Logiques avec des règles ”presque tous” [1]

Salem BENFERHAT

Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL-CNRS)
email : benferhat@cril.fr

[1] Version préliminaire du cours. Tout retour sur la forme comme sur le fond est le bienvenu.

Le quantificateur Presque tous

L'inclusion ensembliste

Quelque soit

- Soit A et B deux ensembles d'éléments.
  - Par exemple, A représente l'ensemble des étudiants et B représente l'ensemble des individus jeunes

L'inclusion ensembliste

Quelque soit

- Soit A et B deux ensembles d'éléments.
  - Par exemple, A représente l'ensemble des étudiants et B représente l'ensemble des individus jeunes
- Dans la théorie des ensembles,

$$A \subseteq B$$

signifie que $\forall x$, si $x \in A$ alors $x \in B$.

L'inclusion ensembliste

Quelque soit

- Soit A et B deux ensembles d'éléments.
  - Par exemple, A représente l'ensemble des étudiants et B représente l'ensemble des individus jeunes
- Dans la théorie des ensembles,

$$A \subseteq B$$

signifie que $\forall x$, si $x \in A$ alors $x \in B$.

- Intuitivement, $A \subseteq B$ signifie que "tous les étudiants sont jeunes".

L’inclusion ensembliste : Presque tous

- En pratique, l’assertion ”tous les étudiants sont jeunes” n’est pas toujours vraie.

L’inclusion ensembliste : Presque tous

- En pratique, l’assertion ”tous les étudiants sont jeunes” n’est pas toujours vraie.
- Il y a des situations d’individus qui sont étudiants mais qui ne sont pas jeunes

L’inclusion ensembliste : Presque tous

- En pratique, l’assertion ”tous les étudiants sont jeunes” n’est pas toujours vraie.
- Il y a des situations d’individus qui sont étudiants mais qui ne sont pas jeunes
- Elle reste cependant vraie pour la grande majorité des étudiants

L'inclusion ensembliste : Presque tous

- En pratique, l'assertion ”tous les étudiants sont jeunes” n'est pas toujours vraie.
- Il y a des situations d'individus qui sont étudiants mais qui ne sont pas jeunes
- Elle reste cependant vraie pour la grande majorité des étudiants
- L'idée est de remplacer le quantificateur ”quelque soit” ou bien ”tous” par un autre quantificateur que l'on appelera ”presque tous”

L'inclusion ensembliste : Presque tous

- En pratique, l'assertion "tous les étudiants sont jeunes" n'est pas toujours vraie.
- Il y a des situations d'individus qui sont étudiants mais qui ne sont pas jeunes
- Elle reste cependant vraie pour la grande majorité des étudiants
- L'idée est de remplacer le quantificateur "quelque soit" ou bien "tous" par un autre quantificateur que l'on appelera "presque tous"
- Il s'agit donc d'utiliser un autre opérateur d'inclusion ensembliste, noté

  $$A \Subset B$$

  pour exprimer le fait que "presque tous les éléments de A sont dans B".

En logique : l'opérateur presque tous

Presque tous

- Rappel : une formule propositionnelle α est une conséquence logique d'une autre formule β si tous les modèles de β sont également des modèles de α, c'est-à-dire : $A_\beta \subseteq A_\alpha$.

En logique : l'opérateur presque tous

Presque tous

- Rappel : une formule propositionnelle α est une conséquence logique d'une autre formule β si tous les modèles de β sont également des modèles de α, c'est-à-dire : $A_\beta \subseteq A_\alpha$.

- De manière similaire, on dit que α est une quasi-conséquence logique d'une autre formule β si presque tous les modèles de β sont également des modèles de α.

Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

Monotonie

Si

$$A \subseteq B$$

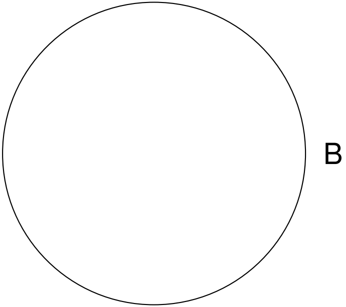
alors

$$A \cap C \subseteq B$$

Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

Monotonie

Si
$$A \subseteq B$$
alors
$$A \cap C \subseteq B$$



Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

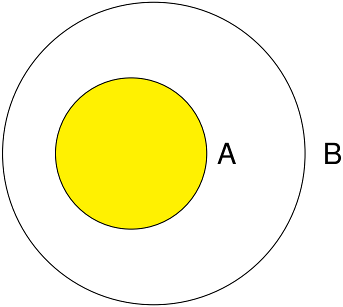
Monotonie

Si

$$A \subseteq B$$

alors

$$A \cap C \subseteq B$$



Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

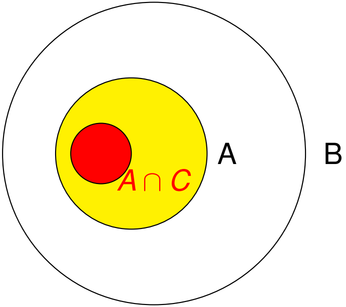
Monotonie

Si

$$A \subseteq B$$

alors

$$A \cap C \subseteq B$$



Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

Monotonie

Si

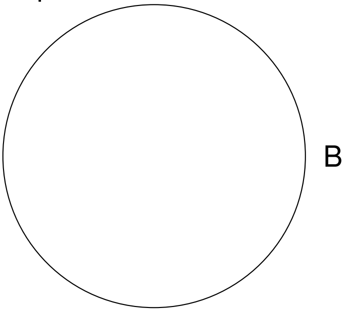
$$A \Subset B$$

alors

est-ce que $A \cap C \Subset B$ reste valide?

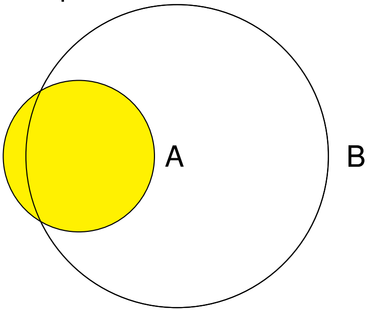
Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

Cas extrême de réponse positive :



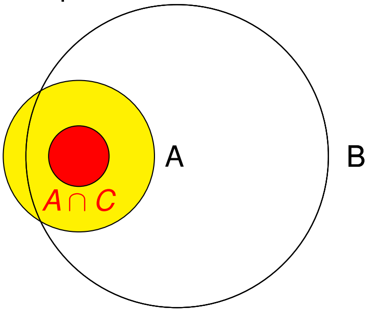
Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

Cas extrême de réponse positive :



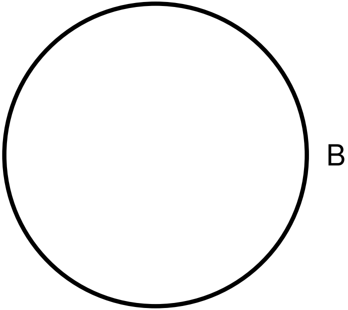
Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

Cas extrême de réponse positive :



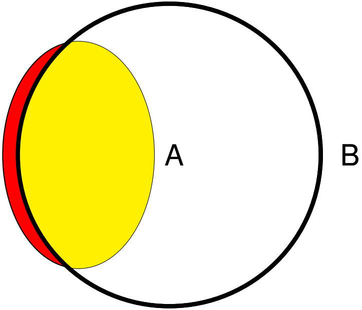
Propriété de monotonie : Qu'est-ce que c'est?

Cas extrême de réponse négative :



Propriété de monotonie : Qu’est-ce que c’est?

Cas extrême de réponse négative :

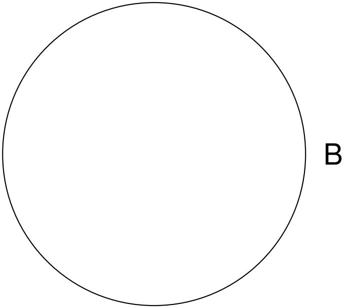


Cas général

Cas général

Réponse

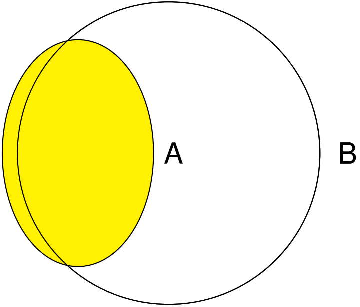
La monotonie n’est plus valide avec les règles qui sont presque tout le temps vraies.



