$, $(\mathbf{R_n5})$ implique $(\mathbf{K*3})$, $(\mathbf{R_n6})$ implique $(\mathbf{K*4})$, $(\mathbf{R_n7})$ implique $(\mathbf{K*6})$, $(\mathbf{R_n8})$ implique $(\mathbf{K*7})$ et $(\mathbf{R_n9})$ implique $(\mathbf{K*8})$. □

Nous proposons maintenant une définition constructive d'une famille d'opérateurs de révision privée caractérisée par nos postulats.

5.2.2 Une famille d'opérateurs de révision

Ces opérateurs sont définis de façon similaire à l'opérateur d'expansion que nous avons défini plus tôt, mais dans le cas où la nouvelle information est incohérente avec les croyances actuelles de l'agent, ils utilisent un opérateur de révision de croyances AGM classique $\circ$ pour définir les nouvelles croyances de l'agent.

Définition 5.5 (Révision de M par φ pour l'agent a)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ un modèle de Kripke KD45$_n$ fini pointé, φ une formule objective cohérente ($\varphi \in \mathcal{L}_0$) et $\circ$ un opérateur de révision AGM. Nous définissons la révision privée de M par φ pour l'agent a comme $M \star_a^\circ \varphi = \langle W', R', V', w'_0 \rangle$, avec :

- *si* $R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M \neq \emptyset$
  - *alors* $\Theta = \{V_w \mid w \in R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M\}$
  - *sinon,* $\Theta = \{\vartheta \mid \vartheta \subseteq \mathbb{P} \text{ et } \vartheta \models O_a^M \circ \varphi\}$
- $W' = W \cup W^\varphi \cup \{w'_0\}$ *où*
  - $W^\varphi = \bigcup_{w \in R_a(w_0)} W_w^\varphi$ *et*
  - $W_w^\varphi = \bigcup_{\vartheta \in \Theta} \{v_w^\vartheta\}$
- $R'_a = R_a \cup R_a^\varphi \cup R_a^0$ *où*
  - $R_a^\varphi = \{(w_1^\varphi, w_2^\varphi) \mid w_1^\varphi, w_2^\varphi \in W^\varphi\}$ *et*
  - $R_a^0 = \{(w'_0, w^\varphi) \mid w^\varphi \in W^\varphi\}$
- $R'_i = R_i \cup R_i^{\overrightarrow{\varphi}} \cup R_i^0$*, pour tout $i \neq a$, où*
  - $R_i^{\overrightarrow{\varphi}} = \{(v_w^\vartheta, w') \mid (w, w') \in R_i \text{ et } v_w^\vartheta \in W^\varphi\}$*, pour tout $i \neq a$, et*
  - $R_i^0 = \{(w'_0, w) \mid (w_0, w) \in R_i\}$*, pour tout $i \neq a$*

- $V'_w = V_w$, *pour tout* $w \in W$
- $V'_{v_w^\vartheta} = \vartheta$, *pour tout* $v_w^\vartheta \in W^\varphi$
- $V'_{w'_0} = V_{w_0}$

La construction du modèle révisé est similaire à la construction du modèle présenté pour l'expansion. Seul le nouvel ensemble de mondes W^φ est différent : si la nouvelle information φ est possible pour l'agent a, il effectue une expansion, sinon les mondes du nouvel ensemble W^φ ont pour valuation un modèle (propositionnel) de la nouvelle information φ.

Nous pouvons maintenant montrer que cet opérateur satisfait les propriétés attendues.

Proposition 5.6.
L'opérateur $\star_a^\circ$ *satisfait les postulats* ($\mathbf{R_n0}$)-($\mathbf{R_n9}$).

Démonstration. Nous montrons que l'opérateur de révision défini à la définition 5.5 satisfait les postulats de révision privée ($\mathbf{R_n0}$)-($\mathbf{R_n9}$).

($\mathbf{R_n0}$) Le construction de $M' = M \star_a^\circ \varphi$, nous donne directement $V'_{w'_0} = V_{w_0}$.

($\mathbf{R_n1}$) Nous voulons montrer que pour tout agent $i \in \mathbb{A}$, R'_i est sérielle, transitive et euclidienne. Nous obtenons ce résultat en suivant un raisonnement similaire à celui utilisé pour prouver que l'opérateur $+_a$ satisfait le postulat ($\mathbf{E_n1}$) dans la preuve de la proposition 5.3.

($\mathbf{R_n2}$) En suivant un raisonnement similaire à celui utilisé pour prouver que l'opérateur $+_a$ satisfait le postulat ($\mathbf{E_n2}$) dans la preuve de la proposition 5.3, nous obtenons directement $M \star_a^\circ \varphi \models \mathrm{B}_a\varphi$.

($\mathbf{R_n3}$) En suivant un raisonnement similaire à celui utilisé pour prouver que l'opérateur $+_a$ satisfait le postulat ($\mathbf{E_n3}$) dans la preuve de la proposition 5.3, nous obtenons directement $M \star_a^\circ \varphi \models \mathrm{B}_a\varphi$. $M \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M \star_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$

($\mathbf{R_n4}$) En suivant un raisonnement similaire à celui utilisé pour prouver que l'opérateur $+_a$ satisfait le postulat ($\mathbf{E_n4}$) dans la preuve de la proposition 5.3, nous obtenons directement $M \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M \star_a \varphi \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$, pour $i \neq a$

($\mathbf{R_n5}$) Supposons que $M \star_a^\circ \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$, nous voulons montrer que $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$. D'après ($\mathbf{E_n3}$) et ($\mathbf{R_n3}$), nous avons $M \star_a^\circ \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M \models \mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_i\psi$ pour tout $i \neq a$. De plus, d'après ($\mathbf{E_n4}$) et ($\mathbf{R_n4}$), nous avons $M \star_a^\circ \varphi \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ si et seulement si $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a^k\mathrm{B}_i\psi$ pour tout $i \neq a$. Nous devons maintenant montrer que $M \star_a^\circ \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$ implique que $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$ pour une formule objective ψ. Supposons que $M \star_a^\circ \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$, dans ce cas :

- si $M \models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, alors $R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M = \emptyset$. Ainsi, d'après la définition 5.3, nous avons $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a \perp$. Nous pouvons donc conclure que $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$.
- si $M \not\models \mathrm{B}_a\neg\varphi$, alors $R_a(w_0) \cap \|\varphi\|_M \neq \emptyset$. Ainsi, d'après les définitions 5.3 et 5.5, nous pouvons conclure directement que $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\psi$, en effet, dans ce cas, $M +_a \varphi = M \star_a^\circ \varphi$.

($\mathbf{R_n6}$) Comme nous venons de le voir, si $M \not\models \mathrm{B}_a\neg\psi$ alors $M +_a \varphi = M \star_a^\circ \varphi$.

($\mathbf{R_n7}$) Si $M^1 \leftrightarroweq M^2$ et $\vdash \varphi \equiv \psi$, alors $\{V^1_w | w \in R^1_a(w^1_0) \cap \|\varphi\|_{M^1}\} = \{V^2_w | w \in R^2_a(w^2_0) \cap \|\psi\|_{M^2}\}$. De plus, $O^{M^1}_a = O^{M^2}_a$ et, d'après le postulat ($\mathbf{K*6}$), $O^{M^1}_a \circ \varphi \equiv O^{M^2}_a \circ \psi$. Ainsi, d'après la définition 5.5, $M^1 \star^\circ_a \varphi \leftrightarroweq M^2 \star^\circ_a \psi$.

($\mathbf{R_n8}$) Supposons que $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_i\chi$, nous devons montrer que $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_i\psi$. D'après ($\mathbf{R_n3}$) et ($\mathbf{R_n4}$), nous savons que $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $M \models \mathrm{B}_i\chi$ et $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $M \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$ pour tout $i \neq a$. D'après ($\mathbf{E_n3}$) et ($\mathbf{E_n4}$), nous savons que $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $M \star^\circ_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$ et $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $M \star^\circ_a \varphi \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$ pour tout $i \neq a$. D'après ($\mathbf{R_n3}$) et ($\mathbf{R_n4}$), nous savons également que $M \star^\circ_a \varphi \models \mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $M \models \mathrm{B}_i\chi$ et $M \star^\circ_a \varphi \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $M \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$ pour tout $i \neq a$. Par conséquent, pour tout $i \neq a$ nous avons $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_i\chi$ et $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$ si et seulement si $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}^k_a\mathrm{B}_i\chi$. Nous devons montrer que $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_a\chi$ implique $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a\chi$ pour une formule objective χ.

- Si $R_a(w_0) \cap \|\varphi \wedge \psi\|_M \neq \emptyset$, alors d'après la définition 5.5, nous savons que $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) = M +_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_a\chi$. De plus, nous avons $R_a(w_0) \cap \|\varphi \wedge \psi\| \subseteq R_a(w_0) \cap \|\varphi\| \neq \emptyset$. Dans ce cas, nous avons $M \star^\circ_a \varphi = M +_a \varphi$, ainsi $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi = (M +_a \varphi) +_a \psi$. Puisque $M +_a (\varphi \wedge \psi) \models \mathrm{B}_a\chi$, nous avons $\forall w \in R_a(w_0)$, $V_w \models ((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$. Ainsi $M \models \mathrm{B}_a((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$. D'après ($\mathbf{E_n2}$) et ($\mathbf{E_n5}$), nous avons $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a\varphi$ et $M +_a \varphi \models \mathrm{B}_a((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$. De plus, toujours d'après ($\mathbf{E_n2}$) et ($\mathbf{E_n5}$), nous avons $(M +_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a\psi$, $(M +_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a\varphi$ et $(M +_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$. Ainsi, nous avons $(M +_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a(\varphi \wedge \psi) \wedge \mathrm{B}_a((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi)$, et, d'après l'axiome K, nous avons $(M +_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a\chi$.
- Si $R_a(w_0) \cap \|\varphi \wedge \psi\|_M = \emptyset$, alors :
  - supposons que $M \star^\circ_a \varphi \models \mathrm{B}_a\neg\psi$. Dans ce cas, nous avons $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a \perp$. Plus particulièrement, nous avons $(M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi \models \mathrm{B}_a\chi$.
  - supposons que $M \star^\circ_a \varphi \not\models \mathrm{B}_a\neg\psi$. Dans ce cas, nous avons $(O^M_a \circ \varphi) \cap \|\psi\|_M \neq \emptyset$. Ainsi, $(O^M_a \circ \varphi) \wedge \psi \not\models \perp$, par conséquent, nous avons $\neg\psi \notin O^M_a \circ \varphi$. Puisque $\circ$ est un opérateur de révision AGM, il satisfait les postulats $(K*7)$ et $(K*8)$. Ainsi, $O^M_a \circ (\varphi \wedge \psi) = (O^M_a \circ \varphi) \wedge \psi$. Par conséquent, nous avons $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) = (M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi$.

($\mathbf{R_n9}$) Comme nous venons de le voir, si $M \star^\circ_a \varphi \not\models \mathrm{B}_a\neg\psi$, alors $M \star^\circ_a (\varphi \wedge \psi) = (M \star^\circ_a \varphi) +_a \psi$.

$\square$

Nous pouvons à présent illustrer le comportement de cette famille d'opérateurs de révision privée sur un exemple simple.

Exemple 5.2.
Considérons le modèle M de la figure 5.3, où l'agent 1 croit $\neg p \wedge \neg q$ et que l'agent 2 croit $p \wedge q$. L'agent 2 croit $p \wedge q$ et que l'agent 1 croit $p \Leftrightarrow q$.

Après la révision par $p \wedge q$, l'agent 1 doit croire $p \wedge q$ et les croyances de l'agent 2 doivent rester inchangées. Le modèle obtenu est donné dans la figure 5.4. Dans cet exemple, l'agent 1 utilise l'opérateur de révision AGM de Dalal.

Nous pouvons observer sur cet exemple que le modèle révisé M' obtenu en utilisant la définition 5.5 peut ne pas être minimal (la même chose arrive pour les modèles étendus obtenus à l'aide de la définition 5.3). Néanmoins, un modèle minimal peut être obtenu par bisimulation. Sur cet exemple, cela conduit au modèle décrit à la figure 5.5.

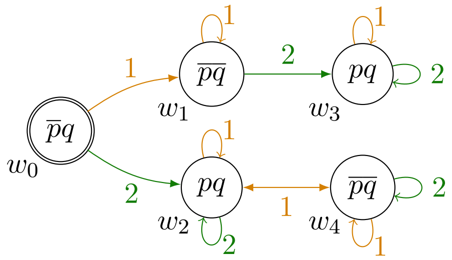


FIGURE 5.3 – Un modèle de Kripke KD45$_n$ M

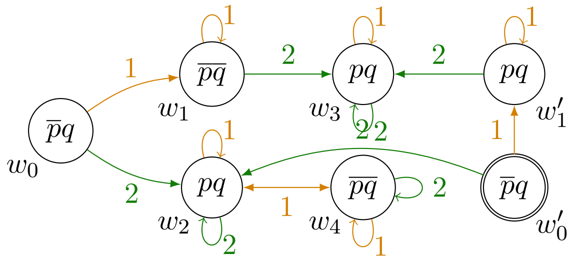


FIGURE 5.4 – Modèle résultant de la révision privée du modèle M, de la figure 5.3, par $p \wedge q$ pour l'agent 1

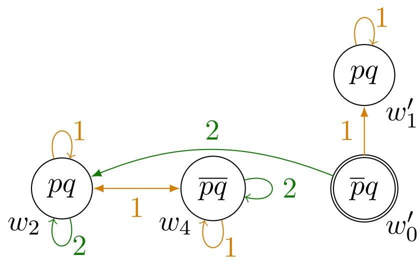


FIGURE 5.5 – Modèle minimal bisimilaire au modèle M', de la figure 5.4

5.2.3 Liens avec les logiques épistémiques dynamiques

Comme pour l'expansion, nous pouvons définir notre approche de la révision privée à l'aide d'un modèle produit M^N entre le modèle de Kripke fini pointé initial M et un modèle d'événement pointé N particulier, que nous appelons *modèle d'événement de révision*. Nous utilisons cette fois des modèles d'événements avec assignements [VAN DITMARSCH *et al.* 2005]. Ces derniers sont des structures de la forme $\langle E, R, \text{pre}, \text{pos}, e_0 \rangle$, où E, R et pre sont définis comme précédemment et pos est une fonction qui retourne, pour chaque événement possible e sa post-condition pos_e. Les post-conditions sont des affectations de variables propositionnelles à $\top$ ou $\bot$. Ainsi, pos est utilisée pour réinitialiser les valuations après l'exécution des événements.

Ces *modèles d'événement de révision* sont définis comme suit :

Définition 5.6 (Modèle d'événement de révision)**.**
Soit une formule φ de $\mathcal{L}_0$, nous appelons modèle d'événement de révision le modèle d'événement

$N^{\star_a^\circ} = \langle E, R, \mathrm{pre}, \mathrm{pos}, e_0\rangle$ *défini comme suit :*

$$\begin{aligned}
E &= \{e_0, e_\top\} \cup \{e_w^\vartheta \mid v_w^\vartheta \in W^\varphi\}\\
R_a &= \{(e_0, e_w^\vartheta) \mid v_w^\vartheta \in W^\varphi\} \cup \{(e_{w_1}^{\vartheta_1}, e_{w_2}^{\vartheta_2}) \mid v_{w_1}^{\vartheta_1}, v_{w_2}^{\vartheta_2} \in W^\varphi\} \cup \{(e_\top, e_\top)\}\\
R_i &= \{(e_0, e_\top), (e_\top, e_\top)\} \cup \{(e_w^\vartheta, e_\top) \mid v_w^\vartheta \in W^\varphi\},\ \textit{pour tout } i \neq a\\
\mathrm{pre}(e_0) &= \bigwedge_{p \in V_{w_0}} p \wedge \bigwedge_{p \in \mathbb{P}\setminus V_{w_0}} \neg p\\
\mathrm{pre}(e_w^\vartheta) &= \bigwedge_{p \in V_w} p \wedge \bigwedge_{p \in \mathbb{P}\setminus V_w} \neg p\\
\mathrm{pre}(e_\top) &= \top\\
\mathrm{pos}_{e_0} &= \emptyset\\
\mathrm{pos}_{e_w^\vartheta}(p) &= \begin{cases} \top, & \textit{si } \vartheta \models p\\ \bot, & \textit{si } \vartheta \not\models p \end{cases}\\
\mathrm{pos}_{e_\top} &= \emptyset
\end{aligned}$$

Le modèle d'événement ici est semblable à celui de l'expansion. La différence est que l'événement possible e_φ est remplacé par une clique d'événements possibles e_w^ϑ.

Le produit d'un modèle de Kripke fini pointé M par un modèle d'événement de révision $N^{\star_a^\circ}$ est le nouveau modèle de Kripke pointé $M^{N^{\star_a^\circ}} = \langle W^{N^{\star_a^\circ}}, R^{N^{\star_a^\circ}}, V^{N^{\star_a^\circ}}, w.e\rangle$, où $W^{N^{\star_a^\circ}}$ et $R^{N^{\star_a^\circ}}$ sont définis de la même manière habituelle (voir définition 3.15 et la nouvelle valuation est $V_w^{N^{\star_a^\circ}} = \{p \mid \mathrm{pos}_w(p) = \top\}$.

La propriété suivante montre que la notion de révision privée donnée à la définition 5.5 est équivalente à un produit de modèles spécifiques. Plus précisément, $M \star_a^\circ \varphi$ et $M^{N^{\star_a^\circ}}$ sont bisimilaires (où $N^{\star_a^\circ}$ est un modèle d'événement de révision).

Proposition 5.7.
$(M \star_a^\circ \varphi) \leftrightarrows M^{N^{\star_a^\circ}}$.

Démonstration. Soient un modèle de Kripke KD45$_n$ fini pointé $M = \langle W, R, V, w_0\rangle$, un modèle d'événement de révision $N^{\star_a^\circ} = \langle E, R, \mathrm{pre}, \mathrm{pos}, e_0\rangle$ et une formule φ de $\mathcal{L}_0$. Soient deux autres modèles de Kripke KD45$_n$ finis pointés $M' = \langle W', R', V', w'_0\rangle$ et $M^{N^{\star_a^\circ}} = \langle W^{N^{\star_a^\circ}}, R^{N^{\star_a^\circ}}, V^{N^{\star_a^\circ}}, w_0.e_0\rangle$ tels que $M' = M \star_a^\circ \varphi$ et $M^{N^{\star_a^\circ}} = M \otimes N^{\star_a^\circ}$.

Considérons la relation $Z = W' \times W^{N^{\star_a^\circ}}$ telle que $Z = \{(w, w.e_\top) \mid w \in W\} \cup \{(w'_0, w_0.e_0)\} \cup \{(v_w^\vartheta, w.e_w^\vartheta) \mid v_w^\vartheta \in W^\varphi \text{ and } w \in R_a(w_0) \text{ and } V'_{v_w^\vartheta} = \vartheta = V_{w.e_w^\vartheta}^{N^{\star_a^\circ}}\}$.

Notons que tous les mondes de $W^{N^{\star_a^\circ}}$ sont dans la relation, puisque w_0 est le seul monde tel que $\mathrm{pre}(e_0)$ est vrai. Nous montrons que Z est une bisimulation :

1. Si $(u, u') \in Z$, alors $V'_u = V_{u'}^{N^{\star_a^\circ}}$. En effet, puisque :
   (a) $V'_w = V_w = V_{w.e_\top}^{N^{\star_a^\circ}}$
   (b) $V'_{w'_0} = V(w_0) = V_{w_0.e_0}^{N^{\star_a^\circ}}$
   (c) $V'_{v_w^\vartheta} = \vartheta = V_{w.e_w^\vartheta}^{N^{\star_a^\circ}}$

2. Nous montrons que si $(u, u') \in Z$, alors le fait qu'il existe un monde $v \in R'_i(u)$ implique qu'il existe un monde $v' \in Rels^{N\star^\circ_a}(u')$ tel que $(v, v') \in Z$, pour tout agent $i \in \mathbb{A}$. Nous avons trois cas à considérer :

   (a) Soit $u \in W$ et $u' = u.e_\top$. Supposons qu'il existe un monde $vR'_i(u)$, pour un certain $i \in \mathbb{A}$. Puisque $R'_i(u) = R_i(u)$, nous savons que $v \in W$. Notons que $(u, v) \in R_i$ et $(e_\top, e_\top) \in R_i$. Par conséquent, il existe un monde $v' = v.e_\top \in R^{N\star^\circ_a}(u.e_\top)$. De plus, d'après la définition de Z, $(v, v') \in Z$.

   (b) Soit $u = w'_0$ et $u' = w_0.e_0$.

   - Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_a(w'_0)$. Dans ce cas, $v \in R^0_a(w'_0)$. Plus précisément, v est un certain $v^\vartheta_w \in W^\varphi$ tel que $V_{v^\vartheta_w} = \vartheta$, pour un certain $w \in R_a(w_0)$. Notons que $(w_0, w) \in R_a$ et $(e_0, e^\vartheta_w) \in R_a$. Par conséquent, il existe un monde $v' = w.e^\vartheta_w \in R^{N\star^\circ_a}_a(w_0.e_0)$ tel que $V^{N\star^\circ_a}_{v'} = \vartheta$. De plus, d'après la définition de Z, $(v, v') \in Z$.
   - Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_i(w'_0)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, $v \in R^0_i(w'_0)$, ainsi $v \in R_i(w_0)$. Notons que $(w_0, v) \in R_i$ et $(e_0, e_\top) \in R_i$. Par conséquent, il existe un monde $v' = v.e_\top \in R^{N\star^\circ_a}_i(w_0.e_0)$. De plus, d'après la définition de Z, $(v, v') \in Z$.

