Inférence paraconsistante sous ressources limitées*

Pierre Marquis et Nadège Porquet
CRIL / Université d'Artois
rue de l'Université - S.P. 16
62307 Lens Cedex
e-mail: {marquis, porquet}@cril.univ-artois.fr

Résumé *Nous présentons une famille de relations d'inférence paraconsistantes sous ressources limitées. Ces relations sont basées sur la $S-3$ implication, une relation d'inférence logiquement plus faible que la déduction logique et paramétrée par un ensemble S de variables. Nous analysons leurs principales propriétés, en particulier du point de vue de la complexité. Les relations d'inférence décrites dans notre cadre ont pour principales caractéristiques d'être traitables lorsque $|S|$ est borné et de préserver pour les connecteurs binaires un comportement classique (ce qui n'est pas le cas dans de nombreuses logiques paraconsistantes). De plus, notre famille de relations est suffisamment générale pour inclure comme cas particuliers à la fois la $S-3$ inférence, les relations d'inférence basées sur la sélection de sous-bases cohérentes et d'autres formes de raisonnements paraconsistants.*

1 Introduction

Peu contesteront le fait que la déduction logique n'est pas appropriée pour l'inférence de bon sens. L'un de ses principaux inconvénients est son incapacité à traiter les incohérences. En effet, toute formule est conséquence logique d'une contradiction. Une telle trivialisation de l'inférence est souvent appelée *ex falso quodlibet sequitur* et l'implication classique est dite explosive (i.e., non paraconsistante).

Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ce problème (voir [BH 98] pour une vue d'ensemble). Certaines, comme la révision de croyances, permettent de prévenir la génération des incohérences (l'objectif est d'assurer à tout instant des états de croyance cohérents) ; d'autres suppriment ces incohérences après leur apparition. Parallèlement, plusieurs approches *font avec* les incohérences. On retrouve parmi elles diverses logiques paraconsistantes, les approches argumentatives, la fusion de croyances et ce que l'on appelle souvent

*Cet article est la version française de l'article *Resource-bounded inference from inconsistent belief bases* à paraître dans les actes de *IJCAI'01*.

l'approche basée sur la cohérence. Dans cette dernière approche, les informations disponibles sont représentées sous la forme d'une base de croyances B, i.e., un ensemble fini de formules propositionnelles ; une stratégie de sélection est d'abord utilisée pour choisir des sous-bases cohérentes de B, qui sont donc préférées aux autres ; l'inférence équivaut ensuite à la déduction logique depuis certaines sous-bases sélectionnées [PL 92] [BCDLP 93]. Malheureusement, les relations d'inférence paraconsistantes existantes sont typiquement intraitables, les problèmes de décision associés se situant le plus souvent au premier ou au second niveau de la hiérarchie polynomiale (voir [CLS 98] [N 98]).

Gérer la trivialisation et l'intraitabilité simultanément est très important, tant du côté théorique que pratique car les bases de connaissances réelles sont souvent incohérentes et de taille suffisamment grande pour que les aspects calculatoires ne puissent pas être négligés. Traiter ces deux problèmes fut l'une des motivations premières pour le développement des logiques non monotones il y a une vingtaine d'années [L 86] [G 91].

Dans cet article, nous montrons que la trivialisation en présence d'incohérences et l'intraitabilité peuvent être traitées dans un même cadre. Pour ce faire, nous décrivons une famille de relations d'inférence paraconsistantes sous ressources limitées. Notre point de départ est la notion de $S-3$ inférence [SC 95] et l'approche basée sur la sélection de sous-bases cohérentes (appelée approche standard basée sur la cohérence dans la suite) [PL 92] [BCDLP 93]. Dans la $S-3$ logique, tout symbole propositionnel est interprété de façon affaiblie, lui permettant d'être *à la fois vrai et faux*, excepté pour les variables d'un ensemble donné S qui sont interprétées classiquement. La traitabilité est assurée en limitant le cardinal de S. La $S-3$ inférence se révèle suffisante pour gérer certaines incohérences, celles qui sont masquées lorsque l'inférence classique est limitée aux variables de S. Afin de gérer les incohérences restantes tout en évitant la trivialisation, nous introduisons une famille de relations d'inférence qui sont à la $S-3$ implication ce que les relations d'inférence de l'approche standard basée sur la cohérence sont à la déduction logique. Nous proposons de restaurer la cohérence en supprimant des variables (de S) plutôt qu'en supprimant des croyances explicites de la base. Dans la suite de cet article, nous analysons la complexité calculatoire de ces relations d'inférence et nous étudions également quelques-unes de leurs propriétés logiques. L'un des points forts de notre cadre est le fait que la traitabilité est assurée chaque fois que $|S|$ est fixé. De plus, les connecteurs binaires se comportent de façon classique, ce qui n'est pas le cas pour beaucoup de logiques paraconsistantes. Enfin, notre cadre est suffisamment général pour englober comme cas particuliers à la fois la $S-3$ logique [SC 95], l'approche standard basée sur la cohérence [PL 92] [BCDLP 93] et des systèmes pour le raisonnement paraconsistant donnés dans [P 91] et [BS 98].

2 Préliminaires formels

Dans ce qui suit, nous considérons un langage propositionnel $PROP_{PS}$ défini inductivement à partir d'un ensemble fini PS de symboles propositionnels, les constantes booléennes $true$ et $false$ et les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ de la façon usuelle. Les autres connecteurs logiques usuels (en particulier, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$) ne font pas partie du langage $PROP_{PS}$. Pour toute formule ϕ de $PROP_{PS}$, $Var(\phi)$ désigne les symboles de PS apparaissant dans ϕ. Tout ensemble fini de formules est considéré comme la formule conjonctive dont les éléments conjoints sont les formules de l'ensemble.

Toute formule ϕ de $PROP_{PS}$ est interprétée de façon classique, sauf mention contraire. Afin d'éviter toute ambiguïté, nous faisons parfois référence aux notions de 2-interprétations, 2-modèles, formules 2-cohérentes et formules 2-incohérentes au lieu des notions habituelles de (respectivement) interprétations, modèles, formules cohérentes et formules incohérentes.

Nous supposons que toute formule ϕ de $PROP_{PS}$ est en forme normale négative (NNF), i.e., toute occurrence de $\neg$ dans ϕ ne s'applique qu'aux variables. Par exemple, $\neg a \vee (b \wedge \neg c)$ est en NNF tandis que la formule classiquement équivalente $\neg(a \wedge \neg(b \wedge \neg c))$ ne l'est pas. Cette hypothèse est faite pour simplifier l'exposé et l'on aurait pu s'en dispenser en raisonnant sur la polarité des sous-formules (i.e., le nombre -modulo 2- d'occurrences du symbole $\neg$ dans la portée desquelles la sous-formule considérée se trouve).