Cas général

Réponse

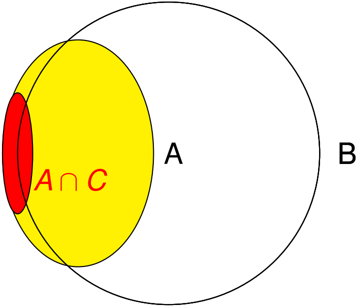
La monotonie n'est plus valide avec les règles qui sont presque tout le temps vraies.



Cas général

Réponse

La monotonie n'est plus valide avec les règles qui sont presque tout le temps vraies.



Postulats de rationalité : principe

- La relation d'inférence (ou de conséquence) de la logique propositionnelle, souvent noté $\models$, est monotone. Si un résultat est inférée (ou accepté) alors il le restera quelque soit les nouvelles informations.

Postulats de rationalité : principe

- La relation d'inférence (ou de conséquence) de la logique propositionnelle, souvent noté $\models$, est monotone. Si un résultat est inférée (ou accepté) alors il le restera quelque soit les nouvelles informations.
- Cette propriété de monotonie est raisonnable si on ne travaille qu'avec des informations (connaissances et faits) qui sont complètement certaines.

Postulats de rationalité : principe

- La relation d'inférence (ou de conséquence) de la logique propositionnelle, souvent noté $\models$, est monotone. Si un résultat est inférée (ou accepté) alors il le restera quelque soit les nouvelles informations.

- Cette propriété de monotonie est raisonnable si on ne travaille qu'avec des informations (connaissances et faits) qui sont complètement certaines.

- La propriété de monotonie reste cependant ”contestable” dès lors que l'on travaille avec des règles ”presque tous”. Les conclusions que nous tirons tous les jours ne sont pas certaines. Elles ont un statut de plausible.

Postulats de rationalité : principe

- Le raisonnement humain est prêt à remettre en cause des conclusions déjà déduites si les nouvelles informations sont plus certaines et plus fiables!

Postulats de rationalité : principe

- Le raisonnement humain est prêt à remettre en cause des conclusions déjà déduites si les nouvelles informations sont plus certaines et plus fiables!
- Le principe est donc de remplacer la relation de conséquence de la logique proposition $\models$ par une autre relation d'inférence dite *non-monotone* et notée $\mid\!\sim$.

Postulats de rationalité : principe

- Le raisonnement humain est prêt à remettre en cause des conclusions déjà déduites si les nouvelles informations sont plus certaines et plus fiables!
- Le principe est donc de remplacer la relation de conséquence de la logique proposition $\models$ par une autre relation d'inférence dite *non-monotone* et notée $\mid\!\sim$.
- La question est alors : quelles sont les propriétés naturelles pour $\mid\!\sim$?

Postulats de rationalité : principe

- Le raisonnement humain est prêt à remettre en cause des conclusions déjà déduites si les nouvelles informations sont plus certaines et plus fiables!
- Le principe est donc de remplacer la relation de conséquence de la logique proposition $\models$ par une autre relation d'inférence dite *non-monotone* et notée $\mid\!\sim$.
- La question est alors : quelles sont les propriétés naturelles pour $\mid\!\sim$?
- Quelles sont les propriétés de la logique propositionnelle qui restent valides pour $\mid\!\sim$?

Système P :

six propriétés miminales

Réflexivité

$$\alpha \mid\!\sim \alpha$$

Intuitivement

- Elle signifie que toute formule est conséquence plausible d'elle-même.
- Ce qui est observé est accepté!