   (c) Soit $u \in W^\varphi$ et $u' = w.e^\vartheta_w$, pour un certain $w \in R_a(w_0)$ et $V'_u = \vartheta = V^{N\star^\circ_a}_{u'}$

   - Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_a(u)$. Dans ce cas, par définition de R'_a, $v \in W^\varphi$. Plus précisément, v est un certain $v^{\vartheta'}_{w'} \in W^\varphi$ tel que $V'_{v^{\vartheta'}_{w'}} = \vartheta'$ pour un certain $w' \in R_a(w_0)$. Notons que $(w, w') \in R_a$ et $(e^\vartheta_w, e^{\vartheta'}_{w'}) \in R_a$. Par conséquent, il existe un monde $v' = w'.e^{\vartheta'}_{w'} \in R^{N\star^\circ_a}_a(w.e^\vartheta_w)$. De plus, d'après la définition de Z, $(v, v') \in Z$.
   - Supposons qu'il existe un monde $v \in R'_i(u)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, $v \in R_i(w)$, d'après la définition de R'_i. Notons que $(w, v) \in R_i$ et $(e^\vartheta_w, e_\top) \in R_i$. Par conséquent, il existe un monde $v' = v.e_\top \in R^{N\star^\circ_a}_i(w.e^\vartheta_w)$. Notons également que $v \in W$. Ainsi, $v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

3. Nous montrons que si $(u, u') \in Z$, alors le fait qu'il existe un monde $v' \in R^{N\star^\circ_a}_i(u')$ implique l'existence d'un monde $v \in R'_i(u)$ tel que $(v, v') \in Z$, pour tout $i \in \mathbb{A}$. Nous avons trois cas à considérer :

   (a) Soit $u' = u.e_\top$ et $u \in W$. Supposons qu'il existe un monde $v' \in R^{N\star^\circ_a}_i(u.e_\top)$, pour $i \in \mathbb{A}$. Dans ce cas, v' est un certain $v.e$ tel que $v \in W$, $(u, v) \in R_i$ et $(e_\top, e) \in R_i$. Par conséquent, $e = e_\top$, ce qui signifie que $v' = v.e_\top$. Ainsi, $(w, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

   (b) Soit $u' = w_0.e_0$ et $u = w'_0$:

   - Supposons qu'il existe un monde $v' \in R^{N\star^\circ_a}_a(w_0.e_0)$. Dans ce cas, v' est un certain $w.e$ tel que $w \in W$, $(w_0, w) \in R_a$ et $(e_0, e) \in R_a$. Ainsi, $e = e^\vartheta_w$, ce qui signifie que $v' = w.e^\vartheta_w$et, par conséquent, $w \in R_a(w_0)$ et $V^{N\star^\circ_a}_{w.e^\vartheta_w} = \vartheta$. Il existe donc un monde $v \in W^\varphi$ tel que $V_v = \vartheta$, par définition de W^φ. Ainsi, $v \in R'_a(w'_0)$, d'après la définition de R'_a. De plus, $(w, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

- Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_i^{N\star\overset{\circ}{a}}(w_0.e_0)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, v' est un certain $v.e$ tel que $v \in W$, $(w_0, v) \in R_i$ et $(e_0, e) \in R_i$. Par conséquent, $e = e_\top$, ce qui signifie que $v' = v.e_\top$. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

(c) Soit $u' = w.e_w^\vartheta$ et $w \in W^\varphi$, pour un certain $w \in R_a(w_0)$, et $V'_u = \vartheta = V_{w.e_w^\vartheta}^{N\star\overset{\circ}{a}}$:

- Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_a^{N\star\overset{\circ}{a}}(w.e_w^\vartheta)$. Dans ce cas, v' est un certain $w'.e$ tel que $w' \in W$, $(w, w') \in R_a$ et $(e_w^\vartheta, e) \in R_a$. Ainsi, $e = e_{w'}^{\vartheta'}$ ce qui signifie que $v' = w'.e_{w'}^{\vartheta'}$ et, par conséquent, $w' \in R_a(w_0)$. Il existe donc un monde $v \in W^\varphi$ tel que $V_v = \vartheta'$, par construction de W^φ. Ainsi, $v \in R'_a(w'_0)$, par construction de R'_a. Par conséquent, une nouvelle fois d'après la définition de R'_a, $v \in R'_a(u)$. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.
- Supposons qu'il existe un monde $v' \in R_i^{N\star\overset{\circ}{a}}(w.e_w^\vartheta)$, pour $i \neq a$. Dans ce cas, v' est un certain $v.e$ tel que $v \in W$, $(w, v) \in R_i$ et $(e_w^\vartheta, e) \in R_i$. Par conséquent, $e = e_\top$ et $v \in R'_i(u)$, puisque $R'_i(u) = R_i^{\overrightarrow{\varphi}}(u) = R_i(w)$. De plus, $(v, v') \in Z$, d'après la définition de Z.

□

5.3 Discussion

Comme expliqué dans le chapitre précédent, il existe plusieurs travaux sur les liens entre les logiques épistémiques et la théorie du changement de croyances. La plupart d'entre eux étudient la façon d'encoder les opérateurs de changement de croyances dans un modèle épistémique [van Ditmarsch 2005, Baltag & Smets 2006, Board 2004, van Benthem 2007], en utilisant les relations d'accessibilité pour coder les différents niveaux de plausibilité des croyances de l'agent. Fondamentalement, le problème est d'essayer d'encoder la révision de croyances dans le modèle épistémique.

À l'inverse, nous étudions comment effectuer la révision (et l'expansion) de croyances dans un modèle KD45$_n$, représentant les croyances d'un groupe d'agents.

Dans [Herzig *et al.* 2005] Herzig, Lang et Marquis étudient la progression dans les structures de croyances multi-agents. Leur travail porte principalement sur les effets des actions à l'aide de la mise à jour, mais ils mentionnent brièvement le problème de la révision par des formules objectives. Leur construction est liée à celle que nous proposons, mais ils n'ont pas étudié les propriétés des opérateurs qu'ils proposent.

Le travail le plus proche du nôtre est certainement l'étude de l'expansion et de la révision privée proposée dans [Aucher 2010, Aucher 2008]. La différence est que Aucher considère un modèle interne du problème, c'est-à-dire un modèle de la situation du point de vue de chaque agent, de sorte qu'il n'utilise pas un modèle KD45$_n$ pour modéliser le système, mais un modèle interne par agent. Il utilise une notion de monde possible multi-agents afin de calculer le résultat de la révision, (le résultat de la révision est un ensemble de mondes multi-agents), alors que dans ce travail, nous travaillons avec des modèles KD45$_n$ et nous obtenons un unique modèle KD45$_n$ résultant de la révision.

Il est facile de définir une traduction entre les modèles internes et les modèles KD45$_n$, nous pouvons donc étudier les liens entre les opérateurs d'expansion et de révision que nous proposons et ceux proposés (sur les modèles internes) dans [Aucher 2010, Aucher 2008]. En ce qui concerne l'expansion, il s'avère que les deux opérations sont équivalentes (ce qui n'est pas surprenant puisque nous avons prouvé qu'il existe un seul opérateur d'expansion rationnel). Tout d'abord, notons qu'il est possible d'obtenir un modèle interne I_M pour l'agent $a \in \mathbb{A}$ à partir de tout modèle KD45$_n$ fini pointé $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$. En effet, il suffit de considérer l'ensemble formé des modèles $M^k = \langle W, R, V, w^k \rangle$ générés à partir de chaque w^k tel que $w^k \in R_a(w_0)$. De même, il est possible d'obtenir un modèle d'événements interne $I_{N^{+a}}$ pour l'agent $a \in \mathbb{A}$ à partir du modèle d'événements d'expansion N^{+a}. Maintenant, il est facile de voir que le modèle interne pour a obtenu à partir du produit de M par N^{+a} est le même que le produit de I_M par $I_{N^{+a}}$.

En ce qui concerne la révision, la situation est différente. Aucher permet la révision par des formules subjectives et calcule des distances entre les modèles (épistémiques) correspondants. Nous nous intéressons dans ce travail uniquement à la révision par des formules objectives. Et dans ce cas particulier, la révision de Aucher ne permet pas à l'agent concerné par la révision privée de choisir parmi les modèles de la formule objective, ceux qui sont les plus plausibles. Nous pouvons le faire grâce aux opérateurs AGM sous-jacents à la définition de l'opérateur de révision privée. Donc, le résultat de la révision privée au sens de notre définition implique (parfois strictement) le résultat donné par la révision de Aucher.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le changement de croyances dans un contexte multi-agents. Plus précisément, nous avons étudié l'expansion et la révision privée de modèles KD45$_n$ finis pointés par des formules objectives. Nous avons proposé un ensemble de postulats pour l'expansion et la révision privée proche des postulats AGM classiques pour le cas d'un agent unique. Nous avons également proposé une définition des opérateurs d'expansion et de révision et montré que les opérateurs ainsi définis satisfont les propriétés recherchées.

Une des extensions de ce travail est définir l'opération de contraction privée. En effet, les opérateurs de contraction et de révision étant étroitement liés d'en d'autres cadre par les identités de Levi et de Harper, il serait intérressant de vérifier que dans le cadre des changements privés, ces identités sont toujours valables.

Une autre des extensions de ce travail est bien entendu l'étude du problème du changement de croyances par des formules subjectives. Pour l'expansion, la méthode sera assez semblable à celle que nous avons décrite ici pour les formules objectives. Pour la révision, en revanche, le cas des formules subjectives est à la fois plus complexe et plus riche que la révision par des formules objectives, en raison de l'exigence de la minimalité du changement. Nous présentons dans le chapitre suivant certaines mesures intéressantes entre modèles de Kripke que nous utilisons pour définir un changement minimal pour la révision.

Enfin, une extension que nous voulons aborder est le changement de groupe. L'idée est que la nouvelle information n'est pas donnée en privé à un seul agent, mais à un groupe d'agents. Ce cas comprend changement privé et changement public comme des cas particuliers. Il est donc clairement plus général. L'interaction entre les agents ajoute des problèmes intéressants supplémentaires, car chaque agent du groupe devra réviser ses croyances sur les croyances des autres agents du groupe qui ont reçu la même information.

Chapitre 6

Distances entre modèles de Kripke $KD45_n$ finis pointés

You've never heard of the Millennium Falcon ? ... It's the ship that made the Kessel run in less than 12 parsecs. (Han Solo – Star Wars IV : A New Hope)

Le concept de distance se révèle être un concept clé pour un certain nombre d'applications en intelligence artificielle. En particulier, en représentation des connaissances, les distances entre interprétations (ou entre formules) constituent une notion sur laquelle de nombreux opérateurs de changement de croyances (opérateurs de révision, opérateurs de fusion, etc.) sont ancrés. Ces opérateurs sont régis par un principe de changement minimal, qui consiste à sélectionner les modèles les plus plausibles d'une contrainte donnée (la nouvelle information en cas de révision de croyances, ou les contraintes d'intégrité en cas de fusion de croyances), étant donné les croyances actuelles de(s) l'agent(s).

Comme définir des opérateurs de révision concrets pour les modèles de Kripke est aujourd'hui attendu (voir [Herzig 2014]), notre objectif est de définir de tels opérateurs de révision pour les modèles de Kripke $KD45_n$ finis. Pour ce faire, nous examinons d'abord la notion de distance entre ces modèles.

Pour autant que nous le sachions, une seule distance a été définie à ce jour pour mesurer à quel point des modèles de Kripke sont différents. Cette distance a été présentée dans [Aucher 2008] et concerne la révision de modèles épistémiques subjectifs. Pour être plus précis, il s'agit du degré de similarité entre les modèles épistémiques subjectifs que nous avons présenté plus tôt (voir chapitre 4, section 4.2.2). Ce degré de similarité peut être directement traduit en une distance entre les modèles de Kripke $KD45_n$.

Dans ce chapitre, nous présentons des distances entre les modèles de Kripke $KD45_n$ qui sont des alternatives à celle proposée par Aucher. Ces distances peuvent également être facilement adaptées aux modèles subjectifs de Aucher, et donc être également utilisées pour définir de nouveaux opérateurs de révision dans ce cadre [Aucher 2010]. Cinq nouvelles distances entre les modèles de Kripke $KD45_n$ sont étudiées. Trois d'entre elles sont basées sur un affaiblissement de la relation de bisimulation standard entre les modèles de Kripke. Les deux autres reposent sur une agrégation des distances propositionnelles entre l'ensemble des valuations pour différents degrés modaux dans les deux modèles.

Au-delà des propriétés standard des distances (indiscernabilité, symétrie, sous-additivité et non-négativité), trois autres propriétés, qui ont du sens pour les distances entre les modèles de Kripke $KD45_n$, sont introduites. En quelques mots, la première exprime le fait que plus le degré de discordance modal est grand (à savoir, plus le degré des formules qui ne sont pas satisfaites dans un des deux modèles est grand), plus la distance entre les deux modèles est petite. La deuxième propriété exprime que toutes les discordances à un degré modal donné ne doivent pas être considérées comme équivalentes. Cela signifie que l'on doit aller au-delà de la distance dichotomique drastique (identique/différent) entre les (valuations des) mondes, et ainsi définir des distances qui permettent une évaluation plus fine des différences entre les modèles. La troisième propriété a pour objectif de caractériser les distances qui sont basées sur des distances sur un langage propositionnel classique. Lorsque l'on considère l'application de ces distances pour la révision de croyances, nous introduisons une dernière propriété, appelée propriété de « finitude », qui assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de modèles à considérer pour le calcul de la révision.

Pour chaque distance introduite, les propriétés qu'elle satisfait sont identifiées. Nous montrons que trois distances parmi les cinq prises en compte satisfont toutes les propriétés considérées et que toutes peuvent être utilisées pour caractériser des opérateurs de révision de croyances basés sur le cadre AGM standard, mais adaptés aux modèles de Kripke KD45$_n$.

Sommaire

6.1 Préliminaires

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des modèles de Kripke KD45$_n$ finis pointés. Dans ce qui suit, nous nous référons à des modèles de Kripke comme une abréviation pour les modèles de $\mathcal{K}$.

Nous commençons par rappeler la notion usuelle de distance, que nous adaptons légèrement pour les modèles de Kripke :

Définition 6.1 (Distance).
Une distance *entre deux modèles de Kripke est une application d de $\mathcal{K}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

(D1) $d(M, M') = 0$ *si et seulement si* $M \leftrightarroweq M'$ ***(indiscernabilité)***

(D2) $d(M, M') = d(M', M)$ ***(symétrie)***

(D3) $d(M, M'') \leq d(M, M') + d(M', M'')$ ***(sous-additivité)***

(D4) $d(M, M') \geq 0$ ***(non-négativité)***

Dans [Ågotnes *et al.* 2012], les auteurs proposent d'autres propriétés que des distances devraient satisfaire. Il se trouve que certains de ces propriétés sont des conséquences des propriétés **(D1)** – **(D4)** :

Lemme 6.1.
Soit d une application de $\mathcal{K}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si d satisfait les propriétés ***(D1) – (D4)****, alors d satisfait :*

(DK1) Si $M = M'$ alors $d(M, M') = 0$

(DK2) Si $M \leftrightarrows M'$ alors $d(M, M') = 0$

(DK3) Si $M' \leftrightarrows M''$ alors $d(M, M') = d(M, M'')$

(DK4) Si $M' \leftrightarrows M''$ alors $d(M', M) = d(M'', M)$

Démonstration. Considérons trois modèle de Kripke M, M' et M'', ainsi qu'une distance d entre modèles de Kripke (d satisfait donc les propriétés **(D1) – (D4)**).

Nous montrons que d satisfait **(DK1)**. Supposons que $M = M'$, ainsi, nous avons $M \leftrightarrows M'$. **(D1)** nous permet de conclure que $d(M, M') = 0$.

Le fait que d satisfasse **(D1)** nous permet directement de conclure que d satisfait **(DK2)**.

Nous montrons que d satisfait **(DK3)**. Supposons que $M' \leftrightarrows M''$, d'après **(D3)**, nous avons :

$$d(M, M') \leq d(M, M'') + d(M'', M') \tag{1}$$

$$d(M, M'') \leq d(M, M') + d(M', M'') \tag{2}$$

De plus, d'après **(D2)** et **(D1)**, nous avons :

$$d(M', M'') = d(M'', M') = 0 \tag{3}$$

1 et 3 nous donnent :

$$d(M, M') \leq d(M, M'') \tag{I}$$

De la même manière, 2 et 3 nous donnent :

$$d(M, M'') \leq d(M, M') \tag{II}$$

Enfin, I et II nous permettent de conclure que $d(M, M') = d(M, M'')$.

Le fait que d satisfasse **(D2)** et **(DK3)** nous permet directement de conclure que d satisfait **(DK4)**. □

Les autres propriétés considérées par Ågotnes ne peuvent pas être satisfaites en présence de **(D1) – (D4)**.

Lemme 6.2.
Soit d une application de $\mathcal{K}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si d satisfait les propriétés ***(D1)-(D4)****, alors d ne peut pas satisfaire :*

(DK5) $d(M, M'') \geq d(M, M') + d(M', M'')$

(DK6) $d(M, M'') = d(M, M') + d(M', M'')$

Démonstration. Considérons une distance d entre modèles de Kripke (d satisfait donc les propriétés **(D1) – (D4)**).

Nous montrons que d ne satisfait pas **(DK5)**. Supposons que **(DK5)** soit satisfait. Considérons trois modèles de Kripke M, M' et M'' non bisimilaires deux à deux. Nous savons donc que $d(M, M') \neq 0$, $d(M, M'') \neq 0$ et $d(M', M'') \neq 0$. D'après **(DK5)** et **(D3)** nous avons,

$d(M, M'') = d(M, M') + d(M', M'')$, $d(M, M') = d(M, M'') + d(M'', M')$ et $d(M', M'') = d(M', M) + d(M, M'')$. Par conséquent, nous avons $d(M, M'') = d(M, M'') + d(M'', M') + d(M', M) + d(M, M'')$. D'après **(D4)**, nous devrions avoir $d(M, M') = d(M', M'') = d(M, M'') = 0$; ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Nous montrons que d ne satisfait pas **(DK6)**. Supposons que d satisfasse **(DK6)**. Dans ce cas, d satisfait à la fois **(D3)** et **(DK5)**. Ce qui contredit le fait que d ne satisfait pas **(DK5)**, que nous venons de démontrer. □

Pour définir des distances sur les modèles de Kripke nous considérons certaines propriétés attendues supplémentaires. Avant de présenter ces propriétés, nous introduisons une fonction de modification qui sera utilisée pour changer la valuation d'un monde w' dans un modèle M pour correspondre à une autre valuation ϑ.

Définition 6.2 (Fonction de modification)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$, $w' \in W$, et ϑ une valuation. Nous désignons par $M(\vartheta \to w')$ le modèle obtenu en changeant la valuation de w' par ϑ, défini comme suit :

$$M(\vartheta \to w') = \langle W, V', R, w\rangle \ \textit{où}$$

$$V' = \{V_v | v \neq w'\} \cup \{V_{w'} | \forall p \in \mathbb{P}, V_{w'}(p) = \vartheta(p)\}$$

Nous pouvons maintenant définir les propriétés supplémentaires.

- **(D5)** $\forall M = \langle W, V, R, w\rangle$, $\forall w', w'' \in W$, $\forall \vartheta, \vartheta'$, si $\mathrm{height}_{\mathrm{M}}(w') < \mathrm{height}_{\mathrm{M}}(w'')$ et $M' = M(\vartheta \to w')$ et $M'' = M(\vartheta \to w'')$ avec $V_{w'} \neq \vartheta$, alors $d(M, M') > d(M, M'')$.
- **(D6)** $\exists M = \langle W, V, R, w\rangle$, $\exists w' \in W$, $\exists \vartheta, \vartheta'$ tel que $M' = M(\vartheta \to w')$ et $M'' = M(\vartheta' \to w')$ et $d(M, M') \neq d(M, M'')$
- **(D7)** Il existe une distance propositionnelle non drastique d_V telle que $\forall M = \langle W, V, R, w\rangle$, $\forall w' \in W$, $\forall \vartheta, \vartheta'$, si $M' = M(\vartheta \to w')$ et $M'' = M(\vartheta' \to w')$ et $d_V(\vartheta, V_{w'}) < d_V(\vartheta', V_{w'})$, alors $d(M, M') < d(M, M'')$.

(D5) exprime le fait que plus le degré de discordance modal (à savoir, plus le degré de formules qui ne sont satisfaites que dans un des deux modèles) est grand, plus la distance entre les deux modèles est petite. Fondamentalement, cette propriété doit être évaluée en tenant compte de l'utilisation de modèles épistémiques pour prendre des décisions stratégiques. À titre d'illustration, considérons un jeu de cartes, ou tout autre jeu en information imparfaite (comme *Cluedo*, par exemple). Alors il est plus dommageable pour un joueur A de faire une erreur sur les croyances d'un autre joueur B (puisque ces croyances sont utilisées pour prendre de nombreuses décisions stratégiques), plutôt que de se tromper sur les croyances de B sur les croyances de A sur les croyances de B.

(D6) exprime que toutes les discordances au degré modal k ne sont pas équivalentes, ce qui signifie que l'on doit faire mieux que la distance dichotomique drastique (même/différent) entre les (valuations des) deux mondes.

(D7) stipule que la distance entre deux modèles doit être basée sur une distance propositionnelle classique entre les valuations. Il est clair que **(D7)** est plus exigeante que **(D6)** :

Proposition 6.1.
*Soit d une distance entre modèles de Kripke. Si d satisfait **(D7)**, alors d satisfait **(D6)**.*

Démonstration. Soit une distance d entre modèles de Kripke. Soient un modèle de Kripke $M = \langle W, V, R, w \rangle$, un monde w' de W, ainsi que deux valuations ϑ_1 et ϑ_2 différentes de $V_{w'}$. Considérons deux modèles de Kripke M' et M'' tels que $M' = M(\vartheta_1 \to w')$ et $M'' = M(\vartheta_2 \to w')$.

Supposons que d satisfasse la propriété **(D7)** basée sur une distance propositionnelle d_V. Dans ce cas, nous savons que si $d_V(\vartheta_1, V_{w'}) < d_V(\vartheta_2, V_{w'})$, alors $d(M, M') < d(M, M'')$. □

6.2 Étude de distances existantes entre modèles de Kripke

Dans [Ågotnes *et al.* 2012], des mesures entre modèles de Kripke ont été définies. Ces mesures n'ont pas été définies spécifiquement pour les modèles KD45$_n$. En effet, ces mesures ont été définies pour des modèle S5 spécifiques, ils doivent avoir le même ensemble de mondes, le même monde pointé ainsi que le même ensemble de fonctions de valuation. Seuls les ensembles de relations d'accessibilité peuvent être différents. Néanmoins, ces mesures peuvent être adaptées comme suit.

