Logique propositionnelle [1]

Salem BENFERHAT

Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL-CNRS)
email : benferhat@cril.fr

[1] Version préliminaire du cours. Tout retour sur la forme comme sur le fond est le bienvenu.

La logique propositionnelle

Rappels sur la logique propositionnelle

Qu'est ce que la logique propositionnelle

- Un langage formel pour exprimer des connaissances

Rappels sur la logique propositionnelle

Qu'est ce que la logique propositionnelle

- Un langage formel pour exprimer des connaissances
- La forme la plus simple des logiques mathématiques

Rappels sur la logique propositionnelle

Qu'est ce que la logique propositionnelle

- Un langage formel pour exprimer des connaissances
- La forme la plus simple des logiques mathématiques
- Un langage symbolique pour décrire des propositions et de raisonner avec.

Rappels sur la logique propositionnelle

Qu'est ce que la logique propositionnelle

- Un langage formel pour exprimer des connaissances
- La forme la plus simple des logiques mathématiques
- Un langage symbolique pour décrire des propositions et de raisonner avec.

Qu'est-ce qu'une proposition?

Une proposition (ou assertion) est une phrase déclarative qui peut-être soit vraie soit fausse (mais pas les deux, enfin dans des langages simples de représentation des connaissances!)

Rappels sur la logique propositionnelle

Quelques exemples

- RCL est champion de France en 1998
- 7 est un nombre premier

Ingrédients d'un langage logique

Syntaxe

- Vocabulaire : Un ensemble de symboles (dits propositionnels) et de connecteurs
- Un langage obtenu à partir des règles qui combinent ces symboles

Ingrédients d’un langage logique

Syntaxe

- Vocabulaire : Un ensemble de symboles (dits propositionnels) et de connecteurs
- Un langage obtenu à partir des règles qui combinent ces symboles

Sémantique

- Sens associé aux symboles et connecteurs
- Tables de vérité

Ingrédients d'un langage logique

Syntaxe

- Vocabulaire : Un ensemble de symboles (dits propositionnels) et de connecteurs
- Un langage obtenu à partir des règles qui combinent ces symboles

Sémantique

- Sens associé aux symboles et connecteurs
- Tables de vérité

Procédure d'inférence

- Ce sont des règles qui permettent de dériver de nouvelles propositions à partir des propositions considérées comme vraies.

Syntaxe de la logique propositionnelle

Les connecteurs logiques

Négation

- Si ”p” désigne une proposition alors on note souvent ”$\neg$ p” comme la négation de ”p”

Les connecteurs logiques

Négation

- Si "p" désigne une proposition alors on note souvent "$\neg$ p" comme la négation de "p"
- "$\neg$ p" signifie : il n'est vraie que "p"

Les connecteurs logiques

Négation

- Si ”p” désigne une proposition alors on note souvent ”$\neg$ p” comme la négation de ”p”
- ”$\neg$ p” signifie : il n’est vraie que ”p”
- Il n’est pas vraie que ”8 est un nombre premier”

Les connecteurs logiques

Conjonction et Disjonction

- Si ”p” et ”q” désignent deux propositions, alors on note souvent ”$p \wedge q$”, pour exprimer le fait que les deux assertions p et q sont toutes les deux sont vraies.

Les connecteurs logiques

Conjonction et Disjonction

- Si ”p” et ”q” désignent deux propositions, alors on note souvent ”$p \wedge q$”, pour exprimer le fait que les deux assertions p et q sont toutes les deux sont vraies.
- Si ”p” et ”q” désignent deux propositions, alors on note souvent ”$p \vee q$”, pour exprimer le fait que au moins l’une des deux assertions p et q est vraie (elles peuvent être vraies toutes les deux).

Les connecteurs logiques

Remarques

- La négation d'une proposition est une proposition
- La conjonction (respectivement la disjonction) de deux propositions est également une proposition.

Implication matérielle

- Très importante pour exprimer des informations conditionnelles et contextuelles

Les connecteurs logiques

Implication matérielle

- Très importante pour exprimer des informations conditionnelles et contextuelles
- Si ”p” et ”q” désignent deux propositions, alors on note souvent ”$p \Rightarrow q$”, pour exprimer le fait que si p est vraie alors q également vraie.

Les connecteurs logiques

Implication matérielle

- Très importante pour exprimer des informations conditionnelles et contextuelles
- Si ”p” et ”q” désignent deux propositions, alors on note souvent ”$p \Rightarrow q$”, pour exprimer le fait que si p est vraie alors q également vraie.
- Noter que si la proposition ”p” est fausse alors l’implication ”$p \Rightarrow q$ est considérée comme vraie!

Les connecteurs logiques

Implication matérielle

- Très importante pour exprimer des informations conditionnelles et contextuelles
- Si "p" et "q" désignent deux propositions, alors on note souvent "$p \Rightarrow q$", pour exprimer le fait que si p est vraie alors q également vraie.
- Noter que si la proposition "p" est fausse alors l'implication "$p \Rightarrow q$ est considérée comme vraie!
- L'implication matérielle "$p \Rightarrow q$ est logiquement équivalente à $\neg p \vee q$"

Les connecteurs logiques

Equivalence logique

- Si "p" et "q" désignent deux propositions alors on note souvent "$p \Leftrightarrow q$" (noté aussi $p \equiv q$), pour exprimer le fait que les deux propositions p et q sont équivalentes.

Equivalence logique

- Si "p" et "q" désignent deux propositions alors on note souvent "$p \Leftrightarrow q$" (noté aussi $p \equiv q$), pour exprimer le fait que les deux propositions p et q sont équivalentes.
- "$p \Leftrightarrow q$" est vue comme une conjonction de "$p \Rightarrow q$" et "$q \Rightarrow p$"

Un peu de formel : définition du langage propositionnelle

Vocabulaire

Le vocabulaire est composé :

- D'un ensemble symboles propositionnels V

Un peu de formel : définition du langage propositionnelle

Vocabulaire

Le vocabulaire est composé :

- D'un ensemble symboles propositionnels V
- D'un ensemble de connecteurs logiques : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Un peu de formel : définition du langage propositionnelle

Vocabulaire

Le vocabulaire est composé :

- D'un ensemble symboles propositionnels V
- D'un ensemble de connecteurs logiques : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- D'un ensemble de séparateurs très utiles pour lever les ambiguités : ",", ")", "(",...

Un peu de formel : définition du langage propositionnelle

Le langage : ensemble de formules propositionnelles

L'ensemble des formules propositionnelles (formules propositionnelles bien formées, propositions) est défini par les règles suivantes

- Si $p \in V$ alors p est une formule propositionnelle.

Un peu de formel : définition du langage propositionnelle

Le langage : ensemble de formules propositionnelles

L'ensemble des formules propositionnelles (formules propositionnelles bien formées, propositions) est défini par les règles suivantes

1. Si $p \in V$ alors p est une formule propositionnelle.
2. SI p est une formule propositionnelle alors $\neg p$ est une formule propositionnelle.