Exercice

Exercice

Donner la contrepartie ensembliste de la propriété ”réflexivité”

Réflexivité : version ensembliste

$$\alpha \mid\!\sim \alpha$$

Réflexivité : version ensembliste

$$\alpha \mid\!\sim \alpha$$

Ecriture ensembliste :

$$A \Subset A$$

Equivalence logique à gauche

$$\text{Si} \models \alpha \Leftrightarrow \beta, \alpha \mid\!\sim \gamma$$

alors

$$\beta \mid\!\sim \gamma$$

Intuitivement

Equivalence logique à gauche

$$\text{Si } \models \alpha \Leftrightarrow \beta, \alpha \mid\!\sim \gamma$$
$$\text{alors}$$
$$\beta \mid\!\sim \gamma$$

Intuitivement

- Elle dit que si deux formules α et β sont équivalentes au sens de la logique classique, alors on peut substituer α par β dans la partie gauche d'une relation d'inférence non-monotone.
- Cela exprime le souhait de ne pas voir l'inférence dépendre de la syntaxe des formules classiques.

Exercice

Exercice

Donner la contrepartie ensembliste de la propriété ”Equivalence logique à gauche”

Equivalence logique à gauche : version ensembliste

$$
\begin{array}{ll}
\text{Si} & \models \alpha \Leftrightarrow \beta \quad \text{et} \quad \alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma \\
\text{alors} & \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma
\end{array}
$$

Ecriture ensembliste

$$
\begin{array}{ll}
\text{Si} & A = B \\
\text{et} & A \Subset C \\
\text{alors} & B \Subset C
\end{array}
$$

Affaiblissement à droite

$$\text{Si } \alpha \models \beta, \gamma \mid\!\sim \alpha$$

alors

$$\gamma \mid\!\sim \beta$$

Intuitivement

La propriété 3 dit que si on accepte α comme conséquence plausible de γ, alors il faut également accepter les conséquences classiques de α comme plausibles.
Ce postulat le code le fait ”qui peut le plus, peut le moins”.

Exercice

Exercice

Donner la contrepartie ensembliste de la propriété ”Affaiblissement à droite”

Affaiblissement à droite : version ensembliste

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & \alpha \models \beta \quad \text{et} \quad \gamma \mid\!\sim \alpha \\ \text{alors} & \gamma \mid\!\sim \beta \end{array}$$

Affaiblissement à droite : version ensembliste

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & \alpha \models \beta \quad \text{et} \quad \gamma \mathrel{|\!\sim} \alpha \\ \text{alors} & \gamma \mathrel{|\!\sim} \beta \end{array}$$

Ecriture ensembliste

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & A \subseteq B \\ \text{et} & C \Subset A \\ \text{alors} & C \Subset B \end{array}$$

Coupure

$$\text{Si } \alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma, \alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$$
$$\text{alors}$$
$$\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$$

Intuitivement

La propriété de coupure dit que si γ est une conséquence plausible de α et β, alors elle est aussi une conséquence plausible de α seul dès que β est lui-même une conséquence plausible de α (c'est-à-dire que la propriété β apporte peu d'information dans le contexte α).

Exercice

Exercice

Donner la contrepartie ensembliste de la propriété ”Coupure”.

Coupure : version ensembliste

Si	$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ **et** $\alpha \mid\!\sim \beta$
alors	$\alpha \mid\!\sim \gamma$

Coupure : version ensembliste

Si $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ et $\alpha \mid\!\sim \beta$

alors $\alpha \mid\!\sim \gamma$

Ecriture ensembliste

Si $A \cap B \Subset C$

et $A \Subset B$

alors $A \Subset C$

Monotonie prudente

$$\text{Si } \alpha \mid\!\sim \beta, \alpha \mid\!\sim \gamma$$
$$\text{alors}$$
$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$$

Intuitivement

Elle affaiblit la monotonie : on peut passer de "α implique γ" à "$\alpha \wedge \beta$ implique γ" dans la mesure où β est déjà conséquence plausible de α.

Exercice

Exercice

Donner la contrepartie ensembliste de la propriété ”Monotonie prudente”.

Monotonie prudente : version ensembliste

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & \alpha \mid\!\sim \beta & \text{et} & \alpha \mid\!\sim \gamma \\ \text{alors} & \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma & & \end{array}$$

Ecriture ensembliste

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & A \Subset B \\ \text{et} & A \Subset C \\ \text{alors} & A \cap B \Subset C \end{array}$$

Ou

$$\text{Si } \alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma, \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$$

alors

$$\alpha \vee \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$$

Intuitivement

Elle reconduit une propriété de l'inférence classique selon laquelle si chacune des deux propriétés α et β implique une troisième γ, ce n'est pas la peine de vouloir discriminer entre elles pour conclure sur γ.