Définition 6.3 (« Kripke Distance » [Ågotnes *et al.* 2012])**.**
Soient deux modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ et $M' = \langle W, R', V, w_0 \rangle$. Nous désignons par $\delta_{\mathcal{K}}(M, M')$ la distance de Kripke entre M et M', définie comme suit :

$$\delta_{\mathcal{K}}(M, M') = \sum_{a \in \mathbb{A}} |R_a \setminus R'_a|.$$

Définition 6.4 (« Kripke Distance on Minimal Models » [Ågotnes *et al.* 2012])**.**
Soient deux modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ et $M' = \langle W, R', V, w_0 \rangle$. Nous désignons par $\delta_{min}(M, M')$ la distance de Kripke minimale entre M et M', définie comme suit :

$$\delta_{min}(M, M') = \delta_{\mathcal{K}}(\mu(M), \mu(M')).$$

Dans [Ågotnes *et al.* 2012], il est montré que $\delta_{\mathcal{K}}$ et δ_{min} satisfont les propriétés **(D1)**, **(D3)** et **(D4)**. Il est toute fois clair que ces « distances » ne sont pas symétriques. Néanmoins, deux légères modifications de $\delta_{\mathcal{K}}$ et δ_{min} suffisent à résoudre ce problème. En effet, pour que δ_{min} soit symétrique, il suffit que $\delta_{\mathcal{K}}$ le soit également. Pour que $\delta_{\mathcal{K}}$ soit symétrique, nous pouvons soit utiliser la différence symétrique au lieu de la différence ensembliste entre les relations d'accessibilité, soit prendre le différence ensembliste la plus petite entre les relations d'accessibilité.

1. $\delta^1_{\mathcal{K}}(M, M') = \sum_{a \in \mathbb{A}} |R_a \Delta R'_a|$
2. $\delta^2_{\mathcal{K}}(M, M') = \sum_{a \in \mathbb{A}} \min(|R_a \setminus R'_a|, |R'_a \setminus R_a|)$
3. $\delta^3_{min} = \delta^1_{\mathcal{K}}(\mu(M), \mu(M'))$
4. $\delta^4_{min} = \delta^2_{\mathcal{K}}(\mu(M), \mu(M'))$

Nous avons ainsi quatre distances entre modèles de Kripke.

Proposition 6.2.
$\delta^1_{\mathcal{K}}$, $\delta^2_{\mathcal{K}}$, δ^3_{min} et δ^4_{min} satisfont les propriétés **(D1) - (D4)**.

Démonstration. Il reste à montrer que $\delta^1_{\mathcal{K}}$, $\delta^2_{\mathcal{K}}$, δ^3_{min} et δ^4_{min} satisfont **(D2)**. Par définition de ces distances, nous pouvons directement conclure que **(D2)** est satisfait par celles-ci. □

Il reste néanmoins un problème assez important. En effet, le fait que, pour utiliser ces distances, seuls les ensembles de relations d'accessibilité R entre deux modèles peuvent différer est une contrainte bien trop restrictive pour l'utilisation de ces distances dans le cadre de la révision de croyances.

De plus, en l'état, aucune de ces quatre distances ne satisfait la propriété **(D5)**, puisque nous ne prenons pas en compte la profondeur des mondes causant la discordance entre les modèles. Il en est de même pour les propriétés **(D6)** et **(D7)**, puisque nous ne prenons pas en compte la valuations des mondes dans le calcul de ces distances.

Proposition 6.3.
*$\delta^1_{\mathcal{K}}$, $\delta^2_{\mathcal{K}}$, δ^3_{min} et δ^4_{min} ne satisfont ni **(D5)**, ni **(D6)** ni **(D7)**.*

Démonstration. Le fait que ces distances comparent uniquement les relations d'accessibilité entre les modèles est suffisant à montrer qu'elles ne satisfont ni **(D5)**, ni **(D6)** ni **(D7)**. □

Comme nous l'avons présenté plus tôt, dans [Aucher 2008], une notion de degré de similarité entre les modèles de Kripke, basée sur la notion de n-bisimulation, est proposée.

En se basant sur ce degré de similarité, nous pouvons définir une distance entre modèles de Kripke. Nous calculons la distance entre les modèles M et M' en additionnant les sous-distances, dépendant de la profondeur, en fonction des éléments du n-uplet $s^k(\mu(M), \mu(M'))$. La distance entre ces deux modèles à une profondeur $p \leq k$ est donnée par la différence entre 1 (le degré maximum) et le $(p+1)^{\text{ème}}$ élément de $s^k(\mu(M), \mu(M'))$.

Définition 6.5 (Distance de similarité)**.**
Soient deux modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$, et $n = |W| \cdot |W'| + 1$.

$$d\mathcal{A}(M, M') = \sum_{i=0}^{n}(1 - s^n_i(\mu(M), \mu(M')))$$

où $s^n_i(\mu(M), \mu(M'))$ est le $(i+1)^{\text{ème}}$ élément de $s^n(\mu(M), \mu(M'))$.

Le problème avec cette distance, est qu'elle ne satisfait aucune des propriétés **(D5)-(D7)**, que nous avons introduites dans la section précédente.

Proposition 6.4.
*$d\mathcal{A}$ ne satisfait ni **(D5)**, ni **(D6)** ni **(D7)**.*

Démonstration. Considérons un modèle de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$.

Nous commençons par montrer que $d\mathcal{A}$ ne satisfait pas **(D5)**. Prenons l'exemple suivant, $\mathbb{P} = \{x, y\}$, $W = \{w, v\}$, $R = \{R_1, R_2\}$ avec $R_1 = \{(w, v), (v, v)\}$ et $R_2 = \{(w, v), (v, w)\}$, $V_w(x) = 0$, $V_w(y) = 1$ et $V_v(x) = 1$, $V_v(y) = 0$. Considérons une valuation ϑ telle que $\vartheta(x) = 1$ et $\vartheta(y) = 0$, ainsi que deux modèles de Kripke $M_1 = M(\vartheta \to w)$ et $M_2 = M(\vartheta \to v)$. Soit $k = |W|^2 + 1 = 5$. Ainsi, nous avons $s^5(\mu(M), \mu(M_1)) = (0, 1, 1, 1, 1, 1)$ et $s^5(\mu(M), \mu(M_2)) = (\frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$. Par conséquent, nous avons $d\mathcal{A}(M, M_1) = 1$ et $d\mathcal{A}(M, M_2) = 5.8$. Il est clair ici que $\text{height}_{\text{M}}(w) < \text{height}_{\text{M}}(v)$ et $d\mathcal{A}(M, M_1) < d\mathcal{A}(M, M_2)$. Ceci montre bien que $d\mathcal{A}$ ne satisfait pas **(D5)**.

Nous montrons maintenant que $d\mathcal{A}$ ne satisfait pas **(D6)**. Considérons deux valuations ϑ_1 et ϑ_2 ainsi que deux modèles de Kripke M_1 et M_2 tels que $M_1 = M(\vartheta_1 \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta_2 \to v)$ avec $\vartheta_1 \neq V_v \neq \vartheta_2$ et $\text{height}_{\text{M}}(v) = p$. Clairement, nous avons $\text{height}(M) = \text{height}(M_1) = \text{height}(M_2)$. Soit $k = |W|^2 + 1$. Ainsi, nous avons $s^k_0(\mu(M), \mu(M_1)) = \frac{p}{k} = s^k_0(\mu(M), \mu(M_2))$. En suivant la définition 4.11, une itération sur s^k_i nous donne $s^k_i(\mu(M), \mu(M_1)) = s^k_i(\mu(M), \mu(M_2))$

pour tout $i \in [\![0;k]\!]$. Ainsi $d\mathcal{A}(M, M_1) = d\mathcal{A}(M, M_2)$. Ceci montre bien que $d\mathcal{A}$ ne satisfait pas **(D6)**.

Le fait que $d\mathcal{A}$ ne satisfasse par **(D6)** nous permet de conclure, en utilisant la proposition 6.1, que $d\mathcal{A}$ ne satisfait pas **(D7)**. □

6.3 Nouvelles familles de distances

Nous allons maintenant introduire plusieurs familles de distances $\mathcal{D}^d_m$. Chaque distance d d'une famille $\mathcal{D}^d_m$ est définie pour un ensemble fini de modèles de Kripke finis contenant au plus m mondes. Quel que soit l'ensemble fini de modèles finis considéré, l'existence d'un tel m adapté à celui-ci est assuré par le fait que tous les modèles qu'il contient sont finis. Toutes les (familles de) distances que nous introduisons sont calculées entre les modèles minimaux associés aux modèles de Kripke considérés au départ (notez l'utilisation de la fonction de minimisation μ dans les définitions). Ceci est nécessaire, afin d'assurer que les modèles bisimilaires soient, comme attendu, à une distance nulle.

6.3.1 Distances via les bisimulations

Nous exploitons dans un premier temps la notion de bisimulation afin de définir de nouvelles distances entre les modèles de Kripke. Nous allons tout d'abord introduire un résultat utile, à savoir qu'il existe un certain rang k à partir duquel une $k-$bisimulation implique une $(k+1)-$bisimulation, puisque nous considérons un ensemble de variables propositionnelles finis $\mathbb{P}$. Nous avons choisi comme valeur pour ce rang k la taille du plus grand ensemble de mondes, parmi les modèles que nous allons considérer, plus un. Ce résultat renforce un résultat similaire dû à Balbiani et introduit dans [Aucher 2008].

Proposition 6.5.
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes. Si $M \leftrightarroweq_{m+1} M'$, alors $M \leftrightarroweq M'$.

Démonstration. Nous commençons par introduire et prouver un lemme qui sera utilisé dans la preuve de cette proposition. Ce lemme stipule que, pour deux modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$, si il existe une $n-$bisimulation Z (avec $n > 1$) et que $(w, w') \in Z$, alors l'existence d'une séquence de $n-1$ mondes w_i telle que $wRw_1Rw_2R\cdots Rw_{n-1}$ implique l'existence d'une séquence de $n-1$ mondes w'_i telle que $w'R'w'_1R'w'_2R'\cdots R'w'_{n-1}$ ainsi que l'existence d'une $1-$bisimulation Z' telle que $(w_{n-1}, w'_{n-1}) \in Z'$; et inversement.

Lemme 6.3.
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke, et $Z \subseteq W \times W'$. Si Z est une n-bisimulation (avec $n > 1$) telle que $(w, w') \in Z$, alors :

1. *s'il existe un monde $v \in W$ tel que $wR_{a_1}\cdots R_{a_{n-1}}v$, alors il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'R'_{a_1}\cdots R'_{a_{n-1}}v'$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.*[5]
2. *s'il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'R'_{a_1}\cdots R'_{a_{n-1}}v'$, alors il existe un monde $v \in W$ tel que $wR_{a_1}\cdots R_{a_{n-1}}v$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.*

5. Nous utilisons la notation $wR_{a_1}\cdots R_{a_{n-1}}v$ comme une abréviation de $wR_{a_1}w_1R_{a_2}w_2\dots w_{n-2}R_{a_{n-1}}v$.

Démonstration. Considérons deux modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ et une relation $Z \subseteq W \times W'$. Si Z est une 2-bisimulation et $(w, w') \in Z$, alors la définition 3.9 nous permet de conclure directement.

Supposons que, pour tout $n > 1$, si Z est une n-bisimulation et $(w, w') \in Z$, alors :

(1.1) s'il existe un monde $v \in W$ tel que $w\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{(n-1)\times}v$, alors il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{(n-1)\times}v'$; de plus il existe une 1-bisimulation Z' et $(v, v') \in Z'$.

(1.2) s'il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{(n-1)\times}v'$, alors il existe un monde $v \in W$ tel que $w\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{(n-1)\times}v$; de plus il existe une 1-bisimulation Z' et $(v, v') \in Z'$.

Si Z est une $(n + 1)$-bisimulation et $(w, w') \in Z$, alors, d'après la définition 3.9, nous avons :

(2.1) s'il existe un monde $v \in W$ tel que $(w, v) \in R_a$, alors il existe un monde $v' \in W'$ tel que $(w', v') \in R'_a$ et il existe une n-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.

(2.2) s'il existe un monde $v' \in W'$ tel que $(w', v') \in R'_a$, alors il existe un monde $v \in W$ tel que $(w, v) \in R_a$ et il existe une n-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.

(1.1) et (2.1) nous donnent : si il existe un monde $v \in W$ tel que wRv, alors il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'R'v'$ et :

- s'il existe un monde $u \in W$ tel que $v\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{(n-1)\times}u$, alors il existe un monde $u' \in W'$ tel que $v'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{(n-1)\times}u'$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(u, u') \in Z'$.
- s'il existe un monde $u' \in W'$ tel que $v'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{(n-1)\times}u'$, alors il existe un monde $u \in W$ tel que $v\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{(n-1)\times}u$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(u, u') \in Z'$.

(1.2) et (2.2) nous donne un résultat similaire.

Ainsi, nous avons, si Z est une $(n + 1)$-bisimulation telle que $(w, w') \in Z$, alors :

- s'il existe un monde $v \in W$ tel que $w\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{n\times}v$, alors il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{n\times}v'$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.
- s'il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{n\times}v'$, alors il existe un monde $v \in W$ tel que $w\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{n\times}v$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.

□

Nous pouvons maintenant prouver la proposition.

Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes tels que height$(M) = n$ et height$(M') = n - p$ avec $0 \leq p \leq n$.
Ainsi, nous avons, $m \geq n + 1$. Soient $k = n + 2$ et une relation $Z \subseteq W \times W'$ telle que Z est une k-bisimulation telle que (w, w').
Nous avons $M \leftrightarroweq_k M'$, et d'après le lemme 6.3, nous avons également :

(1) s'il existe un monde $v \in W$ tel que $w\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{(n+1)\times}v$, alors il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{(n+1)\times}v'$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.

(2) s'il existe un monde $v' \in W'$ tel que $w'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{(n+1)\times}v'$, alors il existe un monde $v \in W$ tel que $w\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{(n+1)\times}v$; et il existe une 1-bisimulation Z' telle que $(v, v') \in Z'$.

Regardons de plus près ces deux cas :

(1) si un tel monde v existe, comme height$(M) = n$, il existe un $\alpha < n+1$ tel que $w\underbrace{R_{a_i} \cdots R_{a_j}}_{\alpha\times}v$ $\underbrace{R_{a_{i'}} \cdots R_{a_{j'}}}_{(n-\alpha+1)\times}v$, dans ce cas il existe un monde v', tel que $w'\underbrace{R'_{a_i} \cdots R'_{a_j}}_{\alpha\times}v'\underbrace{R'_{a_{i'}} \cdots R'_{a_{j'}}}_{(n-\alpha+1)\times}v'$; et il existe une α-bisimulation Z'' telle que $(v, v') \in Z''$ avec $\alpha \geq 1$.

(2) nous pouvons tirer la même conclusion pour le second point en utilisant un raisonnement similaire.

Ainsi, Z est (au moins) une $(k+1)$-bisimulation telle que $(w, w') \in Z$. En utilisant une induction simple, nous montrons que pour tout $i \geq k$, $M \leftrightarroweq_i M'$. Le lemme 3.1 nous permet de conclure que $M \leftrightarroweq M'$. La réciproque est trivialement vraie. □

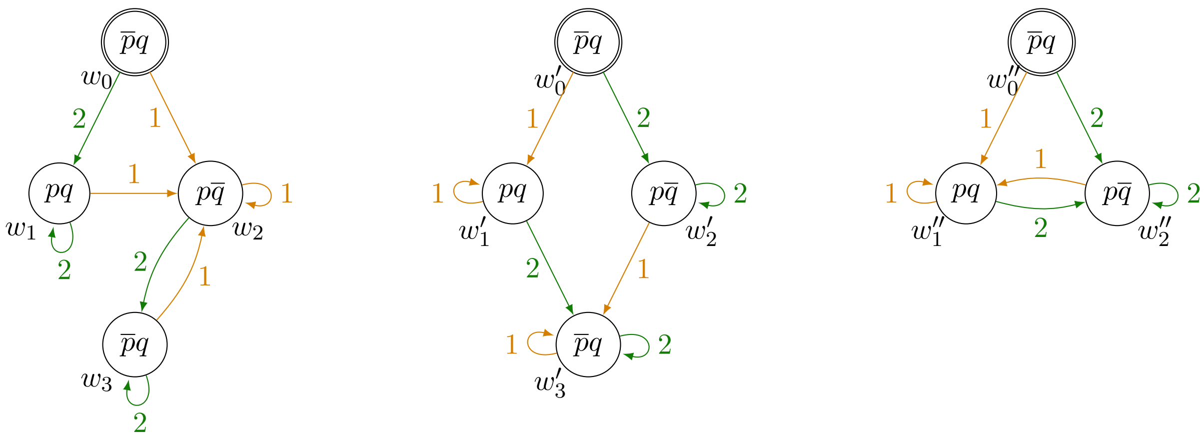
Nous utilisons maintenant la notion de $n-$bisimulation afin de définir une famille de distances $\mathcal{D}_m^{d\mathcal{NB}}$ entre modèles de Kripke. Pour ce faire, nous regardons jusqu'à quelle profondeur les deux modèles sont bisimilaires ; nous soustrayons ensuite cette valeur à la valeur maximale.

Définition 6.6 (Distance et n-bisimulation)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes. Nous désignons par $d\mathcal{NB}(M, M')$ la distance entre M et M', définie comme suit :

$$d\mathcal{NB}(M, M') = (m + 1) - \max\{i \mid \mu(M) \leftrightarroweq_i \mu(M'),\ i \in [\![0; m + 1]\!]\}$$

Nous pouvons illustrer cette distance sur un exemple simple. Considérons les modèles de Kripke M, M' et M'' de la figure 6.1.

Comme nous pouvons le voir, les modèles M et M' sont $1-$bisimilaires, les modèles M et M'' sont également $1-$bisimilaires et les modèles M' et M'' sont $2-$bisimilaires. Ainsi, nous avons les distances suivantes entre ces modèles : $d\mathcal{NB}(M, M') = 5 - 1 = 4$, $d\mathcal{NB}(M, M'') = 5 - 1 = 4$ et $d\mathcal{NB}(M', M'') = 5 - 2 = 3$. Nous reprendrons cet exemple pour illustrer les distances qui vont suivre.



M $\qquad$ M' $\qquad$ M''

FIGURE 6.1 – Trois modèles de Kripke

Comme le montre la proposition suivante, il est facile de vérifier que $d\mathcal{NB}$ satisfait la propriété **(D5)**. En effet, l'idée sous-jacente à cette distance est de regarder jusqu'à quelle profondeur les deux modèles sont bisimilaires. Ainsi, lorsque le degré modal de la différence augmente, la distance entre les modèles diminue. Néanmoins, puisque nous ne prenons pas en considération les valuations des mondes, $d\mathcal{NB}$ ne satisfait ni **(D6)** ni **(D7)**.

Proposition 6.6.

1. *$d\mathcal{NB}$ satisfait **(D1)-(D4)**.*
2. *$d\mathcal{NB}$ satisfait **(D5)**.*
3. *$d\mathcal{NB}$ ne satisfait ni **(D6)** ni **(D7)**.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de modèles de Kripke contenant au plus m mondes. Considérons les trois modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$, $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ et $M'' = \langle W'', R'', V'', w''\rangle$ de $\mathcal{M}$.

Nous montrons que $d\mathcal{NB}$ satisfait la propriété **(D1)**. Supposons que $d\mathcal{NB}(M, M') = 0$. D'après la définition de $d\mathcal{NB}$, nous savons que, $d\mathcal{NB}(M, M') = 0$ si et seulement si $\max(i \mid M \leftrightarroweq_i M' \text{ and } i \in [\![0; m+1]\!]) = m+1$. Le fait que, pour chaque modèle M de $\mathcal{M}$, nous ayons $\text{height}(M) < m$ nous permet, via la proposition 6.5, de conclure que $d\mathcal{NB}$ satisfait **(D1)**.

Nous montrons que $d\mathcal{NB}$ satisfait la propriété **(D2)**. Posons $n = m + 1$, $p_1 = \max(i \mid M \leftrightarroweq_i M' \text{ and } i \in [\![0; n]\!])$ et $p_2 = \max(i \mid M' \leftrightarroweq_i M \text{ and } i \in [\![0; n]\!])\}$. La définition 3.9 nous permet d'établir que $p_1 = p_2$. Ainsi, $d\mathcal{NB}(M, M') = n - p_1 = n - p_2 = d\mathcal{NB}(M', M)$.

Nous montrons que $d\mathcal{NB}$ satisfait la propriété **(D3)**. Nous commençons par introduire et prouver un lemme qui nous sera utile dans cette preuve.

Lemme 6.4.
Soient trois modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$, $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ et $M'' = \langle W'', R'', V'', w''\rangle$ contenant au plus m mondes. Si $M \leftrightarroweq_{n_1} M'$ et $M' \leftrightarroweq_{n_2} M''$, alors $M \leftrightarroweq_{n_3} M''$ avec $n_3 \geq min(n_1, n_2)$.

Démonstration. Soient trois modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$, $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ et $M'' = \langle W'', R'', V'', w''\rangle$ contenant au plus m mondes tels qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $M \leftrightarrows_x M'$, $M \not\leftrightarrows_{x+1} M'$, $M \leftrightarrows_y M''$, $M \not\leftrightarrows_{y+1} M''$, $M' \leftrightarrows_z M''$ et $M' \not\leftrightarrows_{z+1} M''$.

Supposons que $x < min(y, z)$. Nous avons deux cas à considérer :

- soit $x < y \leq z$. Dans ce cas nous avons, $M' \leftrightarrows_y M''$. Comme $M \leftrightarrows_y M''$, nous avons également $M \leftrightarrows_y M'$. Ceci nous conduit à la contradiction $x = y$.
- soit $x < z \leq y$. Dans ce cas nous avons, $M \leftrightarrows_z M''$. Comme $M' \leftrightarrows_z M''$, nous avons également $M \leftrightarrows_z M'$. Ceci nous conduit à la contradiction $x = z$.

