Une logique pour le raisonnement spatio-temporel basée sur PLTL et l'algèbre des rectangles

Philippe Balbiani et Jean-François Condotta
Institut de recherche en informatique de Toulouse
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 04, France

Résumé *Nous présentons une logique temporelle avec laquelle nous pouvons décrire l'évolution des positions relatives des agents dans l'espace au cours du temps. Cette logique est une logique modale propositionnelle du temps linéaire dont les formules atomiques sont définies sur la base des relations atomiques de l'algèbre des rectangles (formalisme dédié au raisonnement spatial qualitatif). Après avoir présenté cette logique nous étudions sa complexité.*

1 Introduction

Dans de nombreuses applications il n'est pas rare de devoir raisonner sur des informations faisant intervenir le temps et l'espace. C'est le cas par exemple du contrôle aérien [SS98] où on doit gérer un ensemble d'agents en mouvement, pour qu'entre autre chose, n'interviennent pas de collision. Dans ce domaine la gestion des mouvements peut se faire d'une manière centralisée : le contrôleur de la zone où se déplace l'avion gère les conflits éventuels, ou bien d'une manière plus décentralisée : ce sont les pilotes eux-mêmes qui gèrent leur route de vol. Cet exemple montre à quel point dans le cadre de certains systèmes multi-agents il est crucial de mettre en œuvre des protocoles sécurisés en ce qui concerne la coordination des mouvements des différentes entités du système. L'élaboration de ces protocoles nécessite l'utilisation de formalismes permettant de représenter les informations spatio-temporelles de l'environnement d'une part, et offrant des moyens automatiques pour raisonner sur ces informations d'autre part.

Concernant la représentation de la connaissance spatiale, une branche de l'intelligence artificielle en plein essor ces dix dernières années a proposé de nombreux formalismes, il s'agit du raisonnement spatial qualitatif (RSQ). Chaque formalisme proposé est caractérisé par les entités spatiales considérées, ainsi que par les relations considérées entre ces objets. Ces dernières sont dites qualitatives, c'est-à-dire qu'elles ne font pas intervenir de valeurs quantitatives. Ces relations, munies de quelques opérations fondamentales, définissent des structures particulières appelées algèbres relationnelles. Comme formalisme connu du RSQ nous pouvons citer l'algèbre des régions (RCC) proposée par Randell, Cui et Cohn [RCC92]. Dans RCC les entités considérées sont les régions de l'espace et les relations sont huit relations topologiques : DC(x,y) "la région x est déconnectée de la région y", EC(x,y) "la région x est extérieurement connectée à la région y", PO(x,y) "la région x chevauche partiellement la région y", EQ(x,y) "la région x est identique à la région y", *etc.* Avec RCC nous ne pouvons pas raisonner sur des relations cardinales telles que : un objet est au nord d'un autre objet, un objet se trouve à droite d'un autre objet,*etc.* , chose possible avec d'autres formalismes qualitatifs : l'algèbre des points [VK86], l'algèbre des intervalles [All83], l'algèbre des relations cardinales [Lig98], l'algèbre des rectangles [BCF98, BCF99], *etc.*

L'algèbre des rectangles est un formalisme spatial qui est une extension de l'algèbre des intervalles d'Allen [All83] à la dimension 2. Les objets considérés sont les rectangles du plan dont les côtés sont parallèles à une base orthogonale et les relations basiques entre ces rectangles sont définies à partir du ¡¡produit cartésien¿¿ des relations atomiques de l'algèbre des intervalles. L'algèbre des rectangles permet aussi bien d'exprimer des relations cardinales que des relations d'ordre topologique. Cette structure peut être particulièrement utile dans des domaines tels que l'architecture [CAB97] ou l'imagerie de synthèse [Kwa98] où l'utilisateur a besoin dans certaines applications de définir des contraintes sur les positions relatives d'objets modélisés par des rectangles.

Dans un formalisme du RSQ les informations sont généralement représentées par des réseaux de contraintes où les variables représentent les objets considérés et où les contraintes sont définies par une relation qualitative. Les méthodes de raisonnement employées sont des méthodes dérivées de celles utilisées dans le cadre général des CSP (Constraint Satisfaction Problem). On retrouve par exemple la méthode de la chemin-consistance [Mon74]. Les formalismes qualitatifs spatiaux offrent ainsi des moyens de raisonner efficacement sur des informations spatiales.

En ce qui concerne la vérification formelle de systèmes dans lesquels interviennent de manière prédominante des connaissances temporelles telles que la vérification de programmes et la vérification des systèmes temps réel, de nombreux formalismes à base de logiques temporelles [AEF90] ont montré leur utilité et leur efficacité. La logique temporelle de base utilisée est la logique propositionnelle temporelle (PLTL). Avec le langage de PLTL on peut former des expressions comme $\bigcirc A$ "A est vrai à l'instant suivant" et $A\mathbf{U}B$ "A est vrai jusqu'à ce que B soit vrai". Cette logique est à la base de nombreuses autres logiques temporelles.

Récemment, Wolter et Zakharyaschev [WZ00] ont proposé un formalisme combinant les contraintes spatiales de l'algèbre des régions et la logique temporelle propositionnelle pour pouvoir raisonner sur des informations spatio-temporelles. Pour cela, ils ont "remplacé" les propositions du langage de la logique temporelle propositionnelle par des prédicats binaires basés sur les huit relations topologiques de RCC. Par exemple, le langage de Wolter et Zakharyaschev permet de parler de l'évolution des positions relatives entre deux régions x et y. La formule $DC(x, y)$ **U** $EC(x, y)$ signifie que les régions x et y sont déconnectées jusqu'à ce qu'elles soient extérieurement connectées. Ils ont fourni de nombreux résultats de complexité concernant le problème de satisfiabilité des formules du nouveau langage logique considéré.