Exercice

Exercice

Donner la contrepartie ensembliste de la propriété ”Ou”.

Ou : version ensembliste

Si	$\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$	et	$\beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$
alors	$\alpha \vee \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$		

Ou : version ensembliste

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & \alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma & \text{et} & \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma \\
\text{alors} & \alpha \vee \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma & &
\end{array}
$$

Ecriture ensembliste

$$
\begin{array}{ll}
\text{Si} & A \Subset C \\
\text{et} & B \Subset C \\
\text{alors} & A \cup B \Subset C
\end{array}
$$

Conséquence du système P

Définition

Soit $\Delta = \{\alpha_i \rightarrow \beta_i\}$ un ensemble de règles "presque tous". Soit ϕ une observation (ou un fait). ψ est dite conséquence de ϕ si $\phi \mid\sim \psi$ peut être dérivée à partir de l'ensemble $\{\alpha_i \mid\sim \beta_i : \alpha_i \rightarrow \beta_i \in \Delta\}$ en utilisant les règles du Système P.

Exercice

Supposons que nous disposons des informations suivantes :

- Presque tous les canadiens ne parlent pas le français
- Presque tous les québécois parlent le français
- Les québécois aiment le sirop d'érable
- Les québécois sont des canadiens

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français?
- Presque tous les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais?
- Presque tous les personnes qui sont soit québécois soit canadiennes parlent le français?
- Presque tous les québécois canadiens aiment le sirop d'érable?

Exercice : indications

Les symboles propositionnels

- Q : être québécois
- C : être canadiens
- F : le fait de parler français
- A : le fait de parler anglais
- S : le fait d'aimer le sirop d'érable

Exercice : indications

Coder les règles "presque tous"

- Presque tous les canadiens ne parlent pas le français

$$C \mid\!\sim \neg F$$

- Presque tous les québécois parlent le français

$$Q \mid\!\sim F$$

Exercice : indications

Coder les règles strictes

- Les québécois aiment le sirop d'érable

$$Q \Rightarrow S$$

- Les québécois sont des canadiens

$$Q \Rightarrow C$$

Exercice : indications

Notation

- Δ : la base des règles ”presque tous”

Exercice : indications

Notation

- Δ : la base des règles ”presque tous”
- W : la base des règles strictes

Exercice : indications

Remarque préliminaire

Toute conclusion (ou assertion) obtenue de manière stricte peu-être également obtenue de manière générale, en utilisant les propriétés de la logique propositionnelle sur les règles strictes ainsi que le Système P

Exercice : indications

En particulier

- A partir de la règle stricte ”Les québécois aiment le sirop d’érable”

$$Q \Rightarrow S$$

  on peut déduire que :

$$Q \mid\!\sim S$$

- De manière similaire, à partir de :

$$Q \Rightarrow C$$

  on peut déduire que :

$$Q \mid\!\sim C$$

Exercice : indications

En effet :

- En utilisant, la réflexivité nous avons :

$$(*) Q \mid\!\sim Q$$

Exercice : indications

En effet :

- En utilisant, la réflexivité nous avons :

$$(*) Q \mathrel{|\!\sim} Q$$

En appliquant la règle d'affaiblissement à droite entre (*) et

$$Q \Rightarrow S$$

on peut déduire que :

$$Q \mathrel{|\!\sim} S$$

Exercice : indications

En effet :

- En utilisant, la réflexivité nous avons :

$$(*) Q \mid\!\sim Q$$

En appliquant la règle d'affaiblissement à droite entre (*) et

$$Q \Rightarrow S$$

on peut déduire que :

$$Q \mid\!\sim S$$

- De manière similaire, nous avons :

$$Q \mid\!\sim C$$

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français?

Réponse : Oui

- Nous avons :

$$Q \mid\!\sim C$$

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français?

Réponse : Oui

- Nous avons :

$$Q \mathrel{|\!\sim} C$$

et

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français?

Réponse : Oui

- Nous avons :

$$Q \mid\!\sim C$$

et

$$Q \mid\!\sim F$$

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français?