Ces deux contradictions nous permettent de conclure que $x \geq min(y, z)$. □

Nous pouvons reprendre la preuve de **(D3)**. Posons $n = m + 1$. Supposons qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $M \leftrightarrows_x M'$, $M \not\leftrightarrows_{x+1} M'$, $M \leftrightarrows_y M''$, $M \not\leftrightarrows_{y+1} M''$, $M' \leftrightarrows_z M''$ et $M' \not\leftrightarrows_{z+1} M''$; et $n \geq max(x, y, z)$

Nous voulons montrer que $n-x \leq n-y+n-z$. Cela revient à montrer que $n+x \geq y+z$. Le lemme 6.4 nous conduit directement à $x \geq min(y, z)$. Le fait que $n \geq max(x, y, z)$ nous permet de conclure.

Par définition, $d\mathcal{NB}$ satisfait la propriété **(D4)**.

Nous montrons que $d\mathcal{NB}$ satisfait la propriété **(D5)**. Considérons une valuation ϑ, un entier $n = m + 1$ et deux modèles de Kripke $M_1 = M(\vartheta \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta \to u)$ avec $\text{height}_\text{M}(v) < \text{height}_\text{M}(u)$ et $V_v \neq \vartheta \neq V_u$. Nous avons clairement $\text{height}(M) = \text{height}(M_1) = \text{height}(M_2)$. Soient $k = max(i|\mu(M) \leftrightarrows_i \mu(M_1)$ et $i \in [\![0; n]\!])$ et $k' = max(i|\mu(M) \leftrightarrows_i \mu(M_2)$ et $i \in [\![0; n]\!])$. Nous avons donc $k < k'$. Ainsi, $\frac{1}{n}(n-k) > \frac{1}{n}(n-k')$ Nous pouvons donc conclure que $d\mathcal{NB}(M, M_1) > d\mathcal{NB}(M, M_2)$.

Nous montrons que $d\mathcal{NB}$ ne satisfait pas **(D6)**. Considérons un entier $n = m + 1$ et deux modèles de Kripke $M_1 = M(\vartheta_1 \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta_2 \to v)$ avec $\vartheta_1 \neq V_v \neq \vartheta_2$. Nous avons $\text{height}(M) = \text{height}(M_1) = \text{height}(M_2)$. Soient $k = max(i|\mu(M) \leftrightarrows_i \mu(M_1)$ et $i \in [\![0; n]\!])$ et $k' = max(i|\mu(M) \leftrightarrows_i \mu(M_2)$ et $i \in [\![0; n]\!])$. Nous avons donc $k = k'$. En suivant un raisonnement similaire à celui du point précédent, nous pouvons conclure que $d\mathcal{NB}(M, M_1) = d\mathcal{NB}(M, M_2)$.

Le fait que $d\mathcal{NB}$ ne satisfasse pas **(D6)** suffit à conclure, via la proposition 6.1, que $d\mathcal{NB}$ ne satisfait pas **(D7)**. □

Comme dit plus tôt, le défaut de la distance $d\mathcal{NB}$ est qu'elle ne compare pas les valuations des mondes et, de ce fait, ne satisfait pas les propriétés **(D6)** et **(D7)**. Afin de remédier à cela, nous avons défini un nouvel affaiblissement de la notion de bisimulation.

Il s'agit d'une approximation de la bisimulation dans laquelle les valuations des mondes peuvent différer. Ainsi deux modèles très proches l'un de l'autre sont considérés comme étant $d\varepsilon-$bisimilaires. Dans ce cas, nous utilisons une distance propositionnelle d entre valuations de $2^{|\mathbb{P}|} \times 2^{|\mathbb{P}|}$ dans $\mathbb{N}$, satisfaisant les propriétés de distances habituelles (indiscernabilité, symétrie, sous-additivité et non-négativité) [Sutherland 1975].

Définition 6.7 ($d\varepsilon$-bisimulation)**.**
*Soient d une distance propositionnelle et $\varepsilon \in \mathbb{N}$. Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke. Soit $Z \subseteq W \times W'$. Z est une $d\varepsilon$-*bisimulation *si et seulement si $(w, w') \in Z$ et pour tout $(v, v') \in Z$:*

1. *$d(V_v, V_{v'}) \leq \varepsilon$, et*
2. *si $\exists u \in W$ tel que $(v, u) \in R_a$, alors $\exists u' \in W'$ tel que $(v', u') \in R'_a$ et $(u, u') \in Z$, et*

3. *si* $\exists u' \in W'$ *tel que* $(v', u') \in R'_a$, *alors* $\exists u \in W$ *tel que* $(v, u) \in R_a$ *et* $(u, u') \in Z$.

Définition 6.8 ($d\varepsilon$-bisimilarité)**.**
*Soient d une distance propositionnelle et $\varepsilon \in \mathbb{N}$. Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke. M et M' sont $d\varepsilon$-*bisimilaires*, noté $M \leftrightarroweq^{d,\varepsilon} M'$, si et seulement si il existe une $d\varepsilon$-bisimulation $Z \subseteq W \times W'$.*

Comme pour la (famille de) distance(s) basée(s) sur la n-bisimulation, nous pouvons utiliser la $d\varepsilon$-bisimulation pour définir une nouvelle famille de distances $\mathcal{D}_m^{d\mathcal{EB}_d}$. Nous cherchons ici le plus petit ε possible de sorte que les deux modèles soient $d\varepsilon$-bisimilaires.

Définition 6.9 (Distance et $d\varepsilon$-bisimulation)**.**
Soient d une distance propositionnelle et $\varepsilon \in \mathbb{N}$. Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes. Nous notons $d\mathcal{EB}_d(M, M')$ la distance entre M et M', définie comme suit :

$$d\mathcal{EB}_d(M, M') = \min\{\varepsilon \mid \mu(M) \leftrightarroweq^{d,\varepsilon} \mu(M')\}.$$

Nous pouvons illustrer cette distance sur un exemple simple. Considérons les modèles de Kripke M, M' et M'' de la figure 6.1. Pour cet exemple, nous utilisons h la distance de Hamming [Hamming 1950] entre les valuations. Comme nous pouvons le voir, les modèles M et M' sont $h2-$bisimilaires, les modèles M et M'' sont $h2-$bisimilaires et les modèles M' et M'' sont $h2-$bisimilaires. Ainsi, nous avons les distances suivantes entre ces modèles : $d\mathcal{EB}_h(M, M') = 2$, $d\mathcal{EB}_h(M, M'') = 2$ et $d\mathcal{EB}_h(M', M'') = 2$.

Comme le montre la propriété suivante, il est facile de vérifier que $d\mathcal{EB}_d$ ne satisfait pas la propriété **(D5)**. En effet, nous cherchons un ε quelle que soit la profondeur de la discordance entre les modèles. A contrario, comme nous considérons, en quelque sorte, la valuation des mondes provoquant la discordance, si une distance propositionnelle non drastique est utilisée, $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D7)** et, par conséquent, **(D6)**.

Proposition 6.7.

1. *Pour toute distance propositionnelle d, $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D1)-(D4)**.*
2. *Pour toute distance propositionnelle d, $d\mathcal{EB}_d$ ne satisfait pas **(D5)**.*
3. *Pour toute distance propositionnelle non drastique d, $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D6)** et **(D7)**.*

Démonstration. Considérons trois modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$, $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ et $M'' = \langle W'', R'', V'', w''\rangle$.

Nous montrons que $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D1)**. D'après la définition de $d\mathcal{EB}_d$, nous savons que, $d\mathcal{EB}_d(M, M') = 0$ si et seulement si $\min(\varepsilon \mid M \leftrightarroweq^{d,\varepsilon} M') = 0$. Ainsi $M \leftrightarroweq^{d,0} M'$. La définition 6.7 nous permet de conclure que $M \leftrightarroweq M'$.

Nous montrons que $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D2)**. Le fait que la $d\varepsilon$-bisimulation soit symétrique nous permet de conclure directement.

Nous montrons que $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D3)**. Nous commençons par introduire et prouver un lemme qui nous sera utile dans cette preuve.

Lemme 6.5.
Soient M, M' et M'' trois modèles de Kripke et d une distance propositionnelle. Si $M \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_1} M'$ et $M' \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_2} M''$, alors $M \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_3} M''$ avec $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Démonstration. Soit d_V une distance propositionnelle. Soient M, M' et M'' trois modèles de Kripke tels que $M \leftrightarroweq^{d_V,\varepsilon_1} M'$, $M' \leftrightarroweq^{d_V,\varepsilon_2} M''$ et $M \leftrightarroweq^{d_V,\varepsilon_3} M''$.

- si $\varepsilon_1 = d_V(V_w, V'_{w'})$ et $\varepsilon_2 = d_V(V'_{w'}, V''_{w''})$, alors, d_V étant transitive, $\varepsilon_3 = d_V(V_w, V''_{w''}) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.
- si $\varepsilon_1 = d(V_w,V'_{w'})$ et $\varepsilon_2 = d(V'_{v'},V''_{v''})$, alors $\varepsilon_3 = max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

□

Nous pouvons reprendre la preuve de **(D3)**. Considérons une distance propositionnelle d_V. Supposons qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{N}$ tels que $M \leftrightarroweq^{d_V,\varepsilon_1} M'$, $M' \leftrightarroweq^{d_V,\varepsilon_2} M''$ et $M \leftrightarroweq^{d_V,\varepsilon_3} M''$. Nous voulons montrer que $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Le lemme 6.5 nous permet de conclure directement.

Par définition, $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D4)**.

Nous montrons que $d\mathcal{EB}_d$ ne satisfait pas **(D5)**. Considérons l'exemple suivant, $\mathbb{P} = \{x, y\}$, $W = \{w, v\}$, $R = \{R_1, R_2\}$ avec $R_1 = \{(w, v), (v, v)\}$ et $R_2 = \{(w, v), (v, w)\}$, $V_w(x) = 0$, $V_w(y) = 1$ et $V_v(x) = 0$, $V_v(y) = 0$. Soit une valuation ϑ telle que $\vartheta(x) = 1$ et $\vartheta(y) = 0$.

Considérons les deux modèles de Kripke $M_1 = M(\vartheta \to w)$ et $M_2 = M(\vartheta \to v)$. Nous avons clairement $V_w \neq \vartheta \neq V_v$ et $\mathrm{height}_{\mathrm{M}}(w) < \mathrm{height}_{\mathrm{M}}(v)$. Considérons une distance propositionnelle drastique d, nous pouvons voir que $d\mathcal{EB}_d(M, M_1) = d(V_w, \vartheta) = 1 = d(V_v, \vartheta) = d\mathcal{EB}_d(M, M_2)$. Considérons maintenant la distance de Hamming h, nous avons $h(V_w, \vartheta) = 2$ et $h(V_v, \vartheta) = 1$ nous pouvons donc conclure que $d\mathcal{EB}_d(M, M_1) \geq d\mathcal{EB}_d(M, M_2)$. Ce qui contredit **(D5)**.

Nous montrons que $d\mathcal{EB}_d$ satisfait **(D7)** pour toute distance propositionnelle d non drastique. Soient d une distance propositionnelle non drastique, deux valuations ϑ_1 et ϑ_2 et un modèle de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$ tel que $v \in W$. Considérons deux modèles de Kripke M_1 et M_2 tels que $M_1 = M(\vartheta_1 \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta_2 \to v)$ tels que $d(\vartheta_1, V_v) < d(\vartheta_2, V_v)$. D'après la définition de $d\mathcal{EB}_d$, nous avons $d\mathcal{EB}_d(M, M_1) = d(\vartheta_1, V_v)$ et $d\mathcal{EB}_d(M, M_2) = d(\vartheta_2, V_v)$. Ce qui nous permet de conclure que $d\mathcal{EB}_d(M, M_1) < d\mathcal{EB}_d(M, M_2)$.

Le fait que, pour toute distance propositionnelle non drastique, $d\mathcal{EB}_d$ satisfasse **(D7)** nous permet de conclure, via la proposition 6.1, que $d\mathcal{EB}_d$ satisfait également **(D6)**. □

Nous avons maintenant une (famille de) distance(s) entre modèles de Kripke qui satisfait bien les propriétés **(D6)** et **(D7)**. Néanmoins, celle-ci ne satisfait pas la propriété **(D5)**. Afin de satisfaire les trois propriétés, nous avons considéré conjointement les idées sous-tendants les deux affaiblissements de la notion de bisimulation, introduits plus tôt, définissant ainsi un troisième affaiblissement de cette même notion.

Définition 6.10 ($d\varepsilon$-n-bisimulation)**.**
Soient d une distance propositionnelle et $\varepsilon \in \mathbb{N}$. Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke. Soit $Z \subseteq W \times W'$:

- *Z est une $d\varepsilon$-0-bisimulation.*
- *Z est une $d\varepsilon$-1-bisimulation si et seulement si $(w, w') \in Z$ et $d(V_w, V'_{w'}) \leq \varepsilon$.*
- *Z est une $d\varepsilon$-$(n + 1)$-bisimulation si et seulement si $(w, w') \in Z$ et pour tout $(v, v') \in Z$:*
  1. *$d(V_v, V'_{v'}) \leq \varepsilon$ et*
  2. *s'il existe un monde $u \in W$ tel que $(v, u) \in R_a$, alors il existe un monde $u' \in W'$ tel que $(v', u') \in R'_a$ et il existe une relation Z' telle que $(u, u') \in Z'$ et Z' est une $d\varepsilon$-n-bisimulation, et*

3. *s'il existe un monde $u' \in W'$ tel que $(v', u') \in R'_a$, alors il existe un monde $u \in W$ tel que $(v, u) \in R_a$ et il existe une relation Z' telle que $(u, u') \in Z'$ et Z' est une $d\varepsilon$-n-bisimulation.*

Définition 6.11 ($d\varepsilon$-n-bisimilarité)**.**
*Soient d une distance propositionnelle et $\varepsilon \in \mathbb{N}$. Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke. M et M' sont $d\varepsilon$-n-*bisimilaires*, noté $M \underline{\leftrightarrow}_n^{d,\varepsilon} M'$, si et seulement si il existe une $d\varepsilon$-n-bisimulation $Z \subseteq W \times W'$.*

Clairement, nous pouvons également tirer avantage de cette notion de $d\varepsilon$-n-bisimulation afin de définir une nouvelle famille de distances $\mathcal{D}_m^{d\mathcal{ENB}_d^\gamma}$.

Pour chaque profondeur p, nous cherchons le plus petit ε (pour une certaine distance propositionnelle d) tel que deux modèles soient $d\varepsilon$-p-bisimilaires. De plus, afin de s'assurer que plus la différence entre les deux modèles se trouve à une profondeur élevée moins elle est importante pour la distance entre les modèles, nous appliquons un facteur d'atténuation $\gamma \in]0; 1]$ à chacune de ces distances intermédiaires.

Définition 6.12 (Distance et $d\varepsilon$-n-bisimulation)**.**
Soient d une distance propositionnelle, $\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in]0; 1]$. Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes. Nous désignons par $d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M')$ la distance entre M et M', définie comme suit :

$$d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M') = \sum_{i=1}^{m} (\min(\varepsilon \mid \mu(M) \underline{\leftrightarrow}_i^{d,\varepsilon} \mu(M')) \times \gamma^{(i-1)})$$

Nous pouvons illustrer cette distance sur un exemple simple. Considérons les modèles de Kripke M, M' et M'' de la figure 6.1. Pour cet exemple, nous utilisons h la distance de Hamming [Hamming 1950] entre les valuations et prenons $\gamma = 1/2$. Comme nous pouvons le voir, les modèles M et M' sont $h0-1-$bisimilaires, $h1-2-$bisimilaires, $h2-3-$bisimilaires, $h2-4-$bisimilaires ; les modèles M et M'' sont $h0-1-$bisimilaires, $h1-2-$bisimilaires, $h2-3-$bisimilaires, $h2-4-$bisimilaires ; et les modèles M' et M'' sont $h0-0-$bisimilaires, $h0-2-$bisimilaires, $h2-3-$bisimilaires, $h2-4-$bisimilaires ; ainsi, nous avons les distances suivantes entre ces modèles : $d\mathcal{ENB}_h^\gamma(M, M') = 0.625$, $d\mathcal{ENB}_h^\gamma(M, M'') = 0.625$ et $d\mathcal{ENB}_h^\gamma(M', M'') = 0.375$.

Comme le montre la propriété suivante, il est possible de trouver un facteur d'atténuation assez petit afin que la distance $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ puisse satisfaire **(D5)**. De plus, comme nous l'avons fait pour la distance $d\mathcal{EB}_d$, nous considérons les valuations des mondes causant la discordance. Ainsi, une nouvelle fois, si nous utilisons une distance propositionnelle non drastique d, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D7)** et, par conséquent, **(D6)**.

Proposition 6.8.

1. *Pour toute distance propositionnelle d, et pour tout facteur d'atténuation γ, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D1)-(D4)**.*

2. *Pour toute distance propositionnelle d, il existe $\lambda \in]0, 1]$ tel que pour tout $\gamma < \lambda$, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D5)** ;*

3. *Pour toute distance propositionnelle non drastique d, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D6)** et **(D7)**.*

Démonstration. Considérons trois modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w \rangle$, $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$ et $M'' = \langle W'', R'', V'', w'' \rangle$ contenant au plus m mondes.

Nous montrons que $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D1)**. D'après la définition de $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$, nous savons que, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M') = 0$ si et seulement si $\forall i \in [\![1; m]\!], \min(\varepsilon \mid M \leftrightarroweq_i^{d,\varepsilon} M') = 0$. Ainsi, $M \leftrightarroweq_m^{d,0} M'$. La définition 6.10 nous permet de conclure que $M \leftrightarroweq_m M'$. Ainsi, d'après la proposition 6.5, nous avons $M \leftrightarroweq M'$.

Nous montrons que $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D2)**. Le fait que ε-n-bisimulation soit symétrique nous permet de conclure directement.

Nous montrons que $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D3)**. Nous commençons par introduire et prouver deux lemmes.

Lemme 6.6.
Soient M et M' deux modèles de Kripke, d_V une distance propositionnelle et $k, \varepsilon \in \mathbb{N}$. Si $M \leftrightarroweq_k^{d_V,\varepsilon} M'$, alors $(M \upharpoonright k) \leftrightarroweq^{d_V,\varepsilon} (M' \upharpoonright k)$.

Démonstration. Les définitions 6.10 et 3.12 nous permettent de conclure directement. □

Lemme 6.7.
Soient M, M' et M'' trois modèles de Kripke. Soient d une distance propositionnelle et $i \in \mathbb{N}$. Si $M \leftrightarroweq_i^{d,\varepsilon_1} M'$ et $M' \leftrightarroweq_i^{d,\varepsilon_2} M''$, alors $M \leftrightarroweq_i^{d,\varepsilon_3} M''$, avec $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Démonstration. Soit d_V une distance propositionnelle et $k \in \mathbb{N}$. Soient M, M' et M'' trois modèles de Kripke tels que $M \leftrightarroweq_k^{d,\varepsilon_1} M'$, $M' \leftrightarroweq_k^{d,\varepsilon_2} M''$ et $M \leftrightarroweq_k^{d,\varepsilon_3} M''$.

D'après le lemme 6.6, nous avons donc $(M \upharpoonright k) \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_1} (M' \upharpoonright k)$, $(M' \upharpoonright k) \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_2} (M'' \upharpoonright k)$ et $(M \upharpoonright k) \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_3} (M'' \upharpoonright k)$.

Le lemme 6.5 nous permet de conclure directement que $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. □

Nous pouvons reprendre la preuve de **(D3)**. Nous voulons montrer que $d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M'') \leq d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M') + d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M', M'')$. D'après le lemme 6.6, nous avons $\sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon_1 \mid \mu(M) \leftrightarroweq_i^{d,\varepsilon_1} \mu(M'')) \times \gamma^{(i-1)}) = \sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon_1 \mid \mu((M \upharpoonright i)) \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_1} \mu((M'' \upharpoonright i))) \times \gamma^{(i-1)})$, $\sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon_2 \mid \mu(M) \leftrightarroweq_i^{d,\varepsilon_2} \mu(M'')) \times \gamma^{(i-1)}) = \sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon_2 \mid \mu((M \upharpoonright i)) \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_2} \mu((M'' \upharpoonright i))) \times \gamma^{(i-1)})$ et $\sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon_3 \mid \mu(M) \leftrightarroweq_i^{d,\varepsilon_3} \mu(M'')) \times \gamma^{(i-1)}) = \sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon_3 \mid \mu((M \upharpoonright i)) \leftrightarroweq^{d,\varepsilon_3} \mu((M'' \upharpoonright i))) \times \gamma^{(i-1)})$. En appliquant le lemme 6.7 pour tout i, nous pouvont directement conclure que

$$d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M'') \leq d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M') + d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M', M'').$$

Par définition, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D4)**.

