Opérateurs d'amélioration

Sébastien Konieczny[1] Ramón Pino Pérez[2]

[1] CNRS, CRIL, Université d'Artois, Lens, France
konieczny@cril.fr
[2] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela
pino@ula.ve

Résumé

Nous définissons une nouvelle classe d'opérateurs de changement, les opérateurs d'amélioration, qui sont une généralisation des opérateurs usuels de révision itérée. L'idée est de relaxer le postulat de succès, c'est-à-dire de ne plus exiger que la nouvelle information soit nécessairement crue après l'amélioration, mais de simplement demander que sa plausibilité augmente. Donc pour assurer qu'une information sera acceptée, il suffira d'itérer ce processus un nombre suffisant de fois.

Mots Clef

Révision, AGM, Itération

Abstract

We introduce a new class of change operators. They are a generalization of usual iterated belief revision operators. The idea is to relax the success property, so the new information is not necessarily believed after the improvement. But its plausibility has increased in the epistemic state. So, iterating the process sufficiently many times, the new information will be finally believed. We give syntactical and semantical characterizations of these operators.

Keywords

Revision, AGM, Iteration

1 Introduction

La modélisation des processus de changements de croyances est un sujet central en intelligence artificielle, philosophie, et en bases de données. La principale approche a été proposée par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson, et elle est donc appelée la théorie de la révision AGM [1, 8, 13].

Les principes principaux formalisés par les postulats AGM sont : le principe de *cohérence*, demandant de préserver la cohérence de la base autant que cela est possible, le principe de *changement minimal*, exprimant le fait que l'on doit tenter de préserver autant d'informations de l'ancienne base que possible, et le dernier principe est celui de *primauté de la nouvelle information* (également appelé principe de *succès*, exigeant que la nouvelle information doit être crue après la révision de la base. Les postulats proposés pour caractériser les opérateurs de révision [1, 8, 13, 10] ont simplement pour but de formaliser ces principes.

Un problème avec la définition de la révision AGM est que les contraintes sur l'itération du processus de révision sont très faibles, cela étant principalement du à un problème de manque d'expressivité des bases de croyances logiques (propositionnelles) [11]. Afin d'assurer de bonnes propriétés pour l'itération du processus de révision, il est nécessaire d'utiliser une structure plus complexe. Donc il a été proposé dans [6] d'utiliser des états épistémiques plutôt que des bases de formules logiques. Dans ce cadre on peut alors définir d'intéressants opérateurs de révision itérée [6, 2, 12, 14, 18]. Nous appellerons ces opérateurs opérateurs de révision DP (pour Darwiche et Pearl).

Un autre cadre permettant de définir d'intéressants opérateurs de changement supportant l'itération est celui des Fonctions Ordinales Conditionnelles (OCF), appelées également kappa-fonctions, proposés par Spohn dans [19]. Un OCF peut être représenté par une fonction qui associe un ordinal à chaque interprétation, avec la contrainte qu'au moins une interprétation soit associée à l'ordinal 0. L'ordinal associé à une interprétation représente le degré d'implausibilité de cette interprétation. Cette notion peut être utilisée pour définir un degré d'acceptation d'une formule. Un opérateur de changement, appelé *transmutation* [20] dans ce cadre, est une fonction qui change le degré d'acceptance d'une formule. Cela signifie en particulier que ces opérateurs nécessitent plus d'information que les opérateurs de révision AGM/DP, puisque, en plus de la nouvelle information, ils nécessitent la donnée du nouveau degré d'acceptation de la formule.

Cela pose un problème important, puisque ce degré doit bien être trouvé quelque part ! Ce n'est pas un problème s'il est fourni par l'application, mais si l'unique donnée disponible est la nouvelle information, justifier le choix d'un degré d'acceptation arbitraire peut être problématique. Mais d'un autre côté, ce cadre plus général permet de définir des opérateurs intéressants. Il permet en particulier de définir des opérateurs permettant de réaliser des révisions ou des contractions, en fonction du nouveau degré d'acceptation. La plupart des travaux sur les opérateurs de révision itérée DP utilisent également des opérateurs OCF comme exemples (voir e.g. [6, 12]). Mais ils permettent également de définir des opérateurs de restructuration [20, 19], qui modifient l'OCF, sans modifier les formules crues. De tels opérateurs n'existent pas dans le cadre de la révision DP, qui satisfait le principe de succès, qui exige que la nouvelle information soit crue après la révision.

Un des apports de ce travail est de permettre la définition de tels opérateurs de restructuration dans le cadre standard AGM/DP. Nous définissons des opérateurs sur les états épistémiques qui ne satisfont pas (nécessairement) la propriété de succès. Ces opérateurs assurent simplement que la plausibilité de la nouvelle information a augmenté. Nous appelons ces opérateurs opérateurs d'amélioration.

L'idée de ces opérateurs est très intuitive : le cadre usuel de la révision AGM/DP peut être considéré comme trop contraignant : après la révision par une nouvelle information, cette information sera crue par l'agent. La plupart du temps c'est ce qui est recherché dans le cadre d'une révision, cela ne pose donc pas de problème. Mais dans certains cas il peut être raisonnable de prendre en compte la nouvelle information de manière plus prudente. Peut-être parce que l'agent a une confiance relative en la source de la nouvelle information, en tout cas pas une confiance suffisante pour accepter inconditionnellement la nouvelle information. Cela peut être vu comme un processus d'apprentissage ou de renforcement : à chaque fois que l'agent reçoit une nouvelle information α, cette formule gagnera en plausibilité dans l'état épistémique de l'agent, pour finalement être acceptée (crue) par l'agent, s'il la reçoit un nombre suffisant de fois.

Nos opérateurs sont assez proches de l'approche bon jour/mauvais jour de Booth et Meyer (aussi appelée révision d'ordre d'intervalles abstraits) [3, 4]. Mais alors que leurs opérateurs nécessitent une information supplémentaire, les nôtres sont définis dans le cadre DP usuel. Nous donnerons plus de détails sur ce lien à la fin de l'article.