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, l'algèbre des régions permet uniquement d'exprimer des relations d'ordre topologique, et ne considère pas par exemple des relations d'ordre directionnel. Pour remédier à ceci nous proposons une logique basée sur PLTL et sur l'algèbre des rectangles. Avec cette logique nous pouvons exprimer des propriétés telles que *pour tout les instants futurs l'entité x sera à droite de l'entité y*. Dans ce papier nous montrons que les résultats de complexité de Wolter et Zakharyaschev peuvent être raffinés en prenant l'algèbre des rectangles. De plus, signalons que la démarche que nous employons est différente de celle employée par Wolter et Zakharyaschev qui utilisent des résultats concernant le produit de logiques modales. En fait, nous suivons la ligne de raisonnement proposée par Sistla et Clarke dans [SC85].

Le plan du papier est le suivant. Tout d'abord, dans la section 2 nous effectuons quelques rappels sur la logique temporelle propositionnelle et sur l'algèbre des rectangles. La section 3 concerne la définition de lalogique que nous étudions. Dans la section 4 nous introduisons le concept de f-états. La section 5 concerne des résultats de complexité fondamentaux. Dans un dernier temps, nous concluons en donnant des perspectives de travail.

2 Préliminaires

2.1 Une logique temporelle : la logique PLTL

La logique temporelle PLTL (Propositional Linear Temporal Logic) est une logique temporelle propositionnelle. Le langage de PLTL est basé sur un ensemble de variables propositionnelles, sur les opérateurs booléens classiques, sur l'opérateur temporel unaire $\bigcirc$ et sur l'opérateur temporel binaire **U**. Plus formellement, les formules du langage de PLTL sont définies de manière inductive par :

- $f ::= A \mid \neg f \mid (f_1 \vee f_2) \mid (\bigcirc f_1) \mid (f_1 \mathbf{U} f_2)$, avec A une variable propositionnelle et f_1, f_2 deux formules.

Le modèle du temps dans PLTL est discret et linéaire (fini à gauche et infini à droite). Intuitivement, l'opérateur temporel $\bigcirc$ a pour signification *à l'instant suivant il sera le cas que* ... et une formule de la forme $f_1 \mathbf{U} f_2$ est vraie s'il existe un instant futur pour lequel f_2 est vraie et tel que pour tout les instants le précédant et suivant l'instant courant la formule f_1 est vraie. Plus formellement, un modèle est une fonction ϵ associant à chaque entier positif i l'ensemble des propositions atomiques vraies à l'instant i. La relation ϵ satisfait la formule f à l'instant i (avec $i \geq 0$), notée $\epsilon, i \models f$ est définie inductivement de la manière suivante :

– $\epsilon, i \models A$ ssi $A \in \epsilon(i)$;

- $\epsilon, i \models \neg f$ ssi $\epsilon, i \not\models f$;
- $\epsilon, i \models f_1 \vee f_2$ ssi $\epsilon, i \models f_1$ ou $\epsilon, i \models f_2$;
- $\epsilon, i \models f_1 \mathbf{U} f_2$ ssi il existe un entier k tel que $i \leq k$, $\epsilon, k \models f_2$ et pour tout entier j, si $i \leq j$ et $j < k$ alors $\epsilon, j \models f_1$.

Une formule f est satisfiable s'il existe un modèle ϵ tel que $\epsilon, 0 \models f$. Le problème de savoir si une formule de PLTL est satisfiable ou non est un problème PSPACE-complet [SC85].

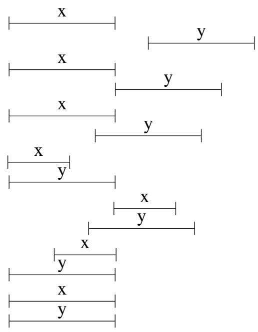
2.2 Un formalisme spatial à base de contraintes : l'algèbre des rectangles

L'algèbre des rectangles (AR) [Güs89, BCF98, BCF99] est une extension de l'algèbre des intervalles et est un formalisme dédié au raisonnement spatial qualitatif. L'algèbre des intervalles a été introduite par Allen [All83] pour le raisonnement temporel qualitatif. AI est une algèbre de relations basée sur 13 relations atomiques : $\mathcal{B}_{int} = \{b, m, o, s, d, f, bi, mi, oi, si, di, fi, eq\}$ qui constituent la liste exhaustive des relations qui peuvent être satisfaites entre deux intervalles, voir la figure 1. Les objets considérés par AR sont les rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes d'une base orthogonale d'un espace euclidien de dimension 2. Dans la suite nous noterons $RECT$ cet ensemble de rectangles. L'ensemble des relations atomiques considérées dans AR est défini à partir de celui de l'algèbre des intervalles : $\mathcal{B}_{rec} = \{\langle A, B \rangle : A, B \in \mathcal{B}_{int}\}$. Dans la suite les éléments de $\mathcal{B}_{rec}$ seront dénotés par les lettres P, Q, *etc.* Deux rectangles X et Y satisfont la relation atomique $\langle A, B \rangle$ si les projections orthogonales de X et Y sur le premier axe satisfont la relation atomique A et si les projections orthogonales de X et Y sur le second axe satisfont la relation atomique B. Dans la figure 1 sont représentés deux rectangles X et Y satisfaisant la relation atomique $\langle m, b \rangle$. Comme pour l'algèbre des intervalles, les relations atomiques de AR sont complètes et mutuellement exclusives, c'est-à-dire que deux rectangles satisfont une relation atomique de $\mathcal{B}_{rec}$ et une seule.

