Vérifier l'acceptabilité d'ensembles d'arguments

Philippe Besnard et Sylvie Doutre

IRIT – Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4
{besnard,doutre}@irit.fr

Résumé *L'argumentation est un mode de raisonnement qui consiste à construire et à évaluer des arguments, le plus souvent conflictuels. Le système d'argumentation de Dung est une approche unificatrice de ce mode de raisonnement. Dans ce système, plusieurs sémantiques sont données à l'acceptabilité des arguments. Ces sémantiques définissent des ensembles d'arguments acceptables. Alors que des travaux se sont intéressés au calcul d'ensembles acceptables et aux problèmes de décision crédule et sceptique associés à une sémantique, nous nous intéressons dans cet article au problème qui consiste à vérifier si un ensemble d'arguments est acceptable sous une sémantique donnée. Nous proposons pour cela trois méthodes : la première consiste à vérifier si l'ensemble satisfait une équation, la deuxième à tester s'il est un modèle d'une formule propositionnelle et la troisième revient à tester la satisfiabilité d'une formule propositionnelle.*
Mot-clés *Argumentation, acceptabilité, sémantique, point fixe, logique, modèles, satisfiabilité.*

1 Introduction

L'argumentation est un mode de raisonnement qui consiste à construire et à évaluer des arguments, le plus souvent conflictuels. Le système d'argumentation de Dung ([Dun95]) constitue un cadre formel adéquat pour étudier ce mode de raisonnement. Sa structure abstraite permet d'unifier de nombreuses autres approches proposées pour l'argumentation (voir [PV02] pour une synthèse de ces approches) et pour divers formalismes permettant de modéliser le raisonnement non-monotone (voir [BDKT97, Dou02]).

A partir d'un ensemble d'arguments et d'une relation binaire entre arguments représentant une notion de contrariété, les arguments sont évalués afin de déterminer les plus acceptables. Parmi les sémantiques données à l'acceptabilité, celles de Dung définissent des ensembles d'arguments conjointement acceptables appelés des extensions.

Certains travaux ont établi des algorithmes de calcul d'extension ([DM01]). D'autres travaux se sont intéressés aux problèmes de décision crédule (un argument appartient-il à au moins une extension ?) et sceptique (un argument donné appartient-il à toute extension ?) associés aux sémantiques. Des algorithmes pour répondre à ces problèmes ont été établis ([CDM03]), des procédures de preuve dialectiques ont été proposées ([JV99a, VP00, CDM03]) ainsi que des algorithmes permettant de calculer certaines de ces procédures de preuve ([CDM03]).

Nous nous intéressons dans cet article au problème qui consiste à vérifier si un ensemble est acceptable sous une sémantique donnée. Pour la plus connue des sémantiques, la sémantique stable, Dung a donné dans [Dun95] une équation simple permettant de tester si un ensemble est une extension stable. Pour les autres sémantiques, toutes basées sur la notion particulière de défense, il n'existe pas d'équation de ce type. Ainsi, nous cherchons à définir dans un premier temps des équations qu'un ensemble satisfait si et seulement s'il est acceptable sous la sémantique donnée. Ces équations seront définies en termes d'attaque et de défense.

Dans d'autres formalismes utilisés pour représenter la connaissance, pour déterminer si un ensemble est acceptable, une formule en logique propositionnelle est associée au formalisme. Cette formule est telle que l'ensemble est acceptable si et seulement s'il est un modèle de la formule logique. Par exemple, dans [BED96] est établie une formule en logique propositionnelle dont les modèles correspondent aux extensions d'une théorie avec défauts. Une correspondance similaire est établie pour la circonscription dans [GPP89] et pour les programmes logiques disjonctifs dans [BED94]. De la même manière, on peut chercher à associer à un système d'argumentation une formule propositionnelle dont les modèles correspondent aux extensions sous une sémantique donnée ; un ensemble sera une extension de la sémantique si et seulement s'il est un modèle de la formule. Pour la sémantique stable, des travaux de [Cre95] réalisés en théorie des graphes peuvent être utilisés. Pour les autres sémantiques de Dung, nous établissons de telles formules.

En exploitant encore la logique propositionnelle, nous proposons une troisième façon de déterminer si un ensemble d'arguments est acceptable sous une sémantique donnée. Cela consiste à associer à l'ensemble à tester une formule propositionnelle qui sera satisfiable si et seulement si l'ensemble est bien une extension de la sémantique.

La suite de l'article est comme suit : en section 2 nous présentons le système d'argumentation de Dung et les sémantiques associées. En section 3, nous cherchons à établir des équations en termes d'attaque et de défense qu'un ensemble satisfait si et seulement s'il est acceptable sous une sémantique donnée. En section 4, nous montrons comment associer à un système d'argumentation une formule propositionnelle telle que les modèles de la formule correspondent aux extensions du système sous une sémantique donnée. En section 5, nous cherchons à associer à l'ensemble dont on veut savoir s'il est acceptable une formule propositionnelle satisfiable si et seulement si l'ensemble est bien acceptable. La section 6 conclut et indique des perspectives de recherche.

