Récursivité[1] : Algorithmes et Complexité
Partie 2

Salem BENFERHAT

Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL-CNRS)
email : benferhat@cril.fr

[1] Version préliminaire du cours. Tout retour sur la forme comme sur le fond est le bienvenu.

Tour de Hanoï

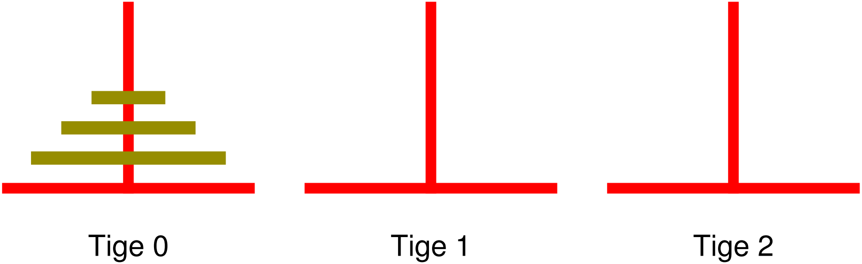
et se variantes

Tour de Hanoï :

nombre de disques = 3

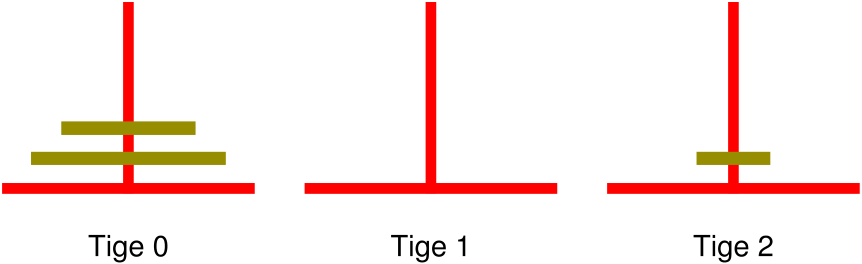
Tour de Hanoï

Etape 0: La tour à l'état initial



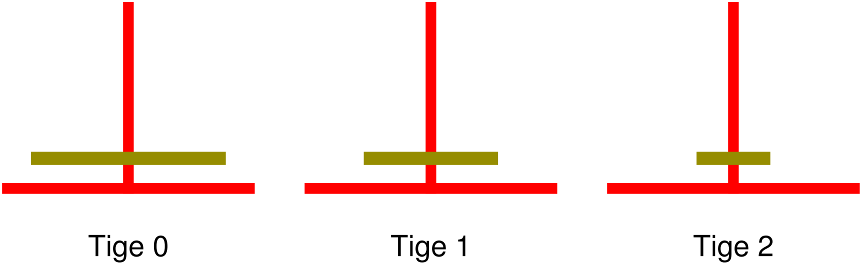
Tour de Hanoï

Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



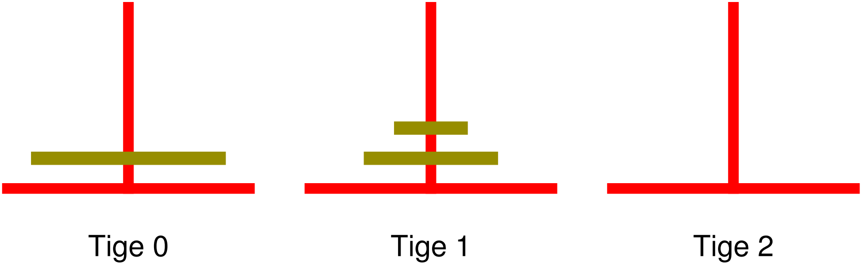
Tour de Hanoï

Etape 2: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 1



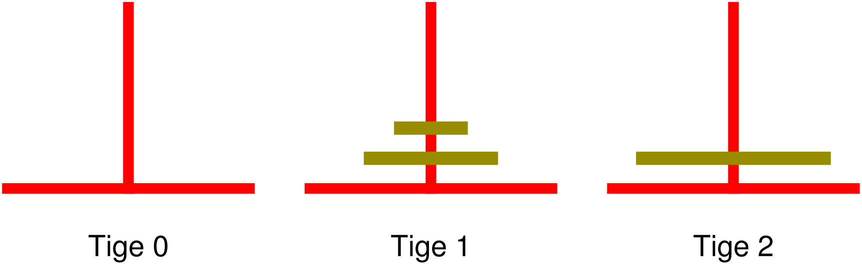
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 1



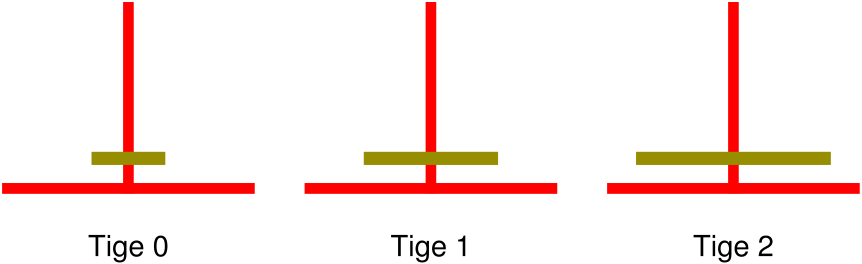
Tour de Hanoï

Etape 4: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



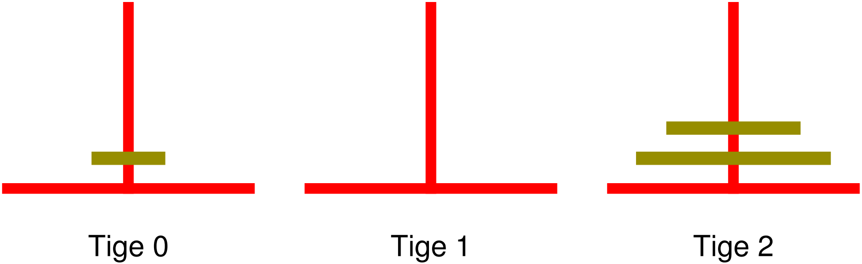
Tour de Hanoï

Etape 5: déplacer un disque de la tige 1 vers la tige 0



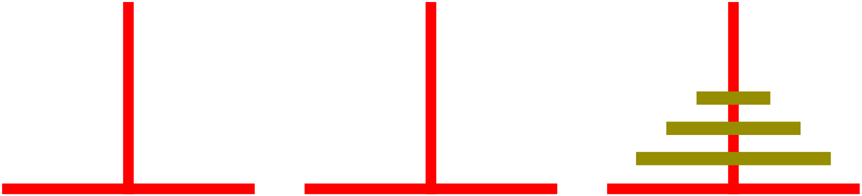
Tour de Hanoï

Etape 6: déplacer un disque de la tige 1 vers la tige 2



Tour de Hanoï

Etape 7: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



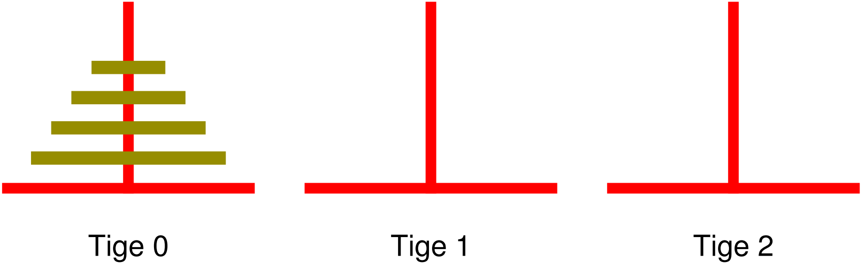
Tige 0 Tige 1 Tige 2

Tour de Hanoï :