L'ensemble des relations de AR est l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{B}_{rec}$, *i.e.* $2^{\mathcal{B}_{rec}}$. Chaque relation peut être considérée comme la disjonction des relations atomiques qui la composent. Étant donnés X et Y deux rectangles et R une relation de $2^{\mathcal{B}_{rec}}$, $X\ R\ Y$ dénotera le fait que X et Y satisfont une des relations atomiques de R. Les relations de AR ont un fort pouvoir expressif, en effet, grâce à elles nous pouvons exprimer aussi bien des relations spatiales d'ordre directionnel comme *un rectangle est à droite d'un autre rectangle*, que des relations spatiales d'orde topologique comme *un rectangle touche un autre rectangle*.

L'information spatiale qualitative entre plusieurs rectangles est représentée par un CSP binaire particulier : un réseau des rectangles. Un réseau des rectangles $\mathcal{N}$ est une structure (V, C) où V est un ensemble de variables $\{V_1, \ldots, V_n\}$ représentant des rectangles (avec $n = |V|$). Et où C est une application de $V \times V$ vers $2^{\mathcal{B}_{rec}}$ correspondant aux contraintes binaires entre les rectangles (la contrainte entre V_i et V_j sera notée $C(V_i, V_j)$ ou C_{ij}). C_{ij} représente l'ensemble

Relation	Symbole	Inverse	Signification
précède	b	bi	
rencontre	m	mi	
chevauche	o	oi	
commence	s	si	
pendant	d	di	
termine	f	fi	
égale	eq	eq	



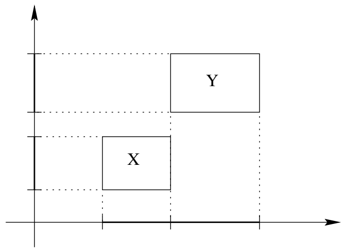


FIG. 1: L'ensemble des 13 relations atomiques de AI et la relation atomique $\langle m, b \rangle$.

des relations atomiques permises entre les deux rectangles représentés par V_i et V_j. Un réseau des rectangle est dit atomique ssi chacune de ses contraintes C_{ij} est composée d'une seule relation atomique (dans ce cas on confondra C_{ij} et l'unique relation atomique qui la compose).

La consistance d'un réseau des rectangle $\mathcal{N} = (V, C)$ est définie comme suit. Une instanciation consistante m de $\mathcal{N} = (V, C)$ est une application qui associe à chaque variable V_i de V une valeur m_i de $RECT$ telle que pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, $m_i\ C_{ij}\ m_j$. Une instanciation consistante partielle m' sur l'ensemble $V' \subseteq V$ est une application qui associe à chaque variable V'_i de V' une valeur m'_i de $RECT$ telle que pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V'|$, $m'_i\ C(V'_i, V'_j)\ m'_j$. $\mathcal{N}$ est dit consistant ssi il admet une instanciation consistante. De plus, rajoutons que $\mathcal{N} = (V, C)$ est globalement consistant ssi chacune de ses instanciations partielles consistantes $m' : m'_1, \ldots, m'_l$ sur un ensemble de variables $V' \subset V$ peut toujours être étendue à une instanciation partielle consistante $m'_1, \ldots, m'_l, m'_{l+1}$ sur l'ensemble $V' \cup \{V'_{l+1}\}$ avec $V'_{l+1} \in V \setminus V'$. Dans la suite nous aurons à utiliser la propriété suivante :

Propriété 1 *Un réseau des rectangles atomique et consistant est globalement consistant.*

Signalons pour clore cette section que le problème de savoir si un réseau des rectangles est consistant ou non est un problème NP-complet dans le cas général.

3 Une logique pour le raisonnement spatio-temporel

Avec l'algèbre des rectangles nous pouvons raisonner sur des informations spatiales qu'à un instant donné. Nous allons maintenant "temporiser" les contraintes de l'algèbre des rectangles en les encapsulant dans une logique temporelle inspirée de PLTL. La logique proposée suit celle donnée par Wolter et Zakharyaschev dans [WZ00], cette section est consacrée à sa définition.

3.1 Syntaxe

Dans la suite, VAR dénotera un ensemble dénombrable de variables individuelles, nous emploierons les lettres minuscules x, y, *etc.*, pour les désigner. Chaque variable correspond à la région spatiale occupée par une entité au cours du temps. Cette région peut varier au cours du temps et sera toujours représentée par un rectangle isothétique du plan. Le langage modal propositionnel que nous définissons permettra de qualifier l'évolution des positions relatives entre les différentes entités à l'aide des relations de AR. De manière inductive, nous définissons l'ensemble des formules qualitatives de la manière suivante : $f ::= P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \mid \neg f_1 \mid (f_1 \vee f_2) \mid (f_1 \mathbf{U} f_2)$; où P appartient à l'ensemble $\mathcal{B}_{rec}$, f_1, f_2 sont deux formules, m, n sont deux entiers positifs, et x, y appartiennent à l'ensemble VAR. Les autres connecteurs standards sont définis par les abréviations habituelles. En particulier, $\mathbf{F}f$ est $(\top \mathbf{U} f)$ (f *sera vraie à un instant futur*) et $\mathbf{G}f$ est $\neg(\top \mathbf{U} \neg f)$ (f *sera toujours vraie aux instants futurs*).