Un peu de formel : définition du langage propositionnelle

Le langage : ensemble de formules propositionnelles

L'ensemble des formules propositionnelles (formules propositionnelles bien formées, propositions) est défini par les règles suivantes

1. Si $p \in V$ alors p est une formule propositionnelle.
2. SI p est une formule propositionnelle alors $\neg p$ est une formule propositionnelle.
3. SI p et q sont des formules propositionnelles alors $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, et $p \Leftrightarrow q$, sont des formules propositionnelles.

Un peu de formel : définition du langage propositionnelle

Le langage : ensemble de formules propositionnelles

L'ensemble des formules propositionnelles (formules propositionnelles bien formées, propositions) est défini par les règles suivantes

1. Si $p \in V$ alors p est une formule propositionnelle.
2. SI p est une formule propositionnelle alors $\neg p$ est une formule propositionnelle.
3. SI p et q sont des formules propositionnelles alors $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, et $p \Leftrightarrow q$, sont des formules propositionnelles.
4. Les formules propositionnelles sont obtenues uniquement en appliquant les règles (1)-(3) un certain nombre de fois.

Sémantique de

la logique propositionnelle

Concept d'interpretations

- Rappel : Un symbole propositionnel est soit vrai soit faux (mais pas les deux en même temps).

Concept d'interpretations

- Rappel : Un symbole propositionnel est soit vrai soit faux (mais pas les deux en même temps).
- La valeur de vérité de chaque symbole propositionnel est CONNUE dans le monde REEL.

Concept d’interpretations

- Rappel : Un symbole propositionnel est soit vrai soit faux (mais pas les deux en même temps).
- La valeur de vérité de chaque symbole propositionnel est CONNUE dans le monde REEL.
- Malheureusement, en pratique nous n’avons pas accès à ce monde réel. Nous avons uniquement une description partielle du monde réel.

Concept d'interpretations

- Rappel : Un symbole propositionnel est soit vrai soit faux (mais pas les deux en même temps).
- La valeur de vérité de chaque symbole propositionnel est CONNUE dans le monde REEL.
- Malheureusement, en pratique nous n'avons pas accès à ce monde réel. Nous avons uniquement une description partielle du monde réel.
- Une interprétation est aussi appelé monde possible car elle représente un monde candidat pour être le monde réel. Une interprétation est une hypothèse sur le monde réel.

Concept d'interpretations

- Rappel : Un symbole propositionnel est soit vrai soit faux (mais pas les deux en même temps).
- La valeur de vérité de chaque symbole propositionnel est CONNUE dans le monde REEL.
- Malheureusement, en pratique nous n'avons pas accès à ce monde réel. Nous avons uniquement une description partielle du monde réel.
- Une interprétation est aussi appelé monde possible car elle représente un monde candidat pour être le monde réel. Une interprétation est une hypothèse sur le monde réel.
- Les informations (certaines) disponibles permettent d'écarter des interprétations (des mondes impossibles)

Concept d’interpretations

- Rappel : Un symbole propositionnel est soit vrai soit faux (mais pas les deux en même temps).
- La valeur de vérité de chaque symbole propositionnel est CONNUE dans le monde REEL.
- Malheureusement, en pratique nous n’avons pas accès à ce monde réel. Nous avons uniquement une description partielle du monde réel.
- Une interprétation est aussi appelé monde possible car elle représente un monde candidat pour être le monde réel. Une interprétation est une hypothèse sur le monde réel.
- Les informations (certaines) disponibles permettent d’écarter des interprétations (des mondes impossibles)
- Plus il y a d’informations moins il y a d’interprétations possibles!

Concept d’interpretations

Définition

- Une interprétation, souvent notée I, est une affectation de valeur de vérité à chaque symbole propositionnel.

Concept d'interpretations

Définition

- Une interprétation, souvent notée *I*, est une affectation de valeur de vérité à chaque symbole propositionnel.
- On note souvent I(p)=1 ou ”T” (respectivement I(p)=0 ou ”F”) pour indiquer que le symbole p est vrai (respectivement faux) dans le monde possible I.

Concept d’interpretations

Définition

- Une interprétation, souvent notée *I*, est une affectation de valeur de vérité à chaque symbole propositionnel.
- On note souvent I(p)=1 ou ”T” (respectivement I(p)=0 ou ”F”) pour indiquer que le symbole p est vrai (respectivement faux) dans le monde possible I.
- Une interprétation tout simplement correspond à une ligne d’une table de vérié

Concept d'interpretations

Définition

- Une interprétation, souvent notée *I*, est une affectation de valeur de vérité à chaque symbole propositionnel.
- On note souvent I(p)=1 ou "T" (respectivement I(p)=0 ou "F") pour indiquer que le symbole p est vrai (respectivement faux) dans le monde possible I.
- Une interprétation tout simplement correspond à une ligne d'une table de vérié
- A partir de l'interprétation associé aux propositions de base, on peut déterminer la valeur de vérité de toute formule complexe en donnant un sens à chaque connecteur : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Interprétation des connecteurs : Négation

La proposition p	**Sa négation** $\neg p$
0	**1**
1	**0**

Interprétation des connecteurs : Conjonction

p	q	$p \wedge q$
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**

Interprétation des connecteurs : Conjonction

p	q	$p \wedge q$
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Interprétation des connecteurs : Disjonction

p	q	$p \vee q$
0	0	**0**

Interprétation des connecteurs : Disjonction

p	q	$p \vee q$
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Interprétation des connecteurs : Implication matérielle

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	**1**

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	**1**
0	1	**1**

Interprétation des connecteurs : Implication matérielle

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	1	**1**

Interprétation des connecteurs : Implication matérielle

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	1	**1**
1	0	**0**

Exercice

Ecrire une fonction qui calcule le degré de vérité d'une formule dans une interprétation donnée.

Exercice

Ecrire une fonction qui calcule le degré de vérité d'une formule dans une interprétation donnée.

Modèles

- Une interprétation I est dite modèle d'une formule p, notée $I \models p$, si p est vraie dans I.
- Une interprétation I est contre-modèle de p si la proposition p est fausse dans I.

Tautologies et contradictions

Tautologies

Une tautologie est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations.

Tautologies et contradictions

Tautologies

Une tautologie est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations.

Contradictions

Une contradiction est une formule qui n'admet aucun modèle.

Tautologies et contradictions

Tautologies

Une tautologie est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations.

Contradictions

Une contradiction est une formule qui n'admet aucun modèle.

Exercice

Donne un exemple de formule qui est

- une tautologie,
- une contradiction

Inférence

Inférence

Equivalence

Deux formules sont dites équivalentes si elles admettent les mêmes modèles

Inférence

Equivalence

Deux formules sont dites équivalentes si elles admettent les mêmes modèles

Exercices

- Est-ce que les deux formules $p \Rightarrow q$ et $\neg q \Rightarrow \neg p$ sont équivalentes?