Réponse : Oui

- Nous avons :

$$Q \mid\!\sim C$$

et

$$Q \mid\!\sim F$$

En appliquant la propriété de monotonie prudente on obtient:

$$Q \wedge C \mid\!\sim F$$

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais?

Réponse : Oui

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais?

Réponse : Oui

- Nous venons de voir que :

$$Q \wedge C \mid\!\sim F$$

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais?

Réponse : Oui

- Nous venons de voir que :

$$Q \wedge C \mid\!\sim F$$

Par ailleurs nous avons :

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais?

Réponse : Oui

- Nous venons de voir que :

$$Q \wedge C \mid\!\sim F$$

Par ailleurs nous avons :

$$F \models F \vee A$$

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais?

Réponse : Oui

- Nous venons de voir que :

$$Q \wedge C \mid\!\sim F$$

Par ailleurs nous avons :

$$F \models F \vee A$$

En appliquant l'affaiblissement à droite on obtient:

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais?

Réponse : Oui

- Nous venons de voir que :

$$Q \wedge C \mid\!\sim F$$

Par ailleurs nous avons :

$$F \models F \vee A$$

En appliquant l'affaiblissement à droite on obtient:

$$Q \wedge C \mid\!\sim F \vee A$$

Exercice : indications

En utilisant le système P, est-ce que :

- Presque tous les personnes qui sont soit québécois soit canadiennes parlent le français?
- Presque tous les québécois canadiens aiment le sirop d'érable?

Caractériser Système P

Définitions

Soit *I* une interprétation et $\alpha \rightarrow \beta$.

- *I* vérifie $\alpha \rightarrow \beta$ si *I* est modèle de $\alpha \wedge \beta$.
  - Intuitivement, *I* vérifie $\alpha \rightarrow \beta$ si elle rend vraie l'antécédent et le conséquent de la règle.

Caractériser Système P

Définitions

Soit *I* une interprétation et $\alpha \to \beta$.

- *I* vérifie $\alpha \to \beta$ si *I* est modèle de $\alpha \wedge \beta$.
  - Intuitivement, *I* vérifie $\alpha \to \beta$ si elle rend vraie l'antécédent et le conséquent de la règle.
- *I* satisfait $\alpha \to \beta$ si *I* est modèle de $\neg\alpha \vee \beta$ (ou bien $\alpha \Rightarrow \beta$).

Caractériser Système P

Définitions

Soit *I* une interprétation et $\alpha \rightarrow \beta$.

- *I* vérifie $\alpha \rightarrow \beta$ si *I* est modèle de $\alpha \wedge \beta$.
  - Intuitivement, *I* vérifie $\alpha \rightarrow \beta$ si elle rend vraie l'antécédent et le conséquent de la règle.
- *I* satisfait $\alpha \rightarrow \beta$ si *I* est modèle de $\neg\alpha \vee \beta$ (ou bien $\alpha \Rightarrow \beta$).
- *I* viole $\alpha \rightarrow \beta$ si *I* est modèle de $\alpha \wedge \neg\beta$.
  - Les concepts de satisfaction et violation sont les mêmes que ceux de la logique propositionnelle.

Caractériser Système P

Définitions de tolérance

- $\alpha \to \beta$ est générale dans Δ s'il existe une interprétation I qui vérifie $\alpha \to \beta$ et qui satisfait chacune des règles de Δ et W.

Caractériser Système P

Définitions de tolérance

- $\alpha \to \beta$ est générale dans Δ s'il existe une interprétation *I* qui vérifie $\alpha \to \beta$ et qui satisfait chacune des règles de Δ et *W*.

Exercice

Proposer une méthode qui dit si $\alpha \to \beta$ est générale dans Δ.

Exercice

Reprenez l'exemple des canadiens.

- Donner la liste des règles qui sont générales.
- Que signifie intuitivement une règle générale?

Caractériser le Système P

Concept de cohérence ou de stratification

- Δ est stratifié (ou cohérent) s'il existe une partition $\Delta_1, ..., \Delta_n$ tel que chacune règle de Δ_i est générale dans $\Delta_i \cup .... \cup \Delta_n$ et W.