Nous montrons qu'il existe un $\lambda \in (0; 1]$ tel que, pour tout$\gamma < \lambda$, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ satisfait **(D5)**. Soient d_V une distance propositionnelle, M_1 et M_2 deux modèles de Kripke et ϑ une valuation tels que $M_1 = M(\vartheta \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta \to u)$ avec $p_1 = \mathrm{height_M}(v) < \mathrm{height_M}(u) = p_2$ et $V_v \neq \vartheta \neq V_u$. Supposons que $d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M_1) \leq d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M_2)$ pour tout $\gamma \in (0; 1]$. D'après la définition de $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$, nous savons que $d\mathcal{ENB}_{d_V}^\gamma(M, M_1) = \sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon \mid \mu(M) \leftrightarroweq_i^{d_V,\varepsilon} \mu(M_1)) \times \gamma^{(i-1)})$ et $d\mathcal{ENB}_{d_V}^\gamma(M, M_2) = \sum_{i=1}^m (\min(\varepsilon \mid \mu(M) \leftrightarroweq_i^{d_V,\varepsilon} \mu(M_2)) \times \gamma^{(i-1)})$. Par construction de M_1 et M_2, nous avons $d\mathcal{ENB}_{d_V}^\gamma(M, M_1) = \sum_{i=p_1}^m (d_V(v, \vartheta) \times \gamma^{(i-1)})$ et $d\mathcal{ENB}_{d_V}^\gamma(M, M_2) = \sum_{i=p_2}^m (d_V(u, \vartheta) \times \gamma^{(i-1)})$. Ainsi, nous avons

$$\sum_{i=p_1}^{m} (d_V(v, \vartheta) \times \gamma^{(i-1)}) \leq \sum_{i=p_2}^{m} (d_V(u, \vartheta) \times \gamma^{(i-1)})$$

$$d_V(v,\vartheta)\times\sum_{i=p_1}^{m}(\gamma^{(i-1)})\leq d_V(u,\vartheta)\times\sum_{i=p_2}^{m}(\gamma^{(i-1)})$$

$$d_V(v,\vartheta)\times\gamma^{(p_1-1)}\cdot(\frac{1-\gamma^{(m-p_1+1)}}{1-\gamma})\leq d_V(u,\vartheta)\times\gamma^{(p_2-1)}\cdot(\frac{1-\gamma^{(m-p_2+1)}}{1-\gamma})$$

$$d_V(v,\vartheta)\times(\gamma^{(p_1-1)}-\gamma^{m})\leq d_V(u,\vartheta)\times(\gamma^{(p_2-1)}-\gamma^{m})\quad(\star)$$

Supposons maintenant que $\gamma = \frac{\alpha}{m\beta}$ où $\alpha = \min\{d_V(w,w') \neq 0 | w,w' \in W\}$ et $\beta = \max\{d_V(w,w') | w,w' \in W\}$. Notons que, comme M_1 et M_2 sont des « copies » de M, ils contiennent au plus m mondes. Nous avons $m > p_2 > p_1 \geq 0$ et $0 < \alpha \leq \beta$. De plus, supposons que $d_V(v,\vartheta) = \alpha$ et $d_V(u,\vartheta) = \beta$.

$(\star)$ nous donne

$$\alpha\times((\frac{\alpha}{m\beta})^{(p_1-1)}-(\frac{\alpha}{m\beta})^{m})\leq\beta\times((\frac{\alpha}{m\beta})^{(p_2-1)}-(\frac{\alpha}{m\beta})^{m})$$

$$\frac{\alpha^{p_1}(m\beta)^{(m-p_1+1)}-\alpha^{(m+1)}}{(m\beta)^{m}}\leq\frac{\alpha^{(p_2-1)}(m\beta)^{(m-p_2+1)}-\alpha^{m}\beta}{(m\beta)^{m}}$$

$$\alpha^{p_1}(m\beta)^{(m-p_1+1)}-\alpha^{(m+1)}\leq\alpha^{(p_2-1)}(m\beta)^{(m-p_2+1)}-\alpha^{m}\beta$$

$$\alpha^{p_1}(m\beta)^{(m-p_1+1)}+\alpha^{m}\beta\leq\alpha^{(p_2-1)}(m\beta)^{(m-p_2+1)}+\alpha^{(m+1)}\quad(\star\star)$$

- Puisque $\beta \geq \alpha$, nous avons $\alpha^m\beta \geq \alpha^{(m+1)} \quad (1)$;
- Puisque $\beta \geq \alpha$, nous avons

$$\beta^{(p_2-p_1-1)}\geq\alpha^{(p_2-p_1-1)}$$

$$\beta^{(p_2-p_1)}\geq\alpha^{(p_2-p_1-1)}\beta$$

$$(m\beta)^{(p_2-p_1)}>\alpha^{(p_2-p_1-1)}\beta$$

$$\alpha^{p_1}(m\beta)^{(p_2-p_1)}>\alpha^{(p_2-1)}\beta$$

$$\alpha^{p_1}(m\beta)^{(n-p_1+1)}>\alpha^{(p_2-1)}\beta(m\beta)^{(m-p_2+1)}\quad(2)$$

(1) et (2) nous permettent de déduire que $\alpha^{p_1}(m\beta)^{(m-p_1+1)} + \alpha^m\beta > \alpha^{(p_2-1)}(m\beta)^{(m-p_2+1)} + \alpha^{(m+1)}$ ce qui contredit $(\star\star)$. Cette contradiction, combinée au fait que nous avons choisi la valeur minimale pour $d_V(v,\vartheta)$ et la maximale pour $d_V(u,\vartheta)$, nous permet de conclure que $d\mathcal{ENB}_d^{\gamma}$ satisfait **(D5)**.

Nous montrons que $d\mathcal{ENB}_d^{\gamma}$ satisfait **(D7)** pour toute distance non drastique d. Soient d une distance non drastique, ϑ_1 et ϑ_2 deux valuations, M_1 et M_2 deux modèles de Kripke et $v \in W$. Supposons que $M_1 = M(\vartheta_1 \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta_2 \to v)$ tels que $d(\vartheta_1, V_v) < d(\vartheta_2, V_v)$. Soit $\mathrm{height}_{\mathrm{M}}(v) = p$. Dans ce cas, nous avons $(m-p)\times d(\vartheta_1,V_v) < (m-p)\times d(\vartheta_2,V_v)$. De plus, nous avons $(m-p)\times d(\vartheta_1,V_v)\times\sum_{i=p+1}^{m}(\gamma^{(i-1)}) < (m-p)\times d(\vartheta_2,V_v)\times\sum_{i=p+1}^{m}(\gamma^{(i-1)})$. Par conséquent, la définition de $d\mathcal{ENB}_d^{\gamma}$, nous permet de conclure que $d\mathcal{ENB}_d^{\gamma}(M,M_1) < d\mathcal{ENB}_d^{\gamma}(M,M_2)$.

Le fait que, pour toute distance non drastique d, $d\mathcal{ENB}_d^{\gamma}$ satisfait **(D7)** nous permet de conclure, via la proposition 6.1, que $d\mathcal{ENB}_d^{\gamma}$ satisfait également **(D6)**.

□

Nous avons maintenant une distance pouvant satisfaire toutes les propriétés attendues. Nous allons maintenant définir d'autres (familles de) distances en exploitant d'autres notions.

6.3.2 Distances via les modèles arborescents

Nous définissons, dans un premier temps, une famille de distances $\mathcal{D}_m^{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$ entre modèles de Kripke, basée sur les modèles arborescents correspondant aux modèles de Kripke initiaux. L'idée est de « déplier » les modèles de Kripke, pour former des arbres, et de regarder à quel point ces arbres se correspondent.

Définition 6.13 (Modèle arborescent)**.**
Soit $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ un modèle de Kripke. Le modèle arborescent *correspondant à M est le quadruplet $\langle W', R', V', w_0 \rangle$ où :*

(i) $W' = \{w_0\} \cup \{\sigma = w_0 a_1 w_1 a_2 \cdots a_{n-1} w_{n-1} a_n w_n \mid (w_0, w_1) \in R_{a_1}, \ldots, (w_{n-1}, w_n) \in R_{a_n}\}$

(ii) $R' = \{R'_a \mid a \in \mathbb{A}\}$

(iii) $R'_a = \{(\sigma, \sigma a w) \mid \sigma, \sigma a w \in W'\}$

(iv) $V'_{w_0}(p) = V_{w_0}(p)$

(v) $V'_{\sigma a w}(p) = V_w(p)$

Afin de différencier plus aisément les modèles de Kripke des modèles arborescents, nous utilisons une fonction arborescente τ qui associe à tout modèle de Kripke minimal M le modèle arborescent qui lui correspond.

Définition 6.14 (Fonction arborescente)**.**
Soit $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ un modèle de Kripke minimal. Nous désignons par $\tau(M)$ le modèle arborescent correspondant à M.

Dans la suite, nous désignons par $\tau_n(M)$ le modèle arborescent de profondeur n correspondant à M. Formellement, $\tau_n(Model) = (\tau(()M) \upharpoonright n)$.

Les modèles arborescents A, A' et A'' représentés sur la figure 6.2 correspondent aux modèles représentés sur la figure 6.1. Ces modèles sont représentés avec une profondeur modale de 2.

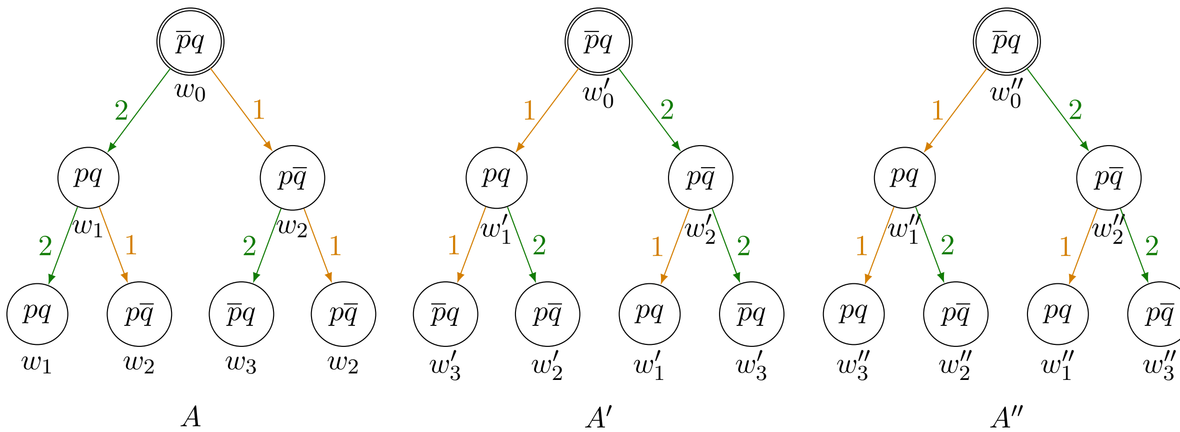


Figure 6.2 – Trois modèles arborescents, correspondant aux modèles de la figure 6.1

Il est facile de montrer que tout modèle arborescent est bisimilaire au modèle minimal qui lui correspond.

Proposition 6.9.
Soit $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ un modèle de Kripke minimal. $\tau(M)$ est bisimilaire à M.

Démonstration. Soient $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ un modèle de Kripke minimal et $M' = \langle W', R', V', w_0 \rangle$ le modèle arborescent correspondant à M.

Soit $Z \subseteq W \times W'$, telle que $Z = \{(w_0, w_0)\} \cup \{(w, \sigma a w') \mid \exists \sigma' \in W' \text{ tel que } \sigma = \sigma' a_i w\}$. Par construction de M', il est clair que Z est une bisimulation. Ainsi, $M \leftrightarrows M'$. □

Supposons que nous voulions mesurer la distance entre M et M'. Dans un premier temps, nous générons les modèles arborescents correspondant A et A'. Nous utilisons la distance de Hamming h pour comparer les (valuations des) mondes. Pour calculer la distance entre les modèles arborescents, nous commençons par mesurer la distance entre leurs racines. Nous ajoutons ensuite cette valeur à la somme des distances entre les sous-arbres de A et A' comme suit : pour chaque sous-arbre α de A, nous cherchons récursivement le sous-arbre α' de A' tel que la distance entre α et α' est la plus petite possible. Une fois toutes les paires (α, α') trouvées, nous sommons ces distances intermédiaires en appliquant un facteur d'atténuation $\gamma \in]0; 1]$. Notons qu'un α ne peut correspondre qu'à un seul α'. Dans le cas où un sous-arbre α de M n'a pas de sous-arbre α' de M' avec qui il peut correspondre, nous le faisons correspondre avec un sous-arbre fictif π, qui est à une distance d_{max} de α, où d_{max} est la distance de Hamming maximale entre deux valuations.

Nous utilisons donc cette notion de modèle arborescent pour définir une nouvelle famille de distances $\mathcal{D}_m^{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$ entre modèles de Kripke contenant au plus m mondes.

Définition 6.15 (Distance et modèles arborescents)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w \rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$ deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes et $\gamma \in]0; 1]$.

$$d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = h(w, w') \cdot \gamma^{\text{height}_M(w)} + \sum_{a \in \mathbb{A}} d\mathcal{T}_m\pi_a^\gamma(\tau_m\mu(M), \tau_m\mu(M'))$$

où

$$h(w, w') = \begin{cases} d_{max} & si\ w = \pi\ ou\ w' = \pi \\ d_h(V_w, V'_{w'}) & sinon \end{cases}$$

$$d\mathcal{T}_n\pi_a^\gamma(\tau(\mu(M)), \tau(\mu(M'))) = \begin{cases} 0 & si\ n = 0 \\ \min\limits_{b \in B_a^{w,w'}} \Big(\sum\limits_{(v,v') \in b} d\mathcal{T}_{n-1}\pi^\gamma \begin{pmatrix} \langle W, R, V, v \rangle, \\ \langle W', R', V', v' \rangle \end{pmatrix} \Big) & sinon \end{cases}$$

$$B_a^{w,w'} = \{b | b \in \mathcal{P}((R_a(w) \cup \{\pi\}) \times (R'_a(w')) \cup \{\pi\})\ et\ R_a(w) \subseteq dom(b)\ et\ R'_a(w') \subseteq img(b)\}$$

Nous pouvons illustrer cette distance sur un exemple simple. Considérons les modèles arborescents A, A' et A'' de la figure 6.2. Pour cet exemple, nous prenons $\gamma = 1/2$. Dans ce cas, nous avons $d\mathcal{T}_2\pi^\gamma(M, M') = 0 + (1 + 1) \cdot \frac{1}{2} + (2 + 2 + 1 + 1) \cdot \frac{1}{4} = 2.5$, $d\mathcal{T}_2\pi^\gamma(M, M'') = 0 + (1 + 1) \cdot \frac{1}{2} + (1 + 2 + 1 + 1) \cdot \frac{1}{4} = 2.25$ et $d\mathcal{T}_2\pi^\gamma(M', M'') = 0 + (0 + 0) \cdot \frac{1}{2} + (1 + 0 + 0 + 2) \cdot \frac{1}{4} = 0.75$.

Notons que nous avons donné ici les distances entre des arbres de profondeur 2 afin d'illustrer le comportement de cette distance. Si nous voulons avoir des résultats plus « intéressants » (pour, par exemple, comparer cette distance avec d'autres), nous utiliserons des modèles arborescents, correspondant à des modèles de Kripke contenant au plus m mondes, de profondeur m.

La propriété suivante montre qu'il est possible de trouver un facteur d'atténuation assez petit afin que la distance $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ puisse satisfaire **(D5)**. De plus, puisque nous comparons les valuations des mondes causant la différence entre les modèles, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D7)** et, par conséquent, **(D6)**.

Proposition 6.10.

1. *Pour tout facteur d'atténuation γ, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D1)-(D4)**.*
2. *Il existe $\lambda \in]0;1]$ tel que pour tout $\gamma < \lambda$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D5)**.*
3. *Pour tout facteur d'atténuation γ, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D6)** et **(D7)**.*

Démonstration. Considérons trois modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$, $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ et $M'' = \langle W'', R'', V'', w''\rangle$ contenant au plus m mondes.

Nous montrons que $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D1)**. Supposons que $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = 0$. D'après la définition de $d\mathcal{T}\pi^\gamma$, $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} h(w, w') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(w)} = 0 \Leftrightarrow V_w = V'_{w'} \text{ puisque } \gamma^{\mathrm{height_M}(w)} \neq 0 \\ d\mathcal{T}_m\pi^\gamma_a(\tau(M), \tau(M')) = 0, \forall i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{A}, \\ \qquad \begin{cases} \text{si } \exists v \in R_a(w), \text{ alors } \exists v' \in R'_a(w') \text{ tel que} \\ \qquad h(v, v') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)} = 0 \\ \text{si } \exists v' \in R'_a(w'), \text{ alors } \exists v \in R_a(w) \text{ tel que} \\ \qquad h(v, v') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Nous avons donc $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = 0$ si et seulement si $M \leftrightarrows M'$. Ainsi $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D1)**.

Nous montrons que $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D2)**. Notons que, lorsque la distance $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M')$ est calculée, nous pouvons utiliser la relation b de chaque niveau de l'arbre afin de construire une nouvelle relation $\beta \subseteq W \times W'$ pour le modèle entier. Notons également que $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = \sum_{(v,v')\in\beta} h(v, v') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)}$, où β est cette nouvelle relation. Soient $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = \sum_{(v,v')\in\beta_1} h(v, v') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)}$ et $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M', M) = \sum_{(v',v)\in\beta_2} h(v', v) \cdot \gamma^{\mathrm{height_{M'}}(v')}$. Via une induction sur la taille de l'arbre, nous montrons que, de X à Y la relation b est la même que celle de Y à X. Ainsi, $\beta_1 = \beta_2$; de plus, h (la distance de Hamming) est symétrique, ce qui signifie que $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = \sum_{(v,v')\in\beta_1} h(v, v') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)} = \sum_{(v',v)\in\beta_2} h(v', v) \cdot \gamma^{\mathrm{height_{M'}}(v')} = d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M', M)$. Ainsi $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D2)**.

Nous montrons que $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D3)**. Soient $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') = \sum_{(v,v')\in\beta_1} h(v, v') \cdot \gamma^{\mathrm{height_{M'}}(v)}$ et $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M', M'') = \sum_{(v',v'')\in\beta_2} h(v', v'') \cdot \gamma^{\mathrm{height_{M'}}(v')}$ tels que $\beta_1 = \{(v, v')|v \in W \cup \{\varepsilon\}$ et $v' \in W' \cup \{\varepsilon\}\}$ et $\beta_2 = \{(v', v'')|v' \in W' \cup \{\varepsilon\}$ et $v'' \in W'' \cup \{\varepsilon\}\}$. Soit $\beta_3 = \{(v, v'')|\exists v' \in W' \cup \varepsilon$ tel que $(v, v') \in \beta_1$ et $(v', v'') \in \beta_2\}$. Notons que $\sum_{(v,v'')\in\beta_3} h(v, v'') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)} \geq d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M'')$, puisque β_3 n'est pas nécessairement la meilleure relation possible pour minimiser la somme. De plus, nous avons $h(v, v'') \leq h(v, v') + h(v', v'')$, pour chaque $v \in W \cup \{\varepsilon\}, v' \in W' \cup \{\varepsilon\}, v'' \in W'' \cup \{\varepsilon\}$, puisque h est sous-additive. Ainsi, $\sum_{(v,v'')\in\beta_3} h(v, v'') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)} \leq \sum_{(v,v')\in\beta_1} h(v, v') \cdot \gamma^{\mathrm{height_M}(v)} + \sum_{(v',v'')\in\beta_2} h(v', v'') \cdot \gamma^{\mathrm{height_{M'}}(v')}$. D'où $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M'') \leq d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') + d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M', M''))$.

Nous montrons que $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D4)**. h étant non-négative, il est facile de voir qu'il en est de même pour $\sum_{(v,v')\in\beta} h(v, v')$. Ainsi $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ est non-négative.

Nous montrons qu'il existe un $\lambda \in]0;1]$ tel que, pour tout $\gamma < \lambda$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D5)**. Soient M_1 et M_2 deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes. Les modèles arborescent A_1

et A_2 correspondant à ces modèles de Kripke contiennent au plus $(m^m + 1) \cdot |\mathbb{A}|$ mondes. En fixant un $\lambda = \frac{1}{(m^m+1)\cdot|\mathbb{A}|\cdot d_{max}}$, nous nous assurons que, pour tout $\gamma < \lambda$, une différence à une profondeur p ne pourra pas être compensée par des erreurs à une profondeur d'au moins $p+1$. En effet, avec ce facteur d'atténuation, même si deux modèles M et M' diffèrent d'une variable propositionnelle de la valuation du monde pointé et si les deux modèles M et M'' diffèrent complètement, excepté pour le monde pointé, (toutes les variables propositionnelles et toutes les valuations de tous les mondes, excepté le monde pointé, ont une valeur de vérité différente), ce γ assure que $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M') > d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M'')$. Ainsi $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D5)**.

Nous montrons que $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait **(D7)**. Soient deux valuations ϑ_1 et ϑ_2, et deux modèles de Kripke M_1 et M_2 tels que $M_1 = M(\vartheta_1 \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta_2 \to v)$ et $d(\vartheta_1, V_v) < d(\vartheta_2, V_v)$. Soit $\mathrm{height}_{\mathrm{M}}(v) = p$.
Nous avons $(m-p) \times d(\vartheta_1, V_v) < (m-p) \times d(\vartheta_2, V_v)$. De plus, nous avons $(m-p) \times d(\vartheta_1, V_v) \times \sum_{i=p+1}^{m}(\gamma^{(i-1)}) < (m-p) \times d(\vartheta_2, V_v) \times \sum_{i=p+1}^{m}(\gamma^{(i-1)})$. Par conséquent, la définition de $d\mathcal{T}\pi^\gamma$,nous permet de conclure que $d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M_1) < d\mathcal{T}_m\pi^\gamma(M, M_2)$.

Le fait que $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfasse **(D7)** nous permet de conclure, via la proposition 6.1, que $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ satisfait également **(D6)**. □

Nous avons donc une nouvelle (famille de) distance(s) pouvant satisfaire toutes les propriétés attendues. Nous introduisons une dernière (famille de) distance(s) exploitant la notion d'ensembles de mondes.

6.3.3 Distances via les ensembles de mondes

Nous définissons maintenant une famille de distances $\mathcal{D}_m^{d\mathcal{WS}_{d_{d_V}}^\gamma}$, entre modèles de Kripke contenant au plus m mondes, basées sur une distance d_{d_V} entre ensembles de mondes, qui est elle-même basée sur une distance propositionnelle d_V entre les valuations associées aux mondes. Ces deux distances d_{d_V} et d_V sont supposées satisfaire les propriétés usuelles de distance (l'indiscernabilité, la symétrie, la sous-additivité et la non-négativité). L'idée est de calculer, pour chaque profondeur p, la distance entre les ensembles (de valuations) de mondes à la profondeur p. Nous appliquons également un facteur d'atténuation $\gamma \in]0;1]$ à chacune des distances intermédiaires.

