

Proposition d'Action Spécifique STIC-CNRS
ALGORITHMIQUE ET PROBLÉMATIQUE EXPÉRIMENTALE
POUR L'ÉVALUATION DE FORMULES BOOLÉENNES
QUANTIFIÉES

vendredi 30 août 2002

Animateurs : Philippe Chatalic, Laurent Simon (LRI, Orsay), Daniel Le Berre (CRIL, Lens)

Résumé

L'objet de cette action est de proposer des algorithmes efficaces (en pratique) de résolution de formules booléennes quantifiées (QBF, logique propositionnelle). Pour accompagner l'émergence de ces nouveaux algorithmes, un important travail de réflexion sur leur évaluation expérimentale est nécessaire. Celui-ci doit non seulement permettre de mieux appréhender – avant tout d'un point de vue pratique – les verrous scientifiques liés à la résolution de ces problèmes fondamentaux, mais aussi de déboucher sur des propositions d'évaluations expérimentales concrètes, naturellement généralisables à d'autres problématiques de démonstration et déduction automatique.

1 Thématique abordée

La logique propositionnelle tient une place privilégiée dans de nombreuses applications de déduction automatique. Malgré un pouvoir d'expression *a priori* limité, elle permet de traiter un grand nombre de problèmes et de concevoir des algorithmes efficaces en pratique. En particulier, le problème SAT, ou *test de satisfiabilité*, fait l'objet d'importants efforts de recherche, à la fois théorique (problème *NP-Complet* canonique) et pratique, depuis plus d'une décennie. L'aspect *pratique* est important dans la mesure où, même si la complexité théorique des problèmes abordés reste bien entendu la même, plusieurs changements de facteurs d'échelle dans la taille des instances traitables ont été observés. Ceci est dû en grande partie à une meilleure connaissance du comportement des algorithmes en pratique, tant sur des exemples concrets, que sur des exemples générés aléatoirement. L'organisation régulière (et de plus en plus rapprochée) de compétitions de démonstrateurs – reflétant l'évolution rapide des performances dans ce domaine – ainsi que la création de sites web (SAT-EX) pour la publication de résultats expérimentaux du domaine y contribuent également.

De nombreux problèmes actuellement traités à l'aide de techniques SAT sont issus d'applications comme la planification, la vérification formelle de microprocesseurs (comme le *Bounded Model Checking*) ou plus généralement, des problèmes de recherche de point fixe dans l'ensemble des états atteignables d'un automate. Ces applications, très importantes en pratique, impliquent la manipulation de formules de très grande taille (ce qui reflète leur caractère *industriel*). Nombre de ces problèmes s'expriment en fait à l'origine plus naturellement dans des formalismes plus riches, comme celui des *formules booléennes quantifiées* (QBF).

Étant donné un ensemble fini S de symboles propositionnels x_1, \dots, x_n une QBF est une suite PM formée d'un *préfixe* P et d'une *matrice* M , où P est une suite de quantifications $\forall x$ ou $\exists x$ sur les variables de S et M est une formule propositionnelle classique. Par exemple, étant donnée la formule $g = (\neg x \vee (y \wedge z)) \wedge (x \vee \neg z \vee t)$, la formule $f = \forall x \exists y, z \forall t g$ est une QBF.

La validité d'une QBF f se définit alors inductivement comme suit :

- si le préfixe de f est vide, alors f est valide ssi sa matrice l’est (classiquement) ;
- si f s’écrit $\forall x f'$ (où f' est une QBF) alors f est valide ssi quelle que soit la valeur de vérité (vrai ou faux) donnée à x dans f' , la formule simplifiée résultante est valide ;
- si f s’écrit $\exists x f'$ (où f' est une QBF) alors f est valide ssi il existe une valeur de vérité (vrai ou faux) pour x dans f' telle que la formule simplifiée résultante soit valide.