nombre de disques = 4

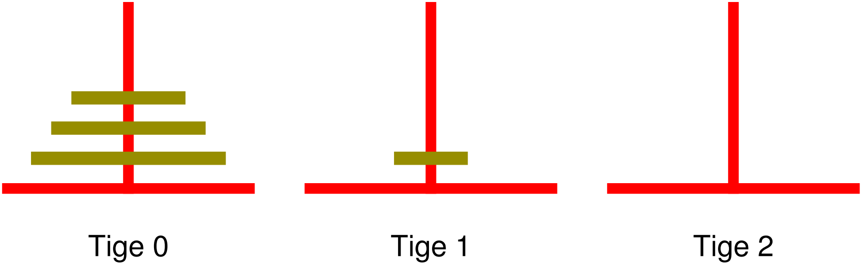
Tour de Hanoï

Etape 0: La tour à l'état initial



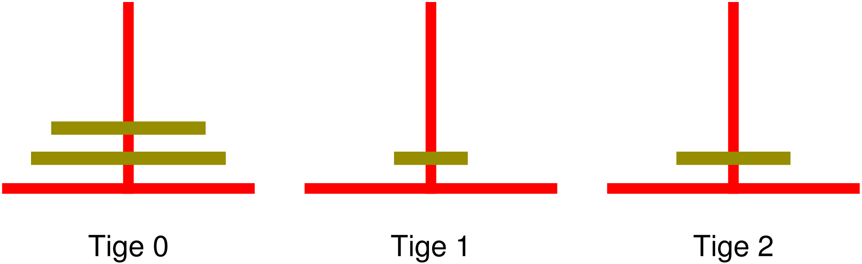
Tour de Hanoï

Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 1



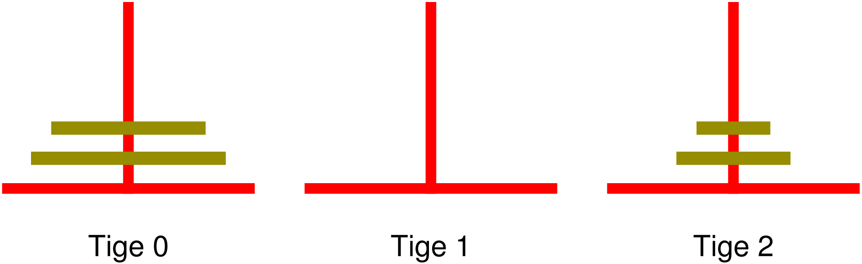
Tour de Hanoï

Etape 2: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



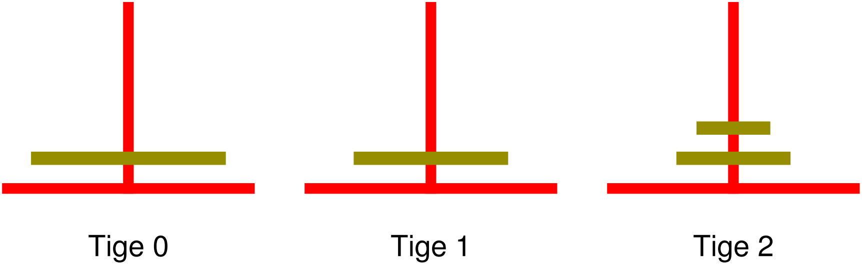
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 1 vers la tige 2