Inférence

Equivalence

Deux formules sont dites équivalentes si elles admettent les mêmes modèles

Exercices

- Est-ce que les deux formules $p \Rightarrow q$ et $\neg q \Rightarrow \neg p$ sont équivalentes?
- Est-ce que les deux formules $p \Rightarrow q$ et $\neg p \Rightarrow \neg q$ sont équivalentes?

Autres notions

Définitions

- Litéral : un atome ou la négation d'un atome.
- Clause : une disjonction de littéraux.
- Cube : une conjonction de littéraux.
- CNF : forme normale conjonction, une conjonction de clauses.
- DNF : forme normale disjonctive, une disjonction de cubes.

Transformations équivalentes

CNF et DNF

Toute formule peut être mise, de manière équivalente, sous forme CNF (resp. DNF)

Exercice

Exercice : DNF

Soit p une formule sous forme DNF. Soit C une clause.

- Donner un algorithme qui vérifie si p est cohérente.

Exercice

Exercice : DNF

Soit p une formule sous forme DNF. Soit C une clause.

- Donner un algorithme qui vérifie si p est cohérente.
- Donner un algorithme qui vérifie si $p \wedge C$ est cohérente

Exercice

Exercice

Soit $(p \vee \neg(q \vee \neg(r \wedge \neg q))) \wedge (\neg p \vee q)$

- Mettre la formule sous forme DNF
- La formule est-elle cohérente avec la clause $\neg q \vee r$?
- La formule est-elle cohérente avec la clause $\neg p$?
- La formule est-elle cohérente avec la clause p?
- Donner la liste des modèles de la formule.

Exercice

$$
\begin{aligned}
& (p \vee \neg(q \vee \neg(r \wedge \neg q))) \wedge (\neg p \vee q) \\
\equiv\ & (p \vee (\neg q \wedge (r \wedge \neg q))) \wedge (\neg p \vee q) \\
\equiv\ & (p \vee (\neg q \wedge r \wedge \neg q)) \wedge (\neg p \vee q) \\
\equiv\ & (p \vee (r \wedge \neg q)) \wedge (\neg p \vee q) \\
\equiv\ & (p \wedge (\neg p \vee q)) \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \\
\equiv\ & (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \\
\equiv\ & \bot \vee (p \wedge q) \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \\
\equiv\ & (p \wedge q) \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \\
\equiv\ & (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg q \wedge q) \\
\equiv\ & (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee \bot \\
\equiv\ & (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q \wedge \neg p)
\end{aligned}
$$

Exercice

Exercice

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie. 3 suspects : a, b, c.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes.

- Il y a au moins un coupable.

Exercice

Exercice

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie. 3 suspects : a, b, c.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes.

- Il y a au moins un coupable.
- Il existe au plus deux coupables.

Exercice

Exercice

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie. 3 suspects : a, b, c.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes.

- Il y a au moins un coupable.
- Il existe au plus deux coupables.
- si a est coupable, alors il a un seul complice ;

Exercice

Exercice

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie. 3 suspects : a, b, c.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes.

- Il y a au moins un coupable.
- Il existe au plus deux coupables.
- si a est coupable, alors il a un seul complice ;
- si b est innocent, alors c l'est aussi ;

Exercice

Exercice

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie. 3 suspects : a, b, c.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes.

- Il y a au moins un coupable.
- Il existe au plus deux coupables.
- si a est coupable, alors il a un seul complice ;
- si b est innocent, alors c l'est aussi ;
- s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux ;

Exercice

Exercice

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie. 3 suspects : a, b, c.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes.

- Il y a au moins un coupable.
- Il existe au plus deux coupables.
- si a est coupable, alors il a un seul complice ;
- si b est innocent, alors c l'est aussi ;
- s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux ;
- si c est innocent, alors b l'est aussi.

Exercice

Exercice

Un cambriolage a eu lieu dans une bijouterie. 3 suspects : a, b, c.
Modéliser de manière indépendante chacune des règles suivantes.

- Il y a au moins un coupable.
- Il existe au plus deux coupables.
- si a est coupable, alors il a un seul complice ;
- si b est innocent, alors c l'est aussi ;
- s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux ;
- si c est innocent, alors b l'est aussi.
- L'ensemble de ces informations est-il cohérent?

Solutions

Modélisation

Pour le vocabulaire, on prend trois variables propositionnelles :

Nom des variables	Signification des variables
a	a est coupable
b	b est coupable
c	c est coupable

Bien sûr $\neg a$ (resp. $\neg b$, $\neg c$) signifie que a (resp. b, c) est innocent.

Solutions

Il y a au moins un coupable

Il y a au moins un coupable se code :

$$a \vee b \vee c$$

Cette formule exprime le fait que a, b et c ne peuvent pas être tous les trois à faux.

Solutions

Il existe au plus deux coupables

Premier codage :

- Intuitivement, il existe au plus deux coupables revient à dire que :
  - si a et b sont coupables alors c est innocent,
  - si a et c sont coupables alors b est innoncent, et
  - si b et c sont coupables alors a est innoncent.
- Ces trois énoncés s'écrivent en logique comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} a & \wedge & b & \rightarrow \neg c \\ a & \wedge & c & \rightarrow \neg b \\ b & \wedge & c & \rightarrow \neg a \end{array}$$

Solutions

il existe au plus deux coupables

Deuxième codage :

- Intuitivement, il existe au plus deux coupables revient à dire que a, b, c ne peuvent être tous les trois coupables
- Ce qui revient à écrire :

$$\neg(a \wedge b \wedge c).$$

Solutions

Il existe au plus deux coupables

Troisième codage :

- Intuitivement, il existe au plus deux coupables revient à dire qu'au moins un des trois suspects est innocent
- Ce qui revient à écrire :

$$\neg a \vee \neg b \vee \neg c$$

Solutions

si a est coupable, alors il a au moins un complice

- Cette information se code en :

$$a \rightarrow (b \vee c)$$

- ou encore :

$$\neg a \vee b \vee c$$

Solutions

Si b est innocent, alors c l'est aussi

- Cette information se code en :

$$\neg b \to \neg c$$

- ou encore :

$$b \vee \neg c$$

Solutions

s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux

D'abord il faut représenter l'information "il y a exactement deux coupables" qui s'écrit :

- La formule suivante exprime le fait qu'il y ait au moins deux coupables :

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

- La formule suivante exprime le fait qu'il y a au moins un innocent :

$$(\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

Solutions

s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux

- La conjonction de ces deux formules exprime bien l'information "il y a exactement deux coupables" qui s'écrit donc :

  $$((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

  ce qui est équivalent à :

  $$((a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)) \vee ((a \wedge c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)) \vee ((b \wedge c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c))$$

  qui se simplifie en :

  $$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)$$

Solutions

s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux

Codons maintenant l'information "s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux" :

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \rightarrow a$$

Simplifions cette formule.