L'idée de définir des opérateur de révision ne satisfaisant pas la propriété de succès n'est pas nouvelle. Ces opérateurs sont appelés opérateurs de révision non-prioritaire (voir le numéro spécial [9] pour un aperçu). Mais aucun ce ces travaux ne caractérise des opérateurs où la plausibilité de la nouvelle information est augmentée.

They are other work on belief revision operators that do not satisfy the success postulate, that are called non-prioritized revision (see for instance [9] for an overview). But none of this work define such increase of the plausibility of the new information as done by improvement operators.

La suite de l'article s'articule comme suit : après une section de préliminaires, nous définissons les opérateurs d'amélioration dans la section 3. La section 4 est dédiée à la discussion de la propriété d'indépendance de la syntaxe. Les deux sections suivantes présentent les principaux résultats du papier : deux théorèmes de représentation. Puis nous donnons un exemple d'opérateur d'amélioration et comment l'encoder en utilisant un OCF dans la section 7. La section 8 présente des propriétés intéressantes des opérateurs d'amélioration. Et la section 9 présente les conclusions de ce travail.

2 Préliminaires

Nous considérons un langage propositionnel $\mathcal{L}$ défini à partir d'un ensemble fini de variables propositionnelles $\mathcal{P}$, et des connecteurs logiques usuels. Notons $\mathcal{L}^*$ l'ensemble des formules cohérentes de $\mathcal{L}$.

Une interprétation ω est une fonction de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation ω est un modèle d'une formule $\phi \in \mathcal{L}$ si et seulement si elle la satisfait. $[\![\alpha]\!]$ dénote l'ensemble des modèles d'une formule α, i.e., $[\![\alpha]\!] = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \models \alpha\}$. Lorsque $\{w_1, .., w_n\}$ est un ensemble d'interprétations, on note $\varphi_{w_1,..,w_n}$ la formule (unique à équivalence logique près) telle que $[\![\varphi_{w_1,..,w_n}]\!] = \{w_1, .., w_n\}$.

Nous utiliserons des états épistémiques pour représenter les croyances de l'agent, comme habituellement en révision itérée [6]. Un état épistémique Ψ représente les croyances courantes de l'agent, mais aussi une information conditionnelle supplémentaire guidant le processus de révision (habituellement représenté par un pré-ordre sur les interprétations, un ensemble de conditionnels, une séquence de formules, etc.). Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les états épistémiques. Une fonction de projection $B : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}^*$ associe à chaque état épistémique Ψ une formule cohérente $B(\Psi)$, qui représente les croyances courantes de l'agent ayant Ψ comme état épistémique.

Pour simplifier nous ne considérerons dans ce papier que des états épistémiques cohérents et que des nouvelles informations cohérentes. Les opérateurs de changements qui nous intéressent sont donc des fonctions $\circ$ qui associent à un état épistémique et à une formule cohérente un nouvel état épistémique, i.e. $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{L}^* \longrightarrow \mathcal{E}$. L'image d'une paire (Ψ, α) pour l'opérateur $\circ$ sera noté $\Psi \circ \alpha$.

On utilisera les notations suivantes :

– $\Psi \circ^n \alpha$ défini par : $\begin{array}{lcl} \Psi \circ^1 \alpha & = & \Psi \circ \alpha \\ \Psi \circ^{n+1} \alpha & = & (\Psi \circ^n \alpha) \circ \alpha \end{array}$

– $\Psi \star \alpha = \Psi \circ^n \alpha$,
  où n est le premier entier tel que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$.

On peut noter que $\star$ n'est pas défini s'il n'existe pas de n tel que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$. Mais pour tous les opérateurs que nous considérerons dans cet article il existera (pour tout Ψ et α) un n tel que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$ (voir le postulat **(I1)** ci-après).

Finalement, soit un pré-ordre total $\leq$, i.e. une relation réflexive ($x \leq x$), transitive ($(x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z$) et totale ($x \leq y \vee y \leq x$) sur les mondes $\mathcal{W}$. Alors la relation stricte correspondante $<$ est définie par $x < y$ ssi $x \leq y$ et $y \not\leq x$, et la relation d'équivalence correspondante $\simeq$ est définie par $x \simeq y$ iff $x \leq y$ and $y \leq x$. On notera également $w \ll w'$ le fait que $w < w'$ et qu'il n'existe pas de w'' tel que $w < w'' < w'$. On utilisera également la notation $min(A, \leq) = \{w \in A \mid \nexists w' \in A\ w' < w\}$.

3 Opérateurs d'amélioration

Tout d'abord nous présentons les propriétés logiques de base que l'on attend des opérateurs d'amélioration.

Définition 1 *Un opérateur $\circ$ est un opérateur d'amélioration faible (weak improvement) s'il satisfait les propriétés (I1) à (I6) :*

(I1) *Il existe n tel que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$*

(I2) *Si $B(\Psi) \wedge \alpha \nvdash \bot$, alors $B(\Psi \star \alpha) \equiv B(\Psi) \wedge \alpha$*

(I3) *Si $\alpha \nvdash \bot$, alors $B(\Psi \circ \alpha) \nvdash \bot$*

(I4) *Pour tout entier positif n si $\alpha_i \equiv \beta_i$ pour tout $i \leq n$ alors $B(\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n) \equiv B(\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n)$*

(I5) *$B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta \vdash B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))$*

(I6) *Si $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta \nvdash \bot$, alors $B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta)) \vdash B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta$*

Nous avons regroupé ces propriétés car elles permettent d'obtenir un premier théorème de représentation (voir le théorème 1). Ces propriétés sont très proches des propriétés usuelles de la révision itérée [6]. Mais il est important de noter une différence majeure : dans la formulation usuelle $\star$ dénote un opérateur de révision, alors que dans les propriétés ci-dessus il s'agit d'une séquence d'améliorations.
La différence principale avec les opérateurs de révision DP est que nous n'imposons pas la propriété fondamentale de succès $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \alpha$. A la place on exige la propriété plus faible (I1), qui réclame qu'après une séquence d'améliorations, on inférera finalement la nouvelle information. Cela signifie en particulier que l'opérateur $\star$, défini comme une séquence d'améliorations $\circ$, est toujours défini.
Le postulat d'indépendance de syntaxe (I4) est également plus fort que la version usuelle de [6]. Nous discutons ce point plus en détail dans la section suivante.
Avant d'ajouter des postulats plus spécifiques à l'itération, nous devons d'abord introduire de nouvelles notions, afin d'alléger les notations.

