Révision itérée basée sur la primauté forte des observations

Salem Benferhat (*), Sébastien Konieczny (**), Odile Papini (***) et Ramón Pino Pérez (**).
(*) IRIT. Université Paul Sabatier. 118 route de Narbonne. 31062 Toulouse.
(**) LIFL. Université de Lille I. 59655 Villeneuve d'Ascq.
(***) LIM. Faculté des sciences de Luminy. 163 avenue de Luminy. 13288 Marseille cedex 09.

Résumé

L'objet de ce papier est l'étude d'opérations de révision obéissant au principe de primauté forte de la nouvelle information. Une approche sémantique de ces opérations est d'abord présentée, elle repose sur la représentation de pré-ordres par des polynômes à coefficients dans $\{0,1\}$. La contre-partie syntaxique est ensuite exposée, elle utilise des bases de croyances stratifiées. Une étude des propriétés logiques de ces opérations est ensuite développée, elle montre que ces opérations ont de bonnes propriétés du point de vue de l'itération du processus de révision.

1 Introduction

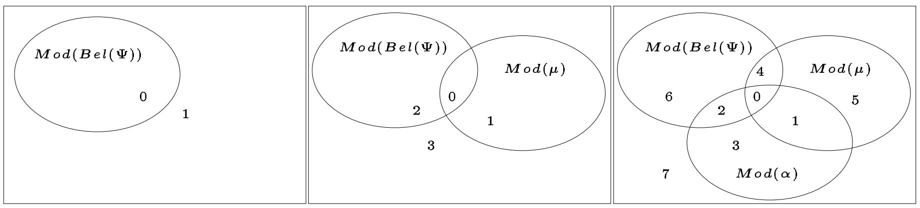
L'état épistémique d'un agent permet de modéliser les connaissances de celui-ci . La plupart du temps, l'agent est confronté à des informations incomplètes, incertaines ou imprécises, et il a besoin d'un mécanisme de révision pour gérer la modification de ses croyances en présence d'une nouvelle information. La révision de croyances est l'étude des moyens rationnels qu'un agent utilise pour modifier son état épistémique lorsqu'il est confronté à une nouvelle information. Il s'agit de modifier l'état épistémique afin de le rendre de nouveau cohérent, en conservant l'information introduite et en supprimant le moins d'information possible.

La révision des croyances est un problème important dans le domaine de l'intelligence artificielle qui a été abordé, dans la littérature, selon différents points de vue. Dans la plupart des approches logiques de la révision de croyances l'état épistémique d'un agent est représenté par un ensemble de croyances qui dénote les croyances courantes de l'agent. Cet ensemble de croyances est habituellement représenté par un ensemble de formules (souvent déductivement clos), ou par une formule unique exprimée dans un langage logique.

Parmi les approches logiques, le paradigme AGM [2, 8], dans lequel la révision est interprétée comme un changement de croyances, s'est imposé. Bien que très élégante, cette approche ne permet pas de représenter la révision itérée, en effet, la relation de préférence sous-jacente entre les croyances est perdue au cours du processus de changement. En fait, dans cette approche, une opération de révision satisfaisant les postulats AGM est équivalente à un ensemble de pré-ordres totaux $\leq_\Psi$ sur les interprétations du langage logique sous-jacent, où chaque pré-ordre correspond à un état épistémique Ψ et est utilisé pour la révision de cet état en présence d'une nouvelle information. Cependant, les pré-ordres totaux associés à deux états épistémiques successifs ne sont pas reliés, la seule contrainte est que la fonction qui associe à un état épistémique un ensemble de pré-ordres totaux soit "fidèle" (faithful). Cependant un état épistémique peut être plus complexe. Ainsi, il peut représenter non seulement les croyances courantes de l'agent mais aussi la stratégie que celui-ci utilise pour modifier ses croyances en présence d'une nouvelle observation. C'est cette idée qui est implicite dans ce travail.