Une base de croyances B est un sous-ensemble fini de $PROP_{PS}$. Une sous-base de B est un sous-ensemble de B. Une base de croyances stratifiée est un couple $\langle B, \leq \rangle$ où B est une base de croyances et $\leq$ est un pré-ordre total sur B. Le pré-ordre utilisé reflète la plausibilité respective des croyances explicites : si ϕ_1 et ϕ_2 de B vérifient $\phi_1 \leq \phi_2$ alors ϕ_1 est considérée comme au moins aussi plausible que ϕ_2. De façon équivalente, une base de croyances stratifiée peut être définie comme une suite finie $(\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ de sous-bases de B, dans laquelle chaque Δ_i $(i \in 1 \,..\, k)$ est le sous-ensemble non vide de B qui contient les éléments minimaux de $B \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j)$ [1] pour le pré-ordre $\leq$. Il est clair que $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ constitue une partition de B (et réciproquement, toute partition totalement ordonnée de B induit un pré-ordre total sur B). Chaque sous-ensemble Δ_i $(i \in 1 \,..\, k)$ forme une strate de B, et i est le niveau de priorité de Δ_i. Ainsi, plus petit est le niveau de priorité de la strate d'une formule, plus grande est sa plausibilité.

Nous supposons que le lecteur est quelque peu familier avec les classes de complexité P, $\Delta_2^p[\mathcal{O}(log\ n)]$, Δ_2^p, et Π_2^p de la hiérarchie polynomiale (voir [P 94] sinon).

3 $S-3$ inférence

Notre famille de relations d'inférence est basée sur la $S-3$ logique [SC 95], une logique multivaluée qui peut être vue comme une généralisation de la logique de l'inférence limitée de Levesque [L 84]. Dans la $S-3$ logique, toute variable propositionnelle est interprétée de manière affaiblie, lui permettant

[1] On convient que $\bigcup_{j=1}^{0} \Delta_j = \emptyset$.

d'être à la fois vraie et fausse, excepté pour les variables d'un ensemble donné S.

Définition 1 *Soit S un sous-ensemble de PS.*

- *Une $S-3$-interprétation sur PS est une application I de l'ensemble L_{PS} de tous les littéraux construits sur PS vers $BOOL = \{0,1\}$ t.q. pour tout littéral l de L_{PS}, on n'a jamais $I(l) = I(\neg l) = 0$, et on a toujours $I(l) = 1 - I(\neg l)$ quand la variable de l appartient à S. $true$ est toujours interprété comme 1 tandis que $false$ est toujours interprété comme 0.*
- *Une $S-3$-interprétation I est un $S-3$-modèle d'une formule NNF Σ ssi, pour toute variable $x \in PS$, la formule obtenue en remplaçant dans Σ toute occurrence de $\neg x$ par $false$ (resp. $true$) quand $I(\neg x) = 0$ (resp. 1) puis toute occurrence de x par $false$ (resp. $true$) quand $I(x) = 0$ (resp. 1) est évaluée classiquement à 1.*
- *Soit B une base de croyances. Soit γ une formule de $PROP_{PS}$. On a $B \models_S^3 \gamma$ ssi tout $S-3$-modèle de B est un ($S-3$-)modèle de γ.*

Une formule est dite $S-3$-cohérente quand elle possède un $S-3$-modèle. Une 3-interprétation (resp. 3-modèle) est simplement une $\emptyset - 3$ interprétation (resp. $\emptyset - 3$-modèle) et une formule est 3-cohérente quand elle possède un 3-modèle. Toute formule (NNF) de $PROP_{PS}$ qui ne contient aucune occurrence de $false$ est 3-cohérente (la 3-interprétation I t.q. $I(l) = 1$ pour tout littéral l de L_{PS} est un 3-modèle de celle-ci). Il est clair que si $S \subseteq S'$ alors toute $S'-3$-interprétation est aussi une $S-3$-interprétation. Ainsi, tout $S-3$ modèle est aussi un 3-modèle.

Comme cela est montré dans [SC 95], pour tout $S \subseteq PS$, la relation d'inférence $\models_S^3$ correspondante est une approximation de $\models$ par défaut : si $B \models_S^3 \gamma$ alors $B \models \gamma$.

Chose intéressante, la puissance limitée de la $S-3$ inférence permet de gérer *certaines* incohérences :

Exemple 3.1 *Soit $B = \{(\neg a \vee b), a, (\neg c \vee b), (\neg b \vee d), (c \wedge \neg d), e, (\neg e \vee f)\}$. B est (2-)incohérente.*

- *Soit $S = \{c,d,e\}$. On a $B \models_S^3 a \wedge c \wedge \neg d \wedge b \wedge \neg b \wedge e \wedge f$ mais $B \not\models_S^3 d$.*
- *Soit $S = \{b,c,d,e\}$. On a $B \models_S^3 false$. Ici, $B \models_S^3$ est explosive : toute formule est une $S-3$ conséquence de B.*

La traitabilité de la $S-3$ implication est assurée en limitant le cardinal de S. Plus précisément, la complexité en temps de la $S-3$ inférence est en $\mathcal{O}(2^{|S|}.|B|.|\gamma|)$ quand B est une formule CNF[2] et γ une clause [SC 95]. Par conséquent, la complexité de la $S-3$ inférence dépend essentiellement du nombre de variables de S.

[2] En combinant le Théorème A.3 de [SC 95], le Lemme 3.1 et le Théorème 4.1 de [CS 96], ce résultat peut être facilement généralisé au cas où B est une formule NNF et γ une formule CNF ; dans cette situation, la $S-3$ inférence peut encore être décidée en temps linéaire par rapport à la taille de la base de croyances.

4 Inférence paraconsistante sous ressources limitées

4.1 Faire avec l'incohérence

Recourir à la $S-3$ inférence est une manière d'éviter que certaines incohérences deviennent génantes, à savoir celles qui ne sont dérivables que si un raisonnement classique est appliqué à certaines variables en dehors de S. Dans l'exemple précédent, avec $S=\{c,d,e\}$, nous avons à la fois $B \models^3_S b$ et $B \models^3_S \neg b$, mais nous **n'**avons **pas** pour autant $B \models^3_S d$.