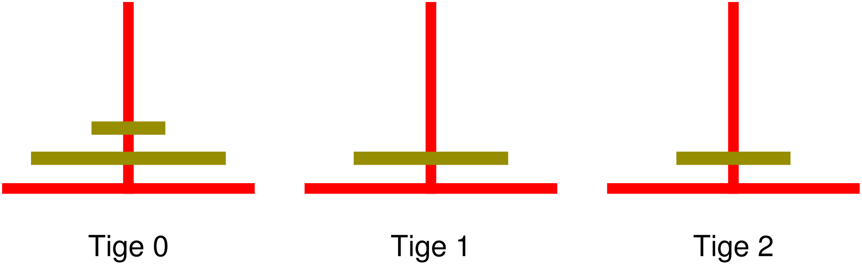
Tour de Hanoï

Etape 4: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 1



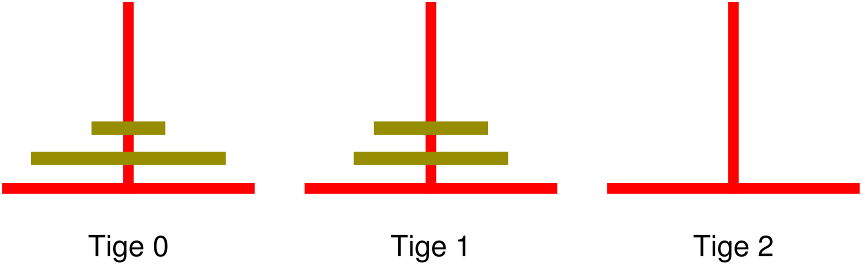
Tour de Hanoï

Etape 5: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



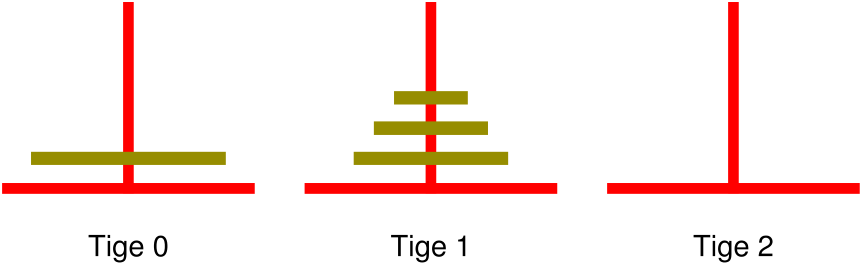
Tour de Hanoï

Etape 6: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 1



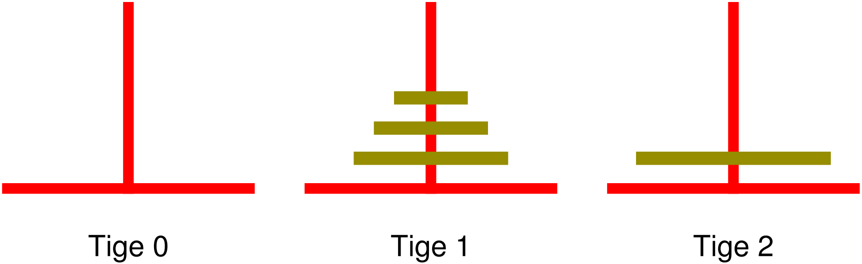
Tour de Hanoï

Etape 7: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 1

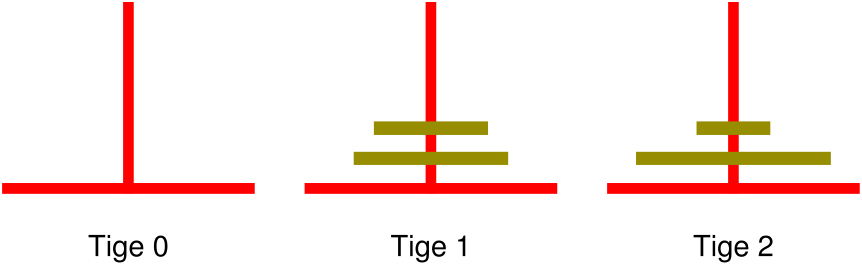


Tour de Hanoï

Etape 8: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2

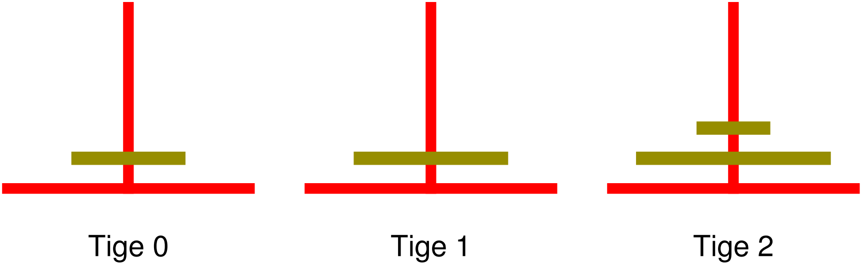


Etape 9: déplacer un disque de la tige 1 vers la tige 2



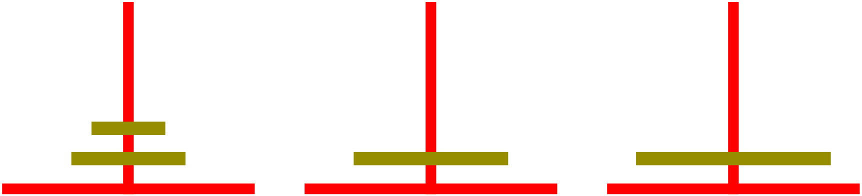
Tour de Hanoï

Etape 10: déplacer un disque de la tige 1 vers la tige 0



Tour de Hanoï

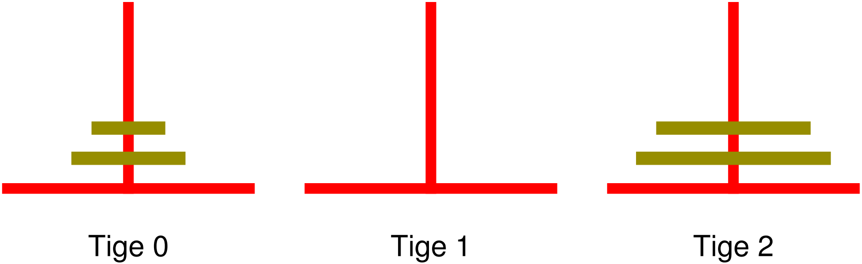
Etape 11: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



Tige 0 Tige 1 Tige 2

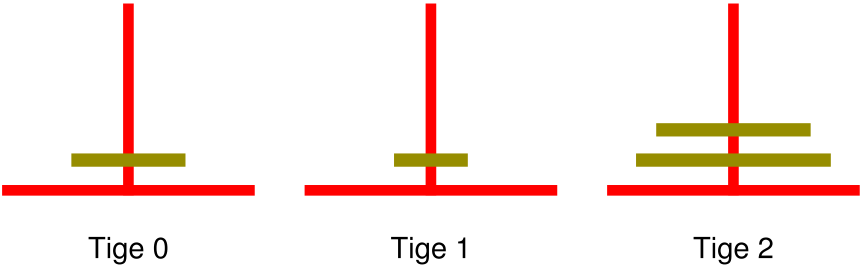
Tour de Hanoï

Etape 12: déplacer un disque de la tige 1 vers la tige 2



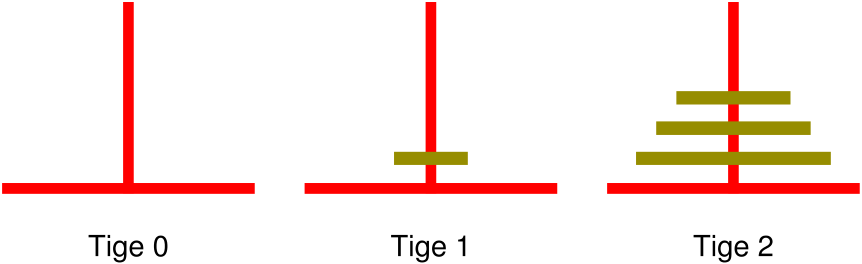
Tour de Hanoï

Etape 13: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 1



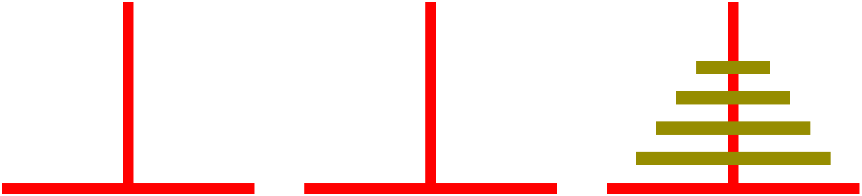
Tour de Hanoï

Etape 14: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tour de Hanoï

Etape 15: déplacer un disque de la tige 1 vers la tige 2



Tige 0 | Tige 1 | Tige 2

Tour de Hanoï

Exercice

Ecrire une fonction récursive qui réalise la fonction de Hanoï

Récursivité : Fonction Hanoi

```c
void hanoi(int nb_disques, dep,  intermidiare, dest)
{
 if(nb_disques==1)
  printf("Deplacer un disque de %d vers %d\n", dep, dest);
 else
 {
  hanoi(nb_disques-1,dep,dest,intermidiare);
  printf("Deplacer un disque de %d vers %d\n",dep,dest);
  hanoi(nb_disques-1,intermidiare,dep,dest);
 }
}
```

Variante de la tour de Hanoï :

Considérons une variante du jeu de la tour de Hanoï en rajoutant une contrainte :

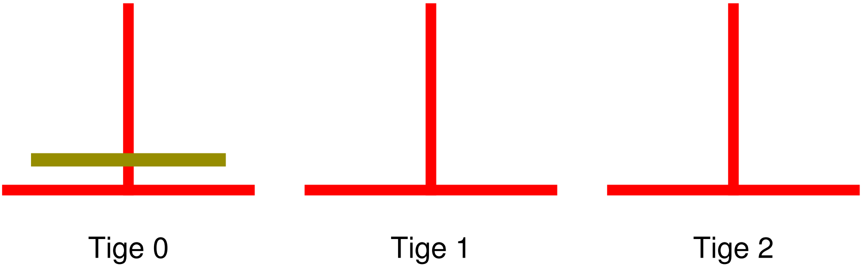
- Aucun disque ne peut-être échangé entre la tige Départ et la tige Arrivée.