Les travaux présentés dans cet article sont en cours. En particulier, les résultats présentés dans la section 3 sont partiels mais à eux seuls ils indiquent des perspectives intéressantes. Les preuves des résultats énoncés se trouvent dans [BD03].

2 Argumentation et extensions

Le système d'argumentation défini par Dung [Dun95] est un système abstrait dans lequel les arguments et les conflits entre arguments sont des primitives.

Définition 1 ([Dun95]) *Un* système d'argumentation *est une paire* (A, R) *où* A *est un ensemble d'*arguments *et* R *est une relation binaire sur* A *qui représente une notion d'*attaque *entre arguments (*$R \subseteq A \times A$*).*
Etant donnés deux arguments a *et* b*,* $(a, b) \in R$ *ou de manière équivalente* aRb*, signifie que* a attaque b *ou encore que* a *est un* attaquant *de* b*. Un ensemble d'arguments* S *attaque un argument* a *si* a *est attaqué par un argument de* S*. Un ensemble d'arguments* S *attaque un ensemble d'arguments* S' *s'il existe un argument* $a \in S$ *qui attaque un argument* $b \in S'$*.*

Dans toutes les définitions et notations qui suivent, on considère qu'un système d'argumentation (A, R) est donné.

Un système d'argumentation peut être représenté très simplement par un graphe orienté dont les nœuds sont les arguments et les arcs correspondent aux éléments de la relation de contrariété.

Dung a donné plusieurs *sémantiques* à l'acceptabilité. Ces différentes sémantiques sont globales puisqu'elles produisent des ensembles d'arguments acceptables ; ces ensembles sont appelés des *extensions*. La plus connue des sémantiques est certainement la sémantique stable. Elle est définie seulement via la notion d'attaque :

Définition 2 ([Dun95]) *Un ensemble* $S \subseteq A$ *est* sans-conflit *ssi il n'existe pas deux arguments* a *et* b *dans* S *tels que* a *attaque* b*.*
Un ensemble sans-conflit $S \subseteq A$ *est une* extension stable *ssi tout argument hors de* S *est attaqué par un argument appartenant à* S*.*

Les autres sémantiques de l'acceptabilité reposent sur la notion de défense :

Définition 3 *Un argument* a *est* défendu *par un ensemble* $S \subseteq A$ *(ou* S *défend* a*) ssi pour tout argument* $b \in A$*, si* b *attaque* a *alors* S *attaque* b*.*

Un ensemble d'arguments acceptables selon Dung doit avant tout être un ensemble sans-conflit qui défend tous ses arguments. Formellement :

Définition 4 ([Dun95]) *Un ensemble sans-conflit $S \subseteq A$ est* admissible *ssi tout argument de S est défendu par S.*

Toute extension stable est un ensemble admissible. Remarquons que si l'existence d'une extension stable pour un système d'argumentation donné n'est pas garantie, il existe toujours au moins un ensemble admissible (l'ensemble vide). C'est là un des avantages de la notion d'ensemble admissible sur celle d'extension stable.

De manière générale, un système d'argumentation peut posséder un grand nombre d'ensembles admissibles. Pour cette raison, il est utile d'avoir d'autres notions d'acceptabilité qui ne sélectionnent que certains ensembles admissibles. Outre la sémantique stable, trois sémantiques qui enrichissent la définition de l'admissibilité ont été définies par Dung :

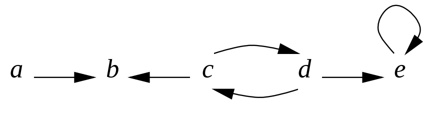
Définition 5 ([Dun95]) *Une* extension préférée *est, parmi tous les ensembles admissibles d'arguments, un ensemble maximal pour l'inclusion ensembliste.*
Un ensemble admissible est une extension complète *ssi tout argument défendu par S appartient à S.*
*L'*extension basique *est la plus petite (pour l'inclusion ensembliste) extension complète.*

Notons que toute extension stable est une extension préférée et toute extension préférée est une extension complète (les propriétés réciproques sont fausses). De plus, l'extension basique est incluse dans toute extension stable, préférée ou complète.

Décider si un ensemble est une extension stable ou un ensemble admissible est calculable en temps polynomial, mais décider si un ensemble est une extension préférée est un problème CO-NP-complet. Ces résultats de complexité ont été donnés dans [DT96] dans le cadre de la théorie des graphes ; du fait que les notions de noyau, semi-noyau et semi-noyau maximal correspondent respectivement aux notions d'extension stable, d'ensemble admissible et d'extension préférée (voir [Dou02]), ces résultats sont transposables à l'argumentation.

