Décrire les révisions

Laurent Perrussel*
IRIT/CERISS, Université Toulouse I,
Manufacture des Tabacs
F-31042 Toulouse Cedex - France
perussel@univ-tlse1.fr

Résumé *L'objet de cet article est de proposer une système logique permettant de décrire l'évolution de croyances. Notre objectif est de pouvoir exprimer qu'après une séquence d'opérations O une assertion ϕ est vérifiée. Les opérations possibles sont ici l'ajout et le retrait d'une expression propositionnelle à un ensemble de croyances. A l'aide de règles d'inférences, nous représentons les principes de changement minimal et de cohérence maximale, principes associés aux problèmes d'évolution de croyances.*

1 Introduction

L'objectif de cet article est de nous intéresser aux changements des croyances. L'une des théories les plus influentes pour décrire les changements des croyances a été proposée par C. Alchourrón et al. [AGM85]. Ces derniers ont notamment présenté des postulats, dits postulats AGM, décrivant ce que doit être un « bon » processus de révision : changements minimaux et cohérence maximale. Dans cet article, nous présentons une logique pour représenter et raisonner sur les révisions des croyances. Nous proposons de prendre en compte deux types de changement de croyances : l'ajout et le retrait. La logique présentée permet de représenter des expressions comme $O : \mathsf{Bel}\phi$, expression spécifiant que ϕ est une croyance après la séquence d'opérations O. Nous nous attachons autant que possible, à respecter les principes des postulats AGM. Ce respect des principes, nous l'effectuons à l'aide de règles d'inférence décrivant le comportement des deux opérateurs de changement de croyances (préservation des connaissances, changement minimal, ...).
Notre travail permet ainsi de justifier les croyances en exhibant les actions de changement des assertions.

Dans la section suivante, nous rappelons les postulats AGM. Après avoir posé les principales caractéristiques de notre formalisme en section 3, la section 4

*Cet article est une version revisée de Laurent Perrussel, "Raisonnement Contextuel : une logique pour la révision" in Actes RFIA 2000, Paris.

expose les règles d'inférence décrivant le comportement des opérateurs de révision. Dans la section 5 nous décrivons l'aspect sémantique. Les résultats de complétude et d'adéquation sont présentés section 6. Les travaux antérieurs sont décrits dans la section 7. La section 8 conclut l'article en présentant quelques perspectives.

2 Les postulats AGM

L'évolution de croyances a une double caractéristique : tout d'abord, muni d'un moyen « extra-logique » permettant de réviser d'une base de croyances avec de nouvelles croyances, il est possible de déterminer automatiquement la nouvelle base de croyances. Ensuite la seconde caractéristique concerne la fonction d'évolution proprement dite : quelles sont ces caractéristiques ? Les postulats d'Alchourrón, Gärdenfors et Makinson [AGM85] décrivent les caractéristiques attendues d'une telle fonction. Ces postulats s'appuient sur le principe que tout changement doit provoquer des changements minimaux dans les croyances initiales.

Soit un ensemble K de croyances (K étant considérée clos sous la conséquence logique). Si ϕ est cohérente avec K alors ϕ est simplement ajoutée à K et l'ensemble final noté K^+_ϕ est égal à $\{\psi | K \cup \{\phi\} \vdash \psi\}$. Soit K^-_ϕ la base résultant du retrait de ϕ. Les postulats AGM de base pour la contraction sont les suivants[Gär92] :

(R1) K^-_ϕ est un ensemble de croyances. Ce premier postulat spécifie que la base de croyances résultante est bien une base de croyances.

(R2) $K^-_\phi \subseteq K$. Ce postulat précise qu'aucune nouvelle croyance n'a été produite par la suppression de ϕ.

(R3) Si $\phi \notin K$ alors $K^-_\phi = K$. Ce postulat précise le principe de changement minimal en spécifiant que rien ne doit être ôté de K sans raison.

(R4) Si $\nvdash \phi$, alors $\phi \notin K^-_\phi$. Ce postulat précise que si l'expression à ajouter à la base de croyances n'est pas un théorème alors ϕ n'est pas conséquence logique de la base contractée.

