Fusion de bases de croyances à partir de distances : modèle général et complexité algorithmique

Distance-based merging : A general framework and some complexity results

Sébastien Konieczny[1] Jérôme Lang[2] Pierre Marquis[1]

[1] Centre de Recherche en Informatique de Lens
SP 16 - Rue de l'Université - Université d'Artois - 62300 Lens
{konieczny,marquis}@cril.univ-artois.fr

[2] Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
118 route de Narbonne - Université Paul Sabatier - 31062 Toulouse
lang@irit.fr

Résumé

La fusion de bases de croyances a donné lieu à une littérature importante au cours de ces dernières années. Nous en donnons ici un modèle très général fondé sur l'utilisation de distances et nous montrons que la plupart des approches proposées dans la littérature en sont des instances. Ensuite, nous étudions les propriétés calculatoires des opérateurs de fusion : nous donnons d'abord deux résultats généraux qui montrent que, sous des hypothèses peu restrictives, le problème de l'inférence pour la famille des opérateurs à partir de distances est seulement au premier niveau de la hiérarchie polynomiale ; puis nous appliquons ces résultats à certains opérateurs particuliers, et identifions ainsi la complexité du problème de l'inférence pour ceux-ci. Enfin, nous étudions les propriétés logiques des opérateurs de fusion à partir de distances.

Mots Clef

Représentation des connaissances, fusion, complexité.

Abstract

The importance of belief merging is reflected by the abundance of the literature about it for the last years. In the following, a model for belief merging based on distances is introduced; many merging operators already pointed out so far can be recovered as specific instances of this model. We investigate the computational aspects of such distance-based operators and give two general results showing that the complexity of inference for them is at the first level of the polynomial hierarchy (under very weak assumptions). Then some specific distance-based operators are considered and their complexity is identified. Finally, distance-based merging operators are investigated from the logical point of view.

Keywords

Knowledge representation, merging, computational complexity.

1 Introduction

La fusion de croyances (et également de préférences) est un problème crucial dans beaucoup de domaines de l'IA. Par exemple, dans les systèmes multi-agents, lorsque des agents doivent prendre une décision collective ou déterminer quelles sont les croyances du groupe ; en robotique, lorsqu'un agent autonome doit prendre une décision à partir de données contradictoires fournies par plusieurs capteurs ; dans les systèmes experts, lorsque l'on désire combiner les croyances de plusieurs experts, etc.

Nous donnons d'abord une définition générale de l'ensemble des données d'un problème de fusion d'informations issues de n sources différentes :

- un *ensemble de croyances* $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$.
  E est un multi-ensemble fini de bases de croyances, où chaque *base de croyances* K_i ($i \in 1 \ldots n$) est un multi-ensemble fini de formules propositionnelles et représente les croyances de la source i.

- des contraintes d'intégrité IC.
  IC est une formule propositionnelle représentant

une connaissance commune sur laquelle toutes les sources s'accordent (contraintes physiques du système, normes, etc.).

Cette définition de l'entrée d'un problème de fusion a une portée suffisamment vaste pour s'appliquer à plusieurs familles distinctes d'opérateurs, et minimale dans le sens que pour des applications particulières, des données supplémentaires peuvent être requises.
Le problème posé par la fusion de E étant donné IC est de caractériser une formule $\triangle_{IC}(E)$, considérée comme la croyance globale du groupe formé par les n sources fusionnées.
Récemment, plusieurs familles d'opérateurs de fusion ont été définies et caractérisées logiquement [24, 19, 17, 12, 13, 3]. Certains de ces opérateurs [24, 19, 17, 13] – appelés parfois "model-based" – consistent à définir les modèles de $\triangle_{IC}(E)$ comme les modèles préférés de IC selon un critère dépendant de E. Généralement, cette information préférentielle est représentée par un pré-ordre total sur les interprétations, et elle est usuellement induite par une notion de distance $d(\omega, E)$ entre une interprétation ω et un ensemble de croyances E. Un point commun de ces opérateurs est que chaque base de croyances K_i est considéré comme une formule propositionnelle unique (et non un multi-ensemble de formules), ce qui a deux conséquences importantes : (i) une seule étape d'agrégation a lieu et (ii) ces opérateurs ne permettent pas un traitement non trivial de bases de croyances incohérentes (voir l'exemple 1) : lorsqu'une base de croyances est contradictoire, les opérateurs de cette famille ne tiennent pas compte de cette base.
Une seconde famille d'opérateurs (appelés parfois "syntax-based") [1, 2, 10] considère cette fois que les bases de croyances K_i sont des multi-ensembles finis de formules, et la fusion est basée sur la sélection de certains sous-ensembles cohérents de $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Cela permet de prendre en compte des bases de croyances contradictoires et d'introduire une information préférentielle additionnelle dans le processus de fusion[1]. Par contre, puisque ces opérateurs sont basés sur $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$, la plupart ne tiennent pas du tout compte de la "popularité" des croyances explicites lors de la fusion (le fait qu'une formule φ est crue par une seule source ou par les n sources ne fait généralement pas de différence, ce qui est parfois contre-intuitif, en particulier lorsqu'aucun critère de préférence entre sources n'est disponible)[2].
Nous proposons dans ce papier un nouveau cadre pour définir les opérateurs de fusion de croyances propositionnelles. Nous définissons une famille d'opérateurs paramétrés par une (pseudo-)distance d entre interprétations et par deux fonctions d'agrégation f et g. Ces paramètres sont utilisés pour définir en deux temps une distance entre une interprétation et un ensemble de croyances. Les modèles de la fusion de E sous les contraintes d'intégrité IC sont exactement les modèles de IC qui sont les plus proches de E selon la distance induite. La première étape d'agrégation permet de prendre en compte la syntaxe des bases de croyance dans le processus de fusion (et donc, en particulier, d'utiliser les bases incohérentes de manière satisfaisante). La seconde prend en compte les informations fournies par chacune des sources. C'est dans cette seconde étape qu'apparait l'aspect agrégation multi-sources proprement dit.
L'intérêt de ce travail est multiple. En premier lieu, nous montrons que le cadre proposé est suffisamment général pour capturer bon nombre des opérateurs de fusion existants comme cas particuliers.
Ensuite, nous montrons que le problème de l'inférence à partir de $\triangle_{IC}(E)$ reste au premier niveau de la hiérarchie polynomiale (si d, f et g sont calculables en temps polynômial) pour tous les opérateurs de fusion à partir de distances. Ainsi, augmenter la généralité des opérateurs dits "model-based" (à une étape), comme nous le faisons ici, avec une étape d'agrégation supplémentaire, ne se traduit pas par une augmentation de la complexité du problème d'inférence associé.
Nous identifions également la complexité de quelques opérateurs existants, obtenus en fixant dans notre modèle des distances et fonctions d'agrégation spécifiques.
Enfin, nous montrons qu'en imposant très peu de conditions sur les paramètres, plusieurs propriétés logiques essentielles pour les opérateurs de fusion sont immédiatement satisfaites par les opérateurs à partir de distances.
Les preuves complètes des résultats donnés dans cet article sont dans [11].