Définition 2 *Soit un opérateur $\circ$ satisfaisant (I1), soient deux formules α, β et soit un état épistémique Ψ, on dit que α est sous β par rapport à Ψ, pour $\circ$, noté $\alpha \prec^{\circ}_{\Psi} \beta$ (ou simplement $\alpha \prec_{\Psi} \beta$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\circ$) si est seulement si $B(\Psi \star \alpha) \vdash B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))$ et $B(\Psi \star \beta) \nvdash B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))$.*
La paire (α, β) est dite Ψ-consecutive, noté $\alpha \lessdot^{\circ}_{\Psi} \beta$ (ou juste $\alpha \lessdot_{\Psi} \beta$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\circ$) si et seulement si $\alpha \prec_{\Psi} \beta$ et il n'existe pas de formule γ telle que $\alpha \prec_{\Psi} \gamma \prec_{\Psi} \beta$.

L'idée de ces définitions est que $\alpha \prec^{\circ}_{\Psi} \beta$ dénote le fait que α est plus enracinée (plausible) que β dans l'état épistémique Ψ. Et $\alpha \lessdot^{\circ}_{\Psi} \beta$ dénote le fait que α est une formule immédiatement plus enracinée (plausible) que β.
Nous pouvons à présent donner des postulats plus spécifiques à propos de l'itération des opérateurs d'amélioration.

Définition 3 *Un opérateur d'amélioration faible est appelé opérateur d'amélioration s'il satisfait les propriétés (I7) à (I11)*

(I7) *Si $\alpha \vdash \mu$ alors $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \equiv B(\Psi \star \alpha)$*

(I8) *Si $\alpha \vdash \neg\mu$ alors $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \equiv B(\Psi \star \alpha)$*

(I9) *Si $B(\Psi \star \alpha) \nvdash \neg\mu$ alors $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \mu$*

(I10) *Si $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$ alors $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \mu$*

(I11) *Si $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$, $\alpha \wedge \mu \nvdash \bot$ et $\alpha \lessdot_{\Psi} \alpha \wedge \mu$ alors $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \neg\mu$*

Une première observation à propos de ces postulats est qu'ils font apparaître à la fois $\circ$ et $\star$. Et c'est grâce à ces itérations d'améliorations jusqu'à la révision[1] modélisée par $\star$ que l'on peut définir des propriétés intéressantes à propos de $\circ$.
Les postulats (I7) et (I8) sont proches des propriétés (C1) et (C2) de [6], mais traduites pour des opérateurs d'amélioration faible. Le postulat (I9) est aussi proche de la propriété d'Indépendance de [12] (appelée aussi propriété (P) dans [2]), mais également traduite pour des opérateurs d'amélioration. Les postulats (I9) et (I11) concernent l'amélioration de la nouvelle information, c'est-à-dire l'augmentation de sa plausibilité dans l'état épistémique. Les postulats (I10) et (I11) expriment la prudence de l'approche, c'est-à-dire qu'ils imposent que l'augmentation de la plausibilité de la nouvelle information soit limitée. Le postulat (I10) dit que si, après une séquence d'améliorations par α, l'état épistémique obtenu implique $\neg\mu$, alors si, avant la séquence d'amélioration par α, on améliore par μ, alors ce ne sera pas suffisant pour impliquer μ après la séquence d'amélioration. Cela signifie en particulier qu'il n'est pas possible de passer directement d'un état épistémique où une formule est crue à un état épistémique où sa négation est crue en utilisant une amélioration. Et le postulat (I11) dit que si $\neg\mu$ est crue lorsque l'on révise par α (i.e. après une séquence d'amélioration par α), mais que μ est très plausible étant donné α, alors une amélioration par μ avant la séquence d'améliorations par α assurera que l'état épistémique résultat sera cohérent avec μ.

4 Indépendance de la syntaxe

Comme il a été souligné par beaucoup d'auteurs (voir par exemple [6, 2]) le principe de l'indépendance de la syntaxe est délicat à exprimer pour les états épistémique. En fait une traduction directe du postulat (R*4) de Darwiche et Pearl dans notre cadre donnerait :

$$\text{Si } \alpha \equiv \beta, \text{alors } B(\Psi \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \beta) \qquad (1)$$

Mais ajouter cette propriété n'est pas suffisant. Booth et Meyer ont bien illustré cette idée dans [2]. En fait (1) n'est pas suffisante pour assurer un bon comportement pour

[1] Notons que l'opérateur $\star$ satisfait la propriété de succès, et qu'il peut donc être appelé opérateur de *révision*. On utilisera donc ce terme par la suite. Le fait que $\star$ est un véritable opérateur de révision au sens AGM/DP sera prouvé dans le corollaire 1.

des révisions/améliorations par des séquences de formules équivalentes.

$$\text{Si } (\alpha \equiv \beta \ \&\ \gamma \equiv \theta), \text{alors } B(\Psi \circ \alpha \circ \gamma) \equiv B(\Psi \circ \beta \circ \theta) \quad (2)$$

Le postulat (1) n'implique pas ce postulat (2). Cela montre que le bon comportement vis à vis de formules équivalentes n'est pas garanti pour deux itérations. C'est pourquoi Booth et Meyer ont proposé dans [2] de remplacer le postulat usuel (1) du cadre DP par (2).
Nous sommes d'accord avec Booth et Meyer sur le fait que le postulat (1) n'est pas suffisant. Mais nous pensons que (2) n'est pas suffisant non plus car il ne va pas assez loin. En fait l'exemple utilisé par Booth et Meyer pour montrer que le postulat (1) n'évite pas le problème à la deuxième itération peut être facilement étendu pour montrer que le postulat (2) qu'ils ont proposé n'évite pas le problème à la troisième itération ! Il est donc nécessaire d'exprimer cette propriété pour un nombre quelconque d'itérations. Ce qui conduit au postulat **(I4)**.
L'exemple suivant, qui suit l'idée de l'exemple 1 de [2], montre que remplacer le postulat (1) par le postulat (2) dans le cadre AGM/DP (c'est-à-dire pour des opérateurs satisfaisant les propriétés (R*1)-(R*6)) n'est pas suffisant pour avoir la propriété **(I4)**.