Cependant, restreindre S à un sous-ensemble quelconque des variables apparaissant dans B ne suffit pas à éviter la trivialisation dans toute situation (voir l'exemple précédent). Afin de prendre en compte les incohérences restantes, nous proposons de ne considérer que les sous-ensembles S' de S pour lesquels les relations d'inférence associées ne sont pas explosives. Cette approche est similaire à l'approche standard basée sur la cohérence, si ce n'est que la relation d'inférence est affaiblie en supprimant des variables de S au lieu de supprimer des croyances explicites de B. Formellement, cela nécessite d'abord une notion jouant un rôle similaire à la notion de sous-base cohérente utilisée dans l'approche standard :

Définition 2 *Soit B une base de croyances. Soit $S \subseteq PS$ et $S_0 \subseteq S$ t.q. $B \not\models^3_{S_0} false$. Un* sous-ensemble cohérent *S' de S relativement à B et S_0 est un sous-ensemble de S contenant S_0 et t.q. $B \not\models^3_{S'} false$. On note $\mathcal{S}(B,S,S_0)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles cohérents de S relativement à B et S_0.*

Dans cette définition, S_0 est un ensemble de variables qui *doivent* être interprétées classiquement. Dans notre cadre, S_0 joue un rôle similaire à celui joué par les contraintes d'intégrité, en fusion par exemple. Exiger l'existence d'un tel ensemble S_0 (éventuellement vide) impose que B est 3-cohérente (ce qui n'est pas une supposition très forte).

Par la suite, nous nous focalisons sur une approche sceptique (tout sous-ensemble cohérent préféré est considéré) :

Définition 3 *Soit B une base de croyances. Soit $\mathcal{P}$ une stratégie de sélection qui, pour tout B et tout S donnés, retourne un sous-ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(B,S,S_0)$ de $\mathcal{S}(B,S,S_0)$. Soit γ une formule de $PROP_{PS}$. γ est une* conséquence *de B relativement à $\mathcal{P}$ et S_0, noté $B \approx^{\mathcal{P},S_0}_S \gamma$, ssi $\forall S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(B,S,S_0)$, $B \models^3_{S'} \gamma$.*

A présent, nous pouvons définir des stratégies de sélection des sous-ensembles cohérents. Celles que nous proposons sont similaires à celles définies pour les sous-bases cohérentes dans l'approche standard basée sur la cohérence [PL 92] [BCDLP 93] [BDP 95].

Définition 4 *Soit B une base de croyances. Soit $S=(S_0,\ldots,S_j)$ une partition totalement ordonnée d'un sous-ensemble donné de PS où S_0 est t.q. $B \not\models^3_{S_0} false$.*

- *L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{PO}}(B,S,S_0)$ de tous les sous-ensembles cohérents préférés de S relativement à B et S_0 pour la stratégie possibiliste est le singleton*

$\{\bigcup_{i=0}^{s-1} S_i\}$, où s est soit le plus petit indice $(1 \leq s \leq j)$ t.q. $\bigcup_{i=0}^{s} S_i$ est un sous-ensemble incohérent de S relativement à B soit $(j+1)$ si S est cohérent relativement à B.

- *L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{LO}}(B, S, S_0)$ de tous les sous-ensembles cohérents préférés de S relativement à B et S_0 pour la stratégie linéaire est le singleton $\{\bigcup_{i=0}^{j} S'_i\}$, où S'_i $(i \in 0..j)$ est défini par $S'_i = S_i$ si $S_i \cup \bigcup_{l=0}^{i-1} S'_l$ est un sous-ensemble cohérent de S relativement à B, $\emptyset$ sinon.*
- *L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{IP}}(B, S, S_0)$ de tous les sous-ensembles cohérents préférés de S relativement à B et S_0 pour la stratégie de préférence pour l'inclusion est $\{S' \mid S'$ est un sous-ensemble cohérent de S relativement à B et S_0 et $\forall S'' \neq S'$ t.q. S'' est un sous-ensemble cohérent de S relativement à B et S_0, $\forall i \in 0..j$ $((\forall l < i(S' \cap S_l = S'' \cap S_l)) \Rightarrow S' \cap S_i \not\subset S'' \cap S_i)\}$.*
- *L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{LE}}(B, S, S_0)$ de tous les sous-ensembles cohérents préférés de S relativement à B et S_0 pour la stratégie lexicographique[3] est $\{S' \mid S'$ est un sous-ensemble cohérent de S relativement à B et S_0 et $\forall S'' \neq S'$ t.q. S'' est un sous-ensemble cohérent de S relativement à B et S_0, $\forall i \in 0..j$ $((\forall l < i(|S' \cap S_l| = |S'' \cap S_l|)) \Rightarrow |S' \cap S_i| \geq |S'' \cap S_i|)\}$.*

Dans la suite, nous appelons aussi *stratification* de S une telle partition $(S_0, \ldots, S_j)$. Intuitivement, plus petit est l'indice i de la strate S_i $(i \in 0 \ldots j)$ contenant $x \in PS$, moins on est prêt à accepter que x soit interprétée à la fois comme vraie et fausse (en particulier, on l'interdit pour les variables de S_0).

Les définitions précédentes supposent qu'une stratification de l'ensemble donné de variables S est disponible. Une telle stratification est la contre-partie formelle des informations préférentielles utilisées pour départager les sous-ensembles cohérents dans l'approche standard.

Voici un exemple montrant la diversité des conclusions auxquelles il est possible d'aboutir dans notre cadre :

Exemple 4.1 *Soit $B = \{(\neg a \vee b), a, (\neg c \vee b), (\neg b \vee d), (c \wedge \neg d), e, (\neg e \vee f)\}$. Avec $S = (\emptyset, \{a, b, c, d, e\})$ ou $S = (\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \{e\})$, a, c, $\neg d$ et e sont conséquences de B (mais leurs négations ne le sont pas) quelle que soit la stratégie $\mathcal{P}$ considérée parmi les quatre stratégies exposées précédemment. De plus :*

- *Avec $S = (\emptyset, \{a, b, c, d, e\})$:*
  - *relativement à $\mathcal{PO}$ (ou $\mathcal{LO}$), aucune des formules b, $\neg b$, f et $\neg f$ n'est conséquence de B.*
  - *relativement à $\mathcal{IP}$, f est conséquence de B mais b et $\neg b$ ne le sont pas.*
  - *relativement à $\mathcal{LE}$, b et f sont conséquences de B et leurs négations ne le sont pas.*
- *Avec $S = (\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \{e\})$:*
  - *relativement à $\mathcal{PO}$, b est conséquence de B mais f et $\neg f$ ne le sont pas.*

[3] C'est la terminologie utilisée pour décrire la politique de sélection de sous-bases cohérentes qui lui correspond et c'est pour cette raison que nous l'employons ici.