2 Préliminaires

On considère un langage propositionnel $PROP_{PS}$, construit à partir d'un ensemble fini PS de symboles propositionnels et les constantes $\top$ (vrai) et $\bot$ (faux) de la manière usuelle. Une interprétation est une fonction totale de PS dans $BOOL = \{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation ω est un modèle d'une formule φ, noté $\omega \models \varphi$, si et seulement si elle la rend vrai. $Mod(\varphi)$ dénote l'ensemble des modèles de la formule φ, i.e. $Mod(\varphi) = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \models \varphi\}$.
Une base de croyances K_i est cohérente si et seulement si la conjonction $\bigwedge K_i$ de ses formules est cohérente. De même, un ensemble de croyances E est cohérent si et seulement si la conjonction $\bigwedge E$ de ses bases de croy-

[1] En fait, tout comme pour la révision de croyances, donner de l'importance à la syntaxe des K_i est une manière de spécifier (implicitement, mais de façon économique vue la représentation) que les croyances explicites sont plus importantes que les croyances dérivées [20, 8].

[2] Dans [10], l'utilisation de *fonctions de sélection* est proposée pour résoudre ce problème.

ances est cohérente. Deux bases de croyances K_1 et K_2 sont dites logiquement équivalentes ($K_1 \equiv K_2$) si et seulement si $\bigwedge K_1 \equiv \bigwedge K_2$. Deux ensembles de croyances E_1 et E_2 sont dits équivalents ($E_1 \equiv E_2$) si et seulement s'il existe une bijection entre E_1 et E_2 telle que chaque base de croyances de E_1 est logiquement équivalente à son image dans E_2. $\sqcup$ dénote l'union sur les multi-ensembles. Soit un ensemble de croyances E, E^k dénote le multi-ensemble obtenu en faisant l'union de E avec lui-même k fois.

Les résultats de complexité que nous donnons dans cet article font mention de certaines classes de complexité, en particulier Δ_2^p et Θ_2^p [7, 25] de la hiérarchie polynomiale PH, ainsi que la classe BH_2 de la hiérarchie booléenne (voir [22] pour plus de détails). Etant donné un problème A, nous dénotons par $\overline{\text{A}}$ le problème complémentaire de A. Nous supposons que le lecteur connait les classes P, NP et coNP et nous introduisons maintenant les trois classes suivantes situées au premier niveau de la hiérarchie polynomiale :

- BH_2 (connue aussi sous le nom de DP) est la classe de tous les langages L tels que $L = L_1 \cap L_2$, où L_1 est dans NP et L_2 dans coNP. Le problème canonique BH_2-complet est SAT$-$UNSAT : un couple de formules $\langle \varphi, \psi \rangle$ est dans SAT$-$UNSAT si et seulement si φ est cohérente et ψ ne l'est pas.

- $\Delta_2^p = \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$ est la classe de tous les langages reconnaissables en temps polynomial par une machine de Turing déterministe munie d'un oracle[3] NP, où un oracle NP résout une instance quelconque d'un problème dans NP en temps unité.

- $\Theta_2^p = \Delta_2^p[\mathcal{O}(log\ n)]$ est la classe de tous les langages reconnaissables en temps polynomial par une machine de Turing déterministe utilisant un nombre d'appels à un oracle NP *borné par une fonction logarithmique* en la taille de l'entrée.

On peut noter les inclusions suivantes :
$$\mathsf{NP} \cup \mathsf{coNP} \subseteq \mathsf{BH}_2 \subseteq \Theta_2^p \subseteq \Delta_2^p \subseteq \mathsf{PH}.$$

3 Fusion à partir de distances

3.1 Cadre général

Définir un opérateur de fusion dans notre cadre consiste simplement à fixer trois paramètres : une distance d et deux fonctions d'agrégation f et g.

Définition 1 (distances) *Soit d une fonction de $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ dans $I\!N$ telle que $\forall\ \omega_1,\ \omega_2 \in \mathcal{W}$:*

1. *$d(\omega_1, \omega_2) = d(\omega_2, \omega_1)$, et*
2. *$d(\omega_1, \omega_2) = 0$ ssi $\omega_1 = \omega_2$.*

On appelle un tel d une distance *entre interprétations*[4]. *d induit directement une distance entre une interprétation ω et une formule φ :*
$$d(\omega, \varphi) = \min_{\omega' \models \varphi} d(\omega, \omega').$$

Définition 2 (fonctions d'agrégation) *Soit f une fonction qui associe un entier naturel à chaque tuple fini d'entiers naturels, non-décroissante en chaque argument (i.e. si $x \leq y$, alors $f(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$), telle que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et telle que $f(x) = x$. f est appelée* fonction d'agrégation [5].