(R5) Si $\phi \in K$, alors $K \subseteq (K^-_\phi)^+_\phi$. Ce postulat précise que le maximum de croyances doivent être conservées dans K^-_ϕ (changement minimal). En conséquence, K doit être retrouvée après expansion de K^-_ϕ par ϕ.

(R6) Si $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$ alors $K^-_\phi = K^-_\psi$. Ce postulat exige que les révisions ne soient pas liées par la syntaxe des expressions mais par leur contenu. De fait si deux expressions sont logiquement équivalentes alors les bases révisées obtenues doivent être logiquement équivalentes.

Soit K^*_ϕ la base de croyances résultant du processus de révision de K par ϕ. L'identité de Levi permet de définir la révision à l'aide des deux opérations de contraction et expansion :

$$K^*_\phi = (K^-_{\neg\phi})^+_\phi$$

3 Caractéristiques de la logique

Notre objectif est de pouvoir exhiber les actions de changement des croyances justifiant l'état d'une théorie : avoir une représentation explicite du processus (i.e. les actions) conduisant à pouvoir spécifier que ϕ est crue parce que les actions $a_1, a_2..., a_n$ ont été effectuées. La logique propositionnelle de description de l'évolution des croyances appelée $\mathcal{L}_O$ s'appuie sur la logique modale propositionnelle. Nous définissons notre langage en deux temps : tout d'abord nous définissons le langage $\mathcal{L}_{aux}$ représentant le langage modal de description des croyances et ensuite nous associons à chaque expression une séquence d'opérations caractérisant le(s) contexte(s) d'assertion.

Avant de définir le langage $\mathcal{L}_O$, nous précisons la notion de séquence d'opérations. Une séquence est une suite d'opérations de retraits ou d'ajouts d'une formule propositionnelle, objet d'une croyance. Nous avons deux opérations possibles : $\mathsf{Expand}(\phi)$ et $\mathsf{Contract}(\psi)$. Elles désignent les opérateurs d'expansion et de contraction ; ϕ et ψ sont des formules propositionnelles. $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des séquences d'opérations. Si $O = \langle o_1, ..., o_n \rangle$ est une séquence, o une opération d'ajout ou de retrait, la concaténation de o à O, noté $O.o$ est égale à $\langle o_1, ..., o_n, o \rangle$.

Définition 1 (Syntaxe de $\mathcal{L}_O$) *Le Langage $\mathcal{L}_{aux}$ est défini comme suit. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des symboles propositionnels. Si $p \in \mathcal{P}$ alors $p \in \mathcal{L}_{aux}$; si $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{aux}$ alors $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\neg\phi$ et $\mathsf{Bel}\phi \in \mathcal{L}_{aux}$. L'ensemble des formules bien formées de $\mathcal{L}_O$ est défini comme suit : si ϕ appartient à $\mathcal{L}_{aux}$, O à $\mathcal{O}$ alors $O : \phi$ appartient à $\mathcal{L}_O$.*

4 Théorie de la preuve

Notre langage étendant la logique modale, nous allons retrouver l'axiomatique de cette dernière et nous allons y adjoindre des axiomes et des règles d'inférence supplémentaires spécifiques aux opérateurs d'expansion et contraction.

4.1 Axiomatisation

Nous dirons qu'une $\mathcal{L}_O$-formule $O : \phi$ est prouvable si et seulement si ϕ est une instance d'un des schémas d'axiome et/ou est dérivable à l'aide des règles d'inférence. La relation de preuve est notée $\vdash$ et nous dirons que ϕ est O-prouvable.