Variante de la tour de Hanoï :

nombre de disques = 1

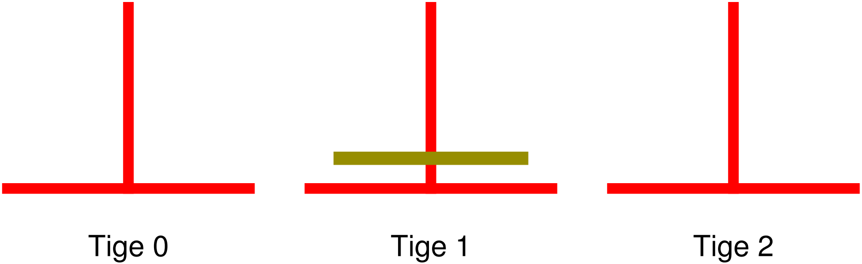
Tour de Hanoï

Etape 0: La tour à l'état initial



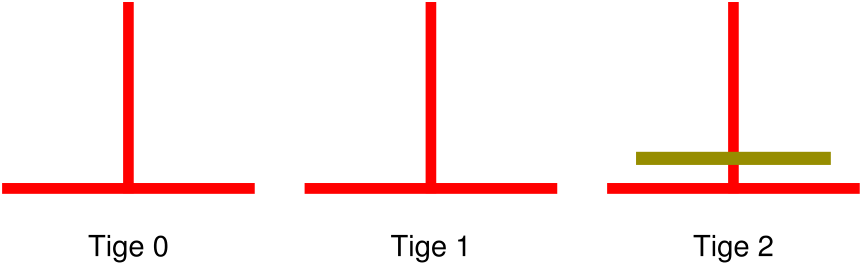
Tour de Hanoï

Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tour de Hanoï

Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2

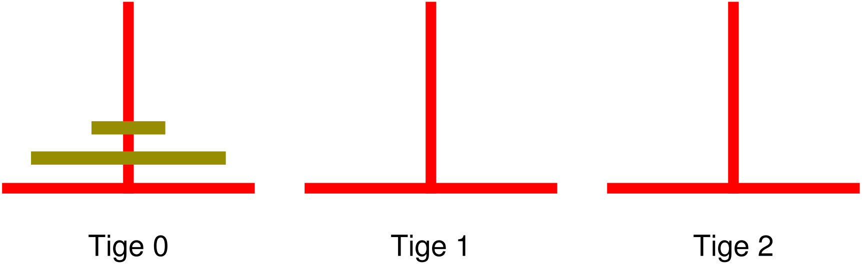


Variante de la tour de Hanoï :

nombre de disques = 2

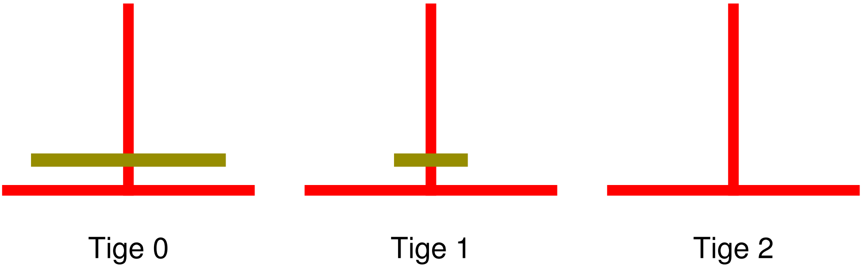
Tour de Hanoï

Etape 0: La tour à l'état initial



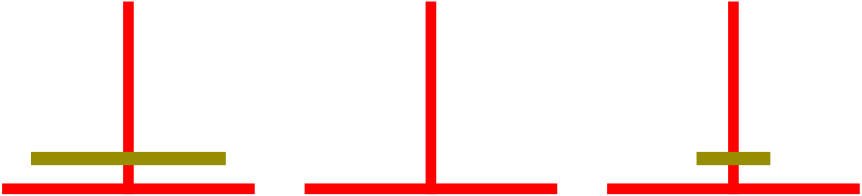
Tour de Hanoï

Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tour de Hanoï

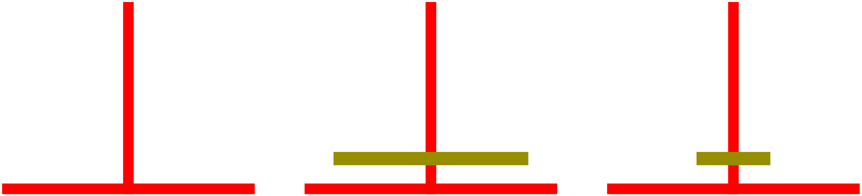
Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tige 0 Tige 1 Tige 2

Tour de Hanoï

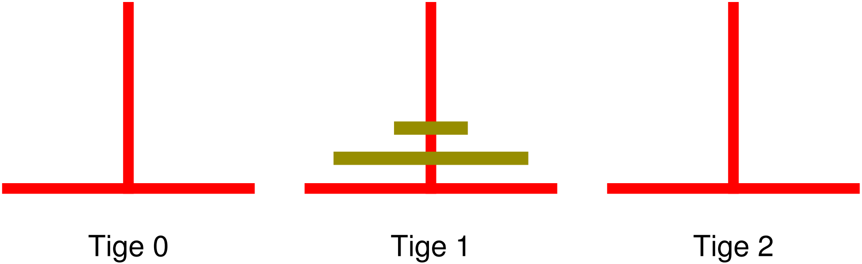
Etape 2: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tige 0 Tige 1 Tige 2

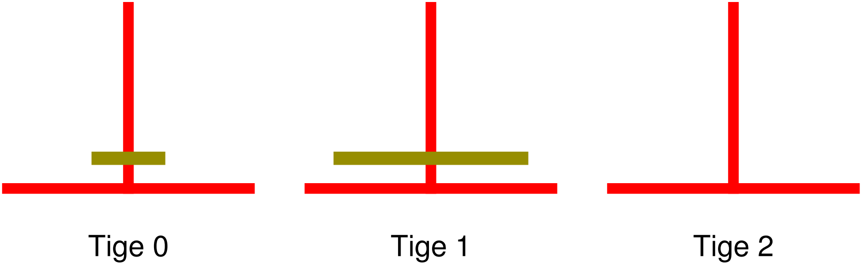
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



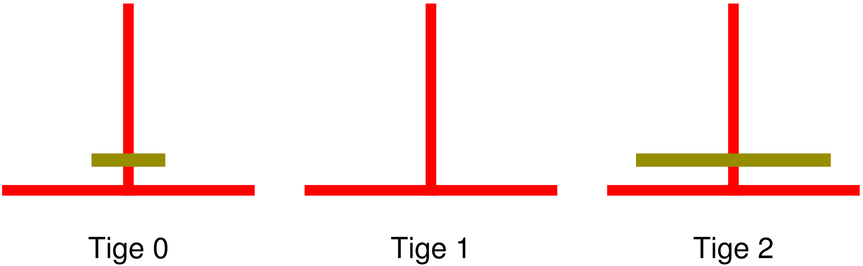
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