Solutions

S'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \rightarrow a$$

$$\equiv \neg((a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)) \vee a$$

$$\equiv (\neg(a \wedge b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge \neg b \wedge c) \wedge \neg(\neg a \wedge b \wedge c)) \vee a$$

$$\equiv ((\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)) \vee a$$

$$\equiv ((\neg a \vee \neg b \vee c) \vee a) \wedge ((\neg a \vee b \vee \neg c) \vee a) \wedge ((a \vee \neg b \vee \neg c) \vee a)$$

$$\equiv \top \wedge \top \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$$

$$\equiv (a \vee \neg b \vee \neg c)$$

Solutions

s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux

La formule

$$(a \vee \neg b \vee \neg c)$$

est équivalente à :

$$\neg a \rightarrow \neg b \vee \neg c$$

qui signifie si *a* est innocent alors b ou c sont innocents (b et c ne peuvent être en même temps coupables).
Elle est également équivalente à :

$$b \wedge c \rightarrow a$$

qui signifie, si $b \wedge c$ sont coupables alors *a* l'est aussi (sinon on aura deux coupables sans a comme coupable).

Solutions

Si c est innocent, alors b l'est aussi

Cette information se code simplement en :

$$\neg c \rightarrow \neg b$$

Solution

L'ensemble des informations est codé comme suit :

K = $\{a \vee b \vee c$,
Il y a au moins un coupable
$\neg a \vee \neg b \vee \neg c$,
Il existe au plus deux coupables
$\neg a \vee b \vee c$,
si a est coupable, alors il a au moins un complice
b $\vee \neg c$,
si b est innocent, alors c l'est aussi
$a \vee \neg b \vee \neg c$,
s'il y a exactement deux coupables, alors a est l'un d'entre eux
$c \vee \neg b$
si c est innocent, alors b l'est aussi$\}$

Inférence

Bases de connaissances

- Une bases de connaissances est un ensemble de formules propositionnelles, notée K.

Inférence

Bases de connaissances

- Une bases de connaissances est un ensemble de formules propositionnelles, notée K.
- Une base de connaissances exprime les connaissances disponibles sur un problème donnée

Inférence

Bases de connaissances

- Une bases de connaissances est un ensemble de formules propositionnelles, notée K.
- Une base de connaissances exprime les connaissances disponibles sur un problème donnée
- K est interprétée comme une conjonction de formules propositionnelles

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$\color{blue}{x} \vee \color{blue}{x} \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

peut-être simplifiée en :

$$\color{blue}{x} \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$x \vee x \vee y_1 \vee \dots y_n$$

peut-être simplifiée en :

$$x \vee y_1 \vee \dots y_n$$

La suppression des doublons donne une clause équivalente.

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$x \vee \neg x \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

peut-être simplifiée en :

$$\top$$

Tester la cohérence d’un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$x \vee \neg x \vee y_1 \vee \dots y_n$$

peut-être simplifiée en :

$$\top$$

Deux littéraux complémentaires dans une clause donne une tautologie.

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$x \vee \top$$

peut-être simplifiée en :

Tester la cohérence d’un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$x \vee \top$$

peut-être simplifiée en :

$$\top$$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$x \vee \bot$$

peut-être simplifiée en :

Tester la cohérence d’un ensemble de clauses

Simplifications

La clause :

$$x \vee \bot$$

peut-être simplifiée en :

$$x$$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

Supposons que x est vrai. Alors la clause :

$$x \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

Tester la cohérence d’un ensemble de clauses

Simplifications

Supposons que x est vrai. Alors la clause :

$$x \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

est toujours satisfaite et peut-être supprimée de la base.

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

Supposons que x est faux. Alors la clause :

$$x \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

Supposons que x est faux. Alors la clause :

$$x \vee y_1 \vee \dots y_n$$

peut-être simplifiée en :

$$y_1 \vee \dots y_n$$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

Supposons que x est faux. Alors la clause :

$$x \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

peut-être simplifiée en :

$$y_1 \vee \ldots y_n$$

Cas particulier

Supposons que x est faux. Alors la clause :

$$x$$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Simplifications

Supposons que x est faux. Alors la clause :

$$x \vee y_1 \vee \ldots y_n$$

peut-être simplifiée en :

$$y_1 \vee \ldots y_n$$

Cas particulier

Supposons que x est faux. Alors la clause :

$$x$$

se simplifie en

$$\perp$$

.

Tester la cohérence d’un ensemble de clauses

Base vide

Si K est vide alors :

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Base vide

Si K est vide alors : K est cohérente.

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Présence de contradiction

Si $\perp \in K$ alors :

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Présence de contradiction

Si $\perp \in K$ alors : K est incohérente.

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Notation

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel. Notons :

$K_{x \leftarrow \top}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\top$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Notation

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel. Notons :

$K_{x \leftarrow \top}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\top$

et

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Notation

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel. Notons :

$K_{x \leftarrow \top}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\top$

et

$K_{x \leftarrow \bot}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\bot$

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Notation

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel. Notons :

$K_{x \leftarrow \top}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\top$

et

$K_{x \leftarrow \bot}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\bot$

- $K_{x \leftarrow \top}$ (resp. $K_{x \leftarrow \bot}$) est la base simplifiée de K sous l'hypothèse que x est vrai (resp. faux).

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Notation

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel. Notons :

$K_{x \leftarrow \top}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\top$

et

$K_{x \leftarrow \bot}$: le résultat du remplacement des occurrences de x par $\bot$

- $K_{x \leftarrow \top}$ (resp. $K_{x \leftarrow \bot}$) est la base simplifiée de K sous l'hypothèse que x est vrai (resp. faux).
- $K_{x \leftarrow \top}$ et $K_{x \leftarrow \bot}$ ne contiennent pas de référence au symbole x.

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Propriété

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel.

K est cohérent

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Propriété

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel.

K est cohérent

ssi

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

Propriété

Soit K un ensemble de clauses. Soit x un symbole propositionnel.

K est cohérent

ssi

$K_{x \leftarrow \top}$ est cohérent ou $K_{x \leftarrow \bot}$ est cohérent

Tester la cohérence d'un ensemble de clauses

```
int estcoherent (K)
{
  if K==∅ return 1
  else if ⊥∈ K return 0
  else
  {
  soit x un symbole de K;
  return (estcoherent(K_{x←⊤}) || estcoherent(K_{x←⊥}))
  }
}
```

Exemple du cambriolage

Tester la cohérence de la base de connaissances suivante :

$$
\begin{aligned}
K \quad = \quad & \{a \vee b \vee c, \\
& \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \\
& \neg a \vee b \vee c, \\
& \mathrm{b} \vee \neg c, \\
& a \vee \neg b \vee \neg c, \\
& c \vee \neg b\}
\end{aligned}
$$

Inférence

exercice

- Donner le nombre de modèles de chacune des bases suivantes :
  - $K_1 = \{(\neg a \vee b) \vee c\}$

Inférence

exercice

- Donner le nombre de modèles de chacune des bases suivantes :
  - $K_1 = \{(\neg a \vee b) \vee c\}$
  - $K_2 = \{(\neg a \vee b) \vee c, \neg c\}$

Inférence

exercice

- Donner le nombre de modèles de chacune des bases suivantes :
  - $K_1 = \{(\neg a \vee b) \vee c\}$
  - $K_2 = \{(\neg a \vee b) \vee c, \neg c\}$
  - $K_3 = \{(\neg a \vee b) \vee c, \neg b\}$

Inférence

exercice

- Donner le nombre de modèles de chacune des bases suivantes :
  - $K_1 = \{(\neg a \vee b) \vee c\}$
  - $K_2 = \{(\neg a \vee b) \vee c, \neg c\}$
  - $K_3 = \{(\neg a \vee b) \vee c, \neg b\}$
  - $K_4 = \{(\neg a \vee b) \vee c, \neg b, a\}$
- Que faut-il conclure?