Définition 2 (Axiomatique de $\mathcal{L}_O$) *L'axiomatique comprend tout d'abord les schémas*

(Prop) $O : \phi$ *si ϕ est un théorème de la logique propositionnelle ;*

(K) $O : \mathsf{Bel}(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\mathsf{Bel}\phi \rightarrow \mathsf{Bel}\psi)$

*et règles d'inférences de la logique modale : le modus ponens **(MP)** et la règle de nécessité **(RIN)***

$$(\mathbf{MP})\ \frac{\vdash O : \phi \quad \vdash O : \phi \rightarrow \psi}{\vdash O : \psi} \qquad (\mathbf{RIN})\ \frac{\vdash O : \phi}{\vdash O : \mathsf{Bel}\phi}$$

*Concernant les opérateurs de changements, nous ajoutons les règles d'inférence et les schémas d'axiome permettant les transitions. Tout d'abord, pour l'opérateur d'expansion, nous avons l'axiome d'inclusion **(EI)** :*

(EI) $\vdash O.\mathsf{Expand}(\phi) : \quad \mathsf{Bel}\phi$

*la règle d'inférence de préservation **(EP)** :*

$$(\mathbf{EP})\ \frac{\vdash O : \mathsf{Bel}\psi}{\vdash O.\mathsf{Expand}(\phi) : \mathsf{Bel}\psi}$$

*la règle d'équivalence **(EE)***

$$(\mathbf{EE})\ \frac{\vdash O : \mathsf{Bel}(\phi \leftrightarrow \psi)}{\vdash O.\mathsf{Expand}(\phi) : \mathsf{Bel}\psi}$$

la dernière règle concernant les expansions est la règle de changement minimal

$$(\mathbf{EM})\ \frac{\vdash O.\mathsf{Expand}(\psi) : \mathsf{Bel}\phi}{\vdash O : \mathsf{Bel}\phi \vee \mathsf{Bel}(\psi \rightarrow \phi)}$$

Concernant la contraction, les règles d'inférence et les schémas d'axiome sont : le schéma d'axiome d'exclusion

(CX) $\vdash O.\mathsf{Contract}(\phi) : \neg\mathsf{Bel}\phi$

*la règle d'équivalence **(CE)***

$$(\mathbf{CE})\ \frac{\vdash O : \mathsf{Bel}(\phi \leftrightarrow \psi)}{\vdash O.\mathsf{Contract}(\phi) : \neg\mathsf{Bel}(\psi)}$$

la règle de contraction triviale :

$$(\mathbf{CT})\ \frac{\vdash O : \neg\mathsf{Bel}\phi \quad \vdash O : \neg\mathsf{Bel}\psi}{\vdash O.\mathsf{Contract}(\phi) : \neg\mathsf{Bel}\psi}$$

la dernière règle pour les contractions est la règle de changement minimal

$$(\mathbf{CM})\ \frac{\vdash O.\mathsf{Contract}(\psi) : \mathsf{Bel}\phi}{\vdash O : \neg\mathsf{Bel}\psi \rightarrow \mathsf{Bel}\phi}$$

Enfin, la règle assurant le lien entre expansion et suppression est la suivante :

$$(\mathbf{CP})\ \frac{\vdash O : \mathsf{Bel}\psi}{\vdash O.\mathsf{Contract}(\phi).\mathsf{Expand}(\phi) : \mathsf{Bel}\psi}$$

Les différentes règles d'inférence concernant les opérateurs de révision méritent quelques commentaires. Les contradictions ne sont pas traitées dans le système proposé et ce à la fois pour les expansions et les contractions. Tout d'abord le schéma d'axiome d'inclusion précise que lorsqu'une expansion est effectuée alors l'expression objet de l'expansion devient une croyance. La règle de préservation signifie que toutes les croyances établies en O sont conservées en $O.\mathsf{Expand}(\varphi)$, c'est-à-dire après une expansion. Cette règle d'inférence nous permet aussi de respecter le principe d'expansion triviale et de monotonie des expansions. La règle d'équivalence pour les expansions spécifie que les expansions s'effectuent par rapport au « contenu » des expressions et non par rapport à leur syntaxe. Enfin la règle de changement minimal pour les expansions spécifie que les seules croyances vérifiées en $O.\mathsf{Expand}(\varphi)$ sont les croyances et leurs conséquences précédemment vérifiées, auxquelles sont ajoutées les expansions et leurs conséquences.
Concernant les contractions, les règles sont relativement similaires. Le schéma d'axiome d'exclusion **(CX)** spécifie qu'après une contraction, l'expression φ, objet de la contraction n'est plus une croyance. Nous avons omis le cas où $\vdash O : \neg\varphi$. La règle d'équivalence est similaire à la règle d'équivalence pour les expansions. La règle de contraction triviale spécifie que la contraction d'une expression qui n'est pas une croyance conserve toutes les croyances. La règle de changement minimal implique que si φ est rétracté alors les seules nouvelles croyances établies en $O.\mathsf{Contract}(\varphi)$ sont les conséquences de $\neg\mathsf{Bel}\varphi$.
La règle **(CP)** spécifie le principe de minimisation des non-croyances. A savoir que toutes les croyances qui ne sont plus des croyances suite à une opération de contraction doivent à nouveau être des croyances si nous procédons à une expansion ("recovery").