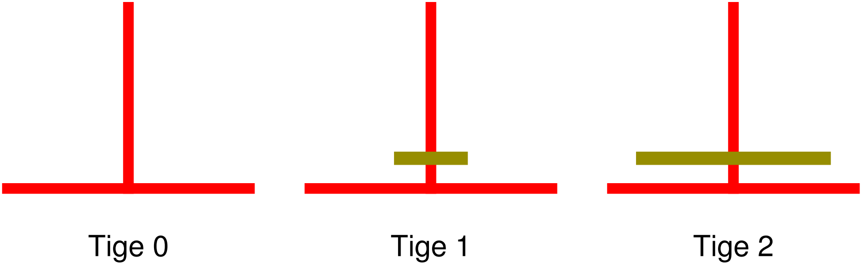
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



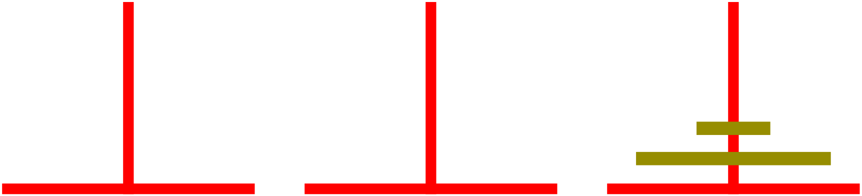
Tour de Hanoï

Etape 4: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tour de Hanoï

Etape 4: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



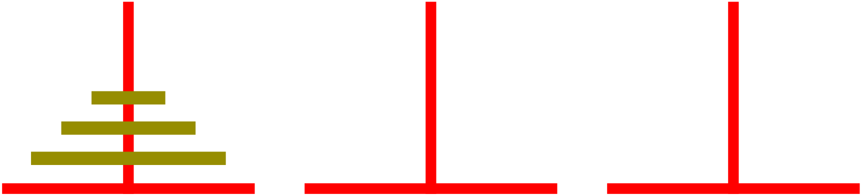
Tige 0 Tige 1 Tige 2

Variante de la tour de Hanoï :

nombre de disques = 3

Tour de Hanoï

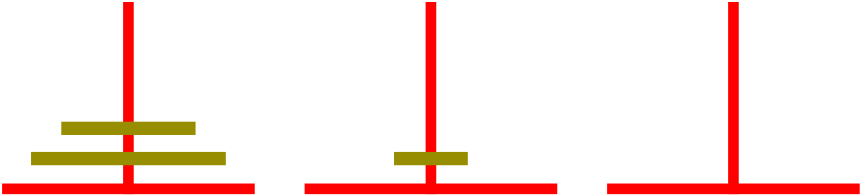
Etape 0: La tour à l'état initial



Tige 0 Tige 1 Tige 2

Tour de Hanoï

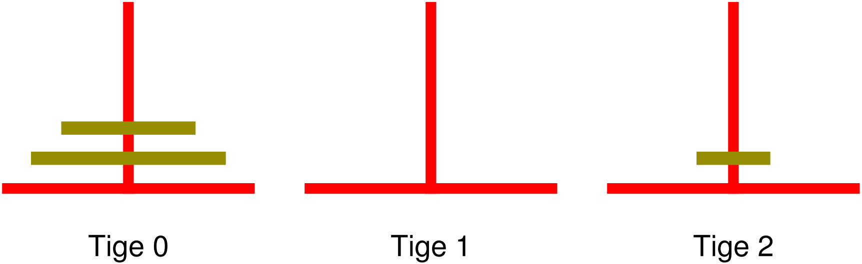
Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tige 0 Tige 1 Tige 2

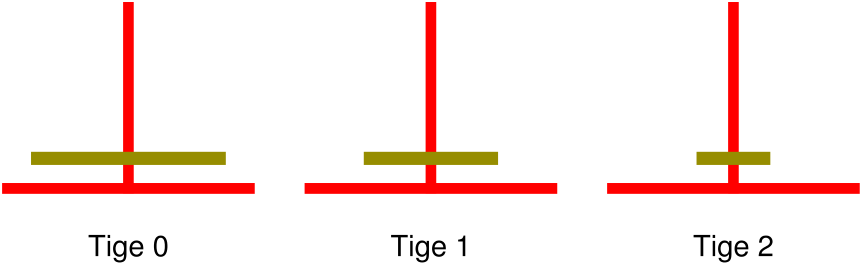
Tour de Hanoï

Etape 1: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



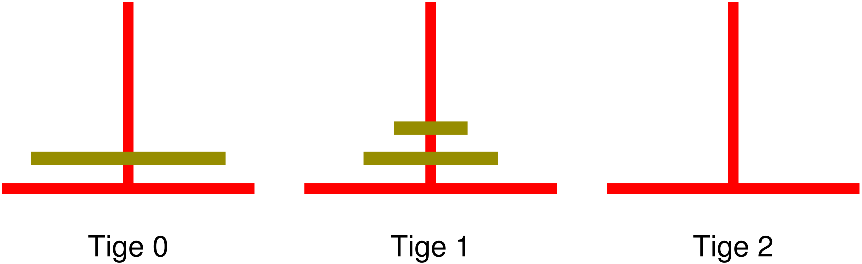
Tour de Hanoï

Etape 2: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



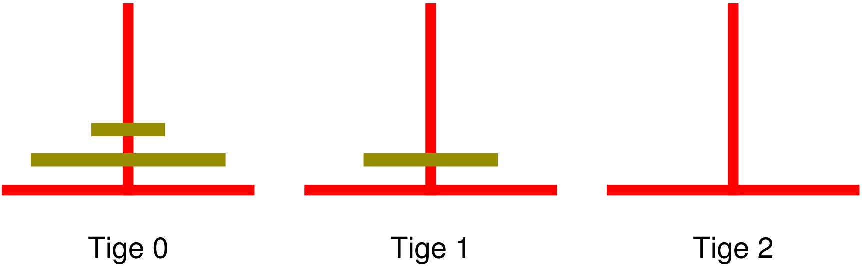
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



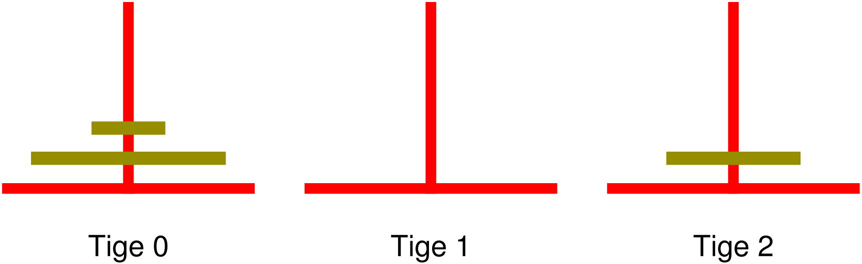
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