Nous pouvons à présent définir les opérateurs de fusion à partir de distances :

Définition 3 (fusion à partir de distances) *Soit une distance d et soient deux fonctions d'agrégation f et g. Pour chaque ensemble de croyances $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ et chaque base de contraintes d'intégrité IC, $\triangle_{IC}^{d,f,g}(E)$ est défini de la façon suivante :*

$$Mod(\triangle_{IC}^{d,f,g}(E)) = \{\omega \in Mod(IC) \mid d(\omega, E) \text{ est minimal}\}$$

$$\text{où} \quad d(\omega, E) = g(d(\omega, K_1), \ldots, d(\omega, K_n))$$

$$\text{et pour chaque } K_i = \{\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,n_i}\},\quad d(\omega, K_i) = f(d(\omega, \varphi_{i,1}), \ldots, d(\omega, \varphi_{i,n_i})).$$

Par exemple, les formules apparaissant dans une base de croyances K_i peuvent être :

- *les informations fournies par la source i :* lorsque l'on fusionne les croyances provenant de différentes sources ou experts ;

- *des informations concernant un certain critère i :* lorsque l'on évalue des possibilités selon différents critères ;

- *des buts élémentaires exprimées par un agent i :* lorsque l'on fusionne des préférences individuelles dans un problème de choix collectif – voir [15]. Il ne s'agit plus alors de *croyances* mais de *préférences* (ce qui ne nous empêche pas d'utiliser les mêmes opérateurs de fusion).

[3] Le nombre d'appels à l'oracle réalisés par la machine (au plus un par unité de calcul) est nécessairement polynomialement borné.

[4] Il y a un petit abus de langage ici puisque d n'est qu'une pseudo-distance (l'inégalite triangulaire n'est pas requise).

[5] Il faut noter ici qu'une fonction d'agrégation peut prendre un nombre quelconque (fini) d'arguments. Plus formellement, une "fonction" f est une famille $f = \{f_n | n \in I\!N\}$ de fonctions n-aires de $I\!N^n$ dans $I\!N$. Par abus de notation, nous écrivons $f(x_1, \ldots, x_n)$ au lieu de $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ puisque cela ne peut jamais prêter à confusion.

La raison pour laquelle nous utilisons deux fonctions d'agrégation (généralement distinctes) f et g est que les deux étapes d'agrégation sont de nature très différentes. f agrège les scores par rapport aux informations élémentaires (explicites) contenues dans chaque base K_i, alors que g agrège les "f-scores" provenant des différentes sources/critères/agents. Il y a donc deux façons de revenir à partir de ce cadre à un opérateur "classique" à une étape : soit en choisissant des bases de croyances singleton (ou, ce qui est équivalent, en faisant la conjonction des formules des bases avant la fusion), ce qui rend f inutile (sur ce point voir [14] et [15]), soit en ne considérant qu'une seule base de croyances, ce qui rend g inutile.
Le point intéressant est que très peu de conditions sont imposées sur d, f et g, donc beaucoup de distances et de fonctions d'agrégation différentes peuvent être utilisées. On demande souvent à f et g d'être symétriques (c'est-à-dire que toutes les croyances (formules) d'une base ont la même importance et que toutes les bases ont la même importance dans l'ensemble de croyances). Mais ceci n'est pas obligatoire et il peut être utile de déroger à cette règle lorsque des informations préférentielles supplémentaires sont disponibles, comme la fiabilité relative des bases de croyances, par exemple.
Contrairement aux opérateurs "model-based" usuels, notre définition permet aux bases de croyances incohérentes d'être considérées d'une manière non triviale dans le processus de fusion.

Exemple 1 *Supposons par exemple que nous souhaitions fusionner $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ sous les contraintes d'intégrité $IC = \top$.*

- $K_1 = \{a, b, c, a \Rightarrow \neg b\}$,
- $K_2 = \{a, b\}$,
- $K_3 = \{\neg a, \neg b\}$,
- $K_4 = \{a, a \Rightarrow b\}$.

Les opérateurs "model-based" ne peuvent utiliser les informations provenant des bases de croyances incohérentes : toute base incohérente est éliminée. Cela peut conduire à perdre de l'information utile, en particulier celle qui n'est mise en jeu dans aucune contradiction de la base. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, K_1 indique que c est vrai et, puisque cette information n'intervient dans aucune contradiction, il est a priori raisonnable de faire confiance à K_1 à propos de c. Or, K_1 est contradictoire. De ce fait, K_1 toute entière n'est pas prise en compte dans la fusion si un opérateur "model-based" est utilisé. Par exemple, avec la distance de Hamming entre les interprétations, l'opérateur $\triangle^{\Sigma}$ [24, 19, 13] donne une base de croyances dont les modèles sont $\{a, b, \neg c\}$ et $\{a, b, c\}$ et l'opérateur $\triangle^{Gmax}$ [13] donne une base qui a comme modèles $\{\neg a, b, \neg c\}$, $\{\neg a, b, c\}$, $\{a, \neg b, \neg c\}$, et $\{a, \neg b, c\}$. Dans ces deux cas, on ne peut rien conclure à propos de c, ce qui est contre-intuitif puisque aucun argument contre le fait que c soit vrai ne peut être trouvé dans les bases de croyances.
Les opérateurs "syntax-based" permettent d'exploiter de telles bases de croyances incohérentes mais, en contre partie, ils ne permettent pas de prendre en compte la distribution de l'information dans les bases. Considérons par exemple les deux opérateurs "syntax-based" standard, choisissant les sous-ensembles maximaux cohérents de $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ (pour le premier la maximalité est entendue selon l'inclusion et pour le second selon la cardinalité [2]). Sur l'exemple précédent, le premier retourne une base de croyances équivalente à c et le second une base équivalente à $c \wedge \neg a$. Donc a ne peut être déduit avec aucun de ces opérateurs alors que trois des quatre bases indiquent que a est vrai.
Nos opérateurs à partir de distances permettent d'éviter ces deux écueils.

3.2 Quelques exemples d'opérateurs

Nous allons à présent instancier notre cadre pour donner des exemples d'opérateurs de fusion à partir de distances s'appuyant sur des distances et des fonctions d'agrégation faciles à définir.

Définition 4 (quelques distances) *Soient deux interprétations ω_1, $\omega_2 \in \mathcal{W}$.*

- *La* distance drastique d_D *est définie par* $d_D(\omega_1, \omega_2) = 0$ *si* $\omega_1 = \omega_2$, $d_D(\omega_1, \omega_2) = 1$ *sinon.*
- *La* distance de Hamming d_H *est définie par* $d_H(\omega_1, \omega_2) = |\{x \in PS \mid \omega_1(x) \neq \omega_2(x)\}|$.
- *Soit* $q : PS \rightarrow \mathbb{N}^*$. *La* fonction de Hamming pondérée d_{H_q} *induite par* q *est définie par* $d_{H_q}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{x \in PS \mid \omega_1(x) \neq \omega_2(x)} q(x)$.