Nous appelons ce système axiomatique un EC-système modal.

4.2 Respect des postulats AGM

Ce EC-système modal décrit partiellement des processus de révision de croyances respectant les postulats AGM. Soit K, l'ensemble des formules propositionnelles ϕ objet de croyances :

$$K = \{\phi | \vdash O : \mathsf{Bel}\phi\}$$

Après une opération d'expansion de ψ, nous devons avoir pour toute formule $\phi \in \{\phi | K \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{L}_0} \phi\}$[1] :

$$\vdash O.\mathsf{Expand}(\psi) : \mathsf{Bel}\phi$$

Or, conformément à **(EP)**, nous avons $\vdash O.\mathsf{Expand}(\psi) : \mathsf{Bel}K$, et conformément à **(EI)**, nous avons $\vdash O.\mathsf{Expand}(\psi) : \mathsf{Bel}\psi$. Qui plus est **(EM)** nous assure que

[1] $\mathcal{L}_0$ désigne la logique des propositions

seules les conséquences de $K \cup \{\psi\}$ sont des croyances. Donc, le principe d'expansion est bien respecté.

Concernant les principes de contraction, l'ensemble des postulats AGM pour la contraction n'est que partiellement respecté. Le premier postulat est identique au premier postulat pour les révisions. Soit ϕ la formule propositionnelle devant être rétractée et K_ϕ^- la base de croyances rétractée.

> Pour toute expression ϕ et une théorie propositionnelle K, K_ϕ^- est aussi une théorie propositionnelle.

La règle **(EI)** traduit ce postulat. La base de connaissances K_ϕ^- est cohérente. Le second postulat

$$K_\phi^- \subseteq K$$

n'est pas satisfait. En effet, la règle de changement minimal implique que des expressions non présentes dans K peuvent l'être dans K_ϕ^-. Ceci est dû au fait que l'expression de relations entre les croyances est tolérée, i.e. si l'agent ne croit pas ϕ alors celui-ci doit croire ψ. Nous retrouvons ici une proximité certaine avec la logique des défauts. Le troisième postulat spécifiant « l'économie d'information » stipule que si $\phi \notin K$ alors K reste inchangée.

$$K_\phi^- = K$$

La règle de changement minimal pour les contractions garantit le respect de ce postulat. Le schéma d'exclusion **(CX)** nous garantit quant à lui le quatrième postulat. Ce dernier stipule que toute formule retractée n'appartient plus à K :

$$\text{Si } \nvdash O : \mathsf{Bel}\phi \text{ alors } \phi \notin K_\phi^-$$

Le postulat de recouvrement spécifie que l'expansion de K_ϕ^- par ϕ doit permettre de retrouver K.

$$\text{Si } \phi \in K \text{ alors } K \subseteq (K_\phi^-)_\phi^+$$

Ce postulat correspond à la règle **(CP)**. Enfin le postulat d'équivalence est garanti par la règle **(CE)**.

$$\text{Si } \vdash O : \phi \leftrightarrow \psi \text{ alors } K_\phi^- = K_\psi^-$$