– *relativement à $\mathcal{LO}$, $\mathcal{IP}$ ou $\mathcal{LE}$, b et f sont conséquences de B et leurs négations ne le sont pas.*

Clairement, quand $B \not\models^3_S false$, toutes nos relations d'inférence $B \approx^{\mathcal{P},S_0}_S$ coïncident avec $B \models^3_S$. Par conséquent, la $S-3$ inférence peut être retrouvée comme une instance particulière dans notre cadre.

La proposition suivante indique que l'un de nos objectifs principaux (éviter la trivialisation) est toujours atteint.

Proposition 4.1 *Aucune des relations $B \approx^{\mathcal{P},S_0}_S$ avec $\mathcal{P}$ parmi $\mathcal{PO}$, $\mathcal{LO}$, $\mathcal{IP}$, $\mathcal{LE}$ n'est explosive.*

4.2 Comment instancier notre cadre

Il existe plusieurs façons de définir un ensemble stratifié S à partir d'une base de croyances stratifiée (SBB) B. D'abord, S_0 peut être défini comme l'ensemble de toutes les variables apparaissant dans les croyances certaines (i.e., les connaissances) de B quand elles existent, pourvu qu'un tel ensemble soit suffisamment petit et satisfasse $B \not\models^3_{S_0} false$. Sinon, S_0 est défini comme étant $\emptyset$.

Définir S est un problème connu comme difficile dans le cas général [SC 95] [K 97]. Cependant, quand B est une SBB, il est possible d'exploiter les informations préférentielles données par la stratification pour définir S. Une manière très naturelle de le faire consiste à considérer en priorité les variables des croyances les plus plausibles, jusqu'à atteindre une borne prédéfinie b sur le cardinal de S. Formellement, on considère l'ensemble suivant de variables S^b :

Définition 5 *Soit $B = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ une SBB. Soit b un entier positif. Soit S_0 un sous-ensemble de PS t.q. $B \not\models^3_{S_0} false$ et $|S_0| \leq b$. Le* niveau d'inférence[4] *de B étant donnés b et S_0, noté i^b_B est le plus petit i ($i \in 0..k$) t.q. $S^b_i = S^b_{i+1}$, où la suite (S^b_i) est définie inductivement par $S^b_0 = S_0$, $(\forall i \in 1, \ldots, k)$ $S^b_i = S^b_{i-1} \cup Var(\Delta_i)$ si $|S^b_{i-1} \cup Var(\Delta_i)| \leq b$, $S^b_i = S^b_{i-1}$ sinon, et $S^b_{k+1} = S^b_k$. On définit S^b comme $S^b_{i^b_B}$.*

Enfin, quand S_0 et un ensemble "plat" S sont disponibles, une stratification de S peut aisément être dérivée de la stratification donnée de B. En fait, une fois que S_0 a été pris en compte, il est raisonnable d'accorder plus d'importance aux variables de S qui appartiennent aux croyances les plus plausibles. Grosso modo, nous voulons raisonner aussi classiquement que possible sur les croyances les plus plausibles afin de prendre en compte leurs conséquences classiques, éventuellement conflictuelles : les incohérences ne doivent pas être ignorées quand elles proviennent des croyances les plus plausibles.

[4] A première vue, le calcul du niveau d'inférence d'une base de croyances est semblable au calcul du niveau d'incohérence pour les bases de croyances possibilistes. Cependant, le premier est uniquement guidé par des motivations calculatoires ; en particulier, on n'a pas $B \not\models^3_{S^b} false$ dans le cas général.

Définition 6 *Soient $B = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ une SBB, S un sous-ensemble de PS et S_0 un sous-ensemble de S. La stratification de S induite par B étant donné S_0 est $S = (S_0, \ldots, S_{k+1})$ t.q. $S_i = (S \cap Var(\Delta_i)) \setminus \bigcup_{l=0}^{i-1} S_l$ pour tout $i \in 1..k$, et $S_{k+1} = S \setminus \bigcup_{l=0}^{k} S_l$.*

Il existe d'autres façons de dériver une stratification de S à partir de B. Par exemple, si nous sommes prêts à accorder plus de confiance aux faits qu'aux règles, nous pouvons tirer profit de la notion de degré de certitude[5] d'une variable (définie dans [BS 98]) pour atteindre ce but depuis une base de croyances B sous forme CNF.

Notons enfin que certains travaux montrent comment dériver automatiquement des SBB à partir de bases de croyances "plates" (cf. [B 00] pour une synthèse). Il est ainsi possible d'utiliser ces travaux en amont pour obtenir un ensemble stratifié S à partir d'une base de croyances B.

4.3 Propriétés logiques et prudence des relations d'inférence

Concevoir une relation d'inférence traitable et paraconsistante, il n'y a rien de plus facile ! Par exemple, on peut restreindre la déduction logique $\models$ de façon à ne considérer comme conséquences d'une base de croyances B que les formules valides contenant – par exemple – au plus deux littéraux dont un au moins apparaît dans B, et l'affaire est jouée. Est-ce que pour autant une telle relation d'inférence est intéressante ? Clairement, la réponse est non, pour au moins deux raisons ; d'une part, il semble très difficile de donner une sémantique claire à cette relation, d'avoir une idée précise et immédiate de ce que représentent les conséquences d'une base donnée, donc finalement d'utiliser cette relation comme modèle d'inférence "raisonnable" ; d'autre part, une telle relation d'inférence est sur-prudente : très peu des conséquences naturellement attendues de B sont effectivement considérées comme des conséquences.

Ainsi, il n'est pas possible de faire l'économie d'une étude des propriétés logiques et de prudence des relations d'inférence définies dans notre cadre. C'est ce que nous proposons en quelques lignes.

Quelques propriétés logiques. Comme dans l'approche standard, il est facile de donner une sémantique en terme de modèles préférés à chacune de nos relations $\approx_S^{\mathcal{P},S_0}$. En effet, $B \approx_S^{\mathcal{P},S_0} \gamma$ ssi tout 3-modèle préféré de B est un 3-modèle de γ, où les 3-modèles préférés de B sont exactement les $S'-3$-modèles de B avec $S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(B, S, S_0)$. Ainsi, quand $S = (\emptyset, PS)$, les 3-modèles préférés de B relativement à $\mathcal{IP}$ sont les 3-modèles de B qui représentent les mondes "les plus normaux possibles" (i.e., aussi proches que possible des 2-interprétations).