Exemple 1 *Considérons un langage avec seulement deux variables propositionnelles p et q (condidérées dans cet ordre pour les interprétations). Soit $\varphi_1 = p \vee \neg p$ et $\varphi_2 = q \vee \neg q$. Soit Φ tel que $\Phi \circ \varphi_1 \neq \Phi \circ \varphi_2$. Cela est compatible avec les axiomes AGM/DP plus* (2)*, puisque la seule contrainte imposée par* (2) *est que $\leq_{\Phi\circ\varphi_1} = \leq_{\Phi\circ\varphi_2}$ mais pas que $\Phi \circ \varphi_1 = \Phi \circ \varphi_2$. De plus on peut choisir $B(\Phi \circ \varphi_1) = p \wedge q = B(\Phi \circ \varphi_2)$. Soit Φ_1, Φ_2 deux états épistémiques tels que $B(\Phi_1) = p = B(\Phi_2)$, $00 <_{\Phi_1} 01$ et $01 <_{\Phi_2} 00$. Il est donc compatible avec les axiomes AGM/DP plus* (2) *d'avoir $\leq_{\Phi\circ\varphi_1\circ p} = \leq_{\Phi_1}$ et $\leq_{\Phi\circ\varphi_2\circ\neg\neg p} = \leq_{\Phi_2}$. Mais alors, nous avons $B(\Phi \circ \varphi_1 \circ p \circ \neg p) = \neg p \wedge \neg q$ et $B(\Phi \circ \varphi_2 \circ \neg\neg p \circ \neg p) = \neg p \wedge q$, ce qui est clairement un contre-exemple à* **(I4)**.

De plus il est important de noter que tous les principaux opérateurs de révision itérée connus, comme la révision naturelle [5], l'opérateur • défini par Darwiche et Pearl [6], et la révision lexicographique de Nayak [17, 14] par exemple, satisfont tous **(I4)**. La raison de ce comportement est que tous ces opérateurs satisfont la propriété suivante :

$$\text{Si } \alpha \equiv \beta \text{ et } \leq_\Psi = \leq_\Phi \text{ alors } \leq_{\Psi\circ\alpha} = \leq_{\Phi\circ\beta} \quad (3)$$

En présence des propriétés AGM/DP, la propriété précédente implique la propriété (2). Mais l'implication inverse n'est pas vraie, comme le montre l'exemple 1.
Remarquons également que les opérateurs de révision itérée satisfont toutes les autres propriétés des opérateurs d'amélioration faible (avec $n = 1$ dans (I1)). Les opérateurs de révisions DP usuels [6] sont donc un cas particulier d'opérateurs d'amélioration faible.

5 Théorèmes de représentation

Commençons par définir la notion d'assignement fidèle fort.

Définition 4 *Une fonction $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ qui associe à chaque état épistémique Ψ un pré-ordre total sur les interprétations $\leq_\Psi$ est appelée un* assignement fidèle fort *si et seulement si :*

1. *Si $w \models B(\Psi)$ et $w' \models B(\Psi)$, alors $w \simeq_\Psi w'$*
2. *Si $w \models B(\Psi)$ et $w' \not\models B(\Psi)$, alors $w <_\Psi w'$*
3. *Pour tout entier positif n si $\alpha_i \equiv \beta_i$ pour tout $i \leq n$ alors $\leq_{\Psi\circ\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_n} = \leq_{\Psi\circ\beta_1\circ\cdots\circ\beta_n}$*

On peut noter que les conditions 1 et 2 sont équivalentes à $[\![B(\Psi)]\!] = \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi)$, et sont les conditions usuelles des assignements fidèles [6]. La condition 3 est très naturelle : deux séquences d'améliorations du même pré-ordre par des formules équivalentes mènent au même pré-ordre.
Nous pouvons à présent montrer un premier théorème de représentation pour les opérateurs d'amélioration faible, avant de nous tourner vers les propriétés plus intéressantes concernant l'itération.

Théorème 1 *Un opérateur de changement $\circ$ est un opérateur d'amélioration faible si et seulement si il existe un assignement fidèle fort qui associe à chaque état épistémique Ψ un pré-ordre total sur les interprétations tel que*

$$[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \quad (4)$$

Un corollaire intéressant de ce théorème est le suivant :

Corollaire 1 *Si $\circ$ est un opérateur d'amélioration faible, alors l'opérateur $\star$ correspondant est un opérateur de révision AGM/DP, c'est-à-dire qu'il satisfait les propriétés (R*1)-(R*6) de [6].*

Une autre conséquence du théorème est la propriété de trichotomie suivante :

Proposition 1 *Soit un opérateur d'amélioration faible $\circ$. Alors*

$$B(\Psi \star (\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} B(\Psi \star \alpha) \ ou \\ B(\Psi \star \beta) \ ou \\ B(\Psi \star \alpha) \vee B(\Psi \star \beta) \end{cases}$$

Nous pouvons à présent donner deux corollaires de ces résultat, qui sont utiles pour comprendre les définitions de $\prec_\Psi$ et $\lll_\Psi$, et qui nous serons utiles dans la preuve du théorème principal (le théorème 2).

Corollaire 2 *Soit un opérateur d'amélioration faible $\circ$. Alors $\alpha \prec_\Psi \beta$ si et seulement si il existe w, w' tels que $w \in [\![B(\Psi \star \alpha)]\!]$, $w' \in [\![B(\Psi \star \beta)]\!]$, $w <_\Psi w'$.*

Corollaire 3 *Soit un opérateur d'amélioration faible $\circ$. Alors $\alpha \lll_\Psi \beta$ si et seulement si il existe w, w' tels que $w \in [\![B(\Psi \star \alpha)]\!]$, $w' \in [\![B(\Psi \star \beta)]\!]$, $w <_\Psi w'$ et il n'existe pas de w'' tel que $w <_\Psi w'' <_\Psi w'$.*

6 Résultat principal

Nous pouvons à présent nous tourner vers le théorème de représentation des opérateurs d'amélioration.