Le problème de la validité des formules QBF joue un rôle important en théorie de la complexité. Dans le cas général, *i.e.* lorsque le nombre d’alternances de quantificateurs n’est pas borné *a priori*, il constitue le problème PSPACE-complet canonique. Lorsque le nombre d’alternances est fixé au départ, il se décline (selon la nature de la première quantification) en problèmes Σ_k^p -complets ou Π_k^p -complets. Pour $k > 1$, les classes Σ_k^p et Π_k^p se situent au dessus de NP et $coNP$ et en dessous de la classe $PSPACE$. Or, une quantité importante de problèmes d’IA (mais aussi d’autres domaines) ont une complexité théorique dans ces classes. C’est le cas par exemple pour divers problèmes d’inférence (abduction, révision, mise à jour, circonscription, inférence en logique des défauts, etc.) et de planification non déterministe. Lorsque les classes considérées sont fermées par réduction polynomiale, il est théoriquement possible de ramener la résolution de toute instance de tels problèmes à celle de la validité d’une QBF. Cela fait l’objet de recherches, essentiellement à l’étranger, depuis deux ans maintenant. Des résultats intéressants ont été obtenus tant d’un point de vue théorique [2], par la mise en évidence de réductions depuis un nombre conséquent de problèmes d’IA, que pratique, en montrant que l’approche consistant à coder des problèmes en QBF puis à résoudre ces dernières est tout à fait viable et donne des résultats très compétitifs par rapport à certains algorithmes spécialisés.

Si quelques premiers algorithmes permettant de déterminer directement la validité d’une QBF ont été proposés, ils restent encore assez simples et peu performants. La maturité des démonstrateurs SAT actuels est telle que, dans nombre de cas, il est souvent plus efficace de passer par une réduction en instance SAT que de résoudre directement les QBF considérées. Cependant, une telle réduction induit généralement un accroissement en espace très important des instances produites. Pour certains problèmes industriels, elles ne peuvent alors tout simplement pas tenir en mémoire et, en dépit des énormes progrès réalisés durant ces dernières années sur les démonstrateurs SAT, restent hors de portée des meilleurs démonstrateurs actuels. De plus, ces techniques de transformation ne sont possibles que pour des QBF n’impliquant qu’un nombre réduit d’alternances de quantificateurs. Il est donc important de pouvoir proposer de nouveaux algorithmes pour la résolution directe – et pratique – de QBF.

2 Objectifs

L’état de la recherche sur les QBF aujourd’hui peut être comparé à celui de la recherche sur SAT il y a dix ans (lors des premières compétitions de démonstrateurs). Entre ces deux périodes, l’évaluation expérimentale a clairement été identifiée comme étant la clé d’un processus continu d’amélioration pratique des algorithmes. Fort de ce constat, la méthodologie adoptée pour cette action consiste à considérer simultanément les aspects théoriques liés au développement de démonstrateurs QBF avec la problématique de l’évaluation expérimentale de ces derniers. Plusieurs axes de travail sont envisagés :

2.1 Critères d’évaluation et de comparaison de démonstrateurs QBF

Dans un premier temps, il est envisagé de recenser et d’évaluer les démonstrateurs QBF existants. Ceci nécessite de définir des critères de comparaison adaptés. Quel type de problème est traité ? S’agit-il du problème de décision, d’un problème de recherche de solution, d’optimisation, ou encore (s’il n’existe pas de solution) d’approximation ? S’il s’agit d’un problème de recherche, faut-il demander un certificat (*i.e.* une preuve de validité) pour toute solution trouvée par un démonstrateur QBF ? Si, pour le problème SAT, la taille d’un tel certificat (correspondant par exemple à un modèle) est linéaire dans la taille de l’entrée, pour le problème UNSAT, on ne connaît pas de certificats de taille polynomiale. Le fait de monter dans la hiérarchie polynomiale ne peut que compliquer la tâche et pose clairement des problèmes de représentation des certificats. La possibilité de les comparer est également cruciale, tant pour le recoupement et la comparaison des résultats de différents démonstrateurs que

pour aborder des problèmes d’optimisation.

2.2 Spécificité des démonstrateurs QBF

Les QBF associent une suite de quantificateurs à une composante propositionnelle $\exists\exists$ classique $\exists\exists$. Bien identifier ce qui fait la spécificité des démonstrateurs QBF par rapport aux démonstrateurs SAT classiques est un enjeu essentiel afin d’apprécier dans quelle mesure il est possible de tirer parti de la technologie utilisée dans les démonstrateurs SAT actuels et de l’adapter, ou non, au cas des QBF. Aujourd’hui, la très grande majorité de la communauté QBF est issue de la communauté SAT.