Exemple du cambriolage

K= $\{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c,$
$\neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c,$
$a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$

Exemple du cambriolage

K= $\{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c,$
$\neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c,$
$a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$

Exemple du cambriolage

$$K = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

$$K \xrightarrow{b \to \top} K_{b \to \top}$$

$$K_{b\to\top} = \{ \cancel{a \vee b \vee c}, \neg a \vee \cancel{\neg b} \vee \neg c, \cancel{\neg a \vee b \vee c}, \cancel{b \vee \neg c}, a \vee \cancel{\neg b} \vee \neg c, c \vee \cancel{\neg b} \}$$

Exemple du cambriolage

$$K = \{a \lor b \lor c, \neg a \lor \neg b \lor \neg c, \neg a \lor b \lor c, b \lor \neg c, a \lor \neg b \lor \neg c, c \lor \neg b\}$$

$$K \xrightarrow{b \to \top} K_{b \to \top} \qquad K \xrightarrow{b \to \bot} K_{b \to \bot}$$

$$\begin{array}{ll}
K_{b\to\top}=\{ & \cancel{a \lor b \lor c}, \\
 & \neg a \lor \cancel{\neg b} \lor \neg c, \\
 & \cancel{\neg a \lor b \lor c}, \\
 & \cancel{b \lor \neg c}, \\
 & a \lor \cancel{\neg b} \lor \neg c, \\
 & c \lor \cancel{\neg b}\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
K_{b\to\bot}=\{ & a \lor \cancel{b} \lor c, \\
 & \cancel{\neg a \lor \neg b \lor \neg c}, \\
 & \neg a \lor \cancel{b} \lor c, \\
 & \cancel{b} \lor \neg c, \\
 & \cancel{a \lor \neg b \lor \neg c}, \\
 & \cancel{c \lor \neg b}\}
\end{array}$$

Exemple du cambriolage

$$\text{K=} \quad \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c,$$
$$\neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c,$$
$$a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

Exemple du cambriolage

$$\text{K=}\quad \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c,\\ \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c,\\ a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

Exemple du cambriolage

$$
\begin{aligned}
K = \ & \{a \lor b \lor c, \neg a \lor \neg b \lor \neg c, \\
& \neg a \lor b \lor c, b \lor \neg c, \\
& a \lor \neg b \lor \neg c, c \lor \neg b\}
\end{aligned}
$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle b \to \top}$$

$$
\begin{aligned}
K_{b \to \top} = \{ \ & \neg a \lor \neg c, \\
& a \lor \neg c, \\
& c\}
\end{aligned}
$$

Exemple du cambriolage

$$K = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

$b \to \top$

$$K_{b \to \top} = \{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\}$$

$b \to \bot$

$$K_{b \to \bot} = \{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\}$$

Exemple du cambriolage

$$K = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

$$K \xrightarrow{b \to \top} K_{b \to \top} = \{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\}$$

$$K \xrightarrow{b \to \bot} K_{b \to \bot} = \{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\}$$

Exemple du cambriolage

$$K = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \\ \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, \\ a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

Exemple du cambriolage

$$\begin{aligned} K = \quad & \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \\ & \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, \\ & a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\} \end{aligned}$$

Exemple du cambriolage

K= $\{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c,$
$\neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c,$
$a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$

$\xrightarrow{b \rightarrow \top}$

$K_{b\rightarrow\top}=\{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\}$

Exemple du cambriolage

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \begin{array}{ll} K= & \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \\ & \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, \\ & a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\} \end{array} \arrow[dl, "b \to \top"'] \arrow[dr, "b \to \bot"] & \\
K_{b \to \top} = \{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\} & & K_{b \to \bot} = \{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\}
\end{tikzcd}$$

Exemple du cambriolage

$$K= \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

$b \rightarrow \top$

$b \rightarrow \bot$

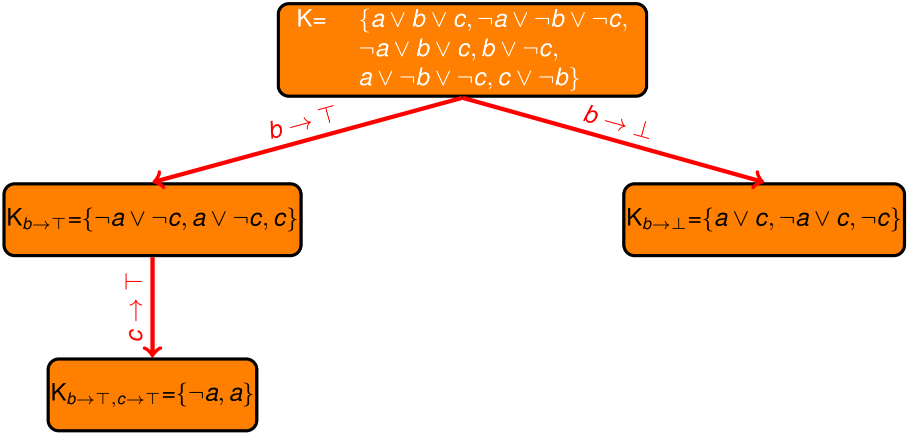
$$K_{b\rightarrow\top}=\{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\}$$

$$K_{b\rightarrow\bot}=\{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\}$$

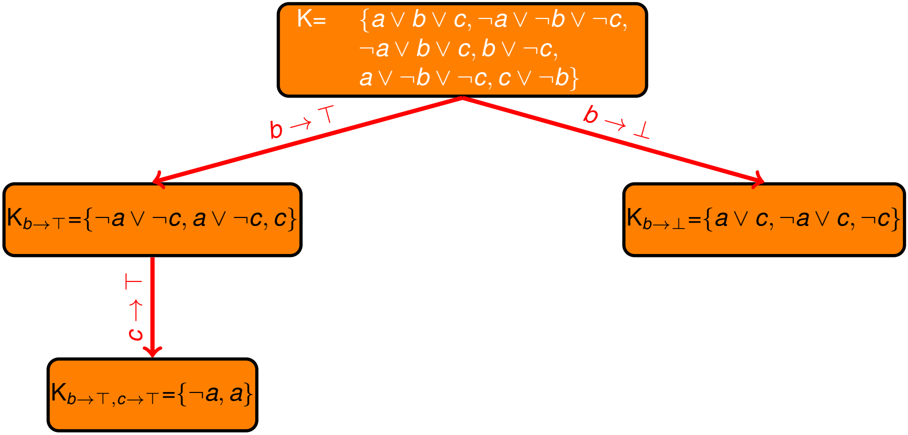
Exemple du cambriolage

$$
\begin{tikzcd}
& K=\{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\} \arrow[dl, "b \to \top"'] \arrow[dr, "b \to \bot"] & \\
K_{b \to \top}=\{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\} \arrow[d, "c \to \top"'] & & K_{b \to \bot}=\{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\} \\
K_{b \to \top, c \to \top}=\{\neg a, a\} & &
\end{tikzcd}
$$