Définition 5 *Soit un opérateur d'amélioration faible $\circ$ et $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ l'assignement fidèle fort correspondant. L'assignement est appelé assignement graduel si les propriétés S1, S2, S3, S4 et S5 sont satisfaites.*
(S1) *Si $w, w' \in [\![\alpha]\!]$ alors $w \leq_\Psi w' \Leftrightarrow w \leq_{\Psi\circ\alpha} w'$*
(S2) *Si $w, w' \in [\![\neg\alpha]\!]$ alors $w \leq_\Psi w' \Leftrightarrow w \leq_{\Psi\circ\alpha} w'$*
(S3) *Si $w \in [\![\alpha]\!], w' \in [\![\neg\alpha]\!]$ alors $w \leq_\Psi w' \Rightarrow w <_{\Psi\circ\alpha} w'$*
(S4) *Si $w \in [\![\alpha]\!], w' \in [\![\neg\alpha]\!]$ alors $w' <_\Psi w \Rightarrow w' \leq_{\Psi\circ\alpha} w$*
(S5) *Si $w \in [\![\alpha]\!], w' \in [\![\neg\alpha]\!]$ alors $w' \ll_\Psi w \Rightarrow w \leq_{\Psi\circ\alpha} w'$*

Les propriétés (S1) et (S2) correspondent aux propriétés usuelles (CR1) et (CR2) pour les opérateurs de révision itérée DP [6]. La propriété (S3) est une nouvelle propriété proposée dans [2, 12], qui impose une augmentation de la plausibilité (des modèles) de la nouvelle information. La propriété (S4) montre comment l'augmentation de la plausibilité des modèles de la nouvelle information est limitée par les opérateurs d'amélioration. C'est une différence importante avec les opérateurs de révision itérée DP usuels [6, 12, 2]. La propriété (S5) implique que (en présence de (S4)) si un modèle de $\neg\alpha$ est juste un peu plus plausible qu'un modèle de α, alors après l'amélioration les deux modèles auront la même plausibilité.

Théorème 2 *Un opérateur de changement $\circ$ est un opérateur d'amélioration si et seulement si il existe un assignement graduel tel que*

$$[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$$

Ce théorème a de nombreuses conséquences. En particulier la relation entre $\leq_\Psi$ et $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ imposée par la définition 5 est très contrainte. En fait le pré-ordre total $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ est complètement déterminé par $\leq_\Psi$ et α comme cela sera montré dans la proposition 2.
Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme 1 *Soit un opérateur d'amélioration $\circ$ et $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ son assignement graduel. Si $w <_\Psi w'$, $w \in [\![\neg\alpha]\!]$, $w' \in [\![\alpha]\!]$ et $w \not\ll_\Psi w'$ alors $w <_{\Psi\circ\alpha} w'$.*

Ce lemme est intéressant car il donne la relation manquante entre $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ et $\leq_\Psi$, puisque toutes les autres relations sont données par les propriétés de la définition 5.

Proposition 2 *Soit un opérateur d'amélioration $\circ$ et $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ son assignement graduel. Alors pour toute formule α, le pré-ordre $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ est complètement déterminé par $\leq_\Psi$ et $[\![\alpha]\!]$.*

Cette proposition est très importante puisqu'elle exprime le fait qu'il n'existe qu'un seul opérateur d'amélioration. Plus exactement il est possible de définir plusieurs opérateurs d'amélioration si on associe à l'état épistémique initial différents pré-ordres totaux. Mais une fois que ce pré-ordre initial est choisi, la proposition 2 montre qu'il n'y a plus aucune liberté sur le choix des pré-ordres suivants (et donc qu'une seule façon de les améliorer).
Donc clairement si l'on choisi les pré-ordres sur les interprétations comme représentation des états épistémiques (il est important de noter que les théorèmes de représentations disent juste que l'on peut associer un pré-ordre à chaque état épistémique, il ne font donc aucune hypothèse sur la nature exacte de ces états épistémiques), alors il n'y a qu'un unique opérateur d'amélioration.
La construction exacte de $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ à partir de $\leq_\Psi$ est donnée Table 1.
Intuitivement (et grossièrement) $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ est obtenu en descendant d'un niveau tous les modèles de α dans le pré-ordre total $\leq_\Psi$. Cela sera exprimé plus formellement dans la section suivante.

7 Un exemple concret : Amélioration via OCF

Nous allons à présent montrer comment implémenter un opérateur d'amélioration via les OCF. Notons Ord la classe des ordinaux.

Définition 6 *Une Fonction Ordinale Conditionnelle (OCF) κ est une fonction de l'ensemble des interprétations $\mathcal{W}$ vers l'ensemble des ordinaux Ord telle qu'au moins une interprétation est associée à 0.*
Une fonction définie de l'ensemble des interprétations $\mathcal{W}$ vers l'ensemble des ordinaux[2] *sera appelée OCF libre. L'ensemble des OCF sera noté $\mathcal{K}$.*

Montrons à présent comment implémenter l'amélioration en utilisant le cadre des OCF.
Plus précisément nous allons donner deux résultats : nous montrons d'abord comment calculer le pré-ordre résultat de l'amélioration en utilisant une traduction vers les OCF libres. Ensuite nous montrons comment définir un opérateur d'amélioration dans le cadre des OCF usuels.
Donc le premier résultat est de déterminer $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ à partir de $\leq_\Psi$ et α, en utilisant les outils des OCF. Il peut être utile de rappeler ici qu'un pré-ordre total sur $\mathcal{W}$ peut être vu comme la partition de $\mathcal{W}$ en un certain nombre de niveaux $\langle S_0, \ldots S_n\rangle$ (la liste ordonnée de ses classes d'équivalence). Où $\forall x, y \in S_i\ x \simeq y$ et $\forall x \in S_i\ \forall y \in S_j\ i < j$ implique $x < y$.
Soit κ le représentant canonique de $\leq_\Psi$, *i.e.* si $\leq_\Psi$ à n niveaux et w est dans le niveau i, alors $\kappa(w) = i$.
Considérons à présent l'OCF libre suivant :

$$\kappa_\alpha(w) = \begin{cases} \kappa(w) & \text{si } w \models \alpha \\ \kappa(w) + 1 & \text{si } w \models \neg\alpha \end{cases}$$

[2]Sans la condition de normalisation usuelle.