Exemple 1 *Soit (A, R) le système d'argumentation tel que $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(a, b), (c, b), (c, d), (d, c), (d, e), (e, e)\}$. Ce système peut être représenté sous forme de graphe (figure 1).*

FIG. 1: Représentation d'un système d'argumentation sous forme de graphe



Les différentes sémantiques définies par Dung produisent les ensembles acceptables suivants :

– *Ensembles admissibles :* $\emptyset$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$
– *Extension(s) stable(s) :* $\{a, d\}$
– *Extensions préférées :* $\{a, c\}$, $\{a, d\}$
– *Extensions complètes :* $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a\}$
– *Extension basique :* $\{a\}$

On peut imaginer qu'il existe d'autres sémantiques qui enrichissent l'admissibilité. C'est ce qu'ont suggéré Jakobovits et Vermeir dans [JV99b] avec la sémantique "rooted", mais cette dernière s'avère identique à la sémantique complète (voir [BD03]). Les travaux qui ont été engagés en section 3 laissent pourtant penser qu'il en existe de nombreuses.

3 Vérification par équation

Une première méthode pour vérifier si un ensemble est acceptable sous une sémantique donnée est de fournir une équation relativement simple que l'ensemble satisfait si et seulement s'il est acceptable sous la sémantique. Cette équation sera exprimée en termes d'attaque et de défense.

Un premier résultat de ce type a été établi par Dung lui-même pour les extensions stables, mais ce résultat est une propriété isolée dans son article de référence, [Dun95]. Avant de donner ce résultat et les résultats que nous avons établi pour les autres sémantiques de Dung, nous introduisons quelques notations :

Notation 1 *Etant donné un système d'argumentation* (A, R) *et un ensemble* $S \subseteq A$ *:*

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\stackrel{\text{def}}{=} A \setminus S \\
Def(S) &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid S \textit{ défend } a\} \\
R^+(S) &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid S \textit{ attaque } a\} \\
R^-(S) &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid a \textit{ attaque un argument de } S\}
\end{aligned}$$

La caractérisation des extensions stables définie par Dung est la suivante :

Proposition 1 ([Dun95]) *Soit* (A, R) *un système d'argumentation.* $S \subseteq A$ *est une extension stable ssi* $S = \overline{R^+(S)}$.

Ce sont des équivalences de ce type que nous voulons établir pour toutes les sémantiques de Dung.

Pour ce faire, nous allons nous intéresser tout d'abord à la caractérisation des ensembles admissibles. Nous donnerons ensuite un premier résultat concernant les extensions complètes, et nous verrons qu'il peut être généralisé de manière à ce que extensions stable et complète soient caractérisées de manière uniforme ; ce résultat suggère que les extensions préférées peuvent être caractérisées dans ce cadre uniforme, et que de nouvelles sémantiques existent. La caractérisation de la sémantique préférée et la définition de nouvelles sémantiques sont encore à l'étude. Nous indiquerons enfin un résultat établi par Dung concernant l'extension basique, mais qui ne correspond pas au type d'équation que nous recherchons.

3.1 Ensembles admissibles

Rappelons qu'un ensemble admissible est sans-conflit et qu'il défend tous ses éléments. Il est clair qu'un ensemble d'arguments défend tous ses éléments si et seulement si $S \subseteq Def(S)$. Ajoutons à cela la propriété donnée dans [AC98] qui indique que S est sans-conflit si et seulement si $S \subseteq \overline{R^{+}(S)}$. Nous avons comme conséquence immédiate :

Proposition 2 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation.* $S \subseteq A$ *est un ensemble admissible ssi* $S \subseteq Def(S) \cap \overline{R^{+}(S)}$.

Une autre caractérisation des ensembles admissibles est la suivante :

Proposition 3 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation.* $S \subseteq A$ *est un ensemble admissible ssi* $S \subseteq Def(S \cap \overline{R^{-}(S)})$.

3.2 Sémantiques stable et complète

Nous avons vu avec la proposition 1 comment caractériser les extensions stables. Concernant la caractérisation des extensions complètes, l'idée est d'enrichir la caractérisation des ensembles admissibles pour capturer l'idée que tous les arguments défendus par l'extension doivent appartenir à l'extension. En fait, pour tout S qui est une extension complète, $Def(S) \subseteq S$. Ceci nous amène à la proposition suivante :

Proposition 4 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation.* $S \subseteq A$ *est une extension complète ssi* $S = Def(S) \cap \overline{R^{+}(S)}$.