Ces distances satisfont les conditions imposées par la définition 3.
La distance de Hamming est la distance généralement utilisée pour les opérateurs "model-based"[6]. Elle est très facile à définir et assez intuitive, mais elle est très sensible au langage de représentation du problème, i.e. au choix des variables propositionnelles. Les distances de Hamming pondérées ont un sens lorsque certaines variables propositionnelles sont plus importantes que d'autres.

Définition 5 (quelques fonctions d'agrégation)

- *Soit* $q : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \mathbb{N}^*$ *telle que* $q(1) = 1$ *si* $n = 1$. *La somme pondérée* WS_q *induite par* q *est définie par* $WS_q(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} q(i)e_i$.

[6] Cette distance est également appelée *distance de Dalal* [6] dans la littérature sur la révision des croyances.

- *Soit $q : \{1, \ldots, n\} \rightarrow I\!N$ telle que $q(1) = 1$ si $n = 1$ et $q(1) \neq 0$ dans tous les cas. La somme pondérée ordonnée OWS_q induite par q est définie par $OWS_q(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} q(i)e_{\sigma(i)}$ où σ est une permutation de $\{1 \ldots n\}$ telle que $e_{\sigma(1)} \geq e_{\sigma(2)} \cdots \geq e_{\sigma(n)}$.*

q est une *fonction de poids*, qui donne pour chaque formule φ_i (resp. chaque base de croyances K_i) d'index i son poids $q(i)$ dénotant la fiabilité de la formule (resp. la base de croyances). Lorsque q est normalisée et la condition $q(1) = 1$ si $n = 1$ est relaxée, la dernière famille est connue en décision multicritère comme *"Ordered Weighted Averages"* (OWA) ("Moyennes Pondérées Ordonnées") [26]. Lorsque $q(i) = 1$ pour tout $i \in 1 \ldots n$, WS_q est la somme usuelle (OWS_q également). Lorsque $q(1) = 1$ et $q(2) = \ldots = q(n) = 0$ alors $OWS_q(e_1, \ldots, e_n) = max(e_1, \ldots, e_n)$. Enfin, si M est un majorant des scores, i.e. pour tout $(e_1, \ldots, e_n)$ on a $e_i < M$[7], et si l'on définit $q(i) = M^{n-i}$ pour tout i, alors le pré-ordre sur les vecteurs de scores induit par OWS_q est exactement le pré-ordre *leximax* (noté *lex*)[8].

Toutes ces fonctions satisfont les contraintes imposées par la définition 3 ; elles sont toutes symétriques à part la *somme pondérée* (sauf si q est uniforme). On peut trouver beaucoup d'autres choix de fonctions pour f et g dans la littérature sur la décision multi-critère (voire également en décision de groupe). En faisant varier d, f et g dans ces ensembles, nous allons obtenir des opérateurs dont certains sont déjà connus et sont donc retrouvés comme cas particuliers de notre cadre, et les autres sont de nouveaux opérateurs.

Ainsi, d_D et d_H permettent de retrouver beaucoup d'opérateurs "model-based" et "syntax-based". $\triangle^{d_D,max,max}$ est l'opérateur de fusion basique, donnant $\bigwedge E \wedge IC$ si cohérent et IC sinon. $\triangle^{d_D,max,sum}$ est l'opérateur de fusion drastique, qui revient à sélectionner les modèles de IC qui satisfont le plus grand nombre de bases de croyances de E. Il est équivalent à l'opérateur de fusion drastique défini dans [10] lorsque l'on travaille avec des bases closes déductivement.

$\triangle^{d_D,sum,sum}$ donne l'opérateur intersection défini dans [10]. $\triangle^{d_D,WS_q,max}$ correspond à l'opérateur utilisé dans [15] dans le domaine de la décision de groupe. Lorsque l'on travaille avec des bases de croyances singletons[9] – rappelons que dans ce cas f n'intervient pas – tous les opérateurs $\triangle^{d_H,f,max}$ donnent l'opérateur $\triangle^{Max}$ [24], tous les opérateurs $\triangle^{d_H,f,sum}$ donnent l'opérateur $\triangle^{\Sigma}$ [24, 19, 13], et tous les opérateurs $\triangle^{d_H,f,lex}$ donnent l'opérateur $\triangle^{GMax}$ [13]. $\triangle^{d_D,f,WS_q}$ est un opérateur de fusion à pénalités (où l'on minimise la somme des pénalités $q(i)$ attachées aux bases K_i)[23], et $\triangle^{d_D,WMAX_q,WS_q}$ (où $WMAX_q(x_1, \ldots, x_n) = \max_{i=1\ldots n} \min(q(i), x_i)$) donne un opérateur de fusion possibiliste [3].

Parmi les nouveaux opérateurs obtenus figurent par exemple $\triangle^{d_D,sum,sum}$ et $\triangle^{d_D,sum,lex}$ qui permettent de traiter de façon satisfaisante l'exemple 1. En effet, sur cet exemple, l'opérateur $\triangle^{d_D,sum,sum}$ donne une base dont le seul modèle est $\{a, b, c\}$, et l'opérateur $\triangle^{d_D,sum,lex}$ retourne une base dont les modèles sont $\{\neg a, b, c\}$ et $\{a, \neg b, c\}$. Donc, avec ces deux opérateurs, on peut déduire que c est vrai du résultat de la fusion. Ces deux opérateurs illustrent de fait deux comportements typiques pour la fusion. Le premier est un opérateur majoritaire : puisque a est cru par trois des quatre bases, a est cru par le résultat de la fusion. Le second est un opérateur d'arbitrage, plus consensuel, il donne comme résultat que soit a, soit b est vrai, pour être le plus proche possible de chacune des bases de croyances. On observe ainsi que des fonctions comme la fonction purement utilitariste *somme* ou *somme pondérée* permettent des compensations entre les scores (et donnent donc des opérateurs majoritaires), alors que les fonctions égalitaristes comme *max* ou *lex* l'interdisent.