L'originalité du langage est que l'opérateur $\bigcirc$ porte maintenant sur les variables. Intuitivement, $\bigcirc^m x$ correspondant à la région spatiale occupée par l'entité représentée par la variable x à l'instant $i+m$ avec i l'instant courant. $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$ signifie à l'instant i que la valeur de x à l'instant $i+m$ est en relation P avec la valeur de y à l'instant $i+n$. Remarquons que nous pouvons définir un opérateur $\bigcirc$ portant sur les formules en définissant $\bigcirc P(x,y)$ par $P(\bigcirc^1 x, \bigcirc^1 y)$.

Le langage obtenu permet d'exprimer des propriétés sur l'évolution des positions relatives entre les entités. À des fins d'illustration donnons quelques exemples. La formule $\mathbf{G}$ $(\langle pendant, pendant\rangle(x,y))$ signifiera qu'à chaque instant futur, la région occupée par l'entité représentée par x sera incluse (strictement) dans la région occupée par l'entité représentée par y. Pour exprimer que la zone occupée par l'entité représentée par la variable x est constante au cours du temps nous utiliserons la formule $\mathbf{G}$ $(\langle \acute{e}gale, \acute{e}gale\rangle(x, \bigcirc x))$. Il est également possible d'exprimer des relations non atomiques de l'algèbre des rectangles, pour cela on utilise le connecteur $\vee$. Par exemple, la formule $\mathbf{F}(\bigvee\{(\langle pr\acute{e}c\grave{e}de, A\rangle(x,y)) : A \in \mathcal{B}_{int}\})$ permet de caractériser le fait qu'à un instant futur l'entité représentée par x se trouvera à gauche de l'entité représentée par y.

Nous terminerons cette sous-section par quelques définitions. Une formule atomique est une formule de la forme $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$, tandis qu'une U-formule est une formule de la forme $f\mathbf{U}g$.

Soit f une formule qualitative. $var(f)$ et $SF(f)$ dénoteront respectivement l'ensemble des variables individuelles appartenant à f et l'ensemble de toutes les sous-formules de f. Le nombre de symboles dans f sera dénoté par $length(f)$ (on supposera que $\bigcirc^m$ correspond à m symboles). Il est intéressant de noter que pour toute formule qualitative f, il y a strictement moins de $Card(SF(f))$ **U**-formules dans $SF(f)$. La taille de f, notée $\mid f \mid$, est définie de manière inductive :

- $\mid P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \mid = \max\{m, n\}$;
- $\mid \neg f \mid = \mid f \mid$; $\mid f \vee g \mid = \max\{\mid f \mid, \mid g \mid\}$; $\mid f\mathbf{U}g \mid = \max\{\mid f \mid, \mid g \mid\}$.

L'ensemble de toutes les formules atomiques dont les variables individuelles sont dans $var(f)$ et dont les tailles sont plus petites ou égales à $\mid f \mid$ sera dénoté par $AF(f)$. Remarquons que $Card(var(f)) < length(f)$, $Card(SF(f)) < length(f)$ et que $\mid f \mid < length(f)$. De plus, $Card(AF(f)) = Card(\mathcal{B}_{rec}) \times Card(var(f))^2 \times (\mid f \mid +1)^2$.

3.2 Sémantique

Un modèle qualitatif ϵ est une fonction de l'ensemble $VAR \times \mathbb{N}$ vers l'ensemble $RECT$. Nous définissons la relation "la formule qualitative f est vraie à l'entier i dans le modèle qualitatif ϵ", notée $\epsilon, i \models f$, de la manière suivante :

- $\epsilon, i \models P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$ ssi $\epsilon(x, i+m)\ P\ \epsilon(y, i+n)$;
- $\epsilon, i \models \neg f$ ssi $\epsilon, i \not\models f$;
- $\epsilon, i \models f \vee g$ ssi $\epsilon, i \models f$ ou $\epsilon, i \models g$;
- $\epsilon, i \models f\mathbf{U}g$ ssi il existe un entier k tel que $i \leq k$, $\epsilon, k \models g$ et pour tout entier j, si $i \leq j$ et $j < k$ alors $\epsilon, j \models f$.

Une **U**-formule qualitative $f\mathbf{U}g$ sera dite accomplie entre deux entiers i et j dans le modèle qualitatif ϵ si $i \leq j$, $\epsilon, i \models f\mathbf{U}g$ et s'il existe un entier k tel que $i \leq k$, $k \leq j$ et $\epsilon, k \models g$. Une formule qualitative f est satisfiable s'il existe un modèle qualitatif ϵ tel que $\epsilon, 0 \models f$. Les égalités suivantes spécifient quelles formules qualitatives sont respectivement prises en compte dans les langages $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ et $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$:

- $f ::= P(x, y) \mid \neg f_1 \mid (f_1 \vee f_2) \mid (f_1\mathbf{U}f_2)$;
- $f ::= P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \mid \neg f_1 \mid (f_1 \vee f_2) \mid (f_1\mathbf{U}f_2)$.

La logique présentée dans [WZ00] diffère de celle que nous proposons par le fait que les contraintes employées sont celles de l'algèbre des régions $RCC8$ [RCC92, RN99] et non celles de l'algèbre des rectangles. Wolter et Zakharyaschev ont montré que le problème de la satisfiabilité d'une formule qualitative dans ce cadre là est un problème PSPACE pour le langage $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ et est un problème EXPSPACE pour le langage $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$. Une question importante est de savoir si ces résultats peuvent être étendus dans le cadre d'un raisonnement qualitatif basé sur l'algèbre des rectangles. Il s'avère qu'en utilisant l'algèbre des rectangles le problème de la satisfiabilité est un problème PSPACE-complet pour les langages $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ et $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$. Dans ce papier nous montrerons comment nous avons obtenu ces résultats uniquement pour le langage $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$. La démarche employée pour $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ est la même et moins difficile à mettre en œuvre. Avant cela, nous allons introduire le concept de f-états.