5 Sémantique

Nous avons indiqué que notre objectif est d'avoir un langage décrivant les changements. L'évolution des connaissances d'un point de vue descriptif est caractérisable comme une fonction. Considérant un état de croyances initial, une action de manipulation et un espace représentant les différents états de croyances possibles, nous pouvons représenter fonctionnellement les évolutions des croyances. Les opérateurs de manipulation sont vus comme des opérateurs de sélection. Formellement, une fonction de sélection est dénotée $[]^o$ où o désigne le type d'opération (respectivement e et c pour les expansions et contractions). Un état de croyances correspond à un modèle classique de Kripke que nous appelons ici un K-modèle et l'ensemble des états correspondant à l'espace représentant les différents états possibles est un ensemble de modèles de Kripke noté $\mathcal{M}_K$. En fonction d'une expression propositionnelle à ajouter (ou contracter), d'un état initial (i.e. un K-modèle) et d'un monde initial, la fonction de sélection « sélectionne » le nouvel état parmi l'ensemble des K-modèles représentant les états possibles. Nous associons à un K-modèle M la fonction $\mathsf{WorldsOf}$, fonction qui spécifie l'ensemble des mondes du modèle M.

Un modèle M_{EC} est un tuple $\langle W_0, \mathcal{M}_K, []^e, []^c, M_0\rangle$ dont la définition est la suivante :

Définition 3 (Modèle pour les $\mathcal{L}_O$-formules) *Un modèle M_{EC} pour l'interprétation des $\mathcal{L}_O$-formules est un tuple $\langle W_0, \mathcal{M}_K, M_0, []^e, []^c, \rangle$ où*

- *W_0 est un ensemble de mondes ;*
- *$\mathcal{M}_K$ désigne un ensemble de K-modèles où :*

  pour tout modèle de $M \in \mathcal{M}_K$, $\mathsf{WorldsOf}(M) \subseteq W_0$.
- *M_0 désigne un K-modèle appartenant à $\mathcal{M}_K$;*
- *$[]^e$ désigne une fonction de sélection représentant les expansions : $[]^e : 2^{\mathcal{M}_K} \times \mathcal{M}_K \times W_0 \times \mathcal{L}_0 \to \mathcal{M}_K$;*
- *$[]^c$ désigne une fonction de sélection représentant les contractions : $[]^c : 2^{\mathcal{M}_K} \times \mathcal{M}_K \times W_0 \times \mathcal{L}_0 \to \mathcal{M}_K$;*

Avant de définir les règles d'interprétation, nous introduisons des définitions auxiliaires. $M' = M[w, \phi]^o$ appartient à $\mathcal{M}_K$ et désigne une notation abrégée et post-fixée de $M' = []^o(\mathcal{M}_K, M, w, \phi)$. Nous posons comme contrainte que :

Pour tout modèle M, toute formule ϕ, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$,
le monde w appartient à $\mathsf{WorldsOf}(M[w, \phi]^o)$.

Dans une séquence d'opération $O = \langle o_1, o_2, ..., o_i, ..., o_n\rangle$, chaque opération o_i est égale soit à $\mathsf{Expand}(\phi_i)$ ou bien à $\mathsf{Contract}(\phi_i)$. Pour un monde initial w, la notation abrégée M^O désigne le modèle :

$$M^O = M_0[w, \phi_1]^o[w, \phi_2]^o...[w, \phi_n]^o$$

Un K-modèle M est un tuple $\langle W, R, I\rangle$ où W est un ensemble de mondes ; R est une relation d'accessibilité entre les mondes ($R \subseteq W \times W$) ; I est une intepprétation propositionnelle $I : W \times \mathcal{P} \to \{1, 0\}$. Nous notons la relation de satisfaction des $\mathcal{L}_O$-formules $\models_{EC}$.

Définition 4 ($\models_{EC}$) *Une interprétation M_{EC} satisfait une formule $O : \phi$ dans un monde w selon la règle suivante :*

- *$M_{EC}, w \models_{EC} O : \phi$ pour ϕ étant une $\mathcal{L}_{aux}$-formule si et seulement si $O = \langle o_1, o_2, ..., o_i\rangle$ et $M^O, w \models \phi$*

Les formules propositionnelles et modales s'interprétent classiquement. Soit $M = \langle W, R, I\rangle$ un K-modèle et $w \in W$ un monde. La relation de satisfaction associant un K-modèle et une $\mathcal{L}_{aux}$-formule est notée $\models$.