Définition 6.16 (Distance et ensembles de mondes)**.**
Soient $M = \langle W, R, V, w\rangle$ et $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ deux modèles de Kripke contenant au plus m mondes, d_V une distance propositionnelle, d_{d_V} une distance entre ensembles de mondes et $\gamma \in]0;1]$. Nous désignons par $d\mathcal{WS}_{d_{d_V}}^\gamma(M, M')$ la distance entre M et M', définie comme suit :
$d\mathcal{WS}_{d_{d_V}}^\gamma(M, M') = \mathcal{F}(\sigma_0(\mu(M), \mu(M'))), \ldots, \sigma_n(\mu(M), \mu(M')))$ où :

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_0(M, M') & = & d_{d_V}(\{w\}, \{w'\}) \\
\sigma_1(M, M') & = & avg\{d_{d_V}(R_a(w), R'_a(w')) \mid a \in \mathbb{A}\} \\
& \vdots & \\
\sigma_m(M, M') & = & avg\{d_{d_V}(R_{a_{i_1}} \circ \cdots \circ R_{a_{i_n}}(w), R'_{a_{i_1}} \circ \cdots \circ R'_{a_{i_n}}(w')) \mid a_{i_k} \neq a_{i_{k+1}} \in \mathbb{A}\} \\
\mathcal{F}(\sigma_0, \ldots, \sigma_n) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{m}(\sigma_i \cdot \gamma^i)
\end{array}$$

Pour cette (famille de) distance(s), nous avons donc besoin d'une distance entre ensembles de mondes. Nous avons choisi la distance de Hausdorff [Hausdorff 1914] que nous avons légèrement adaptée aux modèles de Kripke.

Définition 6.17 (Distance de Hausdorff)**.**
Soient W et W' deux ensembles finis non vides de mondes. Nous définissons la distance de Hausdorff entre W et W' comme suit :

$$\mathcal{H}(W,W') = \max\begin{pmatrix}\max(\min(h(w,w')|w' \in W')|w \in W) \\ \max(\min(h(w,w')|w \in W)|w' \in W')\end{pmatrix}$$

Dans la suite, nous désignons par $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{\mathcal{H}}$ la distance définie via la définition 6.16 utilisant cette distance de Hausdorff entre ensembles de mondes, et $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{\mathcal{D}}$ la distance définie via cette même définition, utilisant la distance drastique D entre ensembles de mondes.

Nous illustrons le comportement de cette distance sur un exemple simple. Considérons une nouvelle fois les trois modèles M, M' et M'' de la figure 6.1. Pour cet exemple, nous prenons $\gamma = 1/2$; dans ce cas, nous avons $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{\mathcal{H}}(M,M') = 0 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 0.9375$, $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{\mathcal{H}}(M',M'') = 0 + 0 \cdot 1/2 + 3/2 \cdot 1/4 + 3/2 \cdot 1/8 + 3/2 \cdot 1/16 = 0.65625$ et $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{\mathcal{H}}(M,M'') = 0 + 1/2 + 3/2 \cdot 1/4 + 3/2 \cdot 1/8 + 3/2 \cdot 1/16 = 1.15625$.

La propriété suivante montre qu'il est possible de trouver un facteur d'atténuation assez petit tel que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfasse **(D5)** pour toute distance entre ensembles de mondes. De plus, comme nous prenons en considération les valuations des mondes en utilisant une distance entre ensembles de mondes d_{d_V} basée sur une distance propositionnelle non drastique d_V, $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait également **(D7)** et, par conséquent, **(D6)**. Ainsi, si nous utilisons une distance entre ensembles de mondes d_D basée sur une distance propositionnelles drastique D, $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{\mathcal{D}}$ ne satisfait ni **(D7)** ni **(D6)**. En effet, dans ce cas, les différences entre les valuations ne sont pas prises en compte.

Proposition 6.11.

1. *Pour toute distance propositionnelle d_V et tout facteur d'atténuation γ, $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D1)-(D4)**.*

2. *Pour toute distance propositionnelle d_V, il existe un $\lambda \in]0;1]$ tel que, pour tout $\gamma < \lambda$, $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D5)**.*

3. *Pour toute distance propositionnelle non drastique d_V, $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D6)** et **(D7)**.*

Démonstration. Considérons trois modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w\rangle$, $M' = \langle W', R', V', w'\rangle$ $M'' = \langle W'', R'', V'', w''\rangle$ contenant au plus m mondes.

Nous montrons que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D1)**. Par définition, nous avons $M \leftrightarrows M'$ si et seulement si, il existe une relation $Z \subseteq W \times W'$ telle que $(w,w') \in Z$ et pour tout $(v,v') \in Z$:

1. $V_v = V'_{v'}$, et

2. s'il existe un monde $u \in W$ tel que $(v,u) \in R_a$, alors il existe un monde $u' \in W'$ tel que $(v',u') \in R'_a$ et $(u,u') \in Z$; et

3. s'il existe un monde $u' \in W'$ tel que $(v',u') \in R'_a$, alors il existe un monde $u \in W$ tel que $(v,u) \in R_a$ et $(u,u') \in Z$.

Notons que nous supposons que d_V et d_{d_V} satisfont la propriété d'indiscernabilité. Ainsi, nous pouvons déduire des trois points ci-dessus que $d(\{w\},\{w'\}) = 0$ et pour tout agent a, $d(R_a(w),R'_a(w'))$ $= 0$. De la même manière, pour tous agents $a_k \neq a_{k+1}$, $d(R_{a_0} \circ \cdots \circ R_{a_n}(w), R'_{a_0} \circ \cdots \circ R'_{a_n}(w') = 0$.

Ce qui nous donne, $\mathcal{F}(\sigma_0(M,M'),\ldots,\sigma_n(M,M')) = 0 = d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M')$ et nous permet de conclure.

Nous montrons que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D2)**. Le fait que d_{d_V} soit symétrique nous indique que, pour tous ensembles de mondes Ω et Ω', $d_{d_V}(\Omega,\Omega') = d_{d_V}(\Omega',\Omega)$. Ainsi, pour tous ensembles de mondes Ω et Ω', $\sum d_{d_V}(\Omega,\Omega') = \sum d_{d_V}(\Omega',\Omega)$. Par conséquent, $\mathcal{F}(\sigma_0(M,M'),\sigma_1(M,M'),\ldots,\sigma_n(M,M')) = \mathcal{F}(\sigma_0(M',M),\sigma_1(M',M),\ldots,\sigma_n(M',M))$.
D'où $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M') = d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M',M)$.

Nous montrons que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D3)**. Le fait que d_{d_V} soit sous-additive nous indique que, $\sum\limits_{a\in\mathbb{A}} d_{d_V}(R_a(w),R''_a(w'')) \leq \sum\limits_{a\in\mathbb{A}} [d_{d_V}(R_a(w),R'_a(w')) + d_{d_V}(R'_a(w'),R''_a(w''))]$. Dans ce cas $\sigma_0(M,M'')) \leq \sigma_0(M,M') + \sigma_0(M',M'')$. De la même manière, $\forall i$, $\sigma_i(M,M'') \leq \sigma_i(M,M') + \sigma_i(M',M'')$. Ainsi, nous avons clairement $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M'') \leq d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M') + d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M',M'')$.

Le fait que d_{d_V} soit non-négative, nous permet de conclure directement que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D4)**.

Nous montrons qu'il existe un $\lambda \in (0;1]$ tel que, pour tout $\gamma < \lambda$, $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D5)**. Considérons deux modèles de Kripke M et M' contenant au plus m mondes. Soient $d^{min}_{d_V} = min(d_{d_V}(\Omega,\Omega') > 0 | \Omega \subseteq W$ et $\Omega' \subseteq W')$ et $d^{max}_{d_V} = max(d(\Omega,\Omega') | \Omega \subseteq W$ et $\Omega' \subseteq W')$. En fixant $\lambda = \frac{d^{min}_{d_V}}{(m+1)\cdot d^{max}_{d_V}}$, nous nous assurons que, pour tout $\gamma < \lambda$, une différence à une profondeur p ne pourra pas être compensée par des erreurs à une profondeur d'au moins $p+1$. En effet, avec ce facteur d'atténuation, même si deux modèles M et M' diffèrent d'une variable propositionnelle de la valuation du monde pointé et si les deux modèles M et M'' diffèrent complètement, excepté pour le monde pointé, (toutes les variables propositionnelles et toutes les valuations de tous les mondes, excepté le monde pointé, ont une valeur de vérité différente), ce γ assure que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M') > d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M'')$. Ainsi $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D5)**.

Nous montrons que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait **(D7)**. Considérons deux valuations ϑ_1 et ϑ_2, deux modèles de Kripke M_1 et M_2 contenant au plus m mondes et une distance entre ensembles de mondes d_{d_V} basée sur une distance propositionnelle non drastique d_V. Supposons que $M_1 = M(\vartheta_1 \to v)$ et $M_2 = M(\vartheta_2 \to v)$ tels que $d_V(V_v,\vartheta_1) < d_V(V_v,\vartheta_2)$. Soit $\mathrm{height_M}(v) = p$.

Dans ce cas, nous avons $\sigma_i(M,M_1) = 0 = \sigma_i(M,M_2)$, pour tout $i \neq p$. De plus, nous avons, pour tout $j \geq p$, $\sigma_j(M,M_1) = avg\{d_{d_V}(\Omega,\Omega_1) | \Omega = R_{a_{i_1}} \circ \cdots \circ R_{a_{i_j}}(w), \Omega_1 = R_{a_{i_1}} \circ \cdots \circ R_{a_{i_j}}(w)$ et $a_{i_k} \neq a_{i_{k+1}} \in \mathbb{A}\}$ et $\sigma_p(M,M_2) = avg\{d_{d_V}(\Omega,\Omega_2) | \Omega = R_{a_{i_1}} \circ \cdots \circ R_{a_{i_j}}(w), \Omega_2 = R_{a_{i_1}} \circ \cdots \circ R_{a_{i_j}}(w)$ et $a_{i_k} \neq a_{i_{k+1}} \in \mathbb{A}\}$. Si $v \notin \Omega$, alors $d_{d_V}(\Omega,\Omega_1) = 0 = d_{d_V}(\Omega,\Omega_2)$. Si $v \in \Omega$, alors, d_{d_V} étant basée sur d_V, nous pouvons supposer qu'il existe un $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $d_{d_V}(\Omega,\Omega_1) = k \cdot d_V(V_v,\vartheta_1) < k \cdot d_V(V_v,\vartheta_2) = d_{d_V}(\Omega,\Omega_2)$. Dans ce cas, nous avons $\sigma_j(M,M_1) < \sigma_j(M,M_2)$ ce qui nous permet de conclure que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M_1) < d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}(M,M_2)$.

Le fait que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfasse **(D7)** nous permet de conclure que, via la proposition 6.1, que $d\mathcal{WS}^{\gamma}_{d_{d_V}}$ satisfait également **(D6)**. □

Ainsi, nous avons une troisième (famille de) distance(s) pouvant satisfaire toutes les propriétés attendues. Nous allons maintenant comparer toutes ces distances.

6.4 Comparaison des distances

Nos (familles de) distances capturent différentes intuitions sur la façon dont deux modèles de Kripke sont proches. Une question clé est de déterminer à quel point ces distances sont fines.

Formellement, nous définissons la notion de raffinement suivante :

Définition 6.18 (Raffinement)**.**
Soient d_1 et d_2 deux distances. d_1 est au moins aussi fine *que d_2 (noté $d_1 \geq_f d_2$) si et seulement si, pour tout a, b, c, si $d_1(a, b) < d_1(a, c)$, alors $d_2(a, b) < d_2(a, c)$ et si $d_1(a, b) = d_1(a, c)$, alors $d_2(a, b) = d_2(a, c)$.*

En d'autres termes, une distance d_1 affine une autre distance d_2 si elle permet d'obtenir une distinction plus fine entre les modèles. Donc, si une distance peut être affinée par une autre, cela peut être considéré comme un défaut de la première, qui ne fait pas complètement la discrimination attendue.

Nous pouvons montrer qu'il n'existe pas de telle relation de raffinement entre les distances que nous avons introduites.

Proposition 6.12.
$d\mathcal{NB}$, $d\mathcal{EB}_h$, $d\mathcal{ENB}_h^\gamma$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$, $d\mathcal{WS}_\mathcal{D}^\gamma$ et $d\mathcal{WS}_\mathcal{H}^\gamma$ sont deux à deux incomparables par rapport à $\geq_f$.

Afin de prouver cette proposition, considérons l'exemple suivant :

Exemple 6.1 (Preuve de la proposition 6.12)**.**
Considérons les quatre modèles de la figure 6.3.

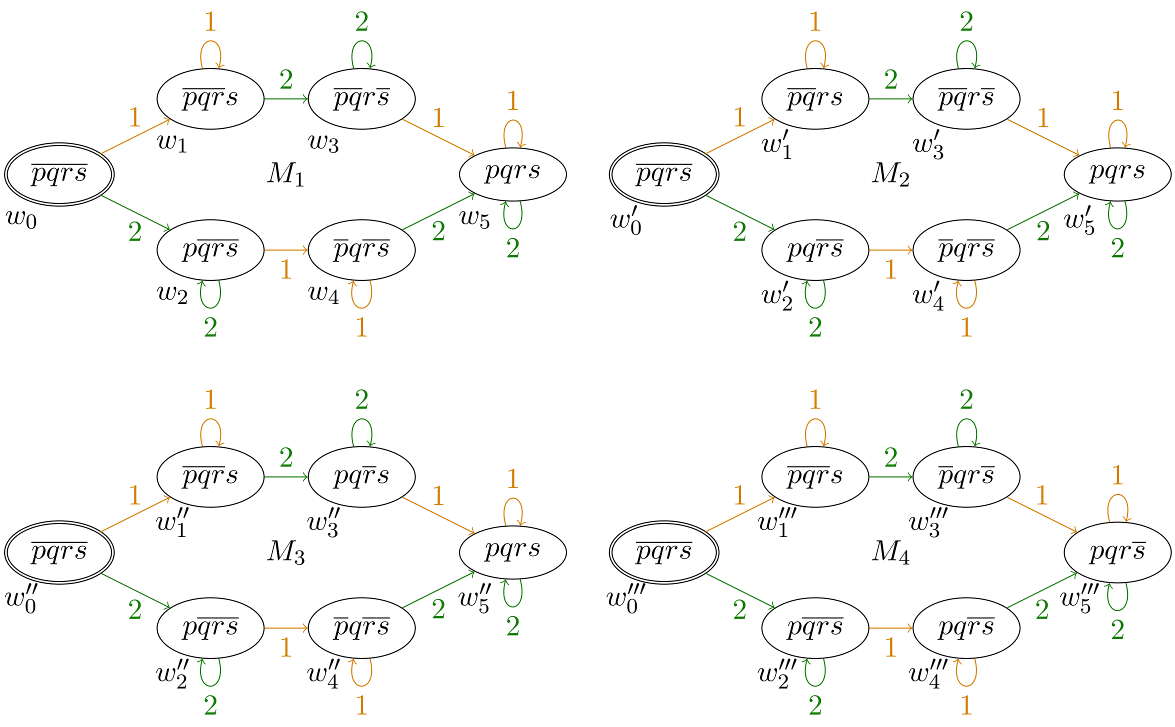


FIGURE 6.3 – Quatre modèles de Kripke

Les différences entre les modèles M_1 et M_2 sont dans les mondes w'_1 et w'_2 (height $= 1$). Dans le premier modèle, l'agent 1 croit $\overline{p}\overline{q}\overline{r}s$ et l'agent 2 croit $p\overline{q}\overline{r}\overline{s}$, et dans le deuxième modèle, l'agent 1 croit $\overline{p}\overline{q}rs$ et l'agent 2 croit $pq\overline{r}\overline{s}$. La différence entre les modèles M_1 et M_3 est dans le monde w''_3 (height $= 2$). Les différences entre les modèles M_1 et M_4 sont dans les mondes w'''_3, w'''_4 et w'''_5 (height $= 2$). Le tableau 6.1 présente les distances entre ces modèles.

$\gamma = 1/2$	M_1, M_2	M_1, M_3	M_1, M_4	M_2, M_3	M_2, M_4	M_3, M_4
$d\mathcal{NB}$	0,800	0,600	0,600	0,800	0,800	0,600
$d\mathcal{EB}_h$	1,000	4,000	1,000	4,000	1,000	3,000
$d\mathcal{ENB}_h^\gamma$	0,938	1,750	0,438	2,250	0,938	1,312
$d\mathcal{T}\pi^\gamma$	2,500	1,000	0,500	3,500	3,000	1,000
$d\mathcal{WS}_\mathcal{D}^{\gamma\ 7}$	0,500	0,125	0,469	0,625	0,969	0,469
$d\mathcal{WS}_\mathcal{H}^\gamma$	0,500	0,500	0,469	1,000	0,969	0,719

Table 6.1 – Distances entre les modèles de la figure 6.3

*Nous pouvons vérifier que $d\mathcal{NB}$, $d\mathcal{EB}_d$, $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$, $d\mathcal{WS}_\mathcal{D}^\gamma$ et $d\mathcal{WS}_\mathcal{H}^\gamma$ n'ordonnent pas ces quatre modèles de la même manière. Notons également que le facteur d'atténuation $\gamma = 1/2$ n'est pas assez petit pour assurer que la propriété **(D5)** soit satisfaite.*

Nous pouvons également comparer les (familles de) distances qui nous introduisons en nous concentrant sur les propriétés supplémentaires qu'elles satisfont. Le tableau 6.2 résume les résultats obtenus pour chaque distance. Pour chaque propriété, les symboles ont la signification suivante :

- $\surd$ satisfait par la distance
- $\surd^\gamma$ satisfait pour un facteur d'atténuation assez petit
- $\surd^\#$ satisfait si une distance propositionnelle non drastique est utilisée
- $\times$ non satisfait

	$d\mathcal{NB}$	$d\mathcal{EB}_d$	$d\mathcal{ENB}_d^\gamma$	$d\mathcal{T}\pi^\gamma$	$d\mathcal{WS}_{d_{d_V}}^\gamma$
(D5)	$\surd$	$\times$	$\surd^\gamma$	$\surd^\gamma$	$\surd^\gamma$
(D6)	$\times$	$\surd^\#$	$\surd^\#$	$\surd$	$\surd^\#$
(D7)	$\times$	$\surd^\#$	$\surd^\#$	$\surd$	$\surd^\#$

Table 6.2 – Distances et propriétés qu'elles satisfont

Ces cinq (familles de) distances étant incomparables pour le raffinement, trois d'entre elles ($d\mathcal{ENB}_d^\gamma$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ et $d\mathcal{WS}_{d_{d_V}}^\gamma$) semblent néanmoins meilleures si nous regardons les propriétés qu'elles satisfont.

6.5 Utilisation des distances introduites dans le cadre de la révision de croyances

Nous montrons maintenant comment les familles de distances introduites jusqu'ici peuvent être exploitées pour réviser des modèles de Kripke, ou, plus généralement, des ensembles finis de modèles de Kripke.

Soient une formule α de $\mathcal{L}$ telle que $\deg(\alpha) = p$ et $\mathcal{M}'$ un ensemble fini de modèles de Kripke (finis, pointés, KD45$_n$ contenant au plus m' mondes). Chaque distance d d'une famille $\mathcal{D}_m^d$ est définie sur $\mathcal{M}$, un ensemble fini de modèles finis de Kripke contenant au plus m mondes tel que $m = max(m', |\mathbb{A}|^p \cdot |\mathbb{P}|^{p+1})$. Dans ce cas, nous nous assurons de pouvoir comparer tout les modèles de $\mathcal{M}$ aux modèles de α.

Nous désignons par $Mod(\alpha)$ l'ensemble des modèles de Kripke M qui satisfont α. La révision de $\mathcal{M}$ par α est un ensemble de modèles de Kripke, noté $\mathcal{M} \circ \alpha$. Nous attendons de l'opérateur de révision $\circ$ qu'il satisfasse un ensemble de postulats de rationalité, adaptation de ceux proposés par Katsuno et Mendelzon dans le cas de la logique propositionnelle classique [Katsuno & Mendelzon 1992] :

($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$1) $\mathcal{M} \circ \alpha \subseteq Mod(\alpha)$

($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$2) si $\mathcal{M} \cap Mod(\alpha) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{M} \circ \alpha = \mathcal{M} \cap Mod(\alpha)$

($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$3) si $Mod(\alpha) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{M} \circ \alpha \neq \emptyset$

($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$4) si $Mod(\alpha) = Mod(\beta)$, alors $\mathcal{M} \circ \alpha = \mathcal{M} \circ \beta$

($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$5) $(\mathcal{M} \circ \alpha) \cap Mod(\beta) \subseteq \mathcal{M} \circ (\alpha \wedge \beta)$

($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$6) si $(\mathcal{M} \circ \alpha) \cap Mod(\beta) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{M} \circ (\alpha \wedge \beta) \subseteq (\mathcal{M} \circ \alpha) \cap Mod(\beta)$

Dans le cas de la logique propositionnelle finie, Katsuno et Mendelzon définissent un théorème de représentation pour caractériser tout opérateur de révision satisfaisant les propriétés attendues. Ce théorème est basé sur le concept d'assignement fidèle. Il est intéressant d'adapter ce concept à notre cadre, afin d'obtenir des conditions suffisantes pour assurer la rationalité d'un opérateur de révision :

Définition 6.19 (Assignement fidèle)**.**
Un assignement fidèle *est une application qui associe à tout ensemble fini de modèles de Kripke $\mathcal{M}$ un pré-ordre total $\leq_{\mathcal{M}}$ sur l'ensemble de modèles de Kripke, tel que :*

- *si $M_1 \in \mathcal{M}$ et $M_2 \in \mathcal{M}$, alors $M_1 \simeq_{\mathcal{M}} M_2$;*
- *si $M_1 \in \mathcal{M}$ et $M_2 \notin \mathcal{M}$, alors $M_1 <_{\mathcal{M}} M_2$;*
- *si $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$, alors $\leq_{\mathcal{M}_1} = \leq_{\mathcal{M}_2}$*

Nous pouvons maintenant définir un théorème de représentation pour les opérateurs de révision dans notre cadre :

Proposition 6.13.
*Soit $\circ$ un opérateur de révision qui associe à tout ensemble fini de modèles de Kripke $\mathcal{M}$ et toute formule α de $\mathcal{L}$, un ensemble de modèles de Kripke. S'il existe un assignement fidèle qui associe à chaque ensemble fini de modèles de Kripke $\mathcal{M}$ un pré-ordre total nœthérien $\leq_{\mathcal{M}}$ tel que $\mathcal{M} \circ \alpha = min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$, alors $\circ$ satisfait les postulats **($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$1) – ($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$6)**.*

Démonstration. Cette preuve est identique à la preuve du théorème de représentation de Katsuno et Mendelzon [Katsuno & Mendelzon 1992] mise à part le fait que les interprétations sont remplacées par des ensembles finis de modèles de Kripke (finis, pointés, KD45$_n$) et les formules propositionnelles sont remplacées par des formules de $\mathcal{L}$.