4 f-états

Soient ϵ un modèle qualitatif et un entier i. Soit $\widehat{\epsilon}_i$ la fonction assignant à chaque formule qualitative f l'ensemble $\widehat{\epsilon}_i(f)$ de toutes les formules atomiques de $AF(f)$ vraies en i dans ϵ. Soit $\widetilde{\epsilon}_i$ la fonction qui assigne à chaque formule qualitative f l'ensemble $\widetilde{\epsilon}_i(f)$ de toutes les sous-formules de f vraies en i dans ϵ. Soit $\overline{\epsilon}_i$ la fonction assignant à chaque formule qualitative f la structure $(\widehat{\epsilon}_{i-|f|}(f), \ldots, \widehat{\epsilon}_i(f), \widetilde{\epsilon}_i(f))$. Dans le cas où $i <| f |$, nous posons :

$$\overline{\epsilon}_i(f) = (\underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{|f|-i \text{ fois}}, \widehat{\epsilon}_0(f), \ldots, \widehat{\epsilon}_i(f), \widetilde{\epsilon}_i(f)).$$

Soit ω la fonction qui assigne à chaque formule qualitative f l'entier :

$$Card(\mathcal{B}_{rec})^{Card(var(f))^2 \times (|f|+1)^3} \times 2^{Card(SF(f))}.$$

Il est intéressant de noter que pour toute formule qualitative f et pour tout modèle qualitatif ϵ, le domaine d'arrivée de la fonction assignant à chaque entier i la structure $\overline{\epsilon}_i(f)$ contient strictement moins de $\omega(f)$ éléments. Ces éléments sont des cas particuliers du concept de f-états. Soit f un formule qualitative. Un f-état est une structure

$$(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$$

où $\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0$ sont des sous-ensembles de $AF(f)$ et $\widetilde{S}_0$ est un sous-ensemble de $SF(f)$. Nous supposons que les variables individuelles de l'ensemble $var(f)$ sont arrangées dans un certain ordre $x_1, \ldots, x_N$. Nous faisons également les hypothèses suivantes :

- pour tout $k \in \{- \mid f \mid, \ldots, 0\}$, pour tout $l, m \in \{0, \ldots, \mid f \mid\}$ et pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ il existe $P \in \mathcal{B}_{rec}$ tel que $P(\bigcirc^l x_{n_1}, \bigcirc^m x_{n_2}) \in \widehat{S}_k$.
- Pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$, pour tout $l_1, l_2, m_1, m_2 \in \{0, \ldots, \mid f \mid\}$, et pour tout $k_1, k_2 \in \{- \mid f \mid, \ldots, 0\}$, si $P(\bigcirc^{l_1} x_{n_1}, \bigcirc^{m_1} x_{n_2}) \in \widehat{S}_{k_1}$ et $Q(\bigcirc^{l_2} x_{n_1}, \bigcirc^{m_2} x_{n_2})$
$\in \widehat{S}_{k_2}$ et si $l_1 + k_1 = l_2 + k_2$ et $m_1 + k_1 = m_2 + k_2$ alors P et Q sont une même relation atomique.

La structure $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0)$ définit un réseau des rectangles $\mathcal{N} = (V, C)$ contenant uniquement des contraintes atomiques ou la contrainte totale (disjonction de toutes les relations atomiques de $\mathcal{B}_{rec}$) :

- $V = \{X_{1,-|f|}, \ldots, X_{1,|f|}, \ldots, X_{N,-|f|}, \ldots, X_{N,|f|}\}$;
- s'il existe $P(\bigcirc^l x_{n_1}, \bigcirc^m x_{n_2}) \in \widehat{S}_k$, avec $k \in \{- \mid f \mid, \ldots, 0\}$, $l, m \in \{0, \ldots, \mid f \mid\}$, $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ et $P \in \mathcal{B}_{rec}$ alors $C(X_{n_1,k+l}, X_{n_2,k+m}) = \{P\}$, sinon $C(X_{n_1,k+l}, X_{n_2,k+m})$ est égale à la contrainte totale $\mathcal{B}_{rec}$.

Notons qu'à partir d'un réseau des rectangles atomique et consistant, avec pour ensemble de variables l'ensemble V nous pouvons définir une unique structure $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0)$.

Un f-état $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est défini comme consistant si le réseau des rectangles correspondant à la structure $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0)$ est consistant et :

- Si $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \in SF(f)$ alors $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \in \widetilde{S}_0$ ssi $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \in \widehat{S}_0$;
- si $\neg g \in SF(f)$ alors $\neg g \in \widetilde{S}_0$ ssi $g \notin \widetilde{S}_0$;
- si $g \vee h \in SF(f)$ alors $g \vee h \in \widetilde{S}_0$ ssi $g \in \widetilde{S}_0$ ou $h \in \widetilde{S}_0$.

Un f-état $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ sera défini comme **U**-consistant par rapport au f-état $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ si $\widehat{T}_{-|f|} = \widehat{S}_{-|f|+1}$, ..., $\widehat{T}_{-1} = \widehat{S}_0$ et :

- si $g\mathbf{U}h \in SF(f)$ alors $g\mathbf{U}h \in \widetilde{S}_0$ ssi $h \in \widetilde{S}_0$ ou $g \in \widetilde{S}_0$ et $g\mathbf{U}h \in \widetilde{T}_0$.