– *$M, w \models p$ si et seulement si $p \in \mathcal{P}$ et si $I(w, \phi) = 1$;*
– *$M, w \models \phi \vee \psi$ si et seulement si $M, w \models \phi$ ou $M, w \models \psi$;*
– *$M, w \models \mathsf{Bel}\phi$ si et seulement si pour tout w' tel que $(w, w') \in R$, nous avons $M, w' \models \phi$.*

Les $\mathcal{L}_{aux}$-formules de type $\neg\phi$ et $\phi \to \psi$ s'interprètent selon les règles usuelles.

Une formule ϕ est dite O-satisfaite par un modèle M_{EC} et dans un monde w si $M_{EC}, w \models_{EC} O : \phi$. Une formule $O : \phi$ est dite vraie dans un modèle M_{EC} si ϕ est O-satisfaite en tout monde de W_0, nous notons ceci $M \models_{EC} O : \phi$. Une formule $O : \phi$ est dite O-valide si et seulement si ϕ est dite O-satisfaite en tout modèle M_{EC} et tout monde de W_0.

Nous procédons maintenant à la mise en œuvre des contraintes permettant de refléter les règles d'inférence et schémas d'axiome de la théorie de la preuve. Nous avons déjà indiqué comme première contrainte que :

> Pour tout modèle M, toute formule ϕ, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$, le monde w appartient à $\mathsf{WorldsOf}([]^o(\mathcal{M}_K, M, w, \phi))$. Nous appelons cette contrainte **(WM)**.

Cette contrainte nous assure que l'interprétation est toujours possible. Concernant la fonction d'expansion, nous avons la contrainte d'inclusion :

(CEI) Pour tout K-modèle M, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$, toute expression ϕ, on a $M[w, \phi]^e, w \models \mathsf{Bel}\phi$.

la règle de préservation spécifie que les vérités contextuelles établies en O sont conservées en $O.\mathsf{Expand}(\phi)]$:

(CEP) Pour tout K-modèle M, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$, toute expression $\mathsf{Bel}\phi$ et toute expression propositionnelle ψ si $M, w \models \mathsf{Bel}\phi$ alors $M[w, \psi]^e, w \models \mathsf{Bel}\phi$.

La propriété d'équivalence spécifie que les expansions sont équivalentes si les expressions à ajouter sont équivalentes.

(CEE) Pour tout K-modèle M et tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$ et deux expressions ϕ et ψ, si $M, w \models \mathsf{Bel}(\phi \leftrightarrow \psi)$ alors $M[w, \phi]^e = M[w, \psi]^e$

Enfin, concernant les expansions nous avons une dernière propriété spécifiant que les expansions doivent être minimales :

(CEM) Pour tout K-modèle M, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$ et toute expression ϕ si $M^O[w, \psi]^e, w \models \mathsf{Bel}\phi$ alors soit $M^O, w \models \mathsf{Bel}\phi$ ou soit $M^O, w \models \mathsf{Bel}(\psi \to \phi)$.

Nous avons des propriétés similaires pour la fonction de contraction : la contrainte d'exclusion spécifie qu'après tout retrait d'une expression contextuelle, cette dernière n'est plus une vérité contextuelle :

(CCX) Pour tout K-modèle M, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$, toute expression ϕ, $M[w, \phi]^c, w \not\models \mathsf{Bel}\phi$.

La propriété d'équivalence pour les contractions est similaire à **(CEE)**.

(CCE) Pour tout K-modèle M et tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$ et deux expressions ϕ et ψ, si $M, w \models \mathsf{Bel}(\phi \leftrightarrow \psi)$ alors $M[w,\phi]^c = M[w,\psi]^c$.

Concernant la règle de contraction triviale, nous avons :

(CCT) Pour tout K-modèle M et tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$ et deux expressions ϕ et ψ, si $M, w \models \neg\mathsf{Bel}\phi$ et $M, w \models \neg\mathsf{Bel}\psi$ alors $M[w,\phi]^c \models \neg\mathsf{Bel}\psi$.