Ce résultat est en fait un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général qui indique l'existence d'une caractérisation uniforme pour les sémantiques stable et complète :

Théorème 1 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation. Pour* $S \subseteq A$*, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- *S est une extension sous la sémantique t*
- $S = Def(S \cup X) \cap \overline{R^{+}(S)}$
- $S = Def((S \cup X) \cap \overline{R^{-}(S)})$

où X est une ensemble d'arguments tel que

- $\emptyset \subseteq X \subseteq Def(S) \cap \overline{R^{+}(S)}$ *(cas t = complète)*
- $\overline{R^{+}(S)} \subseteq X \subseteq A$ *(cas t = stable)*

Les intervalles fixés pour X ne pourraient pas être plus grands ; c'est ce que suggère l'exemple suivant :

Exemple 2 *Soit le système d'argumentation* (A, R) *tel que* $A = \{a, b, c, d\}$ *et* $R = \{(a, b), (d, d), (d, c)\}$.

Considérons l'ensemble $S = \{a\}$. *Intéressons-nous tout d'abord au cas de la sémantique complète. Prenons* $X = \{d\}$ *(*X *n'est pas dans l'intervalle indiqué par le théorème). Il est clair que* S *est une extension complète, mais* $\{a\} \neq Def(\{a\} \cup \{d\}) \cap \{a, c, d\}$*, autrement dit l'équation du théorème échoue.*

Intéressons-nous maintenant au cas de la sémantique stable. Prenons $X = \{a, c\}$ *(*X *n'est pas dans l'intervalle indiqué par le théorème). On a alors* $S = Def(\{a\} \cup \{a, c\}) \cap \{a, c, d\}$. *En d'autres termes,* $S = Def(S \cup X) \cap \overline{R^+(S)}$ *pour* $X = \{a, c\}$. *Si l'on n'imposait pas que* X *contienne* $\overline{R^+(S)}$*, alors l'équation serait satisfaite bien que* S *n'est pas une extension stable.*

Dans les deux cas, la valeur choisie pour X *est celle qui est la plus proche de la valeur demandée par le théorème. Cela illustre donc que les limites imposées pour* X *par le théorème sont les meilleures possibles.*

La démonstration du théorème se trouve dans [BD03]. La partie du théorème concernant les extensions stables repose sur les deux propositions suivantes :

Proposition 5 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation. Si* $S = Def(S \cup X) \cap \overline{R^+(S)}$ *ou* $S = Def((S \cup X) \cap \overline{R^-(S)})$ *pour* $\overline{R^+(S)} \subseteq X \subseteq A$ *alors* S *est une extension stable.*

Proposition 6 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation. Pour tout* $X \subseteq A$*, si* S *est une extension stable alors* $S = Def(S \cup X) \cap \overline{R^+(S)}$ *et* $S = Def((S \cup X) \cap \overline{R^-(S)})$.

On peut remarquer que l'implication indiquée dans cette propriété est valable pour tout ensemble $X \subseteq A$.

3.3 Sémantiques "entre stable et complète"

Ce que l'on entend par sémantique "entre stable et complète" est une sémantique qui produit des ensembles acceptables tels que toute extension stable est une extension de la sémantique et toute extension de la sémantique est une extension complète. La sémantique préférée est un tel cas.

La proposition 6 concernant les extensions stables combinée au résultat suivant concernant les extensions complètes indique qu'il existe potentiellement plusieurs sémantiques de ce type.

Proposition 7 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation. Pour tout* $X \subseteq A$*, si* S *est un ensemble qui défend tous ses éléments et qui satisfait* $S = Def(S \cup X) \cap \overline{R^+(S)}$ *ou* $S = Def((S \cup X) \cap \overline{R^-(S)})$ *alors* S *est une extension complète.*

Considérons n'importe quel opérateur unaire X sur les parties de A tel que pour tout $S \subseteq A$, si $S = Def(S \cup X(S)) \cap \overline{R^+(S)}$ (resp. $S = Def((S \cup X(S)) \cap \overline{R^-(S)})$) alors S est un ensemble admissible. Alors $S = Def(S \cup X(S)) \cap \overline{R^+(S)}$

(resp. $S = Def((S \cup X(S)) \cap \overline{R^{-}(S)})$) induit une nouvelle notion d'extension entre les extensions stables et les extensions complètes (qui peut néanmoins coïncider avec la notion d'extension stable ou celle d'extension complète).

Le travail qui consiste à trouver l'opérateur X qui caractérise les extensions préférées est à l'étude.