4 Complexité algorithmique

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la complexité de l'interrogation (au sens de l'inférence classique) à partir d'une base fusionnée. Il convient de préciser que ce que l'on entend ici par base fusionnée n'est pas forcément une représentation explicite de celle-ci par une formule logique mais plutôt une caractérisation implicite à partir de E et IC. En effet, l'objectif de la fusion est fondamentalement de *décrire l'ensemble des conséquences logiques de la base fusionnée*, c'est-à-dire d'être capable de déterminer pour toute formule propositionnelle α si α appartient ou pas à cet ensemble. Cela ne signifie pas nécessairement qu'il faille calculer une formule dont la clôture déductive est cet ensemble.

Si elle n'est pas la seule possible, et même si elle n'est généralement pas indiquée, cette dernière approche reste néanmoins envisageable dans certains cas. Elle s'apparente aux approches de type compilation [4] dans la mesure où elle consiste à pré-traiter E et IC pour construire une forme compilée (ici, une formule propositionnelle) qui admet les mêmes conséquences logiques que le résultat de la fusion de E étant donné IC. Les avantages et les inconvénients usuels de ce genre d'approche (concernant les compromis temps/espace possibles) s'appliquent ici. Ainsi, comme les résultats de complexité donnés ci-après le montrent (*c.f.* proposition 2), l'interrogation est plus

---

[7] Par exemple, lorsque $d = d_H$ et $e_i = d(\omega, \varphi_i)$, $M = |PS| + 1$ convient.

[8] C'est-à-dire que l'on a $OWS_q(e_1, \ldots, e_n) \geq OWS_q(e'_1, \ldots, e'_n)$ ssi $(e_{\sigma(1)} > e'_{\sigma'(1)})$ ou $(e_{\sigma(1)} = e'_{\sigma'(1)}$ et $e_{\sigma(2)} > e'_{\sigma'(2)})$ ou etc.

[9] Ou si l'on remplace chaque K_i par $\{\bigwedge K_i\}$ avant la fusion.

facile[10] quand on part d'une forme compilée (elle est alors forcément dans coNP) que lorsqu'aucune compilation n'est réalisée. En contrepartie, il n'y a aucune garantie pour que la taille de la forme compilée soit dans le pire des cas polynomiale dans la taille $|E|+|IC|$ de l'entrée (et dans ce cas de figure, une telle compilation n'est pas forcément productive). Plus généralement, si le résultat de la fusion à partir de distances de E étant donné IC pouvait toujours être représenté par une formule équivalente dont la taille est polynomiale en $|E| + |IC|$ alors on aurait $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P/poly}$ [5], ce qui est considéré comme peu vraisemblable puisque cela entraînerait l'effondrement de la hiérarchie polynomiale au deuxième niveau [9].
Pour en revenir à la complexité de l'interrogation, nous avons obtenu le résultat très général suivant pour les opérateurs à partir de distances :

Proposition 1 *Soit $\triangle^{d,f,g}$ un opérateur de fusion à partir de distances, soit un ensemble de croyances E et soient deux formules IC et α :*

1. *Si d, f et g sont calculables en temps polynomial, alors déterminer si $\triangle_{IC}^{d,f,g}(E) \models \alpha$ est dans Δ_2^p.*

2. *Si d, f et g sont calculables en temps polynomial et bornées polynomialement, alors déterminer si $\triangle_{IC}^{d,f,g}(E) \models \alpha$ est dans Θ_2^p.*

Ces résultats dérivent des lemmes suivants :

- Soit k un entier naturel ; si d, f et g sont calculables en temps polynomial alors le problème de déterminer si $\min_{\omega \models IC} d(\omega, E) \leq k$ est dans NP.

- Si pour tout $\omega \in \mathcal{W}$ la valeur de $d(\omega, E)$ est bornée par la valeur $h(|E| + |IC|)$ (où h est une fonction à valeur dans $I\!N$) alors la valeur $\min_{\omega \models IC} d(\omega, E)$ peut être calculée en utilisant $\lceil \log h(|E| + |IC|) \rceil$ appels à un oracle NP.

Un point important ici est donc que la généralisation de la définition des opérateurs "model-based" que nous avons opérée pour obtenir les opérateurs à partir de distances en ajoutant une étape d'agrégation ne se traduit pas par un saut dans la complexité pour le problème d'inférence associé (il reste au premier niveau de PH). En particulier, les fonctions d'agrégation habituellement utilisées en décision multi-critère sont toutes calculables polynomialement, ce qui rend le résultat de complexité ci-dessus utilisable lorsque l'on instancie f et g avec de telles fonctions.
Nous avons également identifié la complexité du problème de l'inférence pour différents choix de d, f et g.

[10] Sous les hypothèses usuelles de la théorie de la complexité.

Proposition 2 *Etant donnés un ensemble de croyances E et deux formules IC et α de $PROP_{PS}$, la complexité de $\triangle_{IC}^{d,f,g}(E) \models^? \alpha$ est donnée dans les tables 1, 2 et 3*[11].

f/g	max	sum	lex	WS_q	OWS_q
max	BH_2-c	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Θ_2^p-c
sum - lex	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
WS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
OWS_q	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c

Table 1: Complexité ($d = d_D$)

f/g	max	sum	lex	WS_q - OWS_q
max	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
sum	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
lex	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
WS_q - OWS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c

Table 2: Complexité ($d = d_H$)

f/g	max	sum	lex	WS_q - OWS_q
max	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
sum	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
lex	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
WS_q - OWS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c

Table 3: Complexité ($d = d_{H_q}$)