Un autre point fort de notre approche est la faible sensibilité à la syntaxe de nos relations d'inférence. En effet, les connecteurs binaires $\wedge$ et $\vee$ de notre langage se comportent de manière classique : l'ensemble des $S-3$ modèles de

[5] Grossièrement, toute variable x de S apparaissant dans B peut être associée à la taille de l'une des plus petites clauses de B contenant x ; une stratification de S est obtenue en considérant x avant y quand le score associé à x est inférieur à celui associé à y.

$\phi \wedge \psi$ (resp. $\phi \vee \psi$) est l'intersection (resp. l'union) de l'ensemble des $S-3$ modèles de ϕ et de l'ensemble des $S-3$ modèles de ψ. Par conséquent, étant donnée une stratification $S = (S_0, \ldots, S_j)$, toute formule de B (et B elle-même !) peut être transformée en une formule CNF sans modifier les relations d'inférence $\mid\!\approx_S^{\mathcal{P},S_0}$ correspondantes. La possibilité de normaliser la base de croyances sous forme CNF est particulièrement importante pour des raisons de lisibilité et de calculabilité pratique des relations d'inférence $\mid\!\approx_S^{\mathcal{P},S_0}$. De plus, cette propriété très utile n'est pas satisfaite en général par les logiques paraconsistantes (e.g., celles données dans [dC 74], [L 87]) ou l'approche standard basée sur la cohérence.

Evidemment, une forme limitée de sensibilité à la syntaxe ne signifie nullement pas de sensibilité à la syntaxe ! Comme toute relation d'inférence paraconsistante, nos relations ne satisfont pas l'équivalence logique à gauche (i.e., deux formules classiquement équivalentes n'admettent pas forcément les mêmes conséquences). Pour la même raison, elles ne satisfont pas l'affaiblissement à droite (puisqu'elles satisfont la réflexivité). Enfin, contrairement à la $S-3$ inférence [SC 95] [tTvH 96], elles ne sont pas monotones[6](ni par rapport à S, ni par rapport à B) dans le cas général.

Exemple 4.2 *Soient* $B = \{a, (\neg a \vee b), (\neg a \vee c), \neg c\}$, $B' = \{a, (\neg a \vee b), (\neg a \vee c), \neg c, \neg a\}$, $S = (\emptyset, \{a\})$ *et* $S' = (\emptyset, \{a, c\})$. *On a* $B \mid\!\approx_S^{\mathcal{IP},S_0} b$ *mais* $B' \not\mid\!\approx_S^{\mathcal{IP},S_0} b$ *et* $B \not\mid\!\approx_{S'}^{\mathcal{IP},S_0} b$. *On peut trouver facilement des contre-exemples analogues pour les autres stratégies de sélection.*

Ce n'est pas très surprenant : tandis que la monotonie est une propriété très recherchée lorsque B est cohérente, ce n'est plus le cas sinon. En effet, il est naturel que le statut épistémique des croyances change lorsque des croyances explicites supplémentaires sont prises en compte ou lorsque l'on augmente les capacités d'inférence. Plus précisément, accroître l'effort calculatoire peut conduire à découvrir des incohérences qui étaient cachées avant.

Prudence. Dans l'éventail des relations d'inférence de notre cadre, une borne extrême correspond au cas où $S = \emptyset$, tandis qu'à l'autre extrêmité, on a $S = PS$. Aucun de ces deux cas extrêmes ne peut être considéré comme une relation d'inférence "raisonnable" pour le raisonnement de bon sens. D'une part, le dernier cas correspond à un agent idéal, doté de capacités d'inférence illimitées : $\models_{PS}^3$ coïncide avec $\models$. Sous cette hypothèse, lorsque B est 2-cohérente, toutes nos relations d'inférence $B \mid\!\approx_{PS}^{\mathcal{P},S_0}$ coïncident avec $B \models$ (ce qui est un avantage de $B \mid\!\approx_{PS}^{\mathcal{P},S_0}$ sur nombre de relations paraconsistantes $B \vdash$ qui restent des approximations strictes de $B \models$ même lorsque B est cohérente). D'autre part, le premier cas correspond à un agent doté de capacités de raisonnement très limitées. En effet, si $S = \emptyset$, alors toutes nos relations d'inférence correspondent à la 3-implication de Levesque [L 84]. Cette relation d'inférence est

[6]Nous avons néanmoins une propriété de monotonie par strate : pour $\mathcal{P} \in \{\mathcal{PO}, \mathcal{LO}, \mathcal{IP}, \mathcal{LE}\}$, pour tout $i \in 0, \ldots, j-1$, si $B \mid\!\approx_{(S_0,\ldots,S_i)}^{\mathcal{P},S_0} \gamma$, alors $B \mid\!\approx_{(S_0,\ldots,S_{i+1})}^{\mathcal{P},S_0} \gamma$. Cette propriété est très utile pour tester si $B \mid\!\approx_S^{\mathcal{P},S_0} \gamma$ de manière incrémentale.

traitable et évite la trivialisation (tant que B ne contient aucune occurrence de $false$). Cependant, avec cette relation d'inférence, il est impossible de conclure b depuis $a \wedge (\neg a \vee b)$ (le syllogisme disjonctif n'est jamais vérifié). Cela suggère que la prudence doit être considérée comme un critère important dans le choix d'une relation.

Usuellement, on dit qu'une relation d'inférence est plus prudente qu'une autre lorsque l'ensemble des conséquences de la première est inclus dans l'ensemble des conséquences de la seconde. Une relation d'inférence trop prudente (par exemple, conduisant à un ensemble vide de conséquences) ou trop peu prudente (par exemple, explosive) n'a que peu d'intérêt.

Quand S est un sous-ensemble cohérent, toutes nos relations d'inférence coïncident avec $\models^3_S$, elles sont donc aussi prudentes que $\models^3_S$ et le cardinal de S peut être vu comme un degré de prudence. Dans le cas restant, nos relations d'inférence sont plus prudentes que $\models^3_S$ mais c'est ce qui est attendu puisque la trivialisation doit être évitée. Dans cette situation, nos relations d'inférence ne coïncident pas en général, et des résultats similaires à ceux de l'approche standard basée sur la cohérence peuvent être obtenus ; en particulier, les relations d'inférence les moins prudentes correspondent aux stratégies $\mathcal{LO}$ et $\mathcal{LE}$.