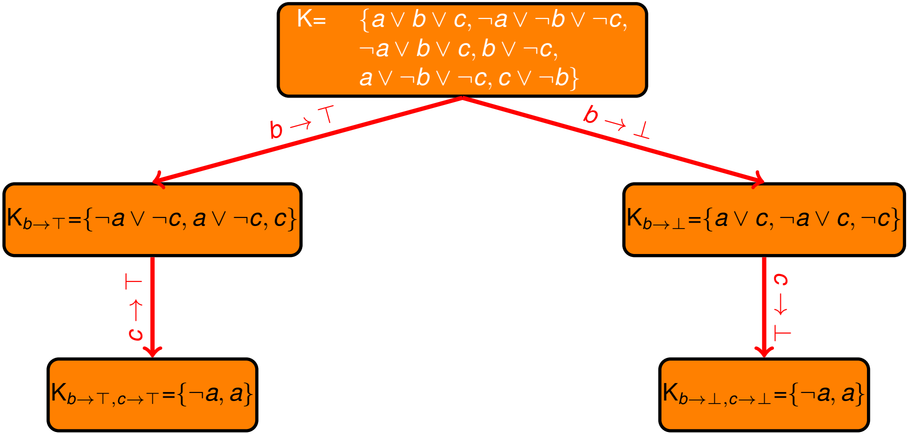
Exemple du cambriolage



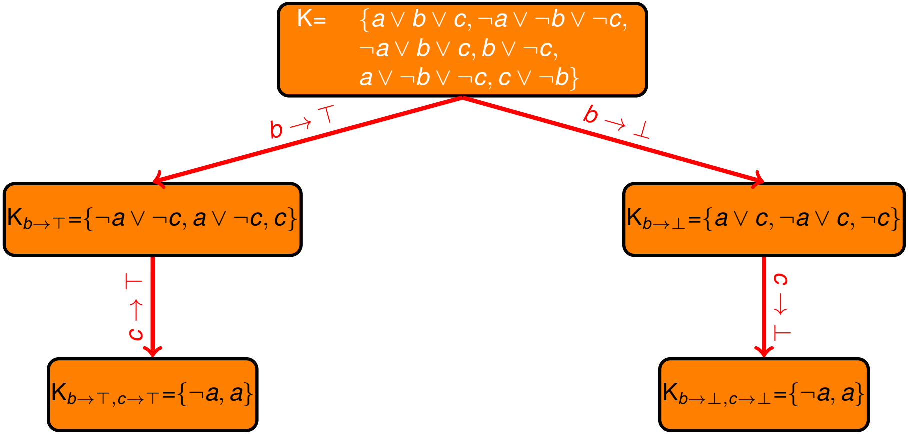
Exemple du cambriolage



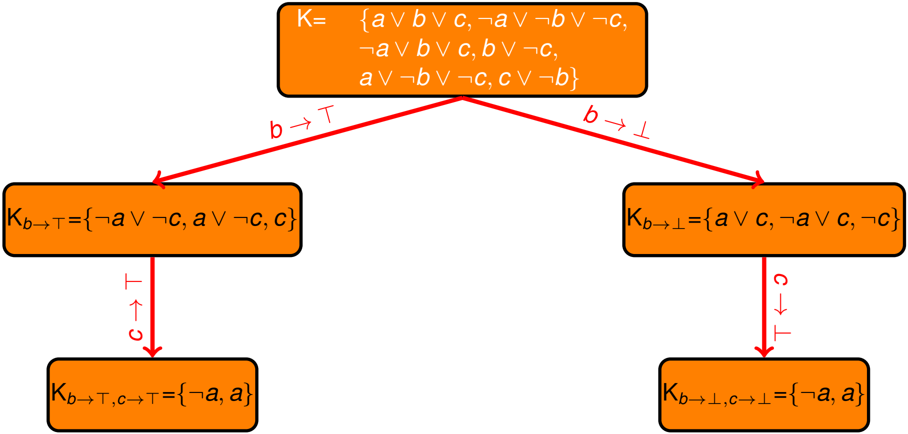
Exemple du cambriolage



Exemple du cambriolage



Exemple du cambriolage



Exemple du cambriolage

K= $\{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c,$
$\neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c,$
$a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$

Exemple du cambriolage

$$K = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c,\\ \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c,\\ a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

Exemple du cambriolage

$$K = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\}$$

$$\xrightarrow{b \to \top}$$

$$K_{b \to \top} = \{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\}$$

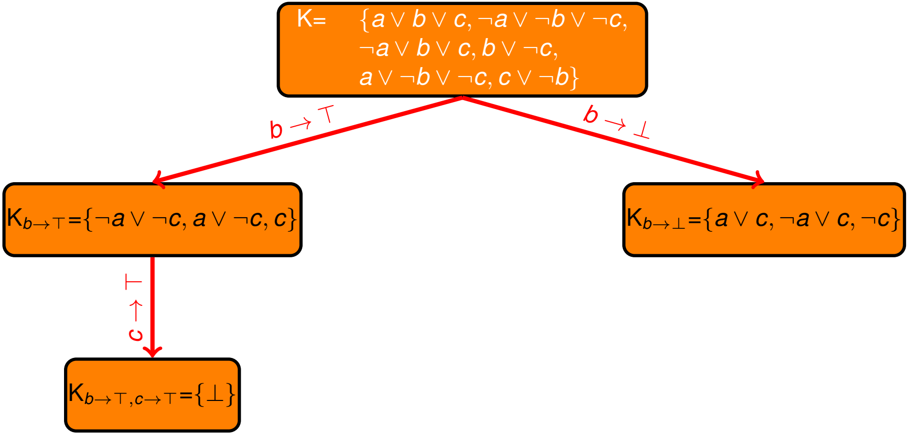
Exemple du cambriolage

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \text{K} = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\} \arrow[dl, "b \to \top"'] \arrow[dr, "b \to \bot"] & \\
\text{K}_{b\to\top} = \{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\} & & \text{K}_{b\to\bot} = \{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\}
\end{tikzcd}$$