Ces résultats méritent plusieurs commentaires. Tout d'abord, les résultats d'appartenance à Δ_2^p sont des conséquences de la proposition 1, puisque toutes les distances et fonctions d'agrégation utilisées sont calculables en temps polynomial. Ceux d'appartenance à Θ_2^p sont aussi des conséquences de la proposition 1, hormis les cas où l'une des deux fonctions d'agrégation est lex ou une fonction OWS_q (cas de la distance drastique) pour lesquels l'appartenance à Θ_2^p est un peu plus délicate à prouver. Enfin, lorsque $f = g = max$, on retrouve l'opérateur de fusion basique et l'appartenance à BH_2 est facile.
Dans le cas $d = d_{H_q}$, la Δ_2^p-difficulté reste valable dès que $E = \{K\}$, K est un singleton $\{\varphi\}$ et φ est une conjonction de variables (ici, f et g ne jouent aucun rôle dans le calcul de la distance à E). La difficulté est montrée par réduction polynomiale depuis MAX-SAT-ASG$_{odd}$ [25].
Dans le cas $d = d_H$, la Δ_2^p-difficulté reste valable lorsque toutes les croyances sont des conjonctions de

[11] Si X est une classe de complexité, X-c signifie X-complet

variables, cela est obtenu par réduction depuis MAX-SAT-ASG$_{odd}$. Les résultats de Θ_2^p-difficulté restent valables lorsque E est atomique et sont déduits facilement des résultats de complexité de l'inférence à partir d'une base révisée selon l'opérateur de révision de Dalal [6] (cf. théorème 6.9 de [7]).

Enfin, dans le cas $d = d_D$, le résultat de Δ_2^p-difficulté est dérivé de celui de la révision syntaxique *linear base* (théorème 5.9 de [21]) et les résultats de Θ_2^p-difficulté sont dérivés de la complexité de la révision syntaxique à maximisation de la cardinalité (théorème 5.14 de [21]). Le résultat de BH_2-difficulté peut être rapidement dérivé par réduction depuis SAT-UNSAT.

Il est à noter que le choix de la distance d considérée a une influence importante sur les résultats de complexité. Ainsi, lorsque $d = d_H$ ou $d = d_{H_q}$, les résultats de complexité coincident toujours lorsque f (ou g) est une fonction WS_q ou une fonction OWS_q. Ceci explique pourquoi nous avons fusionné les lignes et colonnes correspondantes dans les tables 3 et 2. Cela n'est plus le cas lorsque la distance drastique d_D est prise en compte. Dans cette situation, lorsqu'une seule étape d'agrégation est effectuée, *lex* induit le même résultat que *sum* ; c'est la raison pour laquelle nous avons fusionné les deux lignes correspondantes. Enfin, on notera que les résultats de complexité diffèrent pour $\triangle_{IC}^{d_D,sum,lex}$ et $\triangle_{IC}^{d_D,lex,sum}$ (alors que pour les autres distances considérées, f et g jouent des rôles symétriques quant à la complexité des problèmes d'inférence associés).

Ces divers résultats fournissent comme corollaires immédiats la complexité du problème de l'inférence pour de nombreux opérateurs "model-based" de la littérature, ce qui n'avait pas encore été fait[12]. Ces résultats constituent donc un apport supplémentaire de ce travail.

On peut également observer qu'alors que la complexité de nos opérateurs à partir de distances n'est pas très élevée (au premier niveau de la hiérarchie polynomiale au plus), trouver des restrictions traitables semble être une tâche difficile puisque ces résultats de complexité perdurent dans des cadres très simplifiés.

Finalement, nos résultats montrent aussi que plusieurs opérateurs de fusion "syntax-based" (basés sur l'inclusion ensembliste au lieu de la cardinalité et situés au deuxième niveau de la hiérarchie polynomiale) ne peuvent pas être codés en temps polynomial sous forme d'opérateurs à partir de distances (à moins que la hiérarchie polynomiale ne s'effondre). Notre cadre fournit donc une vision différente des opérateurs de fusion que la dichotomie habituelle "model-based"/"syntax-based".

[12] Bien que $(\triangle_{IC}^{d_H,sum,sum}(E) \models^? \alpha) \in \Delta_2^p$ puisse être retrouvé à partir de résultats de complexité de [18].

5 Caractérisation axiomatique des opérateurs

Donner la définition de nouveaux opérateurs n'est pas suffisant si l'on n'indique pas leurs propriétés logiques. En effet, pour pouvoir choisir tel ou tel opérateur pour une application précise, il faut pouvoir avoir une idée du comportement de cet opérateur et pouvoir vérifier facilement qu'il obéit aux propriétés que l'on attend de lui.

Pour étudier les propriétés logiques de notre famille d'opérateurs, nous nous appuyons sur la caractérisation proposée dans [13] :

Définition 6 (opérateurs de fusion contrainte) *Soient les ensembles de croyances E, E_1, E_2, les bases de croyances cohérentes K_1, K_2 et les bases de contraintes IC, IC_1, IC_2. $\triangle$ est un opérateur de fusion contrainte ssi il satisfait les propriétés suivantes :*

(IC0) $\triangle_{IC}(E) \models IC$.

(IC1) *Si IC est cohérent, alors $\triangle_{IC}(E)$ est cohérent.*

(IC2) *Si $\bigwedge E$ est cohérent avec IC, alors $\triangle_{IC}(E) \equiv \bigwedge E \wedge IC$.*

(IC3) *Si $E_1 \equiv E_2$ et $IC_1 \equiv IC_2$, alors $\triangle_{IC_1}(E_1) \equiv \triangle_{IC_2}(E_2)$.*

(IC4) *Si $K_1 \models IC$ et $K_2 \models IC$, alors $\triangle_{IC}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_1$ est cohérent $\Rightarrow \triangle_{IC}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_2$ est cohérent.*

(IC5) $\triangle_{IC}(E_1) \wedge \triangle_{IC}(E_2) \models \triangle_{IC}(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) *Si $\triangle_{IC}(E_1) \wedge \triangle_{IC}(E_2)$ est cohérent, alors $\triangle_{IC}(E_1 \sqcup E_2) \models \triangle_{IC}(E_1) \wedge \triangle_{IC}(E_2)$.*

(IC7) $\triangle_{IC_1}(E) \wedge IC_2 \models \triangle_{IC_1 \wedge IC_2}(E)$.