Proposition 4.2

- $\approx_S^{\mathcal{PO},S_0}$ *est plus prudente que* $\approx_S^{\mathcal{LO},S_0}$ *et* $\approx_S^{\mathcal{IP},S_0}$*, mais l'inverse n'est pas toujours vérifié.*
- $\approx_S^{\mathcal{IP},S_0}$ *est plus prudente que* $\approx_S^{\mathcal{LE},S_0}$ *mais l'inverse n'est pas toujours vérifié.*
- $\approx_S^{\mathcal{LO},S_0}$ *ne peut pas être comparée avec* $\approx_S^{\mathcal{IP},S_0}$ *et* $\approx_S^{\mathcal{LE},S_0}$ *pour la prudence dans le cas général.*

4.4 Généralité du cadre proposé

Notre cadre est assez général. Comme évoqué précédemment, il inclut la $S-3$ inférence comme cas particulier. Par conséquent, il inclut également la relation d'inférence $\vdash_{LP}$ de la logique trivaluée LP[7] [P 89] avec $\{1, \frac{1}{2}\}$ comme valeurs de vérité désignées. Cette relation est définie par :

Définition 7

- *Une LP-interprétation sur PS est une application I de l'ensemble PS vers $THREE = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.*
- *La sémantique d'une formule dans une LP-interprétation I est définie inductivement par :*
  - $I(true) = 1$ *et* $I(false) = 0$ *;*
  - $I(\neg\phi) = 1 - I(\phi)$ *;*
  - $I(\phi \wedge \psi) = min(I(\phi), I(\psi))$ *;*
  - $I(\phi \vee \psi) = max(I(\phi), I(\psi))$.

[7] LP est aussi connu sous le nom de J_3, cf [E 90].

– *I est un LP-modèle de Σ ssi $I(\Sigma) > 0$.*
– *$\Sigma \vdash_{LP} \gamma$ ssi tout LP-modèle de Σ est un (LP-)modèle de γ.*

Il est assez facile de prouver que $\vdash_{LP}$ coïncide avec $\models^3_\emptyset$. Le point suivant est plus intéressant : soit $\leq$ l'ordre de préférence sur les LP-interprétations défini par $I \leq J$ ssi $\{x \in PS \mid I(x) = \frac{1}{2}\} \subseteq \{x \in PS \mid J(x) = \frac{1}{2}\}$; alors, la relation $\vdash_{LP_m}$ définie par $\Sigma \vdash_{LP_m} \gamma$ ssi tout LP-modèle minimal de Σ relativement à $\leq$ est un (LP-)modèle de γ, est un cas particulier de notre relation $\approx_S^{\mathcal{IP},S_0}$:

Proposition 4.3 *Soit Σ et γ deux formules de $PROP_{PS}$. On a $\Sigma \vdash_{LP_m} \gamma$ ssi $\{\Sigma\} \approx_{PS}^{\mathcal{IP},\emptyset} \gamma$.*

Notre travail est aussi étroitement lié à l'approche pour le raisonnement paraconsistant décrite dans [BS 98]. Dans ce travail, toute formule Σ de $PROP_{PS}$ est associée à une théorie des défauts $\langle \Sigma^\pm, D_{PS} \rangle$ où :

– $\Sigma^\pm$ est une formule dans le langage $PROP_{PS^\pm}$ où $PS^\pm = \{x^+ \mid x \in PS\} \cup \{x^- \mid x \in PS\}$; $\Sigma^\pm$ est obtenue en remplaçant dans Σ toute occurrence d'un littéral positif x par le littéral positif x^+ et toute occurrence d'un littéral négatif $\neg x$ par le littéral positif x^-.
– $D_{PS} = \{\delta_x \mid x \in PS\}$ est un ensemble de règles de défaut

$$\delta_x = \frac{: x^+ \Leftrightarrow \neg x^-}{(x \Leftrightarrow x^+) \wedge (\neg x \Leftrightarrow x^-)}$$

Parmi les relations d'inférence qui peuvent être définies à partir de $\langle \Sigma^\pm, D_{PS} \rangle$ se trouve l'inférence sceptique signée ; une formule γ de $PROP_{PS}$ est une conséquence sceptique signée de Σ, noté $\Sigma \vdash_s^\pm \gamma$ ssi $\gamma^\pm$ appartient à toute extension de $\langle \Sigma^\pm, D_{PS} \rangle$.

Chose intéressante, la relation $\vdash_s^\pm$ peut être retrouvée comme un cas particulier de notre relation $\approx_S^{\mathcal{IP},S_0}$.

Proposition 4.4 *Soient Σ et γ deux formules de $PROP_{PS}$. On a $\Sigma \vdash_s^\pm \gamma$ ssi $\{\Sigma\} \approx_{PS}^{\mathcal{IP},\emptyset} \gamma$.*

Enfin, notre cadre englobe aussi les relations d'inférence sceptiques $\mid\!\sim^{\mathcal{P}}$ de l'approche standard basée sur la cohérence définies dans [PL 92] [BCDLP 93] [BDP 95].

Proposition 4.5 *Soit $B = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k)$ une SBB. Nous associons à B en temps polynomial la base de croyances $B_{new} =$*

$$\{new_{i,j}, \neg new_{i,j} \vee \phi_{i,j} \mid \phi_{i,j} \in \Delta_i\}$$

et la stratification $S =$

$$(Var(B), \{new_{1,j} \mid \phi_{1,j} \in \Delta_1\}, \ldots, \{new_{k,j} \mid \phi_{k,j} \in \Delta_k\})$$

où tous les $new_{i,j}$ sont de nouvelles variables (qui n'apparaissent pas dans B). Pour toute stratégie de sélection $\mathcal{P}$ parmi $\mathcal{PO}$, $\mathcal{LO}$, $\mathcal{IP}$, $\mathcal{LE}$ et toute formule γ ne contenant pas une nouvelle variable, on a

$$B \mid\!\sim^{\mathcal{P}} \gamma \text{ ssi } B_{new} \approx_S^{\mathcal{P},Var(B)} \gamma.$$

Se focaliser sur les variables plutôt que sur les croyances rend moins sensible à la syntaxe et donne une flexibilité que l'on n'a pas directement avec l'approche standard basée sur la cohérence. Par exemple, supposons que B réunisse des croyances provenant de deux sources d'informations différentes. La première source affirme $a \wedge b$, tandis que l'autre affirme $\neg a \wedge \neg b$. Les deux sources sont aussi fiables ; cependant, la première source d'informations est plus fiable en ce qui concerne b, tandis que la seconde est plus fiable en ce qui concerne a. Avec $\mathcal{P} \in \{\mathcal{IP}, \mathcal{LE}\}$, l'approche standard basée sur la cohérence donne $(\{a \wedge b \neg a \wedge \neg b\}) \mid\!\sim^{\mathcal{P}} a \vee \neg b$, alors que la conclusion attendue est exactement la *négation* de $a \vee \neg b$! En indiçant les variables avec les sources, nous pouvons, dans notre cadre, exprimer que b en provenance de la source 1. est plus fiable que a provenant de cette même source et que, si l'on considère la source 2., on a le contraire. Avec $B = \{(\neg a_1 \vee a) \wedge (\neg a \vee a_1) \wedge (\neg a_2 \vee a) \wedge (\neg a \vee a_2) \wedge (\neg b_1 \vee b) \wedge (\neg b \vee b_1) \wedge (\neg b_2 \vee b) \wedge (\neg b \vee b_2) \wedge a_1 \wedge b_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg b_2\}$, $\mathcal{P} \in \{\mathcal{PO}, \mathcal{LO}, \mathcal{IP}, \mathcal{LE}\}$, et $S = (\{a, b\}, \{b_1, a_2\}, \{a_1, b_2\})$, on a $B \mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0} \neg a \wedge b$ et on **n'** a **pas** $B \mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0} a \vee \neg b$.