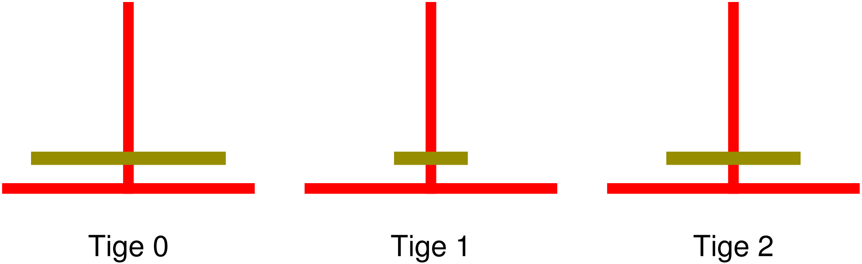
Tour de Hanoï

Etape 3: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



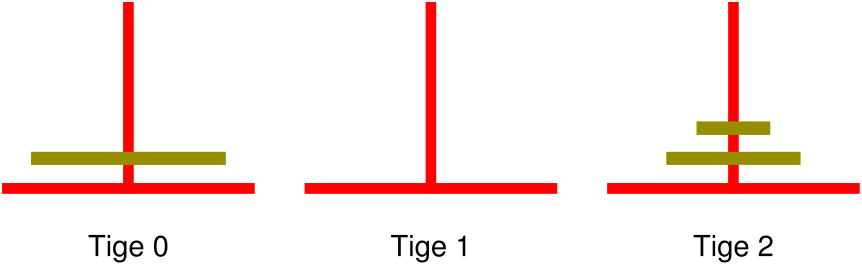
Tour de Hanoï

Etape 4: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



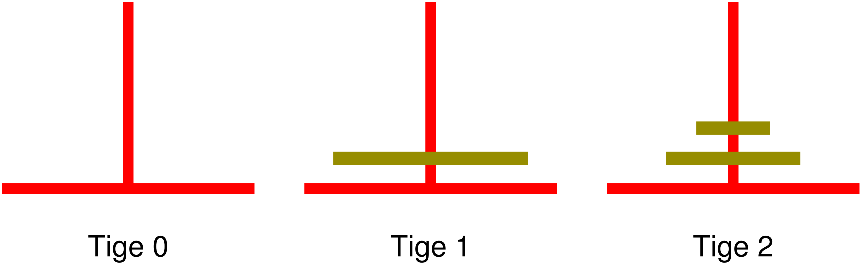
Tour de Hanoï

Etape 4: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



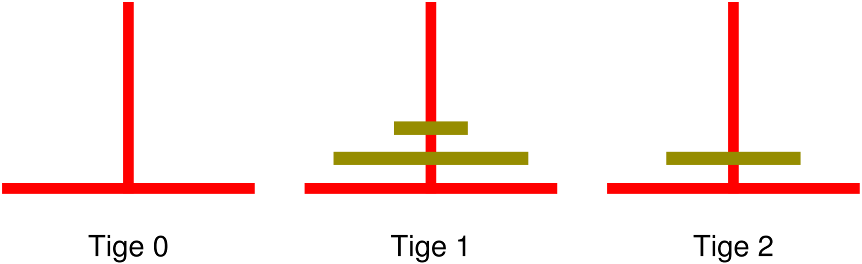
Tour de Hanoï

Etape 5: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



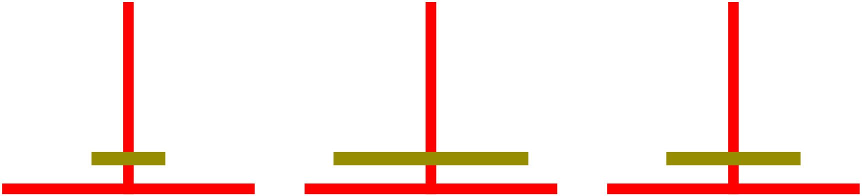
Tour de Hanoï

Etape 6: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



Tour de Hanoï

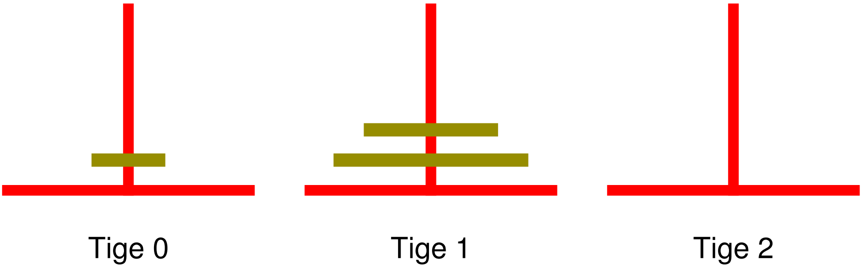
Etape 6: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