$w \in [\![\alpha]\!]$	$w' \in [\![\alpha]\!]$	$w \leq_\Psi w' \Leftrightarrow w \leq_{\Psi\circ\alpha} w'$	**(S1)**
$w \in [\![\neg\alpha]\!]$	$w' \in [\![\neg\alpha]\!]$	$w \leq_\Psi w' \Leftrightarrow w \leq_{\Psi\circ\alpha} w'$	**(S2)**
$w \in [\![\alpha]\!]$	$w' \in [\![\neg\alpha]\!]$	$w <_\Psi w' \Leftrightarrow w <_{\Psi\circ\alpha} w'$ $w \simeq_\Psi w' \Rightarrow w <_{\Psi\circ\alpha} w'$ $w' \ll_\Psi w \Rightarrow w \simeq_{\Psi\circ\alpha} w'$ $w' <_\Psi w \land w' \not\ll_\Psi w \Rightarrow w <_{\Psi\circ\alpha} w'$	**(S3)** **(S3)** **(S4) & (S5)** **(Lemma 1)**

TAB. 1 – De $\leq_\Psi$ à $\leq_{\Psi\circ\alpha}$

Il n'est pas difficile de vérifier que cet OCF libre représente $\leq_{\Psi\circ\alpha}$, c'est-à-dire que le pré-ordre associé à cette fonction de manière naturelle ($w \leq_{\kappa_\alpha} w'$ ssi $\kappa_\alpha(w) \leq \kappa_\alpha(w')$) satisfait toutes les propriétés du tableau 1.
Des constructions similaires d'opérateurs qui améliorent le rang des modèles de la nouvelle information de 1 ont déjà été proposé dans la littérature [7, 15].
Le but de ce résultat est de donner une illustration simple du comportement des opérateurs d'amélioration en terme de pré-ordre totaux, via les OCF libre.
Il faut toutefois noter que l'OCF libre défini ci-dessus est vraiment particulier puisqu'il est construit à partir du pré-ordre $\leq_\Psi$. En particulier ce n'est pas un OCF usuel (il se peut qu'aucun monde ne soit associé à 0).
Si on désire définir un opérateur d'amélioration défini quel que soit l'OCF (usuel), cela demande une définition beaucoup moins facile, afin de modéliser le petit accroissement de plausibilité induit par les opérateurs d'amélioration.
Voyons donc à présent comment représenter les opérateurs d'amélioration dans le cadre des OCF usuels.
On suppose donc ici que les états épistémiques sont des OCF (usuels) et $\circ : \mathcal{K} \times \mathcal{L}^* \longrightarrow \mathcal{K}$. Dans ce cadre on définit la fonction B par $[\![B(\kappa)]\!] = \{w : \kappa(w) = 0\}$.
Rappelons que $\kappa(\alpha) = min\{\kappa(w) : w \in [\![\alpha]\!]\}$. Etant donnés un OCF κ et une formule cohérente α nous allons définir un nouvel OCF $\kappa\circ\alpha$ par cas, selon que $\kappa(\alpha) > 0$ ou $\kappa(\alpha) = 0$. Dans le premier cas ($\kappa(\alpha) > 0$) nous effectuons une descente des modèles de α via une fonction auxiliaire $f^\kappa_{\alpha\downarrow}$ définie ci-dessous. Dans le second cas ($\kappa(\alpha) = 0$) on simule l'accroissement de la plausibilité des modèles de α via une fonction auxiliaire $f^\kappa_{\alpha\uparrow}$ définie ci-dessous qui effectue une montée des modèles de $\neg\alpha$.
Les fonctions $f^\kappa_{\alpha\downarrow} : [\![\alpha]\!] \longrightarrow Ord$ et $f^\kappa_{\alpha\uparrow} : [\![\neg\alpha]\!] \longrightarrow Ord$ sont définis par :

$$f^\kappa_{\alpha\downarrow}(w) = \begin{cases} max\{\rho : \exists w' \in [\![\neg\alpha]\!]\ \kappa(w') = \rho \ \&\ \rho < \kappa(w) \\ \qquad \&\ \ \nexists w'' \in [\![\alpha]\!]\ \rho < \kappa(w'') < \kappa(w)\} \\ \qquad\qquad \text{si cet ensemble est non vide} \\ \kappa(w) - 1 \ \ \text{sinon} \end{cases}$$

$f^\kappa_{\alpha\downarrow}$ assigne w, un modèle de α, au premier niveau sous $\kappa(w)$ où il y a un modèle de $\neg\alpha$ s'il n'y a pas d'autre modèle de α entre ces deux niveaux. Sinon $f^\kappa_{\alpha\downarrow}$ assigne w à $\kappa(w) - 1$.

$$f^\kappa_{\alpha\uparrow}(w) = \begin{cases} min\{\rho : \exists w' \in [\![\alpha]\!]\ \kappa(w') = \rho \ \&\ \kappa(w) < \rho \\ \qquad \&\ \ \nexists w'' \in [\![\neg\alpha]\!]\ \kappa(w) < \kappa(w'') < \rho\} \\ \qquad\qquad \text{si cet ensemble est non vide} \\ \kappa(w) + 1 \ \ \text{sinon} \end{cases}$$