5 La complexité de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$

En suivant la ligne de raisonnement utilisée par Sistla et Clarke dans [SC85], nous obtenons les résultats importants suivants :

Lemme 1 *Soient ϵ un modèle qualitatif, i, j deux entiers et f une formule de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ tels que $i < j$ et $\overline{\epsilon}_i(f) = \overline{\epsilon}_j(f)$. Il existe un modèle qualitatif ϵ' tel que pour tout entier k, si $k < i$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq i$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_{k+j-i}(f)$. Ajouté à cela, pour tout entier k, si $k < i$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq i$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon}_{k+j-i}(f)$.*

Preuve Soit ϵ' la fonction de $VAR \times \mathbb{N}$ dans $RECT$ définie de la manière suivante. Pour tout entier k, si $k < i$ alors pour toute variable individuelle x dans $var(f)$, soit $\epsilon'(x, k)$ la valeur $\epsilon(x, k)$. Pour tout entier k, si $k \geq i$ alors en supposant que l'ensemble de toutes les variables individuelles de $var(f)$ est arrangé dans un certain ordre $x_1, \ldots, x_N$, considérons le réseau des rectangles atomique (V^k, C^k) défini de la manière suivante :

- soit V^k l'ensemble $\{V_{1,k-|f|}, \ldots, V_{1,k}, \ldots, V_{N,k-|f|}, \ldots, V_{N,k}\}$.
- Pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ et $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k\}$, soit $C^k(X_{n_1,l_1}, X_{n_2,l_2})$ la contrainte atomique composée de la relation atomique satisfaite par $\epsilon(x_{n_1}, l_1 + j - i)$ et $\epsilon(x_{n_2}, l_2 + j - i)$.

On peut facilement vérifier que (V^k, C^k) est consistant et est donc globalement consistant. En conséquence nous pouvons toujours étendre une instanciation partielle consistante $\epsilon'(x_1, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_1, k-1), \ldots, \epsilon'(x_N, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_N, k-1)$ des variables $\{V_{1,k-|f|}, \ldots, V_{1,k-1}, \ldots, V_{N,k-|f|}, \ldots, V_{N,k-1}\}$ en une instanciation consistante $\epsilon'(x_1, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_1, k), \ldots, \epsilon'(x_N, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_N, k)$. Il en résulte que, de proche en proche, nous pouvons terminer de construire notre modèle qualitatif ϵ' en résolvant le réseau des rectangles précédent avec $k = j$, puis $k = j + 1$ et ainsi de suite. Le lecteur peut vérifier que ϵ' satisfait les conditions requises. $\dashv$

Lemme 2 *Soient ϵ un modèle qualitatif, i, j deux entiers et f une formule de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ tels que $i < j$, $\overline{\epsilon}_i(f) = \overline{\epsilon}_j(f)$ et chaque $\mathbf{U}$-formule de $\widetilde{\epsilon}_i(f)$ est accomplie entre i et j dans ϵ. Il existe un modèle qualitatif ϵ' tel que pour tout entier k,* *si $k < j$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq j$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon'}_{k+i-j}(f)$. De plus, ϵ' est un modèle qualitatif périodique de période $j - i$ débutant à l'indice i.*

Preuve Soit ϵ' la fonction de $VAR \times \mathbb{N}$ dans $RECT$ définie de la manière suivante. Pour tout entier k, si $k < j$ alors pour toute variable individuelle x de $var(f)$, soit $\epsilon'(x,k)$ la valeur $\epsilon(x,k)$. Pour tout entier k, si $k \geq j$ alors en supposant que l'ensemble des variables individuelles de $var(f)$ est arrangé dans un certain ordre $x_1, \ldots, x_N$, considérons le réseau des rectangles atomique (V^k, C^k) défini comme suit :

- soit V^k l'ensemble $\{V_{1,k-|f|}, \ldots, V_{1,k}, \ldots, V_{N,k-|f|}, \ldots, V_{N,k}\}$.
- Pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ et $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k\}$, soit $C^k(X_{n_1,l_1}, X_{n_2,l_2})$ la contrainte atomique composée de la relation atomique satisfaite par $\epsilon(x_{n_1}, l_1 + j - i)$ et $\epsilon(x_{n_2}, l_2 + j - i)$.

Comme ϵ est un modèle qualitatif on peut facilement vérifier que le réseau des rectangles (V^k, C^k) est consistant. Il est donc également globalement consistant. Il s'ensuit qu'étant données des valeurs $\epsilon'(x_1, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_1, k-1), \ldots, \epsilon'(x_N, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_N, k-1)$ telles que pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$, et pour tout $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k-1\}$, $\epsilon'(x_{n_1}, l_1)$ et $\epsilon'(x_{n_2}, l_2)$ satisfont la contrainte $C^k(V_{n_1,l_1}, V_{n_2,l_2})$, il existe des valeurs $\epsilon'(x_1, k), \ldots, \epsilon'(x_N, k)$ telles que pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$, et pour tout $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k\}$, alors $\epsilon'(x_{n_1}, l_1)$ et $\epsilon'(x_{n_2}, l_2)$ satisfont la contrainte $C^k(V_{n_1,l_1}, V_{n_2,l_2})$. On peut donc, de proche en proche, terminer de définir notre fonction ϵ' de telle manière qu'elle satisfasse les conditions requises. $\dashv$

En combinant le lemme 1 avec le lemme 2, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit f la formule de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ telle que f est satisfiable. Il existe un modèle qualitatif ϵ et des entiers i, j tels que $i < j$, ϵ est un modèle qualitatif périodique commençant de période $j - i$ commençant à l'indice i, $i < \omega(f)$, $j - i < Card(SF(f)) \times \omega(f)$ et $\epsilon, 0 \models f$.*