La révision itérée a fait l'objet de récents travaux [3, 7, 19, 20, 1]. Certaines approches, à partir des postulats AGM, proposent de nouveaux postulats afin de caractériser la révision itérée [13, 5]. O. Papini [15] et S. Konieczny [12] ont proposé indépendamment, une opération de révision représentant l'historique d'une séquence d'observations d'un agent. L'intuition sous-jacente repose sur le fait que l'agent se souvient de toutes ses observations précédentes. Cependant, ces observations n'ont pas toutes la même importance, selon qu'elles sont préférées ou pas dans l'état épistémique suivant. La stratégie utilisée repose sur le fait que plus l'observation est récente, plus celle-ci est importante dans l'état épistémique suivant. Cette opération obéit au principe que nous appelons *principe de primauté forte de la nouvelle information*. Dans cette approche, les nouvelles informations sont des observations à propos du monde "réel", elles sont donc supposées ne pas être des contradictions. Dans ces travaux la représentation d'un état épistémique est un couple $(Bel(\Psi), \leq_\Psi)$ où $Bel(\Psi)$, l'ensemble des croyances est une formule du calcul propositionnel, noté $\mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$, qui représente les croyances courantes d'un agent et $\leq_\Psi$ est un pré-ordre total sur les interprétations de $\mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$.

Lorsque le pré-ordre total $\leq_\Psi$ est représenté par des ordinaux, les figures suivantes illustrent le processus de révision et les états épistémiques associés :



(a) Ψ (b) $\Psi \circ \mu$ (c) $(\Psi \circ \mu) \circ \alpha$

Dans la figure (a), l'ordinal affecté aux modèles de $Bel(\Psi)$ (resp. aux modèles de $\neg Bel(\Psi)$) est 0 (resp 1). Cette affectation exprime le fait que tout modèle de $Bel(\Psi)$ est préféré à n'importe quel contre-modèle de $Bel(\Psi)$. Dans la figure (b) l'ordinal affecté aux modèles de l'observation μ est 0 ou 1 selon qu'ils sont ou pas respectivement des modèles de $Bel(\Psi)$, l'ordinal affecté aux modèles de $\neg\mu$ est 2 ou 3 selon qu'ils sont ou pas respectivement des modèles de $Bel(\Psi)$. Dans la figure (c), le processus de révision est itéré avec une nouvelle observation α.

L'article s'articule comme suit : après une section préliminaire qui rappelle les différents postulats énoncés pour la révision et fixe les notations, la section 3 présente une approche sémantique de la révision proposée, c'est à dire une méthode de construction du pré-ordre révisé à partir du pré-ordre initial. Cette construction utilise une représentation des pré-ordres par des polynômes à coefficients dans $\{0, 1\}$. La section 4 présente une approche syntaxique de la révision proposée, c'est à dire une méthode de construction de l'ensemble de croyances révisé. La section 5 montre que les opérations de révision obéissant au *principe de primauté forte de la nouvelle information* ont de bonnes propriétés, de plus elle présente une méthode de construction de telles opérations à partir d'opérations de révisions classiques.

2 Préliminaires

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, les postulats AGM [2, 8]doivent être renforcés pour obtenir des propriétés satisfaisantes pour la révision itérée. En effet, l'état épistémique est représenté par une formule [11](ou un ensemble de formules déductivement clos [2]) mais aucune information sur la façon de changer ces connaissances n'est contenue dans l'état épistémique. Darwiche et Pearl [5] soulignent que l'état épistémique doit également incorporer une stratégie que l'agent utilise pour modifier ses croyances en présence d'une nouvelle information. Ils reformulent les postulats AGM pour les états épistémiques selon le point de vue de Katsuno et Mendelzon [11]. Soit Ψ un état épistémique, $Bel(\Psi)$ est son ensemble de croyances associé qui est représenté par une formule du calcul propositionnel. Dans le cas de la révision itérée l'équivalence entre états épistémiques doit être soigneusement définie.

Définition 1 *Soit Ψ et Φ deux états épistémiques.*
Ψ et Φ sont équivalents, *noté $\Psi \equiv \Phi$, ssi $Bel(\Psi) \equiv Bel(\Phi)$* [1].
Ψ et Φ sont égaux, *noté $\Psi = \Phi$, ssi $Bel(\Psi) \equiv Bel(\Phi)$ et $\leq_\Psi = \leq_\Phi$.*

1. Comme $Bel(\Psi)$ et $Bel(\Phi)$ sont des formules propositionnelles $\equiv$ est utilisé pour l'équivalence propositionnelle.

L'équivalence entre deux états épistémiques exprime que les deux ensembles de croyances associés sont équivalents, c'est l'équivalence "habituelle". Deux états épistémiques équivalents peuvent avoir des comportements différents lors des révisions. L'égalité exprime l'identité entre états épistémiques. Deux états épistémiques égaux auront le même comportement lors des révisions.