2.3 Plateforme de comparaison expérimentale

S’il est clair que l’étude des performances d’algorithmes passe en pratique par leur évaluation expérimentale, ce domaine reste encore émergent, notamment en déduction automatique. La comparaison de systèmes demande non seulement une bonne connaissance de ceux-ci et des problèmes abordés, mais aussi une importante réflexion sur les techniques employées pour les comparaisons. Souvent, la comparaison du temps CPU seul ne suffit pas et la qualité des solutions doit être prise en compte. On retrouve dans tous les cas des critères de reproduction des résultats, de transparence et d’objectivité, ainsi qu’un critère d’incrémentalité, de manière à introduire de nouveaux algorithmes à moindre coût dans l’échelle des comparaisons de tous les algorithmes déjà considérés. L’expertise acquise sur la comparaison de démonstrateurs SAT, via SAT-EX, peut être adaptée au cas des QBF. Nous projetons, comme pour le problème SAT, d’identifier un certain nombre d’instances de test, pouvant servir de base commune pour la comparaison expérimentale de démonstrateurs QBF. L’étude des spécificités des instances structurées par rapport aux instances aléatoires est également un point important.

3 Conclusion

Les progrès considérables réalisés autour du problème SAT sont dus à une meilleure connaissance des performances pratiques des algorithmes, grâce notamment à l’organisation de compétitions et de véritables études expérimentales de ces algorithmes (études d’une importance encore rare dans bien d’autres domaines de la démonstration automatique). Aujourd’hui, toute une partie de la communauté SAT se tourne vers le problème QBF, d’où viennent la plupart des problèmes actuels. Cette action lie ces deux domaines encore émergents, c’est-à-dire le développement d’algorithmes QBF conjointement à leur évaluation (au travers par exemple d’un site web dédié à leur comparaison expérimentale), ce qui constitue certainement un challenge important pour la démonstration automatique dans les années à venir. En résumé, les objectifs de cette action sont :

- d’identifier les spécificités de l’évaluation de démonstrateurs QBF ;
- d’évaluer les démonstrateurs QBF existants (sur la base d’une publication web des résultats, et grâce à une plateforme d’expérimentation, sur le modèle SAT-EX).
- d’obtenir une meilleure connaissance du domaine pratique de la résolution des QBF, par exemple en étudiant la pertinence des formules aléatoires et en proposant un regroupement des problèmes et démonstrateurs en *familles* (sur la base des résultats expérimentaux) ;
- de tirer parti de cette évaluation pour étudier de nouveaux axes ou proposer des améliorations des méthodes existantes.

4 Participants

Les participants de cette action spécifique se répartissent essentiellement dans quatre laboratoires, particulièrement actifs dans la communauté française s’intéressant au traitement de formules booléennes, et qui rassemblent un certain nombre de compétences complémentaires en lien avec cette action :

- Le **LRI** - UMR 8623 CNRS - Université Paris-Sud (Orsay)
Philippe Chatalic, Laurent Simon
- Le **CRIL** - FRE CNRS 2499 (Lens)
Daniel Le Berre, Pierre Marquis, Sylvie Coste-Marquis, Bertrand Mazure, Olivier Roussel, Lakhdar Saïs
- Le **LIP6** - UMR7606 CNRS - Université de Paris 6
Olivier Dubois
- Le **LaRIA** - Université d'Amiens,
Gilles Dequen
- L'**IRIT** - UMR 5505 CNRS - INPT - Université Paul Sabatier (Toulouse)
Hélène Fargier, Jérôme Lang

Remarque : Daniel Le Berre et Laurent Simon sont aussi impliqués dans l'organisation de la prochaine compétition SAT-2003, qui comportera notamment une partie hors-concours sur l'évaluation expérimentale de démonstrateurs QBF.

Cette action reste ouverte à d'autres membres, intéressés par cette problématique, et qui souhaiteraient se joindre aux travaux en cours.