Pour caractériser les extensions préférées, on peut néanmoins indiquer une propriété établie dans [DM01] :

Proposition 8 ([DM01]) *Soit un système d'argumentation (A, R). $S \subseteq A$ est une extension préférée ssi S satisfait les conditions suivantes :*

1. *$S \subseteq \overline{R^{+}(S)}$ (S est sans-conflit).*
2. *$S \subseteq Def(S)$ (S défend tous ses éléments).*
3. *$\forall X \subseteq \overline{S}$, si $X \subseteq \overline{R^{+}(S \cup X)}$ et $X \subseteq Def(S \cup X)$ alors $X = \emptyset$ (S est maximal pour 1 & 2).*

Comme cela a été souligné, il existe d'autres sémantiques entre "entre stable et complète". Nous cherchons à caractériser de telles sémantiques, en particulier en ne sélectionnant que certaines extensions complètes. Par exemple, une sémantique peut consister à ne garder que les extensions complètes qui contiennent un maximum de défenseurs pour les arguments de l'extension ; ces extensions pourraient être appelées *def-complètes.*

Exemple 3 *Soit le système d'argumentation (A, R) tel que $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $R = \{(a, b), (b, c), (d, b), (d, e), (e, d), (f, e), (f, g), (g, f)\}$.*

L'ensemble $S = \{a, c\}$ est une extension complète mais ce ne serait pas une extension def-complète. En effet, l'argument c qui est défendu par l'argument $a \in S$, possède un autre défenseur : l'argument d. Cet argument est tel que $S \cup \{d\}$ est une extension complète. Par conséquent, S ne serait pas une extension def-complète, contrairement à l'ensemble $S' = \{a, c, d\}$. S' n'est pas une extension stable, mais toutes les extensions stables de (A, R) seraient des extensions def-complètes.

Une fois que ces nouvelles sémantiques auront été formellement définies, nous chercherons à définir l'opérateur X qui caractérise ces nouvelles extensions dans le cadre uniforme décrit précédemment.

3.4 Sémantique basique

Concernant la sémantique basique, Dung a établi un résultat dans le cas d'un système d'argumentation fini. Un système d'argumentation (A, R) est fini si et seulement si chaque argument de A possède un nombre fini d'attaquants dans A. Dans un tel système, Def est continue. D'après des résultats classiques de la théorie du point fixe (théorème de Tarski), il s'ensuit que le plus petit point fixe de Def peut être calculé en appliquant itérativement Def à l'ensemble vide.

Proposition 9 ([Dun95]) *Etant donné* (A, R) *un système d'argumentation fini,* $S \subseteq A$ *est l'extension basique si et seulement si* $S = \bigcup_{i \geq 1} Def^i(\emptyset)$.

Cette caractérisation ne permet pas de vérifier aisément qu'un ensemble donné est l'extension basique (il faut faire un calcul itératif). La caractérisation de l'extension basique d'une manière similaire aux extensions stable ou complète est à l'étude. Il est néanmoins peu probable que cette caractérisation entre dans le cadre uniforme défini en section 3.2 car l'extension basique n'est pas “entre stable et complète”.

4 Modèle d'une formule

Une deuxième technique pour vérifier si un ensemble S est une extension d'un système d'argumentation consiste à caractériser toutes les extensions du système par les modèles d'une formule exprimée en logique propositionnelle ; l'ensemble S est une extension si et seulement si S correspond à un modèle de la formule.

Etant donné un système d'argumentation (A, R), considérons le langage propositionnel $\mathcal{L}$ qui a pour symboles propositionnels les éléments de A. Pour une sémantique donnée, nous allons associer à (A, R) une formule dont les modèles (maximaux ou minimaux dans certains cas), correspondront aux ensembles acceptables sous la sémantique. Un modèle est représenté par l'ensemble des atomes qu'il satisfait, autrement dit un modèle d'une formule sera un ensemble inclus dans A.

Une caractérisation de ce type existe déjà pour la sémantique stable. Elle n'a pas été donnée dans le cadre de l'argumentation mais dans le cadre de la théorie des graphes par [Cre95]. Nous avons déjà souligné en section 2 la correspondance entre les deux cadres. Par conséquent, en caractérisant par une formule logique les noyaux d'un graphe, ce sont les extensions stables d'un système d'argumentation qui sont caractérisées :

Proposition 10 *Soit* (A, R) *un système d'argumentation. Un ensemble* $S \subseteq A$ *est une extension stable ssi* S *est un modèle de la formule*

$$\bigwedge_{a \in A} (a \leftrightarrow \bigwedge_{b:(b,a) \in R} \neg b).$$

Nous voulons maintenant associer à un système d'argumentation (A, R) une formule dont les modèles sont les ensembles admissibles de (A, R). Rappelons qu'un ensemble admissible est sans-conflit et qu'il défend tous ses éléments.