Postulats AGM pour états épistémiques Soit ϕ et μ des formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$ et un opérateur $\circ$ associant à Ψ et à μ un état épistémique $\Psi \circ \mu$. $\circ$ est un opérateur de révision s'il satisfait :

- $(R1)$ $Bel(\Psi \circ \mu) \models \mu$.
- $(R2)$ Si $Bel(\Psi) \wedge \mu$ est satisfaisable, alors $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv Bel(\Psi) \wedge \mu$.
- $(R3)$ Si μ est satisfaisable, alors $Bel(\Psi \circ \mu)$ l'est aussi.
- $(R4)$ Si $\Psi_1 = \Psi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\Psi_1 \circ \mu_1 \equiv \Psi_2 \circ \mu_2$.
- $(R5)$ $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \phi \models Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \phi))$.
- $(R6)$ Si $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$ est satisfaisable, alors $Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \phi)) \models Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$.

La grande différence entre ces postulats et les postulats usuels [11] réside dans le postulat (R4), c'est cette nuance qui va permettre d'étendre les postulats de façon cohérente aux postulats pour l'itération. Une opération de révision satisfaisant les postulats AGM est équivalente à un ensemble de pré-ordres totaux sur les interprétations de $\mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$ et la fonction qui associe à un état épistémique un pré-ordre total est défini comme suit :

Définition 2 *Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des interprétations de $\mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$. Une fonction qui associe à chaque état épistémique Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ sur les interprétations $\mathcal{W}$ est dite* affectation fidèle *ssi :*
(1) *Si $\omega_1, \omega_2 \models Bel(\Psi)$ alors $\omega_1 =_\Psi \omega_2$;*
(2) *si $\omega_1 \models Bel(\Psi)$ et $\omega_2 \not\models Bel(\Psi)$ alors $\omega_1 <_\Psi \omega_2$;*
(3) *$\Psi = \Phi$ ssi $\leq_\Psi = \leq_\Phi$.*
$\omega_1 <_\Psi \omega_2$ est défini par $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ et $\omega_2 \not\leq_\Psi \omega_1$; $\omega_1 =_\Psi \omega_2$ est défini par $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ et $\omega_2 \leq_\Psi \omega_1$.

Le théorème de représentation devient alors :

Théorème 1 *Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats $(R1) - (R6)$ ssi il existe une affectation fidèle qui associe à tout état épistémique Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ tel que*

$$Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = min(Mod(\mu), \leq_\Psi).$$

où $Mod(Bel(\Psi \circ \mu))$ (resp. $Mod(\mu)$) est l'ensemble des modèles de $Bel(\Psi \circ \mu)$ (resp. de μ[2]).

Darwiche et Pearl [5] formulent ensuite des postulats pour caractériser la révision itérée, ces postulats contraignent les relations entre deux états épistémiques successifs :

Postulats DP pour la révision itérée Soit Ψ un état épistémique, $Bel(\Psi)$ son ensemble de croyances associé, α et μ, des formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$

- $(C1)$ Si $\alpha \models \mu$ alors $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$.
- $(C2)$ Si $\alpha \models \neg\mu$ alors $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$.
- $(C3)$ Si $Bel(\Psi \circ \alpha) \models \mu$ alors $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \models \mu$.
- $(C4)$ Si $Bel(\Psi \circ \alpha) \not\models \neg\mu$ alors $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \not\models \neg\mu$.

Les postulats $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ et $(C4)$ formulés en relation avec les pré-ordres totaux associés à deux états épistémiques successifs sont :
Soit Ψ un état épistémique, α et μ, des formules de $\mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$

- $(CR1)$ Si $\omega_1 \models \mu$ et $\omega_2 \models \mu$ alors $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ ssi $\omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2$.
- $(CR2)$ Si $\omega_1 \models \neg\mu$ et $\omega_2 \models \neg\mu$ alors $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ ssi $\omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2$.
- $(CR3)$ Si $\omega_1 \models \mu$ et $\omega_2 \models \neg\mu$ alors, si $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ alors $\omega_1 <_{\Psi \circ \mu} \omega_2$.
- $(CR4)$ Si $\omega_1 \models \mu$ et $\omega_2 \models \neg\mu$ alors, si $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ alors $\omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2$.

2. $min(Mod(\mu), \leq_\Psi)$ contient les plus petits modèles de μ selon le pré-ordre total $\leq_\Psi$.