La contrainte spécifiant que les contractions doivent être minimales est similaire à celle pour les expansions :

(CCM) Pour tout K-modèle M, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$ et toute expression ϕ si $M^O[w,\psi]^c, w \models \mathsf{Bel}\phi$ alors soit $M^O, w \models \mathsf{Bel}\phi$ ou soit $M^O, w \models \neg\mathsf{Bel}\psi \rightarrow \mathsf{Bel}\phi$.

Enfin nous avons la propriété liant contraction et expansion :

(CLEP) Pour tout K-modèle M, tout monde $w \in \mathsf{WorldsOf}(M)$, toute expression ϕ si $M, w \models \mathsf{Bel}\psi$ alors : $M[w,\phi]^c[w,\phi]^e, w \models \mathsf{Bel}\psi$.

Nous appellerons les modèles respectant les contraintes **(WM)**, **(CEI)**, **(CEP)**, **(CEE)**, **(CEM)**, **(CCX)**, **(CCE)**, **(CCT)**, **(CCM)**, **(CLEP)** des EC-modèles.

6 Adéquation et complétude

Nous concluons la présentation de la logique en exposant la complétude et l'adéquation du langage $\mathcal{L}_O$.

Théorème 1 (Adéquation) *L'axiomatique définie par le EC-système modal est adéquate : Pour toute $\mathcal{L}_{aux}$-formule ϕ, si ϕ est O-prouvable, $\vdash O : \phi$, alors pour toute séquence d'opération O, toute interprétation M_{EC} et tout monde w, nous avons $M_{EC}, w \models_{EC} O : \phi$ (ϕ est O-valide).*

Théorème 2 (Complétude) *Pour toute formule $O : \phi$, si ϕ est O-valide, c'est-à-dire que pour toute séquence d'opération O, tout modèle M_{EC} et tout monde w, si nous avons $M_{EC}, w \models_{EC} O : \phi$, alors ϕ est O-prouvable, c'est-à-dire $\vdash O : \phi$.*

Les preuves s'appuient sur les preuves d'adéquation et complétude présentées dans [Per98].

7 Discussion sur les travaux connexes

Notre travail est clairement relié au travail de A. Rao [Rao89] qui présente une logique multi-modale combinant les aspects descriptifs de la logique temporelle et les aspects constructifs de la révision de croyances. Cette logique qui s'appuie sur la logique autoépistémique permet de représenter l'évolution des croyances de différents agents à l'aide de nombreux schémas d'axiomes. Toutefois, notre travail se distingue par un usage quasi systèmatique de règles d'inférence permettant une utilisation plus naturelle de l'axiomatique (nous évitons ainsi les contraposées contre-intuitives).

Dans [Bou94, Bou96], C. Boutilier a présenté une logique multi-modale permettant de raisonner sur les révisions. Son travail se distingue par une approche constructive : les préférences sont enchassées dans les opérateurs conditionnels et permettent ainsi de représenter la fonction de révision à l'aide d'un langage modal. L'objet de notre travail est d'offrir une perspective descriptive des révisions : en combinant les deux aspects, nous obtiendrons une perspective complète sur la révision des croyances : le processus de justification des croyances (chaque action) et le détail des transitions dans le processus (les préférences). Pour ceci, nous devons considérer, tout comme dans [Bou96, aJH97], l'introduction d'opérateurs conditionnels pour décrire les révisions d'un point de vue constructif.
Dans [SPLL00], la description des révisions est basée sur le calcul des situations [McC90]. Les transitions entre les différentes situations exhibent le processus de justification des croyances. Contrairement à leur proposition, nous décrivons à la fois l'aspect théorie de la preuve et théorie des modèles. Notons que l'aspect constructif est décrit à l'aide de degrés de plausibilités sans représentation d'opérateurs conditionnels.
Notre travail est aussi relié aux travaux concernant les révisions multiples. Citons les propositions contenues dans [FH94, Han99, Zha96, ZCZC97, DP97] qui définissent un ensemble de postulats généralisant les postulats AGM. Tout comme nous avions un respect partiel des postulats AGM par la logique $\mathcal{L}_O$, nous avons aussi un respect partiel des différents postulats pour les contractions multiples.