Tout d'abord, on sait que si un argument $a \in A$ est attaqué par un argument $b \in A$, alors pour qu'un ensemble contenant a soit sans-conflit, il ne faut pas qu'il contienne b. La formule

$$\Phi_1 = \bigwedge_{a \in A} (a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a) \in R} \neg b)$$

a pour modèles les ensembles sans-conflit de (A, R). Cette formule n'est pas unique. En effet, on pourrait aussi exprimer le fait que si un argument $a \in A$ attaque un argument $b \in A$ alors pour qu'un ensemble contenant a soit sans-conflit, il ne faut pas qu'il contienne b. La formule

$$\Phi'_1 = \bigwedge_{a \in A} (a \rightarrow \bigwedge_{b:(a,b) \in R} \neg b)$$

a elle aussi pour modèles les ensembles sans-conflit de (A, R). On peut également voir la notion de sans-conflit comme le fait que pour tout couple $(a, b) \in R$, a et b ne peuvent pas appartenir tous les deux à un ensemble si l'on veut que celui-ci soit sans-conflit. Ainsi, la formule

$$\Phi''_1 = \bigwedge_{(a,b) \in R} (\neg a \vee \neg b)$$

a aussi pour modèles les ensembles sans-conflit de (A, R).

Pour caractériser les ensembles qui défendent tous leurs éléments, il faut saisir l'idée que si un argument $a \in A$ appartient à un ensemble qui défend tous ses éléments, alors pour chacun de ses attaquants $b \in A$, il doit y avoir dans l'ensemble un élément c qui attaque b. La formule

$$\Phi_2 = \bigwedge_{a \in A} (a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c))$$

exprime ceci puisque ses modèles sont les ensembles de (A, R) qui défendent tous leurs éléments.

Pour caractériser les ensembles admissibles, il suffit de faire la conjonction d'une formule caractérisant les ensembles sans-conflit (Φ_1, Φ'_1 ou Φ''_1) avec la formule Φ_2. Si l'on choisit la formule Φ_1 pour caractériser les ensembles sans-conflit, les ensembles admissibles sont caractérisés de la manière suivante :

Proposition 11 *Soit (A, R) un système d'argumentation. Un ensemble $S \subseteq A$ est admissible ssi S est un modèle de la formule*

$$\bigwedge_{a \in A} ((a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a) \in R} \neg b) \wedge (a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c))).$$

Les extensions préférées sont des ensembles admissibles maximaux. Ils sont donc caractérisés comme suit :

Proposition 12 *Soit (A, R) un système d'argumentation. Un ensemble $S \subseteq A$ est une extension préférée ssi S est un modèle maximal de la formule*

$$\bigwedge_{a \in A} ((a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a) \in R} \neg b) \wedge (a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c))).$$

Pour la sémantique complète, il faut exprimer que tous les arguments défendus par une extension doivent appartenir à l'extension. Autrement dit, si un argument $a \in A$ est tel que chacun de ses attaquants b a un attaquant c qui appartient à l'extension, alors a doit appartenir à l'extension. La formule

$$\bigwedge_{a \in A}((\bigwedge_{b:(b,a)\in R}(\bigvee_{c:(c,b)\in R} c)) \rightarrow a))$$

a pour modèles les ensembles qui contiennent tous les arguments qu'ils défendent. Une caractérisation des extensions complètes est donc la suivante :

Proposition 13 *Soit (A, R) un système d'argumentation. Un ensemble $S \subseteq A$ est une extension complète ssi S est un modèle de la formule*

$$\bigwedge_{a \in A}((a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a)\in R} \neg b) \wedge (a \leftrightarrow \bigwedge_{b:(b,a)\in R}(\bigvee_{c:(c,b)\in R} c))).$$

L'extension basique étant la plus petite extension complète, elle peut être caractérisée comme suit :

Proposition 14 *Soit (A, R) un système d'argumentation. Un ensemble $S \subseteq A$ est l'extension basique ssi S est un modèle minimal de la formule*

$$\bigwedge_{a \in A}((a \rightarrow \bigwedge_{b:(b,a)\in R} \neg b) \wedge (a \leftrightarrow \bigwedge_{b:(b,a)\in R}(\bigvee_{c:(c,b)\in R} c))).$$

Cette technique pour vérifier si un ensemble donné est acceptable sous une certaine sémantique a pour inconvénient qu'elle oblige à construire une formule qui peut s'avérer très grande. Toutefois, l'avantage est que la formule est associée au système (A, R) considéré et peut donc être réutilisée d'un test à l'autre.

Une autre technique consiste à associer une formule à l'ensemble à tester et à vérifier ensuite la satisfiabilité de cette formule. L'avantage est que la formule à construire sera moins grande qu'avec la précédente technique, mais l'inconvénient est que pour chaque test que l'on souhaite faire, il faut construire une nouvelle formule. Nous présentons cette technique dans la section suivante.

5 Satisfiabilité d'une formule

Une troisième technique pour vérifier si un ensemble S est une extension d'un système d'argumentation consiste à associer à S une formule en logique propositionnelle ; S est une extension sous la sémantique donnée si et seulement si la formule est satisfiable.