(IC8) *Si $\triangle_{IC_1}(E) \wedge IC_2$ est cohérent, alors $\triangle_{IC_1 \wedge IC_2}(E) \models \triangle_{IC_1}(E)$.*

Dans [13], deux sous-classes particulières d'opérateurs de fusion contrainte sont définies. Les opérateurs majoritaires qui résolvent les conflits en tenant compte de la majorité, et les opérateurs d'arbitrage qui ont un comportement plus consensuel :

Définition 7 (majorité et arbitrage)

- *Un* opérateur majoritaire *est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :*

  (Maj) $\exists n \ \ \triangle_{IC}\,(E_1 \sqcup {E_2}^n) \models \triangle_{IC}(E_2)$.

- *Un* opérateur d'arbitrage *est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :*

f/g	max	sum	lex	WS_q	OWS_q
max	0-5,7-8,Arb	0-8,Maj,Arb		0-2,5-8,Maj	0-2,5,7-8
sum/lex	0-2,5,7-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5,7-8
$WS_q - OWS_q$	0-2,5,7-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5,7-8

Table 4: Propriétés logiques ($d = d_D$)

f/g	max	sum	lex	WS_q	OWS_q
max	0-2,5,7-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5,7-8
sum	0-2,5,7-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5,7-8
lex	0-2,5,7-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5,7-8
$WS_q - OWS_q$	0-2,5,7-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5-8,Arb	0-2,5-8,Maj	0-2,5,7-8

Table 5: Propriétés logiques ($d = d_H$ ou $d = d_{H_q}$)

$$\textbf{(Arb)} \quad \left. \begin{array}{l} \triangle_{IC_1}(K_1) \equiv \triangle_{IC_2}(K_2) \\ \triangle_{IC_1 \Leftrightarrow \neg IC_2}(K_1 \sqcup K_2) \equiv (IC_1 \Leftrightarrow \neg IC_2) \\ IC_1 \not\models IC_2 \\ IC_2 \not\models IC_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle_{IC_1 \vee IC_2}(K_1 \sqcup K_2) \equiv \triangle_{IC_1}(K_1).$$

On a le résultat général suivant :

Proposition 3 $\triangle^{d,f,g}$ *satisfait (IC0), (IC1), (IC2), (IC7), (IC8). Les autres propriétés ne sont pas satisfaites dans le cas général.*

Comme cela apparait clairement ci-dessus, tous les opérateurs à partir de distances ne sont pas des opérateurs de fusion contrainte, ce qui est tout a fait normal puisque nous souhaitons pouvoir prendre en compte la syntaxe des bases dans le processus de fusion.
Concernant les opérateurs définis au paragraphe 3.2, nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 4 $\triangle^{d,f,g}$ *satisfait les propriétés logiques résumées dans les tables 4 et 5. Pour des raisons d'espace, on note i pour le postulat (ICi).*

$\triangle^{d_D,max,sum}$ est le seul opérateur à satisfaire toutes les propriétés. Les autres opérateurs ne satisfont pas (IC3) et (IC4).
Ne pas satisfaire (IC3) (*indépendance à la syntaxe*) dans la plupart des cas n'est pas surprenant, puisque nous souhaitons que nos opérateurs tiennent compte de la syntaxe des bases (pour pouvoir tenir compte des bases inconsistantes par exemple).
(IC4) demande que, lorsque l'on fusionne deux bases de croyances, si le résultat est cohérent avec l'une des bases, alors il doit être cohérent avec l'autre. Ce postulat d'équité n'est bien sur pas indiqué lorsque l'on travaille avec des opérateurs non symétriques (il n'est par exemple pas satisfait avec $g = WS_q$). Ce postulat n'est pas satisfait non plus par les opérateurs utilisant la distance de Hamming puisque la cardinalité des bases a alors une influence sur la fonction f.

(IC5) et (IC6) correspondent aux conditions de Pareto en théorie du choix social et sont des conditions très importantes en ce qui concerne l'agrégation de préférences. Quasiment tous les opérateurs les satisfont (seuls les opérateurs avec $g = max$ ou OWS_q ne satisfont pas (IC6)).
Les deux tables 4 et 5 montrent que les opérateurs définis au paragraphe 3.2 ont tous de bonnes propriétés logiques. Mais, bien que plusieurs opérateurs satisfont exactement les mêmes propriétés logiques, il ne faut pas en déduire qu'ils ont exactement le même comportement. Nous allons à présent illustrer ces différences de comportement sur un exemple. Il ne permet pas de distinguer l'ensemble des opérateurs (il faudrait donner plusieurs exemples typiques pour cela), mais illustre l'éventail de réponses que l'on peut obtenir.

Exemple 2 *Supposons que nous souhaitions fusionner* $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ *sous les contraintes d'intégrité* $IC = \top$.

- $K_1 = \{a \wedge b \wedge c, a \Rightarrow \neg b\}$,
- $K_2 = \{a \wedge b\}$,
- $K_3 = \{\neg a \wedge \neg b, \neg b\}$,
- $K_4 = \{a, a \Rightarrow b\}$.

Les résultats de la fusion avec les différents opérateurs sont indiqués à la figure 1.

La variété des résultats obtenus montre bien la souplesse offerte par notre cadre. Cet exemple est intéressant puisqu'il montre plusieurs aspects liés aux opérateurs de fusion : la base K_1 est incohérente, mais c'est la seule à apporter une information sur c, il peut donc être raisonnable de penser que c est vrai. La base K_3 est logiquement équivalente à $\neg a \wedge \neg b$, mais remplacer K_3 par cette dernière formule donnerait des

$$
\begin{array}{rcl}
\triangle^{d_D,max,max} & = & \top \\
\triangle^{d_D,max,sum}, \triangle^{d_D,max,lex}, \triangle^{d_H,max,sum} & = & a \wedge b \\
\triangle^{d_D,sum,max} & = & \neg b \\
\triangle^{d_D,sum,sum} & = & (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b \wedge c) \\
\triangle^{d_D,sum,lex} & = & (\neg a \wedge \neg b) \\
\triangle^{d_D,lex,max}, \triangle^{d_D,lex,lex}, \triangle^{d_H,sum,max}, \triangle^{d_H,sum,lex}, \triangle^{d_H,lex,max}, \triangle^{d_H,lex,lex} & = & a \wedge \neg b \wedge c \\
\triangle^{d_D,lex,sum}, \triangle^{d_H,lex,sum} & = & a \wedge b \wedge c \\
\triangle^{d_H,max,max}, \triangle^{d_H,max,lex} & = & (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \\
\triangle^{d_H,sum,sum} & = & a \wedge c
\end{array}
$$

Figure 1: Exemple 2

résultats différents pour la fusion. La syntaxe est importante pour les opérateurs de fusion à base de distances puisqu'il faut considérer que les différentes formules d'une même base sont autant de raisons indépendantes de croire en une information. Cette syntaxe est importante pour des raisons de représentation, mais les opérateurs de fusion peuvent ensuite "choisir" d'utiliser ou non cette information. L'apport de cette approche est que, contrairement aux approches "model-based" classiques, le connecteur "," est différent du connecteur "$\wedge$".