Preuve Voir l'appendice. $\dashv$

Grâce au théorème 1, nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 2 *Le problème de déterminer si une formule donnée de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ est satisfiable ou non est un problème $PSPACE$-complet.*

Preuve Le lecteur peut facilement prouver que le problème de déterminer si une formule donnée de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ est satisfiable ou non est un problème $PSPACE$-difficile en y réduisant le problème $PSPACE$-difficile consistant à déterminer si une formule donnée de la logique propositionnelle temporelle $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ est satisfiable [SC85]. Pour tester si une formule f de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ est satisfiable, nous présentons l'algorithme non déterministe suivant :

Deviner deux entiers i, j tels que $i < j$, $i < \omega(f)$ et $j - i < Card(SF(f))$ $\times\omega(f)$;
Deviner un f-état consistant $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ tel que $\widehat{S}_{-|f|} = \emptyset$, ...,

$\widehat{S}_{-1} = \emptyset$ et $f \in \widetilde{S}_0$;
$k := 0$;
Tant que $k < i$ faire
Deviner un f-état consistant $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ tel que $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est $\mathbf{U}$-consistant par rapport à $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
$(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0) := (\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
$k := k + 1$;
$(\widehat{U}_{-|f|}, \ldots, \widehat{U}_0, \widetilde{U}_0) := (\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$;
Tant que $k < j$ faire
Deviner un f-état consistant $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ tel que $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est $\mathbf{U}$-consistant par rapport à $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
Pour toute $\mathbf{U}$-formule $g\mathbf{U}h \in SF(f)$, si $g\mathbf{U}h \in \widetilde{U}_0$ et $h \in \widetilde{T}_0$ alors marquer $g\mathbf{U}h$ dans $\widetilde{U}_0$;
$(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0) := (\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
$k := k + 1$;
Vérifier si pour toute $\mathbf{U}$-formule $g\mathbf{U}h$ de $SF(f)$, si $g\mathbf{U}h \in \widetilde{U}_0$ alors $g\mathbf{U}h$ est marquée dans $\widetilde{U}_0$;
Vérifier si $(\widehat{U}_{-|f|}, \ldots, \widehat{U}_0, \widetilde{U}_0) := (\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$.

Le lecteur pourra facilement vérifier que l'algorithme non déterministe précédent est correct et qu'il est borné en espace par un polynôme en $length(f)$. $\dashv$

6 Conclusion

Nous venons de présenter une logique temporelle propositionnelle avec laquelle on peut étudier l'évolution des positions relatives entre des entités au cours du temps. Cette logique a été inspirée par les travaux de Wolter et Zakharyaschev qui ont montré que la satisfiabilité des formules de cette logique est dans EXPSPACE lorsque les relations spatiales considérées entre les agents sont celles de l'algèbre des régions. Nous avons montré comment étendre leur formalisme à l'algèbre des rectangles. Pour les formules des logiques temporelles basées sur cette algèbre, nous montrons que le problème de la satisfiabilité est PSPACE-complet, améliorant de fait le résultat donné par Wolter et Zakharyaschev.

Nous pouvons envisager trois premières perspectives à notre approche. Nous pouvons d'abord enrichir notre langage modal propositionnel en considérant non pas les opérateurs modaux du temps linéaire mais ceux du temps arborescent [Eme90]. Nous pouvons également trouver des fragments de notre langage pour lesquels le problème de la satisfiabilité est dans la classe NP. Une autre perspective est de considérer d'autre types de contraintes, en particulier des contraintes quantitatives. En effet, outre les contraintes qualitatives sur les rectangles nous pourrions utiliser des contraintes métriques comme *un rectangle à une superficie entre telle et telle valeur*, *un rectangle à un côté horizontal dont la longueur est comprise entre telle ou telle valeur*, *etc.*

Remerciements

Nous remercions Nathalie Chetcuti qui nous a fait de nombreux commentaires pour améliorer la lisibilité de ce papier.

Références

[AEF90] Eric Audureau, Patrice Enjalbert, and Luis Fariñas del Cerro. *Logique temporelle : Sémantique et validation de programmes parallèles.* Masson, 1990.

[All83] James F. Allen. Maintaining Knowledge about Temporal Intervals. *Communications of the ACM*, 26(11) :832–843, November 1983.

[BCF98] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A model for reasoning about bidimensional temporal relations. In A. G. Cohn, L. Schubert, and S. C. Shapiro, editors, *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 124–130. Morgan Kaufmann, 1998.

[BCF99] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In T. Dean, editor, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99)*, pages 442–447, 1999.

[CAB97] Mark S. Fox Can A. Baykan. Spatial synthesis by disjunctive constraint satisfaction. *Artificial Intelligence for Engineering Design, Analysis and Manufacturing*, 1(11) :245–262, 1997.

[Eme90] E. Allen Emerson. Temporal and modal logic. In Jan van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B : Formal Models and Semantics*, pages 995–1072. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1990.

[Güs89] Hans Werner Güsgen. Spatial reasoning based on Allen's temporal logic. Technical Report TR-89-049, International Computer Science Institute, Berkeley, 1989.

[Kwa98] G. Kwaiter. *Modélisation dclarative de scènes : étude et réalisation de solveurs de contraintes.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1998.

[Lig98] Gérard Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 1(9) :23–44, 1998.

[Mon74] Ugo Montanari. Networks of constraints : Fundamental properties and application to picture processing. *Information Sciences*, 7(2) :95–132, 1974.