Algorithme pour Système P

Résultat

$\alpha \to \beta$ est une conséquence de Δ en utilisant le système P si et seulement si $\{\alpha \to \neg\beta\} \cup \Delta$ est incohérent (non stratifiable).

Algorithme pour Système P

Résultat

$\alpha \to \beta$ est une conséquence de Δ en utilisant le système P si et seulement si $\{\alpha \to \neg\beta\} \cup \Delta$ est incohérent (non stratifiable).

Exercices

- Proposer un algorithme pour vérifier si $\alpha \to \beta$ est une conséquence de Δ en utilisant le système P.
- Traiter l'exemple des québécois

Conséquences remarquables du Système P

ET

Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ et $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$ alors $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta \wedge \gamma$

Conséquences remarquables du Système P

En effet

1. La réflexivité $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mathrel{|\!\sim} \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ et l'affaiblissement à droite $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \models \alpha \wedge \beta$ donne :

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mathrel{|\!\sim} \beta \wedge \gamma$$

Conséquences remarquables du Système P

En effet

1. La réflexivité $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\!\sim \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ et l'affaiblissement à droite $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \models \alpha \wedge \beta$ donne :

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$$

2. La monotonie prudente entre $\alpha \mid\!\sim \beta$ et $\alpha \mid\!\sim \gamma$ donne :

$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$$

Conséquences remarquables du Système P

En effet

1. La réflexivité $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\!\sim \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ et l'affaiblissement à droite $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \models \alpha \wedge \beta$ donne :

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$$

2. La monotonie prudente entre $\alpha \mid\!\sim \beta$ et $\alpha \mid\!\sim \gamma$ donne :

$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$$

3. Appliquons la propriété de la coupure entre (1) et (2) donne:

$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$$

Conséquences remarquables du Système P

En effet

1. La réflexivité $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\!\sim \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ et l'affaiblissement à droite $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \models \alpha \wedge \beta$ donne :

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$$

2. La monotonie prudente entre $\alpha \mid\!\sim \beta$ et $\alpha \mid\!\sim \gamma$ donne :

$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$$

3. Appliquons la propriété de la coupure entre (1) et (2) donne:

$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$$

4. Appliquons de nouveau la propriété de la coupure entre (3) et $\alpha \mid\!\sim \beta$:

$$\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$$

Deux mots sur

la sémantique probabiliste

Interprétation majoritaire de ”presque tous les α sont les β

Interprétation majoritaire de ”presque tous les α sont les β

- Strict minimum : $P(\beta \mid \alpha) > \frac{1}{2}$

Interprétation majoritaire de ”presque tous les α sont les β

- Strict minimum : $P(\beta \mid \alpha) > \frac{1}{2}$
- $P(\beta \mid \alpha) > a$, avec $a > 0.5$ (par exemple : a=0.75, 0.80, .99, .9999, etc)

Interprétation majoritaire de "presque tous les α sont les β

- Strict minimum : $P(\beta \mid \alpha) > \frac{1}{2}$
- $P(\beta \mid \alpha) > a$, avec $a > 0.5$ (par exemple : a=0.75, 0.80, .99, .9999, etc)
- $P(\beta \mid \alpha) > \epsilon$. Analyse non standard : $\epsilon + \epsilon = \epsilon$

Exercice

Considérons la table des fréquences suivante :

Etudiant	Travaille_le_WE	Porte_des_lunettes	nombre_d'individus
1	1	1	60
1	0	0	40
0	1	0	40
–	–	–	0

Dans cet exercice, la règle "presque tous les A sont des B" est représentée par "au moins 60% des A sont des B".
Quelle est la règle du système P qui n'est pas satisfaite ?

Solutions

A partir de la table, nous avons :

- Presque tous les étudiants portent des lunettes.
- Presque tous ceux qui travaillent le WE portent des lunettes.
- Presque tous les individus qui sont soit étudiants soit travaillent le WE ne portent pas de lunettes.

Conclusion : La règle ”OU” n’est pas satisfaite.

Aller au delà du Système P

Monotonie rationnelle

Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$ et $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$,

alors

$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$$

Intuitivement

- Elle affaiblit la monotonie mais ell renforce la monotonie prudent.