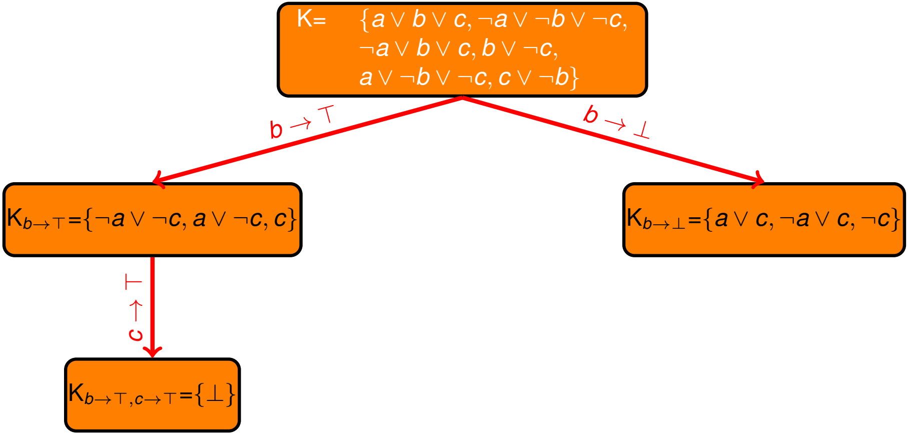
Exemple du cambriolage

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{K} = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\} \arrow[dl, "b \to \top"'] \arrow[dr, "b \to \bot"] & \\
\text{K}_{b \to \top} = \{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\} & & \text{K}_{b \to \bot} = \{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\}
\end{tikzcd}$$

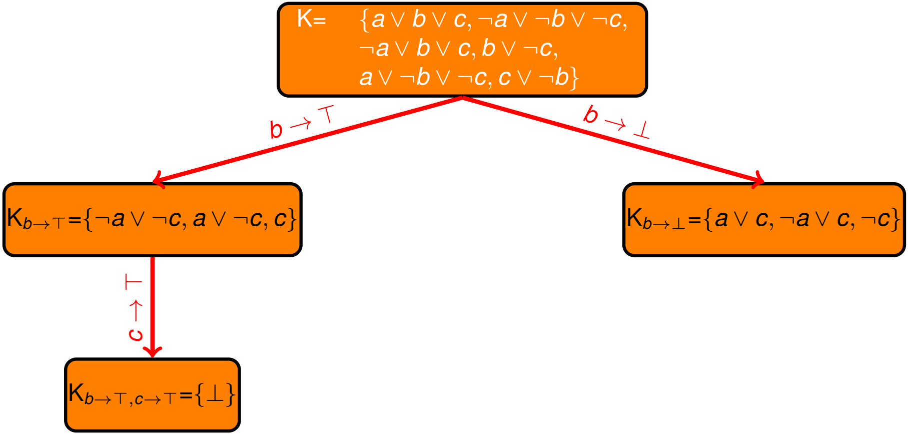
Exemple du cambriolage



Exemple du cambriolage



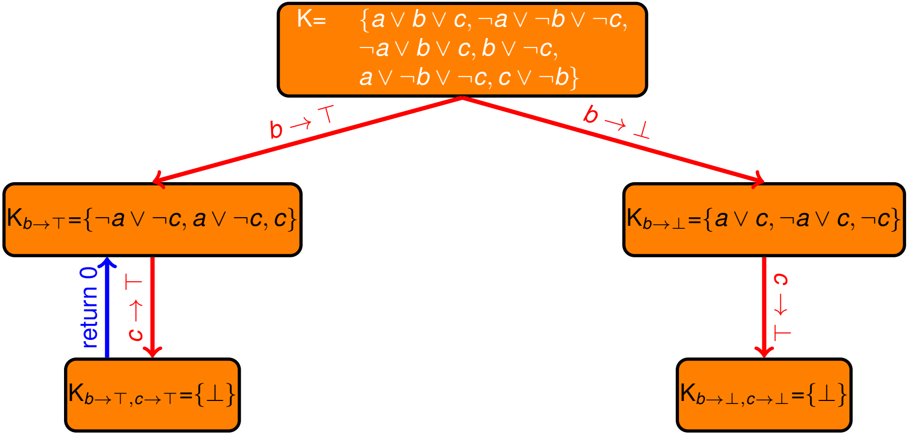
Exemple du cambriolage



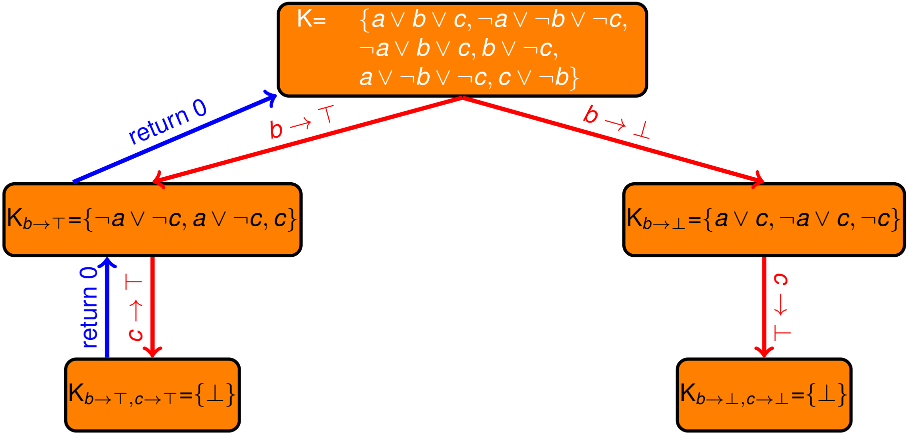
Exemple du cambriolage

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{K}= & \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c, \\ & \neg a \vee b \vee c, b \vee \neg c, \\ & a \vee \neg b \vee \neg c, c \vee \neg b\} \end{array}} \arrow[dl, "b \to \top"'] \arrow[dr, "b \to \bot"] & \\
\boxed{\mathrm{K}_{b\to\top}=\{\neg a \vee \neg c, a \vee \neg c, c\}} \arrow[d, "c \to \top"'] & & \boxed{\mathrm{K}_{b\to\bot}=\{a \vee c, \neg a \vee c, \neg c\}} \arrow[d, "c \to \bot"] \\
\boxed{\mathrm{K}_{b\to\top, c\to\top}=\{\bot\}} & & \boxed{\mathrm{K}_{b\to\bot, c\to\bot}=\{\bot\}}
\end{tikzcd}
$$