[RCC92] David A. Randell, Zhan Cui, and Anthony G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In B. Nebel and C. Rich, editors, *Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, pages 165–176. Morgan Kaufmann, 1992.

[RN99] Jochen Renz and Bernhard Nebel. On the Complexity of Qualitative Spatial Reasoning : A Maximal Tractable Fragment of the Region Connection Calculus. *Journal of Artificial Intelligence*, 108, 1999.

[SC85] A. Sistla and E. Clarke. The complexity of propositional linear temporal logics. *Journal of the ACM*, 32 :733–749, 1985.

[SS98] S. Sekhavat and S. S. Sastry. A distributed automatic air traffic management system. In *Proc. of the Int. Symp. on Robotics and Automation*. Saltillo, 1998.

[VK86] Marc Vilain and Henry Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning. In T. Kehler and S. Rosenschein, editors, *Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'86)*, pages 377–382. American Association for Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann, 1986.

[WZ00] Frank Wolter and Michael Zakharyaschev. Spatio-temporal representation and reasoning based on RCC-8. In Anthony G. Cohn, Fausto Giunchiglia, and Bart Selman, editors, *KR2000 : Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 3–14, San Francisco, 2000. Morgan Kaufmann.

Appendice

Preuve du théorème 1 Soit $\epsilon^{(0)}$ un modèle qualitatif tel que $\epsilon^{(0)}, 0 \models f$. Le lecteur pourra facilement vérifier qu'il existe des entiers $i^{(0)}, j^{(0)}$ tels que $i^{(0)} < j^{(0)}$, $\overline{\epsilon^{(0)}}_{i^{(0)}}(f) = \overline{\epsilon^{(0)}}_{j^{(0)}}(f)$ et chaque **U**-formule de $\widetilde{\epsilon^{(0)}}_{i^{(0)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(0)}$ et $j^{(0)}$ dans $\epsilon^{(0)}$. Si $i^{(0)} \geq \omega(f)$ alors il existe des entiers k, l tels que $k < l$, $l \leq i^{(0)}$ et $\overline{\epsilon^{(0)}}_k(f) = \overline{\epsilon^{(0)}}_l(f)$. En appliquant le lemme 1, nous en déduisons qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(1)}$ tel que $\epsilon^{(1)}, 0 \models f$ et il existe des entiers $i^{(1)}, j^{(1)}$ tels que $i^{(1)} < j^{(1)}$, $\overline{\epsilon^{(1)}}_{i^{(1)}}(f) = \overline{\epsilon^{(1)}}_{j^{(1)}}(f)$, chaque **U**-formule de $\widetilde{\epsilon^{(1)}}_{i^{(1)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(1)}$ et $j^{(1)}$ dans $\epsilon^{(1)}$ et $i^{(1)} < i^{(0)}$. Appliquant cette réduction aussi loin que possible, nous concluons à partir de cela qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(2)}$ tel que $\epsilon^{(2)}, 0 \models f$ et il existe des entiers $i^{(2)}, j^{(2)}$ tels que $i^{(2)} < j^{(2)}$, $\overline{\epsilon^{(2)}}_{i^{(2)}}(f) = \overline{\epsilon^{(2)}}_{j^{(2)}}(f)$, chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(2)}}_{i^{(2)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(2)}$ et $j^{(2)}$ dans $\epsilon^{(2)}$ et $i^{(2)} < \omega(f)$. Si $j^{(2)} - i^{(2)} \geq Card(SF(f)) \times \omega(f)$ alors il existe des entiers k, l tels que $i^{(2)} \leq k$, $k < l$, $l \leq j^{(2)}$, $\overline{\epsilon^{(2)}}_k(f) = \overline{\epsilon^{(2)}}_l(f)$ et chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(2)}}_{i^{(2)}}(f)$ est accomplie soit entre $i^{(2)}$ et k, ou soit entre l et $j^{(2)}$ dans $\epsilon^{(2)}$. En appliquant le lemme 1, nous inférons à partir de cela qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(3)}$ tel que $\epsilon^{(3)}, 0 \models f$ et il existe deux entiers $i^{(3)}, j^{(3)}$ tels que $i^{(3)} < j^{(3)}$, $\overline{\epsilon^{(3)}}_{i^{(3)}}(f) = \overline{\epsilon^{(3)}}_{j^{(3)}}(f)$, chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(3)}}_{i^{(3)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(3)}$ et $j^{(3)}$ dans $\epsilon^{(3)}$, $i^{(3)} < \omega(f)$ et $j^{(3)} - i^{(3)} < j^{(2)} - i^{(2)}$. En appliquant cette réduction aussi loin que possible, nous en concluons qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(4)}$ tel que $\epsilon^{(4)}, 0 \models f$ et il existe des entiers $i^{(4)}, j^{(4)}$ tels que $i^{(4)} < j^{(4)}$, $\overline{\epsilon^{(4)}}_{i^{(4)}}(f) = \overline{\epsilon^{(4)}}_{j^{(4)}}(f)$, chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(4)}}_{i^{(4)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(4)}$ et $j^{(4)}$ dans $\epsilon^{(4)}$, $i^{(4)} < \omega(f)$ et $j^{(4)} - i^{(4)} < Card(SF(f)) \times \omega(f)$. En appliquant le lemme 2, nous concluons que il existe un modèle qualitatif ϵ et des entiers i, j tels que $i < j$, ϵ est un modèle qualitatif périodique de période $j - i$ débutant à l'indice i, $i < \omega(f)$, $j - i < Card(SF(f)) \times \omega(f)$ and $\epsilon, 0 \models f$. $\dashv$