$f^\kappa_{\alpha\uparrow}$ assigne w, un modèle de $\neg\alpha$, au premier niveau au dessus de $\kappa(w)$ où il y a un modèle de α s'il n'y a pas d'autres modèles de $\neg\alpha$ entre ces deux niveaux. Sinon $f^\kappa_{\alpha\uparrow}$ assigne w à $\kappa(w) + 1$.
Nous définissons également deux fonctions qui associent les mondes à des ordinaux selon que $\kappa(\alpha) = 0$ ou non. Lorsque $\kappa(\alpha) = 0$ on définit :

$$\kappa \uparrow \neg\alpha(w) = \begin{cases} \kappa(w) & \text{si } w \models \alpha \\ f^\kappa_{\alpha\uparrow}(w) & \text{si } w \models \neg\alpha \end{cases}$$

et lorsque $\kappa(\alpha) > 0$ on définit :

$$\kappa \downarrow \alpha(w) = \begin{cases} \kappa(w) & \text{si } w \models \neg\alpha \\ f^\kappa_{\alpha\downarrow}(w) & \text{si } w \models \alpha \end{cases}$$

Et on peut enfin définir $\kappa \circ \alpha$ par

$$\kappa \circ \alpha = \begin{cases} \kappa \uparrow \neg\alpha & \text{si } \kappa(\alpha) = 0 \\ \kappa \downarrow \alpha & \text{si } \kappa(\alpha) > 0 \end{cases}$$

Voyons à présent sur un exemple comment cela fonctionne.

Exemple 2 *Considérons un langages avec trois variables propositionnelles p, q, r, considérées dans cet ordre pour les interprétations. Soit un OCF κ décrit dans la figure ci-dessous, et soit $\alpha = \neg p$. La figure ci-dessous montre κ, $\kappa\circ\alpha$, $\kappa\circ\alpha\circ\alpha$ et $\kappa\circ\alpha\circ\alpha\circ\alpha$ (les modèles de α sont en gras) :*

5	110	110	5
4	**011**	$------$	4
3	$------$	**011**	3
2	**010 000 001**	$------$	2
1	101 100	101 100 **010 000 001**	1
0	111	111	0
	κ	$\kappa \circ \alpha$	

6		110	6
5	110	−−−−−−	5
4	−−−−−−	−−−−−−	4
3	−−−−−−	−−−−−−	3
2	−−−−−−	101 100	2
1	101 100 **011**	111 **011**	1
0	111 **010 000 001**	**010 000 001**	0
	$\kappa \circ \alpha \circ \alpha$	$\kappa \circ \alpha \circ \alpha \circ \alpha$	

8 Propriétés des opérateurs d'amélioration

Nous allons dans cette section fournir d'autres propriétés intéressantes des opérateurs d'amélioration. Ces propriétés illustrerons entre autre leurs relations avec d'autres opérateurs connus.

Proposition 3 *Les opérateurs d'amélioration ne peuvent pas être représentés par une Conditionalisation (Spohn [19]) ou un ajustement (Williams [20]).*

Ce résultat n'est pas surprenant puisque la conditionalisation et l'ajustement opèrent le même changement "global" sur le rang des interprétations, alors que, comme résumé Table 1, les opérateurs d'amélioration nécessitent un comportement plus adaptatif (qui dépend du rang des autres interprétations).

Proposition 4
– *Il existe n tel que $\Psi \circ^n \alpha$ est l'opérateur de révision lexicographique de Nayak [17, 14]. Notons $\Psi \star_{lex} \alpha = \Psi \circ^n \alpha$.*
– *En fait, le premier n tel que $\Psi \star_{lex} \alpha = \Psi \circ^n \alpha$ est un point fixe pour l'amélioration par α, i.e. $\leq_{\Psi \star_{lex} \alpha} = \leq_{\Psi \star_{lex} \alpha \circ \alpha}$.*

Cette dernière proposition est intéressante puisqu'elle illustre le fait que le processus d'amélioration ne s'arrête pas dès que la nouvelle information est crue. En particulier :

Proposition 5 *$B(\Psi) \vdash \alpha$ n'implique pas que $\leq_{\Psi \circ \alpha} = \leq_\Psi$ et donc n'implique pas que $\Psi \circ \alpha = \Psi$.*

Remarque 1 *Les opérateurs d'amélioration peuvent être utilisés pour définir des opérateurs de contraction. Il suffit de définir $\Psi \odot \alpha = \Psi \circ^n \neg\alpha$ où n est le plus petit entier tel que $\Psi \circ^n \neg\alpha \nvdash \alpha$. Dans ce cas $\odot$ est un opérateur de contraction.*

A présent nous allons discuter le lien entre les opérateurs d'amélioration et l'approche bons jours/mauvais jours de Booth et al. [3, 4] (également appelée révision d'ordres d'intervalles abstraits). Brièvement, à chaque interprétation est associée deux états : celui de l'interprétation dans un bon jour et celui de cette interprétation dans un mauvais jour. Lorsqu'une nouvelle information arrive les modèles de cette information sont alors dans un bon jour, et les modèles de sa négation dans un mauvais jour. On regarde alors quel est le pré-ordre associé entre ces états pour déterminer le nouvel état de croyances de l'agent. Une première différence est que les opérateurs de Booth et al. sont définis comme une révision de pré-ordres totaux, alors que les opérateurs d'améliorations sont définis sur des états épistémiques DP généraux. Une deuxième différence plus importante est que l'approche de Booth et al. nécessite une information supplémentaire (états bons jours et mauvais jours) pour guider le processus de révision, alors que nos opérateurs sont entièrement définis dans le cadre DP usuel. C'est une différence importante qui permet par exemple une itération aisée du processus.

En fait, étant donné $\leq_\Psi$, il est possible de définir $\preceq$, un $\leq_\Psi$-*faithful tpo* (voir [4]), tel que la révision de $\preceq$ par α, dans le sens de Booth-Meyer-Wong, est exactement $\leq_{\Psi \circ \alpha}$. Donc, d'après ce lien, les opérateurs d'amélioration peuvent être considéré, dans un sens, comme un cas particulier des opérateurs de Booth et al.

Finalement nous souhaitons aborder le comportement intéressant des opérateurs d'amélioration "à la limite", c'est-à-dire après une longue séquence d'améliorations. En fait, lorsque l'on travaille dans des cadres finis, il n'existe aucun opérateur de révision itérée qui échappe à l'un des deux cas limites suivants : révision *maxichoice* ou révision *full meet*.