Monotonie rationnelle

Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$ et $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$,

alors

$$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$$

Intuitivement

- Elle affaiblit la monotonie mais ell renforce la monotonie prudent.
- La monotonie prudente exige que β soit conséquence de α. La monotonie rationnelle se content du fait que β soit simplement cohérent avec α.

Monotonie rationnelle : une autre écriture

Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$

alors

$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ ou $\alpha \mid\!\sim \neg\beta$,

Monotonie rationnelle : une autre écriture

Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$

alors

$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ ou $\alpha \mid\!\sim \neg\beta$,

Intuitivement

- Plusieurs extensions (choix!) contrairement au Système P!

Complétude

Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$

alors

$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ ou $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \neg\gamma$,

Complétude

Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$

alors

$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ ou $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \neg\gamma$,

Intuitivement

- Plus loin que la monotonie prudente
- Pas de changement vers l'ignorance

Faire appel à la psychologie cognitifive

comment confirmer l'Intuitition

- Monotonie prudente
- Monotonie rationnelle
- Complétude
- etc.

Travail réalisé avec nos collègues de Toulouse le Mirail : R. da Silva Neves et J. F. Bonnefon.

La Question

Quelles sont les propriétés **désirables** pour une relation de conséquence non monotone?

- Le débat repose largement sur l'intuition des chercheurs

La Suggestion

Ce sont les propriétés qui sont manifestes dans les raisonnements par défaut des agents **humains**

- Monotonie Rationnelle ou bien seulement Prudente?
- Les raisonneurs préservent-ils l'ambiguïté des informations?
- La préservent-ils toujours en dehors des situations simples?

Le Scénario

Une nouvelle forme de vie découverte au pôle nord

Les

Glacyceas

Les Glacyceas ont de multiples traits

Certains sont des Crusts C

Ils vivent en milieu solide S

Ils sont hermaphrodites H

Il y en a des plats P

Ils sont nécrophages N

Ils sont opaques O

Ils ont des mandibules M

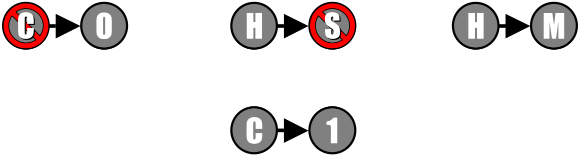
1

Ils vivent + d'un an R

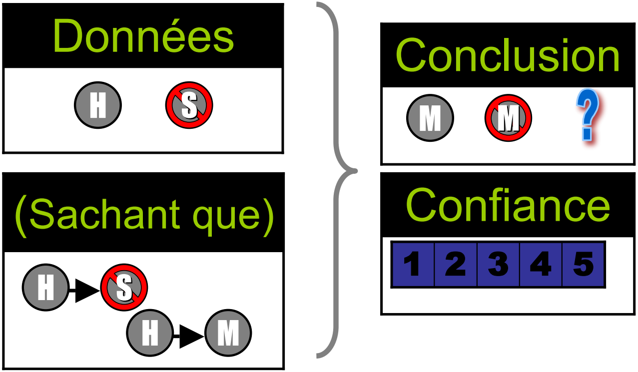
…Ou pas

~~C~~ ~~S~~ ~~H~~ ~~P~~ ~~N~~ ~~O~~ ~~M~~ ~~1~~ ~~R~~

Ce que nous savons d'eux…



Exemple: Monotonie Prudente

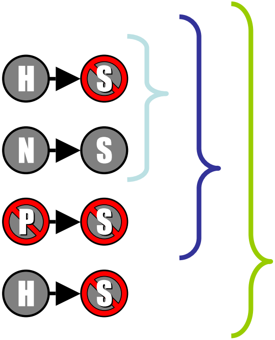


Prudents ou Rationnels?

MP est suivie à **90%,** MR l'est à **72%**

- La plausibilité psychologique de ces deux formes de monotonie est validée, au sens statistique.
- MP est, de façon fiable, plus suivie que MR.
- La confiance dans les conclusions de MR est légèrement inférieure à la confiance dans les conclusions de MP.

Préservation de l'Ambiguïté?



S	~~S~~	?
2%	15 %	83 % 4
2%	63 % 3	35 %
2%	63 % 4	35 %