8 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce travail, une formalisation décrivant la dynamique des croyances. Dans un premier temps nous avons rappelé les principes guidant la contraction de croyances. Dans une seconde étape, nous avons décrit le comportement des expansions et contractions à l'aide de règles d'inférence. Nous avons poursuivi la définition descriptive des révisions en caractérisant la sémantique de manière fonctionnelle.
Cette formalisation repose donc sur des principes descriptifs et les fonctions de contraction et révision ne sont pas stipulées mais simplement considérées comme des « boîtes noires ». Afin d'obtenir un système décrivant complètement les aspects statiques et dynamiques, notre objectif est dans un prochaine étape de considérer les fonctions de révision comme des boîtes « blanches » : offrir une perspective constructive explicitant l'action de révision. Concernant l'opération de contraction la définition d'un nouveau modèle de Kripke ne pose pas de problème (il faut restreindre l'ensemble des mondes du modèle originel). Notre but est d'intégrer des procédures de révisions s'appuyant sur les préférences pour représenter les transitions entre les actions de contractions. Les propositions de [Leh95, DP97, Nay94, Bou96] offrent les pistes les plus prometteuses pour l'extension de la logique $\mathcal{L}_O$: l'ensemble des modèles « accessibles » depuis un modèle originel induit une relation de préférence : quels

sont les modèles préférés, i.e. les plus proches, du modèle initial (cf. notamment [BZ01] pour la notion de proximité entre modèle) ? Une opération de contraction consisterait donc à choisir le modèle le plus proche dans lequel l'expression contractée n'est plus vérifiée.

Références

[AGM85] C. Alchourrón, P Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[aJH97] N. Friedman ans J. Halpern. Modeling belief in dynamic systems, part i : Foundations. *Artificial Intelligence*, 95(2) :257–316, 1997.

[Bou94] C. Boutilier. Conditional logics of normality : a modal approach. *Artificial Intelligence*, 68 :87–154, 1994.

[Bou96] C. Boutilier. Iterated Revision and Minimal Change of Conditional Beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, 25(3) :262–305, 1996.

[BZ01] C. Baral and Y. Zhang. On the Semantics of Knowledge Update. In *Proocedings IJCAI'01*, 2001. to appear.

[DP97] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of Iterated Belief Revision. *Artificial intelligence*, 89(1) :1–29, 1997.

[FH94] A. Fuhrmann and S. Hansson. A survey of multiple contraction. *Journal of Logic, Language and Information*, 3 :39–76, 1994.

[Gär92] P. Gärdenfors. Belief revision : An introduction. In P. Gärdenfors, editor, *Belief revision*, pages 1–20. Cambridge University Press, 1992.

[Han99] S. Hansson. *A Textbook of Beliefs Dynamics : theory Change and Databas Updating*. Kluwer, 1999.

[Leh95] D. Lehmann. Belief revision, revised. In *Proceeding of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1534–1540, 1995.

[McC90] J. McCarthy. *Formalizing Common Sense*, chapter Programs With Common Sense, pages 9–20. Ablex Publishing Corporation, 1990.

[Nay94] A. Nayak. Iterated Belief Change Based on Epistemic Entrechment. *Erkenntnis*, 41 :353–390, 1994.

[Per98] L. Perrussel. *Un Outillage Logique Pour l'Ingénierie des Exigences Multi-Points de Vue.* PhD thesis, University Paul Sabatier, 1998. in french.

[Rao89] A. Rao. Dynamics of belief systems : A philosophical, logical, and ai perspective. Technical Report 02, Australian Artificial Intelligence Institute, Melbourne Australia, 1989.

[SPLL00] S. Shapiro, M. Pagnucco, Y. Lespérance, and H. Levesque. Iterated belief change in the situation calculus. In *Proceedings of Seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR2000). Breckenridge, Colorado, USA 12-15 April 2000.* Morgan Kaufman Publishers, 2000.

[ZCZC97] D. Zhang, S. Chen, W. Zhu, and Z. Chen. Representation theorems for multiple belief changes. In *Proceeding of the 15th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'97)*, pages 89–94, 1997.

[Zha96] D. Zhang. Belief revision by sets of sentences. *Journal of Computer Science and Technology*, 11(2) :1–19, 1996.