Révision full meet signifie que les croyances des états épistémiques résultats est soit la conjonction de la nouvelle information avec les croyances de l'ancien état épistémiques, soit juste la nouvelle information. Cela est problématique, puisque cela signifie qu'à la limite l'agent à perdu toutes ses croyances. L'opérateur défini par Lehmann [16] a par exemple ce comportement lorsque l'on travaille dans un cadre fini.

La révision maxichoice signifie que chaque révision mène à un état épistémique dont les croyances sont une formule complète. Cela est problématique, puisque toute révision mène l'agent à un état de croyance où il sait tout sur tout, c'est-à-dire qu'il n'y a plus aucune formule sur laquelle l'agent hésite. On peut argumenter que ce comportement à la limite est du à la longue séquence de révision qui a amené l'agent dans cet état épistémique particulier, ce qui permet à l'agent d'avoir des informations très fines sur le monde. Mais il peut tout de même sembler raisonnable d'être capable de garder une incertitude à propos de certains sujets, et de parfois perdre certaines de ses certitudes. La plupart des opérateurs de révision itérée DP mènent à ce comportement à la limite [6, 17, 5, 14, 2, 12].

Il est intéressant de noter que le cadre des OCF n'a pas ce problème de comportement à la limite. Après toute séquence de conditionalisations, ou d'ajustements, il est possible d'atteindre n'importe quel OCF par une séquence adéquate. C'est un des avantages d'utiliser une approche plus quantitative (en utilisant un degré d'acceptation en plus de la formule (nouvelle information) en donnée), comparé au cadre entièrement qualitatif qu'est le cadre DP de la révision itérée.

Il est intéressant alors de noter que les opérateurs d'amélioration n'ont pas non plus de problème de comportement à la limite. En fait, après tout séquence d'amélioration, il est possible d'atteindre n'importe quelle formule (comme croyances de l'état épistémique de l'agent), par une séquence adéquate d'améliorations (on a également le même résultat pour les pré-ordres associés : tout pré-ordre peut être obtenu à partir de n'importe quel pré-ordre par une séquence adéquate). Ce n'est pas du tout le cas dans le cadre de la révision itérée DP usuelle : après une séquence de révisions certaines formules (ou pré-ordres) ne sont plus obtenables (quelle que soit la séquence utilisée).
La proposition suivante résume cette propriété des opérateurs d'amélioration :

Proposition 6 *Soit un pré-ordre sur les interprétations $\leq$ et soit $\leq_\Psi$ le pré-ordre associé à Ψ, alors il existe une séquence de formules $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ telle que $\leq_{\Psi \circ \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_n} = \leq$.*

Les opérateurs d'améliorations sont, à notre connaissance, les premiers opérateurs de changement définis dans le cadre DP qui permettent d'éviter ces problèmes de comportement à la limite.

9 Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle famille d'opérateurs de changement appelés opérateurs d'amélioration (faible). Ces opérateurs sont plus prudents que les opérateurs de révision itérée DP usuels. La plupart des opérateurs de révision itérée de la littérature satisfont toutes les propriétés de l'amélioration faible. Dans ce sens le cadre de l'amélioration faible peut être considérés comme une généralisation du cadre de la révision itérée.
Le dernier postulat définissant les opérateurs d'amélioration, **(I11)**, est très fort, puisqu'il détermine de façon unique les pré-ordres associés aux amélioration. Cela suggère qu'il serait intéressant d'étudier des alternatives à **(I11)**, afin de définir d'autres opérateurs d'amélioration faible intéressant.

Références

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[2] R. Booth and T. Meyer. Admissible and restrained revision. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 26 :127–151, 2006.

[3] Richard Booth and Thomas Meyer. On the dynamics of total preorders : Revising abstract interval orders. In Khaled Mellouli, editor, *ECSQARU*, volume 4724 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 42–53. Springer, 2007.

[4] Richard Booth, Thomas Meyer, and Ka-Shu Wong. A bad day surfing is better than a good day working : How to revise a total preorder. In Patrick Doherty, John Mylopoulos, and Christopher A. Welty, editors, *KR*, pages 230–238. AAAI Press, 2006.

[5] C. Boutilier. Iterated revision and minimal change of conditional beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, 25(3) :262–305, 1996.

[6] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89 :1–29, 1997.

[7] H.P.V. Ditmarsch. Prolegomena to dynamic logic for belief revision. *Synthese*, 147(2) :229–275, 2005.

[8] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT Press, 1988.

[9] S. O. Hansson. What's new isn't always best. *Theoria*, pages 1–13, 1997. Special issue on non-prioritized belief revision.

[10] Sven Ove Hansson. *A Textbook of Belief Dynamics. Theory Change and Database Updating*. Kluwer, 1999.

[11] Andreas Herzig, Sébastien Konieczny, and Laurent Perussel. On iterated revision in the agm framework. In *Seventh European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'03)*, pages 477–488, 2003.

[12] Y. Jin and M. Thielscher. Iterated belief revision, revised. *Artificial Intelligence*, 171 :1–18, 2007.

[13] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.

[14] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. A framework for iterated revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 10(3-4) :339–367, 2000.

[15] N. Laverny and J. Lang. From knowledge-based programs to graded belief-based programs, part i : On-line reasoning*. *Synthese*, 147(2) :277–321, 2005.

[16] D. Lehmann. Belief revision, revised. In *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1534–1540, 1995.

[17] A. C. Nayak. Iterated belief change based on epistemic entrenchment. *Erkenntnis*, 41 :353–390, 1994.

[18] H. Rott. Shifting priorities : Simple representations for 27 iterated theory change operators. *Modality matters : twenty-five essays in honour of Krister Segerberg, Uppsala Philosophical Studies*, 35 :359–384, 2006.

[19] W. Spohn. Ordinal conditional functions : A dynamic theory of epistemic states. In W. L. Harper and B. skyrms, editors, *Causation in Decision : Belief Change and Statistics*, pages 105–134. Kluwer, 1988.

[20] M. A. Williams. Transmutations of knowledge systems. In *Proceedings of the Fourth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 619–629, 1994.