Considérons un système d'argumentation (A, R) et un ensemble $S \subseteq A$ dont on veut savoir s'il est sans-conflit. Il faut pour cela vérifier que, pour tout argument $a \in S$, les attaquants b de a n'appartiennent pas à S. Autrement dit, il faut que la formule

$$\Psi_1 = \bigwedge_{a \in S} (a \wedge (\bigwedge_{b:(b,a) \in R} \neg b))$$

soit satisfiable. On peut également tester si la formule

$$\Psi'_1 = \bigwedge_{a \in S} (a \wedge (\bigwedge_{b:(a,b) \in R} \neg b))$$

est satisfiable pour vérifier si S est sans-conflit : on cherche alors à s'assurer que tout argument attaqué par $a \in S$ est hors de S.

Si on veut vérifier que S est tel que tout argument qui n'appartient pas à S est attaqué par au moins un argument de S, il faut que la formule

$$\Psi_2 = \bigwedge_{a \notin S} (\neg a \wedge (\bigvee_{b:(b,a) \in R} b))$$

soit satisfiable.

Pour vérifier si un ensemble S est une extension stable, il suffit de tester si la conjonction d'une des formules permettant de vérifier si S est sans-conflit (Ψ_1 ou Ψ'_1) et de la formule Ψ_2 permettant de vérifier si tout argument hors de S est attaqué par S, est satisfiable. Si l'on choisit la formule Ψ_1 pour tester si un ensemble est sans-conflit, on obtient :

Proposition 15 *Soit (A, R) un système d'argumentation. Un ensemble $S \subseteq A$ est une extension stable ssi la formule*

$$\bigwedge_{a \in S} (a \wedge (\bigwedge_{b:(b,a) \in R} \neg b)) \wedge \bigwedge_{a \notin S} (\neg a \wedge (\bigvee_{b:(b,a) \in R} b))$$

est satisfiable.

Pour vérifier si un ensemble S défend tous ses éléments, il faut s'assurer que pour tout argument $a \in S$, chacun des attaquants b de a est attaqué par un argument $c \in S$. Ceci revient à vérifier que la formule

$$\bigwedge_{a \in S} (\bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c)) \wedge \bigwedge_{a \notin S} \neg a$$

est satisfiable.

Ainsi, pour tester si un ensemble S est admissible, il faut vérifier que la conjonction d'une des formules permettant de tester si S est sans-conflit et de la formule précédente, est une formule satisfiable.

Proposition 16 *Soit (A, R) un système d'argumentation. Un ensemble $S \subseteq A$ est admissible ssi la formule*

$$\bigwedge_{a \in S} (a \wedge (\bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\neg b \wedge (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c)))) \wedge \bigwedge_{a \notin S} \neg a$$

est satisfiable.

Pour vérifier si un ensemble S est tel que tous les arguments qu'il défend lui appartiennent, il faut s'assurer que pour tout argument $a \in A$, si chacun des attaquants b de a a un attaquant $c \in S$ alors $a \in S$. La formule

$$\bigwedge_{a \in S} a \wedge \bigwedge_{a \notin S} \neg a \wedge \bigwedge_{a \in A} ((\bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c)) \rightarrow a)$$

doit donc être satisfiable.

Cette formule peut se simplifier comme suit :

$$\bigwedge_{a \in S} a \wedge \bigwedge_{a \notin S} \neg a \wedge \bigwedge_{a \notin S} \neg(\bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c))$$

En testant si la conjonction de cette formule et de la formule permettant de tester si S est admissible (proposition 16) est une formule satisfiable, on peut vérifier si S est une extension complète.

Proposition 17 *Soit (A, R) un système d'argumentation. Un ensemble $S \subseteq A$ est une extension complète ssi la formule*

$$\bigwedge_{a \in S} (a \wedge (\bigwedge_{b:(b,a) \in R} \neg b) \wedge (\bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c))) \wedge \bigwedge_{a \notin S} (\neg a \wedge \neg(\bigwedge_{b:(b,a) \in R} (\bigvee_{c:(c,b) \in R} c)))$$

est satisfiable.

Pour tester si un ensemble $S \subseteq A$ est une extension préférée, il faut déterminer une formule qui n'est satisfiable que lorsque l'ensemble S est maximal parmi tous les ensembles admissibles de (A, R). Une telle formule est à l'étude, tout comme la formule permettant de tester si S est l'extension basique de (A, R) : il faut dans ce dernier cas s'assurer que la formule n'est satisfiable que lorsque S est, parmi toutes les extensions complètes de (A, R), celle qui est minimale.

6 Conclusion

Etant donné un système d'argumentation, nous nous sommes intéressés dans cet article au problème qui consiste à déterminer si un ensemble d'arguments est acceptable sous une sémantique donnée. Nous avons pour cela proposé trois techniques.