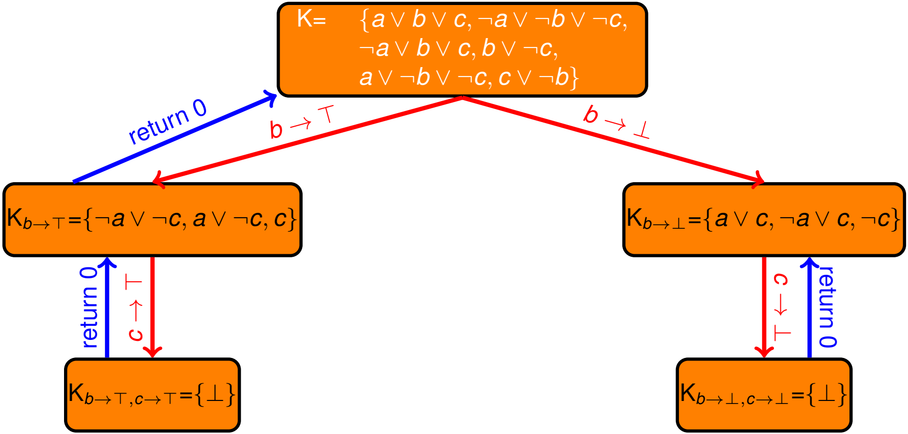
Exemple du cambriolage



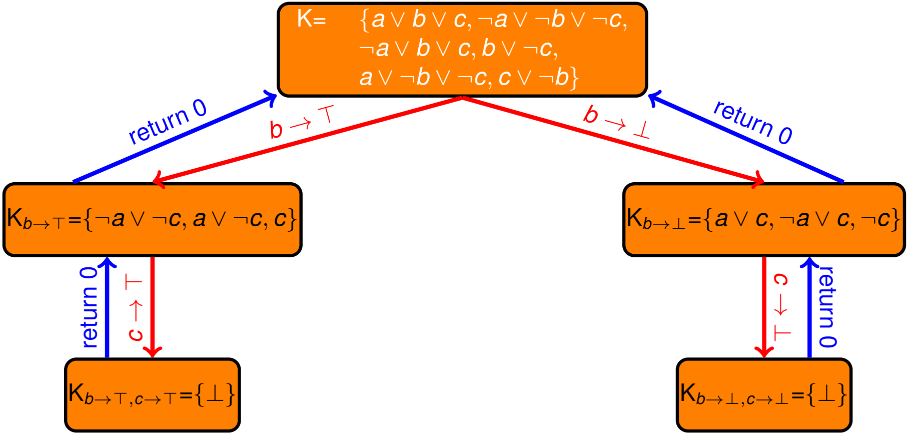
Exemple du cambriolage



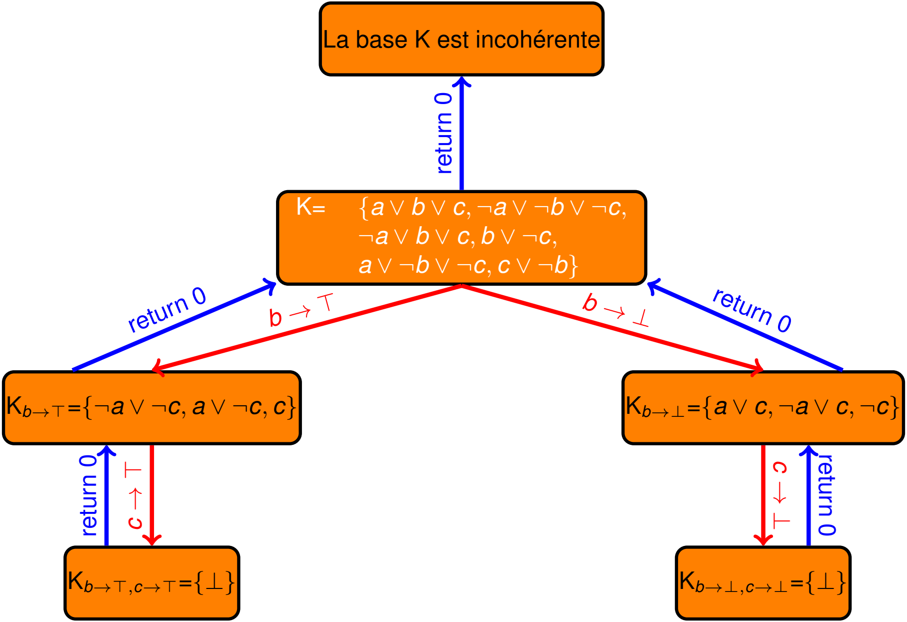
Exemple du cambriolage



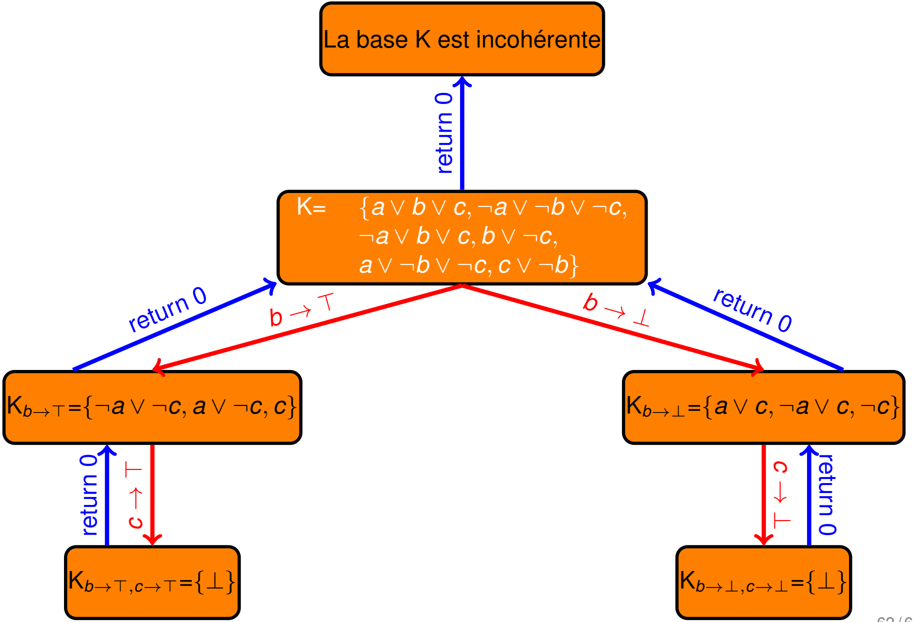
Exemple du cambriolage



Exemple du cambriolage



Exemple du cambriolage



Remarques

- Le choix de la variable propositionnelle à mettre en racine n'influence pas le résultat final du test de la cohérence d'un ensemble de clauses.
- Cependant, ce choix peut-être crucial pour évaluer rapidement la cohérence d'un ensemble de clauses.
- Par exemple :
  - Commencer toujours par des clauses dites unitaires (contenant un seul littéral). Car leur valeur de vérité est fixée.
  - Commencer toujours par des littéraux qui sont soit positifs soit négatifs dans toutes les clauses
  - Commencer par les littéraux qui apparaissent le plus souvent (on parle ici d'heuristiques)
  - etc.

Inférence

Conséquence logique

- Une formule p est une conséquence logique d'une base K si tout modèle de K est également modèle de p

Exercice : DNF

Soit p une formule sous forme DNF. Soit C une clause.

- Donner un algorithme qui vérifie si C est une conséquence de p