Supposons qu'il existe un assignement fidèle qui associe $\mathcal{M}$ à un pré-ordre total nœthérien $\leq_{\mathcal{M}}$. Nous définissons un opérateur de révision $\circ$ par $\mathcal{M} \circ \alpha = Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$. Nous montrons que $\circ$ satisfait les postulats **($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$1)-($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$6)**. Il est clair que le postulat **($\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$1)** est satisfait d'après la définition de l'opérateur $\circ$. Il est également clair que les postulats $\mathbf{(R_{\mathcal{M}}3)}$ et $\mathbf{(R_{\mathcal{M}}4)}$ sont satisfaits d'après la définition de l'assignement fidèle.

Nous montrons que $\mathbf{(R_{\mathcal{M}}2)}$ est satisfait. Il suffit de montrer que si $\mathcal{M} \cap Mod(\alpha)$ n'est pas vide, alors $\mathcal{M} \cap Mod(\alpha) = Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$. Les conditions de l'assignement fidèle nous donnent $\mathcal{M} \cap Mod(\alpha) \subseteq Min(Mod(\alpha), \leq_{\varphi})$. Pour prouver l'autre inclusion, nous supposons que $M \in Min(Mod(\alpha), \leq_{\varphi})$ et $M \notin \mathcal{M} \cap Mod(\alpha)$. Puisque $\mathcal{M} \cap Mod(\alpha)$ n'est pas vide, il existe un modèle de Kripke M' tel que $M' \in \mathcal{M} \cap Mod(\alpha)$. Ainsi, les conditions de l'assignement fidèle nous donnent $M \not\leq_{\mathcal{M}} M'$. De plus, $M' \leq_{\mathcal{M}} M$. D'où, M n'est pas minimal dans $Mod(\alpha)$ pour le pré-ordre $\leq_{\mathcal{M}}$. Nous avons donc une contradiction.

Nous montrons que les postulats $\mathbf{(R_{\mathcal{M}}5)}$ et $\mathbf{(R_{\mathcal{M}}6)}$ sont satisfaits. Il est clair que si $(\mathcal{M} \circ \alpha) \cap Mod(\beta)$ est vide, alors $\mathbf{(R_{\mathcal{M}}6)}$ est satisfait. Ainsi, il suffit de montrer que si $Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}}) \cap Mod(\beta)$ n'est pas vide, alors $Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}}) \cap Mod(\beta) = Min(Mod(\alpha \wedge \beta), \leq_{\mathcal{M}})$.

Supposons que $M \in Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}}) \cap Mod(\beta)$ et $M \notin Min(Mod(\alpha \wedge \beta), \leq_{\mathcal{M}})$. Puisque $M \in Mod(\alpha \wedge \beta)$, il existe un modèle de Kripke M' tel que $M' \in Mod(\alpha \wedge \beta)$ et $M' <_{\mathcal{M}} M$. Ceci contredit le fait que $M \in Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$. Par conséquent, nous obtenons $Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}}) \cap Mod(\beta) \subseteq Min(Mod(\alpha \wedge \beta), \leq_{\mathcal{M}})$.

Pour prouver l'autre inclusion, nous montrons que $M \in Min(Mod(\alpha \wedge \beta), \leq_{\mathcal{M}})$ et $M \notin Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}}) \cap Mod(\beta)$. Puisque $M \in Mod(\beta)$, nous avons $M \notin Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$. Comme nous supposons que $Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$ n'est pas vide, supposons que M' soit un modèle de Kripke de $Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}}) \cap Mod(\beta)$. Ainsi, nous avons $M' \in Mod(\alpha \wedge \beta)$. Puisque nous supposons que $M \in Min(Mod(\alpha \wedge \beta), \leq_{\mathcal{M}})$ et que $\leq_{\mathcal{M}}$ est total, nous avons $M \leq_{\mathcal{M}} M'$. Ainsi, d'après $M' \in Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$, nous avons $M \in Min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}}$. Nous avons donc une contradiction. $\square$

Étant donnée une distance d entre modèle de Kripke et un ensemble fini de modèles de Kripke $\mathcal{M}$, nous notons, pour tout modèle de Kripke M, $d(M, \mathcal{M}) = \underset{M' \in \mathcal{M}}{min}(d(M, M'))$ et $\text{height}(\mathcal{M}) = \underset{M \in \mathcal{M}}{max}(\text{height}(M))$. Puisque $\mathcal{M}$ est fini, nous pouvons assurer que $d(M, \mathcal{M})$ et $\text{height}(\mathcal{M})$ sont définis.

Sur cette base, nous pouvons facilement associer à d et $\mathcal{M}$, un pré-ordre-total $\leq_{\mathcal{M}}$ en posant $M_1 \leq_{\mathcal{M}} M_2$ si et seulement si $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$.

Afin de garantir le fait que $\leq_{\mathcal{M}}$ soit nœthérien, nous considérons deux conditions supplémentaires sur d :

Définition 6.20 (Condition du modèle minimal)**.**
Une distance d entre modèles de Kripke satisfait la condition du modèle minimal si et seulement si, pour tous modèles M_1 et M_2, $d(M_1, M_2) = d(\mu(M_1), \mu(M_2))$.

Définition 6.21 (Distance bornée)**.**
Une distance d est dîte bornée si et seulement si pour tout ensemble fini de modèles de Kripke $\mathcal{M}$, pour toute formule α de $\mathcal{L}$ telle que $\deg(\alpha) = k$, pour tout modèle de Kripke M_2 tel que

- *M_2 satisfait α ;*
- $\text{height}(M_2) > \max(k + 1, \text{height}(\mathcal{M}))$,

il existe un modèle de Kripke M_1 tel que

- *M_1 satisfait α ;*
- $\text{height}(M_1) \leq \max(k + 1, \text{height}(\mathcal{M}))$ *;*

- $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$.

Quand d est bornée, pour tout modèle $M_2 \in Mod(\alpha)$, nous savons qu'il existe un modèle $M_1 \in Mod(\alpha)$ tel que $height(M_1) \leq max(deg(\alpha)+1, height(\mathcal{M}))$ et $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$. Or, il n'existe qu'un nombre fini de modèle M_1 de $Mod(\alpha)$ (à la bisimulation près) vérifiant $height(M_1) \leq max(deg(\alpha)+1, height(\mathcal{M}))$, ceci assure que $\leq_{\mathcal{M}}$ est nœthérien.

Définition 6.22 (Opérateur de révision)**.**
Soient d une distance bornée vérifiant la condition du modèle minimal, $\mathcal{M}$ un ensemble fini de modèles de Kripke et α une formule de $\mathcal{L}$. Nous assignons à $\mathcal{M}$ un pré-ordre total nœthérien $\leq^d_{\mathcal{M}}$ sur les modèles de Kripke défini comme suit : $M_1 \leq^d_{\mathcal{M}} M_2$ si et seulement si $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$.
L'opérateur de révision $\circ_d$ associé à ce pré-ordre $\leq^d_{\mathcal{M}}$ est défini sémantiquement de la manière suivante :
$$\mathcal{M} \circ_d \alpha = min(Mod(\alpha), \leq^d_{\mathcal{M}}).$$

Ainsi, M est plus proche de $\mathcal{M}$ que M' quand sa distance avec les modèles de $\mathcal{M}$ est plus petite que la distance entre M' et les modèles de $\mathcal{M}$.

Proposition 6.14.
Soit d une distance bornée vérifiant la condition du modèle minimal. L'opérateur $\circ_d$ satisfait les postulats **(**$\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$***1*)-(**$\mathbf{R}_{\mathcal{M}}$***6*)**.

Démonstration. D'après la proposition 6.13, il suffit de montrer que l'assignement défini à la définition 6.22 est un assignement fidèle. Clairement, $\leq^d_{\mathcal{M}}$ est un pré-ordre total, puisque $\leq$ est un pré-ordre total. Nous allons montrer que celui-ci est fidèle.

- Si $M \in \mathcal{M}$ et $M' \in \mathcal{M}$, alors $d(M, \mathcal{M}) = d(M', \mathcal{M}) = 0$ d'après la définition de $\leq^d_{\mathcal{M}}$. Ainsi, nous ne pouvons avoir $M <^d_{\mathcal{M}} M'$.
- Si $M \in \mathcal{M}$ et $M' \notin \mathcal{M}$, alors $d(M, \mathcal{M}) = 0$ et $d(M', \mathcal{M}) = k$ avec $k > 0$. Ainsi $d(M, \mathcal{M}) < d(M', \mathcal{M})$, i.e. $M \leq^d_{\mathcal{M}} M'$.
- Finalement, si $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, alors, clairement, $\leq^d_{\mathcal{M}} = \leq^d_{\mathcal{M}'}$.

□

Nous pouvons maintenant déterminer si certaines des distances introduites vérifient les conditions posées. La proposition suivante nous assure que c'est le cas :

Proposition 6.15. *$d\mathcal{NB}$, $d\mathcal{EB}_d$, $d\mathcal{ENB}^\gamma_h$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ et $d\mathcal{WS}^\gamma_{\mathcal{H}}$ sont bornées et vérifient la condition du modèle minimal.*

Démonstration. Nous donnons la preuve pour $d\mathcal{ENB}^\gamma_h$ (les preuves pour les autres distances sont similaires à celle-ci).

Soient φ une formule de $\mathcal{L}$ telle que $\deg(\varphi) = k$, deux modèles de Kripke $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$ et $M_2 = \langle W_2, R_2, V_2, w^2_0 \rangle$ tels que $\text{height}(M) = k'$, M_2 satisfait φ et $\text{height}(M_2) > \max(k+1, k')$.

- Si $M \models \varphi$, il suffit de prendre $M_1 = M$.
- Sinon, soient $\kappa = \max(k+1, k')$ et M_1 la restriction de M à κ (noté $(M \restriction \kappa)$) définie comme d'habitude [Blackburn *et al.* 2001]. Ainsi $M_1 = \langle W_1, R_1, V_1, w^1_0 \rangle$ tel que $W_1 = \{w \in W_2 | \text{height}_(w) \leq \kappa\}$, $R_1 = R_2 \cap (W_1 \times W_1)$, $V_1 = \{V_w \in V_2 | w \in W_1\}$ et $w^1_0 = w^2_0$. Dans ce cas, M_1 est une copie de M_2 jusqu'à une profondeur modale de κ.

  Nous montrons que $d\mathcal{ENB}^\gamma_h$ est bornée. Pour ce faire, nous montrons que $d\mathcal{ENB}^\gamma_h(M, M_1) \leq d\mathcal{ENB}^\gamma_h(M, M_2)$. Nous avons deux cas à considérer :

1. Si toutes les différences entre M et M_2 sont à une profondeur supérieure à κ, alors, clairement, $M \models \varphi$ nous avons donc une contradiction.
2. Si certaines des différences entre M et M_2 sont à une profondeur inférieure à κ, alors, d'après la définition de $d\mathcal{ENB}^\gamma_h$, le fait que $\text{height}(M_1) < \text{height}(M_2)$ implique que $d\mathcal{ENB}^\gamma_h(M, M_1) < d\mathcal{ENB}^\gamma_h(M, M_2)$.

D'après la définition de ces distances, il est clair qu'elles satisfont la condition du modèle minimal. □

Par conséquent, nous pouvons définir des opérateurs de révision sur les ensembles de modèles de Kripke basés sur les cinq distances $d\mathcal{NB}$, $d\mathcal{EB}_d$, $d\mathcal{ENB}^\gamma_h$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ et $d\mathcal{WS}^\gamma_\mathcal{H}$. Comme mentionné plus tôt, les distances $d\mathcal{ENB}^\gamma_h$, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ et $d\mathcal{WS}^\gamma_\mathcal{H}$ apparaissent comme étant les plus intéressantes, puisqu'elles satisfont toutes les propriétés attendues **(D1)-(D7)**.

Nous allons maintenant illustrer les cinq opérateurs de révision correspondant à ces distances.

Exemple 6.2.
Considérons le modèle de Kripke de la figure 6.4. Dans cette situation, l'agent 1 croit $\neg x \wedge y$, l'agent 2 croit $x \wedge \neg y$ et l'agent 3 croit $x \wedge y$. L'agent 1 croit que les agents 2 et 3 croient $x \wedge y$, l'agent 2 croit que l'agent 1 croit $x \wedge y$ et que l'agent 3 croit $\neg x \wedge y$, l'agent 3 croit que les agents 1 et 2 croient $\neg x \wedge y$.

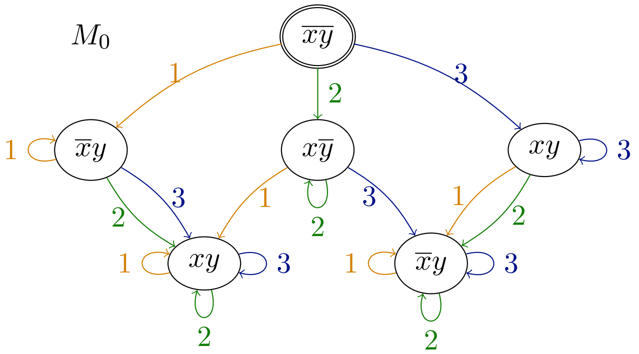


FIGURE 6.4 – Modèle de Kripke avant la révision

Penchons-nous sur le résultat de la révision de ce modèle par la formule $\alpha = x \wedge \mathrm{B}_1(\neg y) \wedge \mathrm{B}_2(\neg x) \wedge \mathrm{B}_3(\neg x \wedge \neg y)$ pour nos cinq opérateurs de révision $\circ_{d\mathcal{NB}}$, $\circ_{d\mathcal{EB}_d}$, $\circ_{d\mathcal{ENB}^\gamma_d}$, $\circ_{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$ et $\circ_{d\mathcal{WS}^\gamma_\mathcal{H}}$. Nous révisons donc ce modèle en changeant le monde réel et les croyances au sujet du monde réel des trois agents.

La figure 6.5 montre deux modèles de Kripke M_1 et M_2. Bien que les deux modèles M_1 et M_2 soient sélectionnés comme modèles du résultat de la révision (ainsi que plusieurs autres modèles que nous n'allons pas énumérer ici) par les opérateurs $\circ_{d\mathcal{NB}}$, $\circ_{d\mathcal{EB}_d}$ et $\circ_{d\mathcal{ENB}^\gamma_d}$, M_2 est le seul modèle issu de la révision de M_0 par α par les opérateurs de révision $\circ_{d\mathcal{WS}^\gamma_\mathcal{H}}$ et $\circ_{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$.

Considérons $\circ_{d\mathcal{NB}}$. Puisque la valuation du monde pointé doit changer pour satisfaire α, tous les modèles de α seront à égale distance de M_0. Considérons maintenant $\circ_{d\mathcal{EB}_d}$ et $\circ_{d\mathcal{ENB}^\gamma_d}$. Puisque la valuation du monde accessible par l'agent 3 doit changer complètement (de xy à $\overline{xy}$) pour satisfaire α, cette fois encore, tous les modèles de α seront à égale distance de M_0. Finalement, pour $\circ_{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$ et $\circ_{d\mathcal{WS}^\gamma_\mathcal{H}}$, comme les distances associées considèrent les valuations de chaque monde à chaque hauteur du modèle, le modèle le plus proche est celui où les seuls changements sont les valuations correspondantes. Ainsi, $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ et $d\mathcal{WS}^\gamma_\mathcal{H}$ apparaissent comme les distances les plus adéquates pour définir les opérateurs de révision à base de distance.

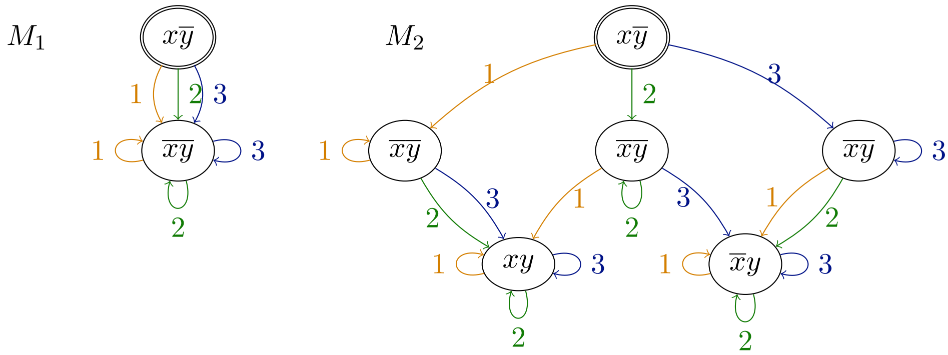


FIGURE 6.5 – Modèles de Kripke après la révision

Dans [AUCHER 2008] la révision modélisée est une révision subjective, ce qui signifie que la nouvelle information est reçue par l'un des agents du système (ainsi, après la révision, les modèles subjectifs de cet agent seront modifiés). La révision que nous avons définie dans ce chapitre est celle de l'observateur du système multi-agents, qui a une description du monde réel et des croyances des agents.

6.6 Conclusion

Nous avons introduit et étudié des distances entre modèles de Kripke $KD45_n$ finis pointés. L'objectif était de caractériser les opérateurs de révision basés sur ces distances. Nous avons identifié des propriétés que toutes les distances étudiées satisfont, et avons montré que ces distances sont incomparables par rapport au raffinement. Nous avons montré que le théorème de représentation en termes d'assignements fidèles définis par Katsuno et Mendelzon [KATSUNO & MENDELZON 1992] peut être adapté pour définir la révision d'un ensemble fini de modèles de Kripke $KD45_n$ par une formule. Enfin, nous avons montré que toutes les distances que nous avons définies peuvent être utilisées pour définir des opérateurs de révision. Néanmoins, deux d'entre elles apparaissent comme meilleures que les autres.

Clairement, les distances définies ici ont un sens pour les autres classes de modèles de Kripke que les modèles $KD45_n$. Cependant, l'ensemble de propriétés attendues ne doit pas nécessairement rester le même. Identifier les conditions raisonnables que les distances doivent satisfaire pour réviser des préférences, des programmes, etc. est une perspective pour des recherches futures.

Une autre perspective serait de vérifier si toutes ces distances peuvent également servir à caractériser des opérateurs de révision privée. Pour ce faire il pourrait être nécessaire d'introduire d'autres conditions qu'elles devraient vérifier.

Conclusion générale

Bon, je crois que le moment est venu de dire quelque chose d'inoubliable......heu....y'a rien qui me vient à l'esprit. (Jack O'Neill – Stargate SG-1)

Durant cette thèse, les travaux réalisés apportent plusieurs contributions à la dynamique de croyances, dans le cadre de la logique propositionnelle finie d'une part et dans le cadre multi-agents d'autre part.

Dans la première partie de cette thèse, après avoir présenté le cadre AGM de la dynamique de croyances, ainsi que le cadre KM de la révision de croyances, nous avons introduit la première contribution de cette thèse. Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie. Le but était, à l'instar de Katsuno et Mendelzon pour la révision, de définir le bon comportement des opérateurs de contraction dans ce cadre. Ainsi, nous avons défini des postulats pour les opérateurs de contraction dans le cadre de la logique propositionnelle classique finie correspondant aux postulats de contraction dans le cadre AGM. Après avoir vérifié que les opérateurs de contraction définis par nos postulats correspondaient aux opérateurs de révision définis par les postulats KM, nous avons proposé un théorème de représentation en termes d'assignements fidèles.

Les perspectives de recherches pour ce travail sont nombreuses. Tout d'abord, concernant la contraction dans le cadre de la logique propositionnelle finie, maintenant que nous avons démontré un théorème de représentation, nous avons un bon point de départ pour débuter l'étude des opérateurs de contraction itérée, contrepartie des opérateurs de révision itérée. En effet, cette problématique de la contraction itérée n'a été abordée, à notre connaissance, que dans [Hild & Spohn 2008], contrairement à la révision itérée qui a engendré une large littérature [Darwiche & Pearl 1997, Booth & Meyer 2006, Jin & Thielscher 2007, Konieczny & Pino Pérez 2008].

Enfin, une perspective serait également de définir des opérateurs de contraction dans un cadre multi-agents. En effet, la traduction des postulats de révision AGM dans le cadre propositionnel est également à la base des travaux de Aucher [Aucher 2008] pour les modèles internes ; mais elle est également à la base des opérateurs de révision à base de distances que nous avons définis dans la seconde partie de cette thèse.

Dans la seconde partie de cette thèse, après avoir introduit les différents éléments nécessaires à la compréhension de cette partie, nous nous sommes intéressés à une connexion entre les logiques épistémiques et la théorie du changement de croyances plus proche de l'approche AGM. Nous avons étudié les opérateurs qui modifient les croyances des agents dans les modèles $KD45_n$ standard. Cette tâche était plus compliquée que dans le cadre AGM standard, car, dans un contexte multi-agents, les nouvelles informations peuvent prendre différentes formes.

Dans un premier temps, nous avons étudié les opérateurs de changement de croyances privés. Un changement privé est un changement produit par une information qui est disponible pour un agent. Cela signifie que les croyances de cet agent doivent changer, alors que les croyances des autres agents restent inchangées. Dans ce cas, nous ne pouvons pas appliquer directement les définitions AGM. Afin de remédier à cela, nous avons proposé des définitions précises pour les opérateurs d'expansion et de révisions privées par des informations objectives (i.e. des informations au sujet de l'environnement).

Une extension de ce travail est l'étude du changement de croyances public et de groupe.

- Un changement public est un changement qui est produit par une information qui est disponible pour chaque agent. Dans ce cas, nous sommes dans le cadre AGM standard, et nous pouvons utiliser le mécanisme AGM standard (postulats, théorèmes de représentations, etc) afin de définir des opérateurs adéquats de changement de croyances.

- Un changement de groupe est un changement qui est produit par une information qui est disponible pour un groupe d'agent. L'idée est que la nouvelle information n'est pas donnée en privée à un agent, mais à un groupe d'agents. Ce cas comprend les changements publics et privés comme des cas particuliers. L'interaction entre les agents ajoute des problèmes supplémentaires intéressants, puisque chaque agent du groupe devra réviser ses croyances à propos des croyances des autres agents du groupe qui reçoivent la même information.