Tige 0 Tige 1 Tige 2

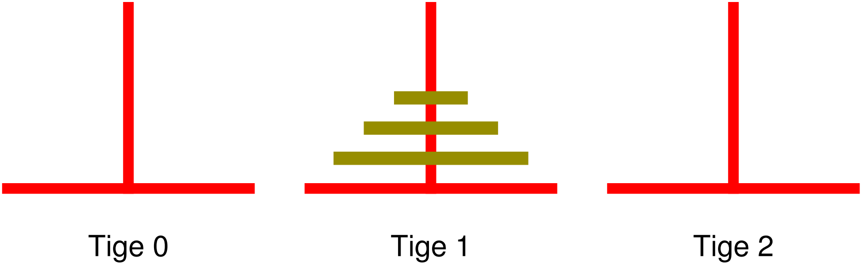
Tour de Hanoï

Etape 7: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



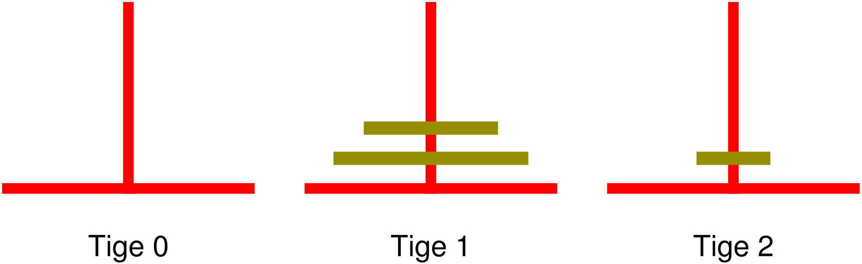
Tour de Hanoï

Etape 8: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



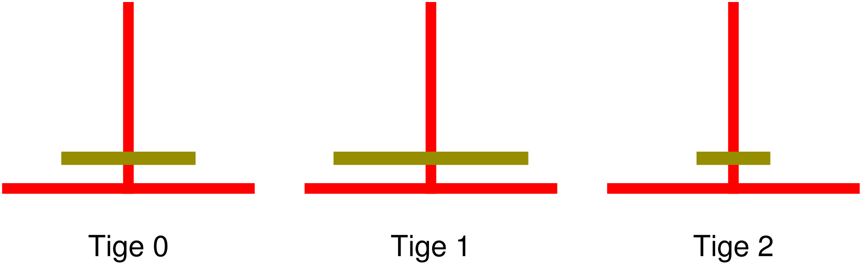
Tour de Hanoï

Etape 8: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



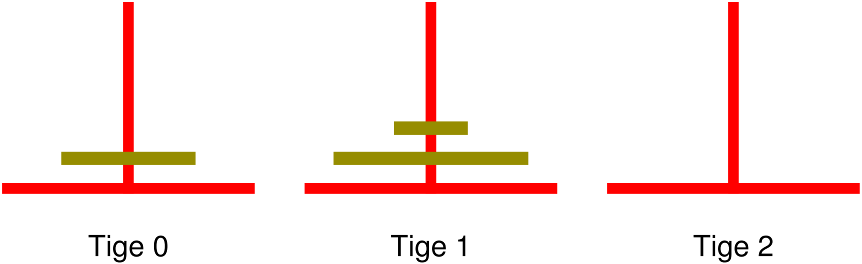
Tour de Hanoï

Etape 8: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



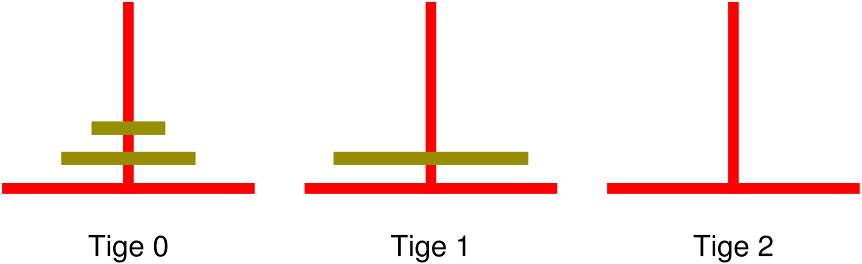
Tour de Hanoï

Etape 9: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



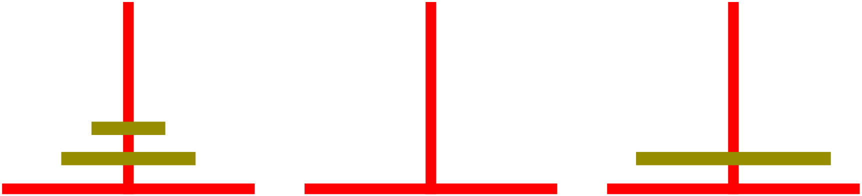
Tour de Hanoï

Etape 9: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



Tour de Hanoï

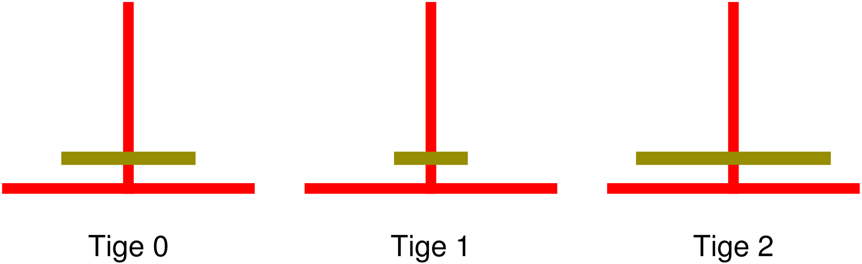
Etape 9: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tige 0 | Tige 1 | Tige 2