6 Discussion

La contribution principale de cet article est un nouveau cadre pour la fusion propositionnelle. Il est suffisamment général pour capturer de nombreux opérateurs existants (autant les opérateurs "model-based" que "syntax-based") et permet de définir plusieurs opérateurs nouveaux (symétriques ou pas). Nous avons étudié à la fois les propriétés logiques et la complexité des opérateurs de fusion de notre cadre. Nous avons donné des résultats généraux sur le cadre, montrant qu'avec très peu de contraintes sur les trois paramètres définissant nos opérateurs, des opérateurs ayant de bonnes propriétés peuvent être obtenus. Nous avons également donné des résultats plus spécifiques en considérant des distances et des fonctions d'agrégation particulières.

Les résultats de complexité montrent en outre que certains opérateurs "syntax-based" (ceux basés sur l'inclusion) ne peuvent être capturés par les opérateurs de fusion à partir de distances. Ce travail permet donc de classer les opérateurs existants autrement qu'avec la dichotomie réductrice "model-based"/"syntax-based" habituelle.

Ce travail ouvre des perspectives multiples. L'une d'entre elles consiste à analyser les propriétés des opérateurs de fusion à base de distances obtenus en utilisant d'autres distances et fonctions d'agrégation. Ainsi, la distance de Hamming usuellement utilisée n'est pas le seul choix de distance possible. Supposons par exemple que l'on dispose d'un ensemble de formules d'intérêt (thèmes). Dans cette situation, la distance entre deux mondes ω_1 et ω_2 peut être définie comme le nombre de formules d'intérêt sur lesquelles ω_1 et ω_2 diffèrent, i.e. telles que l'une satisfait la formule et l'autre pas. Voir également [16] pour un exemple de distances basées sur les intégrales de Choquet.

Une autre perspective est d'identifier les propriétés nécessaires sur les fonctions d'agrégation pour obtenir les propriétés logiques voulues pour les opérateurs.

Enfin, du côté calculatoire, une perspective est de dresser une typologie des opérateurs à partir de distances de façon à discriminer ceux qui donnent lieu à des fusions logiquement compactables [5] (donc pour lesquelles une approche de type compilation est a priori appropriée).

Remerciements

Sébastien Konieczny et Pierre Marquis remercient l'IUT de Lens, la Région Nord/Pas-de-Calais ainsi que les Communautés Européennes pour leur support.

References

[1] C. Baral, S. Kraus, and J. Minker. Combining multiple knowledge bases. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 3(2):208–220, 1991.

[2] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8(1):45–71, 1992.

[3] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Encoding information fusion in possibilistic logic: a general framework for rational syntactic merging. In *Proc. of ECAI'2000*, pages 3–7, 2000.

[4] M. Cadoli and F.M. Donini. A survey on knowledge compilation. *AI Communications*, 10:137–150, 1997. Printed in 1998.

[5] M. Cadoli, F.M. Donini, P. Liberatore, and M. Schaerf. The size of a revised knowledge base. *Artificial Intelligence*, 115(1):25–64, 1999.

[6] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision: preliminary report. In *Proc. of AAAI'88*, pages 475–479, 1988.

[7] T. Eiter and G. Gottlob. On the complexity of propositional knowledge base revision , updates, and counterfactuals. *Artificial Intelligence*, 57(2-3):227, 270 1992.

[8] S. O. Hansson. Revision of belief sets and belief bases. *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, Vol. 3*, pages 17–75, 1998.

[9] R.M. Karp and R.J. Lipton. Some connections between non-uniform and uniform complexity classes. In *Proceedings of the Twelfth ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'80)*, pages 302–309, 1980.

[10] S. Konieczny. On the difference between merging knowledge bases and combining them. In *Proc.of KR'00*, pages 135–144, 2000.

[11] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Distance-based merging: a general framework and some complexity results. Technical report, IRIT, accessible par FTP anonyme à `ftp://ftp.irit.fr/pub/IRIT/RPDMP/DBMC.ps.gz`, 2001.

[12] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proc. of KR'98*, pages 488–498, 1998.

[13] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proc. of ECSQARU'99*, LNAI 1638, pages 233–244, 1999.

[14] C. Lafage. *Repésentation de préférences en logique - Application à la décision de groupe*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2001.

[15] C. Lafage and J. Lang. Logical representation of preferences for group decision theory. In *Proc. of KR'00*, pages 457–468, 2000.

[16] C. Lafage and J. Lang. Propositional distances and preference representation. In *Proc. of ECSQARU'2001*, LNAI 2143, pages 48–59, 2001.

[17] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1):76–90, 1998.

[18] P. Liberatore and M. Schaerf. Brels: a system for the integration of knowledge bases. In *Proc. of KR'00*, pages 145–152, 2000.

[19] J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. In *Dynamic Worlds: From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer, 1999.

[20] B. Nebel. A knowledge level analysis of belief revision. In *Proc. of KR'89*, pages 301–311, 1989.

[21] B. Nebel. How hard is it to revise a belief base? *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, Vol. 3: Belief Change*, pages 77–145, 1998.

[22] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.

[23] G. Pinkas. Reasoning, nonmonotonicity and learning in connectionist networks that capture propositional knowledge. *Artificial Intelligence*, 77:203–247, 1995.

[24] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2):133–160, 1997.

[25] K. W. Wagner. More complicated questions about maxima and minima, and some closures of np. *Theoretical Computer Science*, 51:53–80, 1987.

[26] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18:183–190, 1998.