En s'appuyant sur la transformation $\pm$ utilisée dans [BS 98], on peut prouver réciproquement que tout problème d'inférence du type $B \mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0} \gamma$ peut être codé comme un problème d'inférence à partir d'une base de croyances stratifiée pour les quatre politiques de sélection considérées ici (la réduction étant polynomiale, on peut aussi utiliser ce résultat pour prouver les résultats d'appartenance donnés à la Proposition 4.6). Par manque de place, nous ne décrivons pas cette transformation en détail.

4.5 Faire avec l'intraitabilité

Malgré la généralité de notre cadre (cf. Section 4.4), nos relations d'inférence ne sont pas plus difficiles du point de vue de la complexité que celles de l'approche standard basée sur la cohérence :

Définition 8 *Pour toute stratégie de sélection $\mathcal{P}$,* CLAUSE $\mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0}$ *est le problème de décision suivant :*

- **Données :** *Une base de croyances B, un sous-ensemble S de PS, un sous-ensemble S_0 de S t.q. $B \not\models_{S_0}^3 false$ et une formule CNF γ.*
- **Question :** *A-t-on $B \mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0} \gamma$?*

LITTÉRAL $\mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0}$ *est la restriction de ce problème au cas où γ est une conjonction de littéraux.*

Proposition 4.6 *La complexité de* CLAUSE $\mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0}$ *et* LITTÉRAL $\mid\!\approx_S^{\mathcal{P}, S_0}$ *est donnée à la Table 1.*

Un des points essentiels dans notre approche est que limiter le cardinal de S suffit à assurer la traitabilité. La proposition suivante montre que notre second objectif est atteint dans ce cas :

TAB. 1: Complexité de l'inférence.

$\mathcal{P}$	CLAUSE / LITTÉRAL $\approx_S^{\mathcal{P},S_0}$
$\mathcal{PO}$	$\Delta_2^p[\mathcal{O}(log\ n)]$-complet
$\mathcal{LO}$	Δ_2^p-complet
$\mathcal{IP}$	Π_2^p-complet
$\mathcal{LE}$	Δ_2^p-complet

Proposition 4.7 *La complexité de* CLAUSE $\approx_S^{\mathcal{P},S_0}$ *depuis une base de croyances B étant donnée une stratification $S = (S_0, \ldots, S_j)$ d'un ensemble de variables propositionnelles de cardinal* **borné** *est dans* P.

La principale raison est que, quand $|S| \leq b$, on a seulement 2^b sous-ensembles de S, ce qui est une constante quand b est une constante. Par conséquent, l'algorithme naïf consistant à générer $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(B, S, S_0)$ en filtrant les éléments cohérents préférés de 2^S, et en testant pour chacun des éléments S' résultant si $B \models_{S'}^3 \gamma$ ou non est en $\mathcal{O}(2^{2b}.|B|.|\gamma|)$, soit en $\mathcal{O}(|B|.|\gamma|)$ pour une constante b, pour tout B et une question CNF γ. Cela peut bien sûr être vu comme une "astuce", mais on peut difficilement mieux faire : sauf si $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, il n'existe pas de relation d'inférence traitable qui soit suffisamment générale pour inclure $\models$ comme cas particulier. De plus, se focaliser sur $B \models_S^3$ comme approximation traitable de $B \models$ pour construire une relation d'inférence paraconsistante n'est pas un si mauvais choix, surtout en comparaison d'autres choix possibles. En effet, soit $B \vdash$ une approximation par défaut traitable de $B \models$ à partir de laquelle on souhaite construire une relation d'inférence paraconsistante traitable. Exiger qu'une telle relation paraconsistante traitable coïncide avec $B \vdash$ quand $B \vdash$ n'est pas explosive et soit obtenue en affaiblissant $B \vdash$ par la suppression de croyances de B sinon, limite la gamme des relations $\vdash$ intéressantes. Par exemple, considérer la restriction $B \vdash_{unit}$ de $B \models$ où seules les conséquences de B dérivables par résolution unitaire sont considérées conduirait à une sémantique complexe dans laquelle $\wedge$ et $\vee$ ne se comportent pas de manière classique [CE 98] ; considérer la restriction $B_{Horn} \models$ de $B \models$ où B_{Horn} est le sous-ensembles des clauses Horn de B ne conduirait pas à une relation traitable [CLS 98] [N 98].

5 Autres travaux dans ce domaine

Une étude des publications en Intelligence Artificielle montre que la trivialisation et l'intraitabilité peuvent toutes deux être traitées en considérant des relations d'inférence *infraclassiques*, i.e., *des approximations par défaut* de $B \models$. Ce qui est assez surprenant, c'est le fait que ces deux problèmes **n'** ont habituellement **pas** été traités ensemble.

L'idée d'approcher la déduction logique pour éviter la trivialisation a été déclinée selon plusieurs axes. Ainsi, la théorie de la preuve de toute logique paraconsistante restreint l'ensemble des preuves admissibles à un sous-ensemble strict (i.e., une approximation par défaut) des preuves classiques afin d'éviter la trivialisation. Dans l'approche standard basée sur la cohérence, on se focalise sur des sous-bases cohérentes préférées de B, qui peuvent être considérées comme des approximations de B par défaut. Les sous-bases préférées peuvent aussi être définies en divisant la base de croyances B en plusieurs micro-théories [H 87] caractérisées par leur ensemble de variables, et sélectionnées de façon dynamique en regardant les variables apparaissant dans les questions [CP 99]. Malheureusement, pour toutes ces approches, les relations d'inférence correspondantes sont typiquement au moins aussi difficiles que l'inférence classique dans le cas général[8].