La première consiste à établir une équation en termes de défense et d'attaque que l'ensemble satisfait si et seulement s'il est acceptable sous la sémantique. Une équation a été établie pour la sémantique stable, une autre pour la sémantique complète ; ces deux équations s'inscrivent dans un cadre uniforme, et c'est dans ce cadre que nous cherchons à présent à caractériser la sémantique préférée. Ce cadre indique également qu'il existe potentiellement d'autres sémantiques "entre stable et complète". La suite de nos travaux consiste à caractériser de telles sémantiques et à les exprimer dans ce cadre uniforme. L'extension basique reste elle aussi à caractériser.

La deuxième technique consiste à associer à un système d'argumentation une formule en logique propositionnelle dont les modèles sont les ensembles acceptables sous une sémantique donnée. Un ensemble sera alors acceptable s'il est un modèle de la formule. Nous avons fourni de telles formules pour toutes les sémantiques de Dung.

La troisième technique consiste à associer à l'ensemble à tester une formule en logique propositionnelle qui est satisfiable si et seulement si l'ensemble est acceptable sous la sémantique donnée. De telles formules ont été établies pour les ensembles admissibles, les extensions stables et les extensions complètes. Elles restent à déterminer pour les extensions préférées et l'extension basique.

En répondant au problème qui consiste à vérifier si un ensemble donné est acceptable sous une sémantique, la première technique nous encourage à définir de nouvelles sémantiques qui enrichissent l'admissibilité définie par Dung. La deuxième technique ouvre quant à elle des perspectives pour l'amélioration éventuelle d'algorithmes existants pour le calcul des ensembles acceptables (utilisation de techniques SAT, CSP...). Ces pistes seront à poursuivre.

Références

[AC98] Amgoud (L.) et Cayrol (C.). – On the acceptability of arguments in preference-based argumentation. *In : 14th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'98), Madison, Wisconsin.* pp. 1–7. – San Francisco, California, juillet 1998.

[BD03] Besnard (P.) et Doutre (S.). – *Characterization of semantics for argument systems.* – Rapport technique n° 2003-24-R, IRIT, 2003.

[BDKT97] Bondarenko (A.), Dung (P.M.), Kowalski (R.A.) et Toni (F.). – An abstract, argumentation-theoretic approach to default reasoning. *Artificial Intelligence*, vol. 93, 1997, pp. 63–101.

[BED94] Ben-Eliyahu (R.) et Dechter (R.). – Propositional Semantics for Disjunctive Logic Programs. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. 12, n° 1–2, 1994, pp. 53–87.

[BED96] Ben-Eliyahu (R.) et Dechter (R.). – Default reasoning using classical logic. *Artificial Intelligence*, vol. 84, 1996, pp. 113–150.

[CDM03] Cayrol (C.), Doutre (S.) et Mengin (J.). – On Decision Problems related to the preferred semantics for argumentation frameworks. *Journal of Logic and Computation*, vol. 13, n° 3, 2003, pp. 377–403.

[Cre95] Creignou (N.). – The class of problems that are linearly equivalent to Satisfiability or a uniform method for proving NP-completeness. *Theoretical Computer Science*, vol. 145, 1995, pp. 111–145.

[DM01] Doutre (S.) et Mengin (J.). – Preferred Extensions of Argumentation Frameworks : Computation and Query Answering. *In : IJCAR 2001*, éd. par Goré (R.), Leitsch (A.) et Nipkow (T.). pp. 272–288. – Springer-Verlag.

[Dou02] Doutre (S.). – Autour de la sémantique préférée des systèmes d'argumentation. – Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, décembre 2002.

[DT96] Dimopoulos (Y.) et Torres (A.). – Graph theoretical structures in logic programs and default theories. *Theoretical Computer Science*, vol. 170, 1996, pp. 209–244.

[Dun95] Dung (P.M.). – On the acceptability of arguments and its fundamental role in non-monotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, vol. 77, 1995, pp. 321–357.

[GPP89] Gelfond (M.), Przymusinska (H.) et Przymusinski (T.C.). – On the Relationship Between Circumscription and Negation as Failure. *Artificial Intelligence*, vol. 38, n° 1, 1989, pp. 75–94.

[JV99a] Jakobovits (H.) et Vermeir (D.). – Dialectic Semantics for Argumentation Frameworks. *In : Proc. ICAIL'99*. pp. 53–62. – ACM Press.

[JV99b] Jakobovits (H.) et Vermeir (D.). – Robust Semantics for Argumentation Frameworks. *Journal of Logic and Computation*, vol. 9, n° 2, 1999, pp. 215–261.

[PV02] Prakken (H.) et Vreeswijk (G.). – *Handbook of Philosophical Logic*, chap. Logics for Defeasible Argumentation, pp. 219–318. – Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 2002, deuxième édition.

[VP00] Vreeswijk (G.A.W.) et Prakken (H.). – Credulous and Sceptical Argument Games for Preferred Semantics. *In : Proc. JELIA'2000*. pp. 239–253. – LNAI 1919.