Il s'ensuit le théorème de représentation suivant :

Théorème 2 *Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats $(R1) - (R6)$ et $(C1) - (C4)$ ssi l'opérateur de révision $\circ$ et son affectation fidèle vérifient $(CR1) - (CR4)$.*

3 Approche sémantique de la révision itérée

Comme l'illustrent les figures présentées dans l'introduction, la révision itérée nécessite une représentation adéquate des pré-ordres ainsi que des changements sur les pré-ordres, qui permettent de garder une trace de l'historique des observations. La représentation de l'historique des observations nécessite l'utilisation d'opérations de décalage, c'est la raison pour laquelle nous avons choisi de représenter les pré-ordres par des polynômes. Il existe plusieurs représentations des pré-ordres : relations binaires, ordinaux, degrés de possibilités, séquences, vecteurs. Cependant, le changement d'une relation binaire à une autre ne peut s'exprimer facilement, une autre relation binaire est nécessaire. Les ordinaux comme dans [18], et les degrés de possibilités dans la théorie des possibilités [6] qui affectent aux interprétations des degrés entre 0 et 1, doivent vérifier une condition de normalisation après chaque opération de révision, ce qui rend le processus de révision plus complexe. L'inconvénient de l'utilisation des vecteurs provient de ce que leur longueur augmente après une opération de décalage, ce qui pose problème pour la comparaison et le calcul.

Les polynômes fournissent une représentation adéquate des pré-ordres totaux ainsi que des changements sur ces pré-ordres totaux [16]. Ils permettent de garder la trace d'une séquence d'observations, ils représentent l'historique des observations. Ils fournissent facilement les modèles et les contre-modèles des observations successives. Ils sont tout à fait adaptés à la représentation des décalages vers la droite et vers la gauche qui formalisent les opérations de changement de pré-ordres dans les opérations de révision. De plus, ils permettent de revenir aux pré-ordres précédents, ce qui n'est pas possible avec les autres représentations. L'approche sémantique présentée propose une méthode de construction du pré-ordre $\leq_{\Psi'}$ associé à l' état épistémique révisé Ψ'.

3.1 Représentation d'un pré-ordre par des polynômes

Nous notons B, l'ensemble $\{0,1\}$, et $B[x]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{0,1\}$ i. e. $p(x) \in B[x]$, $p(x) = \sum_{k=1}^{n} p_{-k}x^{-k} + \sum_{i=0}^{m} p_i x^i$. Nous utilisons des indices positifs et négatifs pour faciliter les opérations de décalage. Un décalage vers la droite est une multiplication par x, un décalage vers la gauche est une multiplication par x^{-1}. Nous définissons un ordre sur les polynômes de $B[x]$, noté $<_B$, qui représente l'ordre lexicographique :

Définition 3 *Soit $p(x), p'(x) \in B[x]$. $p(x) <_B p'(x)$* ssi $\exists i \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall j,\ j < i,\quad p_j = p'_j$ *et* $p_i < p'_i$. *(La fermeture reflexive de $<_B$ est notée $\leq_B$).*

Définition 4 *Une distribution de poids est une fonction qui associe à chaque état épistémique Ψ et à chaque interprétation $\omega \in \mathcal{W}$ un polynôme de $B[x]$, noté $p^{\omega}(\Psi)(x)$.*

Dans le cas où l'état épistémique initial ne dispose pas d'ordre sur les interprétations de $\mathcal{W}$, nous affectons un poids aux interprétations de la manière suivante. Nous affectons aux interprétations qui sont des contre-modèles de $Bel(\Psi)$ un poids qui est inférieur à celui que nous affectons aux interprétations qui sont des modèles de $Bel(\Psi)$ et la distribution de poids correspondant à l'état épistémique initial est définie par : $\forall \omega \in \mathcal{W}$, si $\omega \in Mod(Bel(\Psi))$ alors $p_0 = 0$, sinon $p_0 = 1$.

Remarque 1 *Dans le cas où l'état épistémique initial Ψ dispose d'un ordre sur $\mathcal{W}$, supposons cet ordre représenté par des ordinaux, nous associons à chaque ordinal p un polynôme comme suit. Soit $(p_0, p_1, \ldots, p_j)$ la décomposition binaire de p, i. e. $p = \sum_{k=0}^{j} p_k 2^k$ où $p_k \in \{0,1\}$ et où j est tel que $2^j \leq p < 2^{j+1}$. Nous affectons à p le polynôme $\sum_{i=0}^{j} p'_i\, x^i$ où $p'_i = p_{j-i}$ correspondant à la décomposition binaire de p lu dans l'ordre inverse. Par exemple, soit $\mathcal{W} = \{\omega_1 = \neg a \neg b, \omega_2 = \neg ab, \omega_3 = a \neg b, \omega_4 = ab\}$, les ordinaux associés à ω_1, ω_2 , ω_3 et ω_4 sont respectivement 3, 2, 1 et 0. Ici $j = 1$ et la distribution de poids est : $p^{\omega_1}(\Psi)(x) = 1 + x$, $p^{\omega_2}(\Psi)(x) = 1$, $p^{\omega_3}(\Psi)(x) = x$,*

$p^{\omega_4}(\Psi)(x) = 0$. *On remarque que* $p^{\omega}(\Psi)(x) <_B p^{\omega'}(\Psi)(x)$ *ssi l'ordinal associé à* ω *est inférieur à l'ordinal associé à* ω'.