D'autre part, plusieurs techniques d'approximations ont été développées pour pallier la non-traitabilité de la déduction logique (e.g., [L 84] [F 87] [D 96] [CK 89] [SC 95] [SK 96] [CE 98]) ; dans ces approches, la relation d'inférence (ou la base de connaissances elle-même) est approchée pour être rendue calculatoirement plus aisée. Cependant, le problème de la trivialisation n'est pas abordé. Par exemple, la relation d'inférence définie dans [SK 96] est toujours explosive quand B est incohérente tandis que celles données dans [SC 95] [CE 98] sont explosives en général quand B est incohérente.

Notre approche est relative à tous ces travaux et s'inspire directement de deux techniques d'approximation, la $S-3$ logique et l'approche standard basée sur la cohérence. En assurant que toutes nos relations d'inférence sont paraconsistantes et traitables quand le cardinal de S est borné, nous espérons avoir réussi à tirer profit du meilleur de chacune de ces approches.

6 Conclusion

La principale contribution de cet article est une famille de relations d'inférence paraconsistantes sous ressources limitées. Par opposition à de nombreuses approches traitant de la gestion des incohérences, le problème de la calculabilité est essentiel dans notre cadre. En particulier, les ressources peuvent être ajustées pour engendrer des relations d'inférence réalistes et viables du côté calcul. Néanmoins, notre cadre est suffisamment général pour englober la $S-3$ logique, l'approche standard basée sur la cohérence et plusieurs systèmes pour le raisonnement paraconsistant comme cas particuliers.

Ce travail appelle différentes perspectives. Plusieurs familles de relations d'inférence supplémentaires pourraient être définies dans notre cadre. En particulier, d'autres principes d'inférence (e.g., l'inférence prudente $\models^3_{\bigcap_{S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(B,S,S_0)} S'}$) pourraient être considérés. Tandis que le choix de S a été considéré comme étant indépendant des questions γ, l'alternative pourrait être explorée (comme dans [CP 99]), et plusieurs relations d'inférence dirigées par les questions pour-

[8] Des cas traitables peuvent être obtenus en restreignant B à des formules pour lesquelles les tests de cohérence peuvent être effectués efficacement, et/ou en limitant le nombre et la taille des sous-bases préférées.

raient être définies. Dans nos recherches futures, nous souhaitons analyser les propriétés calculatoires et logiques des relations d'inférence correspondantes.

Remerciements

Un grand merci aux relecteurs de cet article pour leurs commentaires fort précieux. Nous remercions aussi la Région Nord / Pas-de-Calais et l'IUT de Lens pour leur soutien. Nadège Porquet est financée par une bourse de la Région Nord / Pas-de-Calais.

Références

[BCDLP 93] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang et H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. *Proc. IJCAI'93*, 640-645, 1993.

[BDP 95] S. Benferhat, D. Dubois, et H. Prade. How to infer from inconsistent beliefs without revising ? *Proc. IJCAI'95*, 1449-1455, 1995.

[B 00] S. Benferhat. Computing specificity in default reasoning. In *Handbook of DRUMS*, vol. 5, Kluwer Academic, 147-177, 2000.

[BH 98] Ph. Besnard et A. Hunter. Introduction to actual and potential contradictions. In *Handbook of DRUMS*, vol. 2, Kluwer Academic, 1-11, 1998.

[BS 98] Ph. Besnard et T. Schaub. Signed systems for paraconsistent reasoning. *Journal of Automated Reasoning*, 20 :191-213, 1998.

[CS 96] M. Cadoli et M. Schaerf. On the complexity of entailment in propositional multivalued logics. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 18 :29–50, 1996.

[CLS 98] C. Cayrol, M.-C. Lagasquie-Schiex et Th. Schiex. Nonmonotonic reasoning : from complexity to algorithms. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 22(3-4) :207–236, 1998.

[CP 99] S. Chopra et R. Parikh. An inconsistency tolerant model for belief representation and belief revision. *Proc. IJCAI'99*, 192-197, 1999.

[CE 98] J.M. Crawford et D.W. Etherington. A non-deterministic semantics for tractable inference. *Proc. AAAI'98*, 1998.

[CK 89] J.M. Crawford et B. Kuipers. Towards a theory of access-limited logic for knowledge representation. *Proc. KR'89*, 67–78, 1989.

[dC 74] N. da Costa. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15 :497-510, 1974.

[D 96] M. Dalal. Anytime families of tractable propositional reasoners. *Proc. AI&Math'96*, 42–45, 1996.

[E 90] R.L. Epstein. The semantic foundation of logic. Vol. I : propositional logics. *Kluwer Academic Publisher*, 1990.

[F 87] A.M. Frisch. Inference without chaining. *Proc. IJCAI'87*, 515–519, 1987.

[G 91] M. Ginsberg. The computational value of nonmonotonic reasoning. *Proc. KR'91*, 262–268, 1991.

[H 87] C. Hewitt. Metacritique of McDermott and the logicist approach. *Computational Intelligence* 3, 1987.

[K 97] D. Kayser. Une étude du "raisonnement par approximation" de Schaerf et Cadoli. *Revue d'intelligence artificielle*, Vol. 11-n°4, 449–461, 1997.

[L 84] H.J. Levesque. A logic of implicit and explicit belief. *Proc. AAAI'84*, 198–202, 1984.

[L 86] H.J. Levesque. Knowledge representation and reasoning. *Annual Reviews in Computer Science* 1 :255–287, 1986.

[L 87] F. Lin. Reasoning in the presence of inconsistency. *Proc. AAAI'87*, 139-143, 1987.

[N 98] B. Nebel. How hard is it to revise a belief base ? In *Handbook of DRUMS*, vol. 3, Kluwer Academic, 77-145, 1998.

[P 94] Ch. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1994.

[PL 92] G. Pinkas et R.P. Loui. Reasoning from inconsistency : a taxonomy of principles for resolving conflict. *Proc. KR'92*, 709-719, 1992.

[P 89] G. Priest. Reasoning about truth. *Artificial Intelligence* 39 :231-244, 1989.

[P 91] G. Priest. Minimally inconsistent LP. *Studia Logica* 50 :321-331, 1991.

[SC 95] M. Schaerf et M. Cadoli. Tractable reasoning via approximation. *Artificial Intelligence* 74(2) :249-310, 1995.

[SK 96] B. Selman et H.A. Kautz. Knowledge compilation and theory approximation. *Journal of the Association for Computing Machinery* 43(2) :193-224, 1996.

[tTvH 96] A. ten Teije et F. van Harmelen. Computing approximate diagnoses by using approximate entailment. *Proc. KR'96*, 256–265, 1996.