Une autre extension de ce travail est l'étude des changements de croyances par des informations subjectives (i.e. des informations sur les croyances des autres agents). Le cas de la révision par des informations subjectives est à la fois plus complexe est plus riche que la révision par des formules objectives, en raison de l'exigence de la minimalité du changement. Dans certains cas, les opérateurs de changement de croyances sont basés sur des distances. De ce fait, certaines mesures intéressantes peuvent être définies et utilisées pour définir un changement minimal pour la révision.

L'étude de telles distances entre modèles de Kripke $KD45_n$ fait justement l'objet de la dernière contribution de cette thèse. Nous nous sommes intéressé à la définition de propriétés sur ces distances. Mais également à la définition de nouvelles distances, capturant différentes intuitions sur la façon dont deux modèles de Kripke sont proches. Après avoir identifié les propriétés satisfaites par ces distances, nous avons montré qu'aucune d'elles n'est raffinée par une autre. Nous avons ensuite défini un théorème de représentation dans le cadre de la révision d'un ensemble de modèles de Kripke par une formule modale. Enfin, nous avons montré que toutes les distances introduites peuvent servir à caractériser un opérateur de révision.

Les perspectives de recherches pour ce travail sont multiples. Nous pouvons identifier les conditions que les distances doivent satisfaire pour d'autres types de révision. D'un autre côté, ces distances peuvent avoir du sens pour les autres classes de modèles de Kripke que les modèles $KD45_n$. Ainsi, certaines conditions sur ces distances peuvent se révéler « inutiles » pour certaines classes de modèles. Au contraire, certaines classes de modèles pourrait être plus exigeantes et nécessiter l'élaboration de nouvelles conditions.

Annexes

Annexe A

Contributions publiées dans le cadre de cette thèse

Article publié dans un journal d'audience internationale

- ◇ Thomas Caridroit, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « Contraction in propositional logic » dans *International Journal of Approximate Reasoning* 2016, 2016

Articles publiés dans les actes d'une conférence internationale

- ◇ Thomas Caridroit, Tiago de Lima, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « On Distances Between KD45n Kripke Models and their Use for Belief Revision » dans *22th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'16)*, pp. 1053-1061, 2016

- ◇ Thomas Caridroit, Tiago de Lima, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « Private Expansion and Revision in Multi-agent Settings » dans *3th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'15)*, pp. 175-185, 2015

- ◇ Thomas Caridroit, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « Contraction in Propositional Logic » dans *13th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'15)*, pp. 186-196, 2015

- ◇ Thomas Caridroit, Tiago de Lima, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « Private Revision in Multi-Agent Setting » dans *International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS'15)*, pp. 1677-1678, 2015

Articles publiés dans les actes d'une conférence nationale

- ◇ Thomas Caridroit, Tiago de Lima, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « Sur les distances entre modèles de Kripke KD45n et leur utilisation pour la révision des croyances » dans *10èmes Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale (JIAF'16)* 2016

- ◇ Thomas Caridroit, Tiago de Lima, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « Expansion et révision privées dans KD45n » dans *8èmes Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale (JIAF'14)* 2014

◇ Thomas Caridroit, Sébastien Konieczny, Pierre Marquis, « Contraction en logique propositionnelle finie » dans *7èmes Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale (JIAF'13)*, 2013

Table des figures

Index

Bibliographie

[Ågotnes *et al.* 2012] Thomas Ågotnes, Wiebe van der Hoek, et Michael Wooldridge. « Conservative Social Laws ». Dans *Proceedings of the 20th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'12)*, pages 49–54, 2012.

[Alchourrón & Makinson 1982] Carlos E. Alchourrón et David Makinson. « On the logic of theory change : Contraction functions and their associated revision functions ». *Theoria*, 48(1) :14–37, 1982.

[Alchourrón *et al.* 1985] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors, et David Makinson. « On the Logic of Theory Change : Partial Meet Contraction and Revision Functions ». *Journal of Symbolic Logic*, 50(2) :510–530, 1985.

[Aucher 2008] Guillaume Aucher. « *Perspectives on belief and change* ». PhD thesis, Université Paul Sabatier ; University of Otago, 2008.

[Aucher 2010] Guillaume Aucher. « Generalizing AGM to a multi-agent setting ». *Logic Journal of the IGPL*, 18(4) :530–558, 2010.

[Aucher 2012] Guillaume Aucher. « Private announcement and belief expansion : an internal perspective ». *Journal of Logic and Computation*, 22(3) :451–479, 2012.

[Balbiani & Herzig 2007] Philippe Balbiani et Andreas Herzig. « Talkin'bout Kripke models ». *International Workshop on Hybrid Logic 2007*, pages 3–12, 2007.

[Baltag & Moss 2004] Alexandru Baltag et Lawrence S. Moss. « Logics for Epistemic Programs ». *Synthese*, 139 :165–224, 2004. Knowledge, Rationality & Action 1–60, 2004.

[Baltag & Smets 2006] A. Baltag et S. Smets. « Dynamic belief revision over multi-agent plausibility models ». Dans *Proceedings of the 7th Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision (LOFT'06)*, pages 11–24, 2006.

[Baltag *et al.* 1998] Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss, et Slawomir Solecki. « The logic of common knowledge, public announcements and private suspicions ». Dans *Proceedings of the*

7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK'98), pages 43–56, 1998.

[BALTAG *et al.* 2014] Alexandru BALTAG, Virginie FIUTEK, et Sonja SMETS. « *Krister Segerberg on Logic of Actions* », Chapitre DDL as an "Internalization" of Dynamic Belief Revision, pages 253–280. Springer Netherlands, Dordrecht, 2014.

[BEN-NAIM *et al.* 2004] Jonathan BEN-NAIM, Salem BENFERHAT, Odile PAPINI, et Eric WÜRBEL. « An Answer Set Programming Encoding of Prioritized Removed Sets Revision : Application to GIS ». Dans *Proceedings of the 9th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA'04)*, pages 604–616, 2004.

[BENFERHAT *et al.* 2002a] Salem BENFERHAT, Didier DUBOIS, Sylvain LAGRUE, et Odile PAPINI. « Making revision reversible : an approach based on polynomials ». *Fundamenta Informaticae*, 53(3-4) :251–280, 2002.

[BENFERHAT *et al.* 2002b] Salem BENFERHAT, Didier DUBOIS, Henri PRADE, et Mary-Anne WILLIAMS. « A Practical Approach to Revising Prioritized Knowledge Bases ». *Studia Logica*, 70(1) :105–130, 2002.

[BLACKBURN *et al.* 2001] Patrick BLACKBURN, Maarten de RIJKE, et Yde VENEMA. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.

[BLACKBURN *et al.* 2006] Patrick BLACKBURN, Johan F. A. K. van BENTHEM, et Frank WOLTER. *Handbook of Modal Logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning)*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.

[BOARD 2004] Oliver BOARD. « Dynamic interactive epistemology ». *Games and Economic Behavior*, 49(1) :49–80, 2004.

[BONANNO 1996] Giacomo BONANNO. « On the Logic of Common Belief ». *Mathematical Logic Quarterly (MLQ)*, 42 :305–311, 1996.

[BOOTH & MEYER 2006] Richard BOOTH et Thomas Andreas MEYER. « Admissible and Restrained Revision ». *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 26 :127–151, 2006.

[BORGIDA 1985] Alexander BORGIDA. « Language Features for Flexible Handling of Exceptions in Information Systems ». *ACM Transactions on Database Systems (TODS)*, 10(4) :565–603, 1985.

[BOUTILIER 1993] Craig BOUTILIER. « Revision Sequences and Nested Conditionals ». Dans *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artifical Intelligence - Volume 1 (IJCAI'93)*, pages 519–525. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1993.

[CANTWELL 2005] John CANTWELL. « A Formal Model of Multi-Agent Belief-Interaction ». *Journal of Logic, Language and Information*, 14(4) :397–422, 2005.

[CARIDROIT *et al.* 2013] Thomas CARIDROIT, Sébastien KONIECZNY, et Pierre MARQUIS. « Contraction en logique propositionnelle finie ». Dans *Journées d'Intelligence Artificielles Fondamentales (IAF'13)*, 2013. actes électroniques.

[CARIDROIT *et al.* 2014] Thomas CARIDROIT, Tiago de LIMA, Sébastien KONIECZNY, et Pierre MARQUIS. « Expansion et révision privées dans KD45n ». Dans *Journées d'Intelligence Artificielles Fondamentales (IAF'14)*, 2014. actes électroniques.

[CARIDROIT *et al.* 2015a] Thomas CARIDROIT, Sébastien KONIECZNY, Tiago de LIMA, et Pierre MARQUIS. « Private Expansion and Revision in Multi-agent Settings ». Dans *Proceedings of the 13th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'15)*, pages 175–185, 2015.

[CARIDROIT *et al.* 2015b] Thomas CARIDROIT, Sébastien KONIECZNY, Tiago de LIMA, et Pierre MARQUIS. « Private Revision in a Multi-Agent Setting ». Dans *Proceedings of the 2015 International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, AAMAS 2015, Istanbul, Turkey, May 4-8, 2015*, pages 1677–1678, 2015.

[CARIDROIT *et al.* 2015c] Thomas CARIDROIT, Sébastien KONIECZNY, et Pierre MARQUIS. « Contraction in Propositional Logic ». Dans *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty - 13th European Conference, ECSQARU 2015, Compiègne, France, July 15-17, 2015. Proceedings*, pages 186–196, 2015.

[CARIDROIT *et al.* 2016a] Thomas CARIDROIT, Tiago de LIMA, Sébastien KONIECZNY, et Pierre MARQUIS. « Sur les distances entre modèles de Kripke KD45n et leur utilisation pour la révision des croyances ». Dans *Journées d'Intelligence Artificielles Fondamentales (IAF'16)*, 2016. actes électroniques.

[CARIDROIT *et al.* 2016b] Thomas CARIDROIT, Sébastien KONIECZNY, Tiago de LIMA, et Pierre MARQUIS. « On Distances Between KD45n Kripke Models and Their Use for Belief Revision ». Dans *ECAI 2016 - 22nd European Conference on Artificial Intelligence, 29 August-2 September 2016, The Hague, The Netherlands - Including Prestigious Applications of Artificial Intelligence (PAIS 2016)*, pages 1053–1061, 2016.

[Caridroit *et al.* 2017] Thomas Caridroit, Sébastien Konieczny, et Pierre Marquis. « Contraction in propositional logic ». *International Journal of Approximate Reasoning*, 80 :428–442, 2017.

[Chellas 1980] B.F. Chellas. *Modal Logic : An Introduction.* Cambridge University Press, 1980.

[Creignou *et al.* 2016] Nadia Creignou, Raïda Ktari, et Odile Papini. « Belief Contraction Within Fragments of Propositional Logic ». Dans *Proceedings of the 22nd European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'16)*, pages 390–398, 2016.

[Dalal 1988] M. Dalal. « Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report ». Dans *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 475–479, 1988.

[Darwiche & Pearl 1997] Adnan Darwiche et Judea Pearl. « On the Logic of Iterated Belief Revision ». *Artificial Intelligence*, 89(1-2) :1–29, 1997.

[Delgrande & Wassermann 2013] James P. Delgrande et Renata Wassermann. « Horn Clause Contraction Functions ». *ournal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 48 :475–511, 2013.

[Delgrande 2008] James P. Delgrande. « Horn Clause Belief Change : Contraction Functions ». Dans *Proceedings of the Eleventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 156–165, 2008.

[Fagin *et al.* 1995] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram, et Moshe Vardi. *Reasoning about Knowledge.* The MIT Press, 1995.

[Fermé & Hansson 2011] Eduardo Fermé et Sven Ove Hansson. « AGM 25 Years ». *Journal of Philosophical Logic*, 40(2) :295–331, 2011.

[Forbus 1989] Kenneth D. Forbus. « Introducing Actions into Qualitative Simulation ». Dans *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89).*, pages 1273–1278, 1989.

[Gärdenfors & Makinson 1988] Peter Gärdenfors et David Makinson. « Revisions of Knowledge Systems Using Epistemic Entrenchment ». Dans *Proceedings of the 2nd Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK'88)*, pages 83–95, 1988.

[Gärdenfors 1988] Peter Gärdenfors. *Knowledge in Flux : Modeling the Dynamics of Epistemic States.* MIT Press, Bradford Books, Cambridge, MA, 1988 1988.

[GERBRANDY & GROENEVELD 1997] Jelle GERBRANDY et Willem GROENEVELD. « Reasoning about Information Change ». *Journal of Logic, Language and Information*, 6(2) :147–169, 1997.

[GROVE 1988] Adam GROVE. « Two Modellings for Theory Change ». *Journal of Philosophical Logic*, 17 :157–170, 1988.

[HALPERN & MOSES 1992] Joseph Y. HALPERN et Yoram MOSES. « A Guide to Completeness and Complexity for Modal Logics of Knowledge and Belief ». *Artificial Intelligence*, 54(2) :319–379, 1992.

[HAMMING 1950] Richard W. HAMMING. « Error Detecting and Error Correcting Codes ». *Bell System Technical Journal*, 26(2) :147–160, 1950.

[HANSSON 1997] Sven Ove HANSSON. « Semi-Revision ». *Journal of Applied Non-classical Logic*, 7 :151–175, 1997.

[HANSSON 1999] S.O. HANSSON. *A Textbook of Belief Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[HARPER 1976] William L. HARPER. « Rational Conceptual Change ». *PSA : Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1976 :462–494, 1976.

[HAUSDORFF 1914] Felix HAUSDORFF. *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit and Company, Leipzig, 1914. Das Hauptwerk von Felix Hausdorff.

[HERZIG *et al.* 2005] Andreas HERZIG, Jérôme LANG, et Pierre MARQUIS. « Action progression and revision in multiagent belief structures ». Dans *Proceedings of the 6th Workshop on Nonmonotonic Reasoning, Action, and Change (NRAC'05)*, 2005.

[HERZIG 2014] Andreas HERZIG. « Logics of knowledge and action : critical analysis and challenges ». *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 29(5) :719–753, 2014.

[HILD & SPOHN 2008] Matthias HILD et Wolfgang SPOHN. « The measurement of ranks and the laws of iterated contraction ». *Artificial Intelligence*, 172(10) :1195–1218, 2008.

[HINTIKKA 1962] Jaakko. HINTIKKA. *Knowledge and belief : an introduction to the logic of the two notions*. Contemporary philosophy. Cornell University Press, 1962.

[HOPCROFT 1971] John E. HOPCROFT. « An N Log N Algorithm for Minimizing States in a Finite Automaton ». Rapport technique, Stanford, CA, USA, 1971.

[JIN & THIELSCHER 2007] Yi JIN et Michael THIELSCHER. « Iterated belief revision, revised ». *Artificial Intelligence*, 171(1) :1–18, 2007.

[Katsuno & Mendelzon 1991] H. Katsuno et A. O. Mendelzon. « On the difference between updating a knowledge base and revising it ». Dans *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91)*, pages 387–394, 1991.

[Katsuno & Mendelzon 1992] Hirofumi Katsuno et Alberto O. Mendelzon. « Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change ». *Artificial Intelligence*, 52(3) :263–294, 1992.

[Konieczny & Pérez 2002] Sébastien Konieczny et Ramón Pino Pérez. « Merging Information Under Constraints : A Logical Framework ». *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[Konieczny & Pino Pérez 2008] Sébastien Konieczny et Ramón Pino Pérez. « Improvement Operators ». Dans *Proceedings of the 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08), September 16-19, 2008*, pages 177–187, 2008.

[Konieczny & Pino Pérez 2008] Sébastien Konieczny et Ramón Pino Pérez. « Improvement operators ». Dans *Proceedings of the 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 177–186, 2008.

[Konieczny *et al.* 2004] Sébastien Konieczny, Jérôme Lang, et Pierre Marquis. « DA^2 merging operators ». *Artificial Intelligence*, 157(1-2) :49–79, 2004.

[Lehmann *et al.* 2001] Daniel Lehmann, Menachem Magidor, et Karl Schlechta. « Distance Semantics for Belief Revision ». *Journal of Symbolic Logic*, 66(1) :295–317, 2001.

[Lehmann 1995] Daniel Lehmann. « Another perspective on default reasoning ». *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 15(1) :61–82, 1995.

[Levi 1977] Isaac Levi. « Subjunctives, Dispositions and Chances ». *Synthese*, 34(4) :423–455, 1977.

[Levi 1980] Isaac Levi. *The Enterprise of Knowledge : An Essay on Knowledge, Credal Probability, and Chance.* The MIT Press, 1980.

[Papini 1992] O. Papini. « A Complete Revision Function in Propositional Calculus ». Dans *Proceedings of the 10th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'92)*, pages 339–343, 1992.

[Rott 1993] Hans Rott. « Belief Contraction in the Context for the General Theory of Rational Choice ». *Journal of Symbolic Logic*, 58(4) :1426–1450, 1993.

[SCHLECHTA *et al.* 1996] Karl SCHLECHTA, Daniel LEHMANN, et Menachem MAGIDOR. « Distance Semantics for Belief Revision ». Dans *Proceedings of the 6th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK'96)*, pages 137–145. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1996.

[SCHLECHTA 1998] K. SCHLECHTA. « Non-prioritized belief revision based on distances between models ». *Theoria*, pages 34–53, 1998. Special issue on non-prioritized belief revision.

[SEGERBERG 2001] Krister SEGERBERG. « *Frontiers in Belief Revision* », Chapitre The Basic Dynamic Doxastic Logic of AGM, pages 57–84. Springer Netherlands, Dordrecht, 2001.

[SPOHN 1988] Wolfgang SPOHN. « *Ordinal Conditional Functions : A Dynamic Theory of Epistemic States* », pages 105–134. Springer Netherlands, 1988.

[SUTHERLAND 1975] A. SUTHERLAND, W. *Introduction to metric and topological spaces*. Clarendon Press, Oxford, 1975. page 21.

[TALLON *et al.* 2004] Jean-Marc TALLON, Jean-Christophe VERGNAUD, et Shmuel ZAMIR. « Communication among Agents : A Way to Revise Beliefs in KD45 Kripke Structures. ». *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 14(4) :477–500, 2004.

[TARSKI 1956] A. TARSKI. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Clarendon Press Oxford, 1956. Papers from 1923 to 1938. Translated by J. H. Woodger.

[VAN BENTHEM 2007] Johan van BENTHEM. « Dynamic logic for belief revision ». *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2) :129–155, 2007.

[VAN DITMARSCH *et al.* 2005] H. P. van DITMARSCH, W. van der HOEK, et B. P. KOOI. « Dynamic Epistemic Logic with Assignment ». Dans *Proceedings of the 4th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS'05)*, pages 141–148. ACM, 2005.

[VAN DITMARSCH *et al.* 2008] H. P. van DITMARSCH, Wiebe van der HOEK, et Barteld KOOI. *Dynamic Epistemic Logic*. Springer, 2008.

[VAN DITMARSCH 2005] H. P. van DITMARSCH. « Prolegomena to Dynamic Logic for Belief Revision ». *Synthese*, 147(2) :229–275, 2005.

[WÜRBEL *et al.* 2000] Eric WÜRBEL, Robert JEANSOULIN, et Odile PAPINI. « Revision : an application in the framework of GIS ». Dans *Proceedings of the 7th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 505–515, 2000.

[Zhuang & Pagnucco 2012] Zhi Qiang Zhuang et Maurice Pagnucco. « Model Based Horn Contraction ». Dans *Proceedings of the 13th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'12)*, 2012.

Résumé

Le changement de croyances vise à trouver des moyens adéquats pour faire évoluer les croyances d'un agent lorsqu'il est confronté à de nouvelles informations. Dans la plupart des travaux sur la révision de croyances, l'ensemble de croyances d'un agent est composé de croyances au sujet de l'environnement (le monde) et est représenté par un ensemble de formules de la logique classique. Dans de nombreuses applications, un agent n'est pas seul dans l'environnement, mais le partage avec d'autres agents, qui ont aussi des croyances. Ainsi les croyances sur les croyances des autres agents constituent un élément d'information important pour l'agent, afin d'être en mesure de prendre les meilleures décisions et d'effectuer les meilleures actions. L'utilisation de croyances sur les croyances des autres agents est par exemple cruciale dans la théorie des jeux.

Dans cette thèse, nous étudions dans un premier temps les opérateurs de contraction propositionnelle correspondant aux opérateurs de révision de Katsuno et Mendelzon. Nous étudions ensuite une connexion entre les logiques épistémiques et la théorie du changement de croyances, proche de l'approche AGM. Nous nous sommes intéressés à l'utilisation des opérateurs qui modifient les croyances des agents dans les modèles KD45n standard. Cette tâche est plus compliquée que dans le cadre AGM standard, car, dans un contexte multi-agents, les nouvelles informations peuvent prendre différentes formes. Par exemple, chaque nouvelle information peut être observée/transmise/disponible à tous les agents ou seulement à certains d'entre eux.

Mots-clés: Changement de croyances, logique propositionnelle, représentation des connaissances, système multi-agents, modèles epistemiques, logique épistémique, calcul de distance.

Abstract

Belief change is about finding appropriate ways to evolve an agent's beliefs when confronted with new pieces of information. In most works on belief revision, the set of beliefs of an agent is composed of beliefs about the environment (the world) and is represented by a set of formulas of classical logic. In many applications, an agent is not alone in the environment, but sharing with other agents, which also have beliefs. Thus beliefs about the beliefs of other agents are an important piece of information for the agent in order to be able to make the best decisions and perform the best actions. The use of beliefs about the beliefs of other agents is, for exampel, crucial in game theory.

In this thesis, we first study the operators of propositional contraction corresponding to the revision operators proposed by Katsuno and Mendelzon. Then, we study a connection between epistemic logics and belief change theory, close to the AGM approach. We are interested in the use of operators that modify agent beliefs in standard KD45n models. This task is more complicated than in the standard AGM framework because, in a multi-agent context, new information can take different forms. For example, each new information can be observed/transmitted/available to all agents or only some of them.

Keywords: Belief Change, Propositional logic, Knowledge Representation, Multi-Agent Systems, Epistemic Models, Distance Computation.