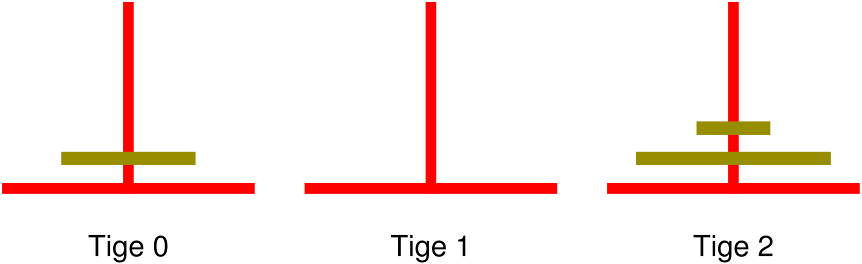
Tour de Hanoï

Etape 10: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



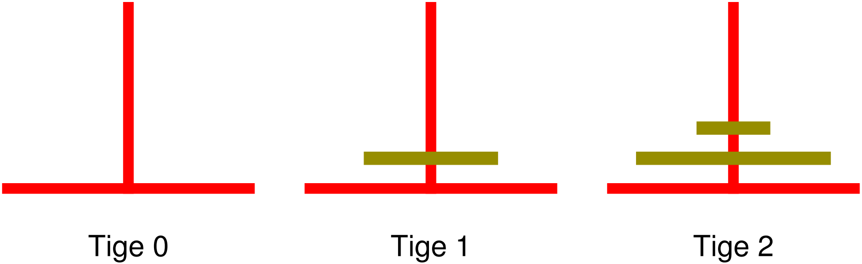
Tour de Hanoï

Etape 10: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



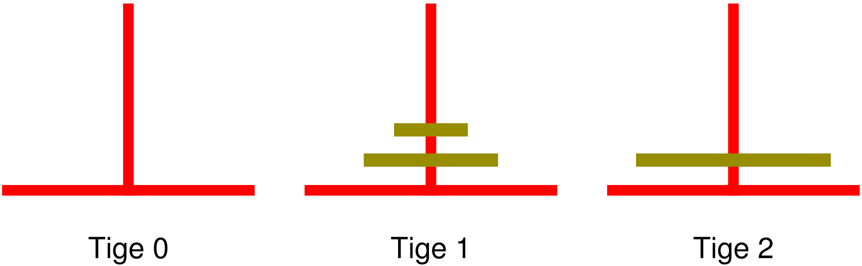
Tour de Hanoï

Etape 11: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



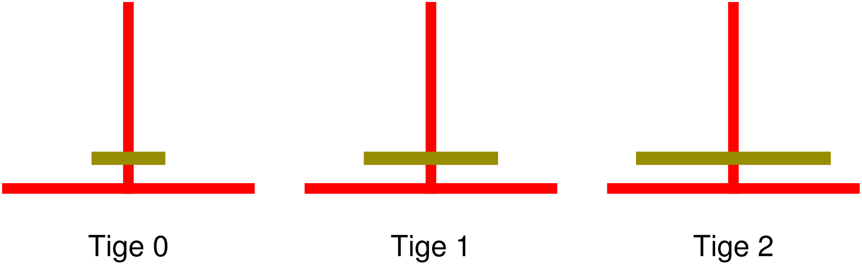
Tour de Hanoï

Etape 12: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



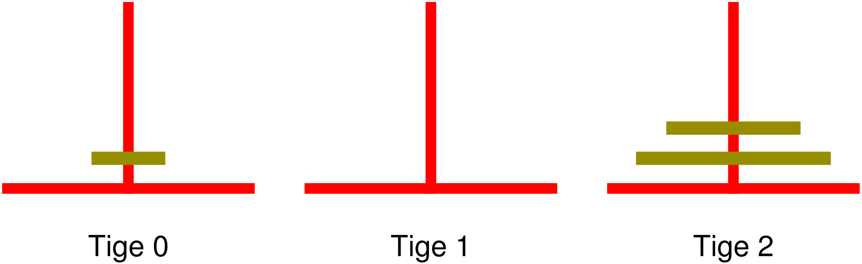
Tour de Hanoï

Etape 12: déplacer un disque de la tige 2 vers la tige 0



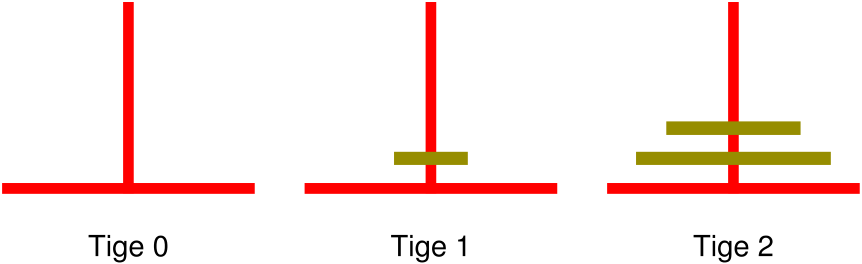
Tour de Hanoï

Etape 12: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2

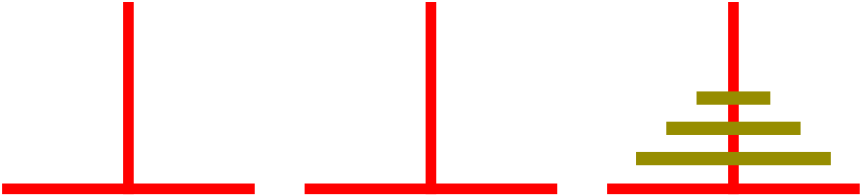


Tour de Hanoï

Etape 13: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Etape 13: déplacer un disque de la tige 0 vers la tige 2



Tige 0 Tige 1 Tige 2

Variante de la tour de Hanoï :

Exercice

- Ecrire une fonction qui implémente cette variante de la tour de Hanoï
- Evaluer sa complexité

Type de récursivité

Récursivité imbriquée

Une fonction récursive est dite de type ”imbriqué” si elle contient un appel récursif en paramètre.

Type de récursivité

Récursivité imbriquée

Une fonction récursive est dite de type ”imbriqué” si elle contient un appel récursif en paramètre.

Exemple : la fonction McCarthy 91

$$M_{91}(n) = \begin{cases} n - 10, & \text{if } n > 100 \\ M_{91}(M_{91}(n+11)), & \text{if } n \le 100 \end{cases}$$

Que fait cette fonction?

Type de récursivité

Récursivité imbriquée

Une fonction récursive est dite de type "imbriqué" si elle contient un appel récursif en paramètre.

Exemple : la fonction McCarthy 91

$$M_{91}(n) = \begin{cases} n - 10, & \text{if } n > 100 \\ M_{91}(M_{91}(n + 11)), & \text{if } n \leq 100 \end{cases}$$

Que fait cette fonction?

Réponse

La fonction au fait renvoie la valeur 91 pour n compris entre 0 et 101 (inclu), et $n - 10$ sinon.

Récursivité : la fonction McCarthy 91

```c
int m_91(int n)
{
    if (n > 100) {
        return n - 10;
    } else {
        return m_91(m_91(n+11));
    }
}
```

Récursivité : la fonction McCarthy 91

Exercice

Calculer la compléxité temporelle de la fonction McCarthy 91

Récursivité : la fonction McCarthy 91

Indications

- Analyser la complexité (le nombre d'appels récursifs) pour certaines valeurs :
  - pour les valeurs 101, 102, etc
  - Pour les valeurs 100,99, etc
- Question : Qu'observez-vous?

Temps d’exécution

n	M-91(n)	N(n)
0	91	203
1	91	201
2	91	199
3	91	197
4	91	195
5	91	193
6	91	191
7	91	189
8	91	187
9	91	185
10	91	183
11	91	181
12	91	179
13	91	177
14	91	175
15	91	173
16	91	171
17	91	169
18	91	167
...	...	... (-2)

Temps d’exécution (suite)

n	M-91(n)	N(n)
...	...	...
89	91	25
90	91	23
91	91	21
92	91	19
93	91	17
94	91	15
95	91	13
96	91	11
97	91	9
98	91	7
99	91	5
100	91	3
101	91	1
102	92	1
...	i-10	1

la fonction McCarthy 91

Question?

Que faut-il conclure de l’analyse de complexité de la fonction McCarthy 91 ?

la fonction McCarthy 91

Question?

Que faut-il conclure de l'analyse de complexité de la fonction McCarthy 91?

Réponse

Une fonction récursive peut-être en $O(1)$ même si elle admet un paramètre n et contient plusieurs appels récursifs.

Récursivité imbriquée

Remarques

- Les fonctions imbriquées peuvent être très coûteuses (rares celles qui sont en $O(1)$)
- Un appel récursif imbriqué revient à faire une composition de fonctions récursives un certain nombre de fois

Récursivité imbriquée

La fonction récursive Ackermann

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0. \end{cases}$$

Le nombre d'appels récursifs explose (super exponentiel) pour des m et n inférieur à 10!

La fonction récursive Ackermann : M=2

n	Ackerman(2, n)	Nombre d'appels récursifs(n)
0	3	5
1	5	14
2	7	27
3	9	44
4	11	65
5	13	90
6	15	119
7	17	152
8	19	189
9	21	230
1000	2003	2007005
10000	20003	200070005

On peut y aller avec un temps raisonnable calculer Ackermann(2,50000).

La fonction récursive Ackermann : M=3

n	Ackerman(3, n)	Nombre d'appels récursifs(n)
0	5	15
1	13	106
2	29	541
3	61	2432
4	125	10307
5	253	42438
6	509	172233
7	1021	693964
8	2045	2785999
9	4093	11164370
10	8189	44698325
12	32765	715664091

Peu d'espoir pour calculer Ackermann(3,n), pour n=14. Noter que $Ackermann(3, n) = 2^{(n+3)} - 3$ mais le nombre d'appels récursifs est encore plus important

La fonction récursive Ackermann : M=4

n	Ackerman(4, n)	Nombre d'appels récursifs(n)
0	13	107
1	65533	2862984010

Peu d'espoir pour calculer Ackermann(4,n), pour n=2.
Noter que $\text{Ackermann}(4, 2) = 2^{265536} - 3$ mais le nombre d'appels récursifs est encore plus important.

Récursivité imbriquée

Composition de fonctions

La récursivité imbriquée est très utilisée pour la construction des compositions de fonctions :

$$g(n, a) = \underbrace{f(f(...f(a)))}_{\text{n fois}}.$$

Exemple

Calcul des superpuissances :

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^n}}}}}}$$