Dans notre cadre, l'égalité entre deux états épistémiques exprime que les deux ensembles de croyances associés sont équivalents et que les distributions de poids sur $\mathcal{W}$ sont identiques. Plus formellement, $\Psi = \Phi$, ssi $\Psi \equiv \Phi$ et $\forall \omega \in \mathcal{W}$, $p^{\omega}(\Psi)(x) = p^{\omega}(\Phi)(x)$.

Proposition 1 *La fonction qui associe à tout état épistémique* Ψ *un pré-ordre total sur* $\mathcal{W}$, *noté* $\leq_\Psi$, *défini par :* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ ssi $p^{\omega_1}(\Psi)(x) \leq_B p^{\omega_2}(\Psi)(x)$ *est une affectation fidèle.*

3.2 Un opérateur de révision préférant l'observation la plus récente

Dans cette approche une nouvelle observation est considérée plus fiable qu'une observation plus ancienne. Nous pensons qu'il est raisonnable de considérer que, dans de nombreuses situations, la confiance qu'on accorde à une observation décroît avec le temps. Cependant, cette opération de révision cherche à satisfaire le plus d'observations précédentes possibles. Une observation ancienne persiste jusqu'à ce qu'elle rentre en contradiction avec une observation plus récente.

Définition 5 *La révision d'un état épistémique* Ψ *par une formule* $\mu \in \mathcal{L}_{\mathcal{PC}}$, *conduit à un nouvel état épistémique* $\Psi \circ_{\triangleright} \mu$. *La modification de la distribution de poids après révision par* μ *est :*
Si $\omega \in Mod(\mu)$ *alors* $p^{\omega}(\Psi \circ_{\triangleright} \mu)(x) = xp^{\omega}(\Psi)(x)$, *sinon* $p^{\omega}(\Psi \circ_{\triangleright} \mu)(x) = xp^{\omega}(\Psi)(x) + 1$.

Les poids des modèles de μ sont décalés vers la droite, les poids des contre-modèles de μ sont décalés vers la droite et translatés de 1.

Exemple 1 *Soit* Ψ *un état épistémique avec* $Bel(\Psi) = a \vee b$, *et un pré-ordre total sur les interprétations* $\leq_\Psi$ *tel que,* $\omega_4 =_\Psi \omega_3 =_\Psi \omega_2 <_\Psi \omega_1$. *Soit* $\mu = \neg b$ *et* $\alpha = \neg a$ *des formules propositionnelles. Le tableau suivant montre l'évolution du pré-ordre après révision d'abord par* μ, *puis par* α *:*

$\mathcal{W}$	a	b	$p^{\omega}(\Psi)(x)$	p_0	$p^{\omega}(\Psi \circ_{\triangleright} \mu)(x)$	p_0	p_1	$p^{\omega}((\Psi \circ_{\triangleright} \mu) \circ_{\triangleright} \alpha)(x)$	p_0	p_1	p_2
ω_1	0	0	1	1	x	0	1	x^2	0	0	1
ω_2	0	1	0	0	1	1	0	x	0	1	0
ω_3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
ω_4	1	1	0	0	1	1	0	$1 + x$	1	1	0

Après la révision de Ψ *par* μ, *le pré-ordre* $\leq_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu}$ *est :* $\omega_3 <_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu} \omega_2 =_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu} \omega_4 <_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu} \omega_1$. *Après la révision de* $\Psi \circ_{\triangleright} \mu$ *par* α, *le pré-ordre* $\leq_{(\Psi \circ_{\triangleright} \mu) \circ_{\triangleright} \alpha}$ *est :* $\omega_1 <_{(\Psi \circ_{\triangleright} \mu) \circ_{\triangleright} \alpha} \omega_2 <_{(\Psi \circ_{\triangleright} \mu) \circ_{\triangleright} \alpha} \omega_3 <_{(\Psi \circ_{\triangleright} \mu) \circ_{\triangleright} \alpha} \omega_4$. *Les colonnes* $p_0\, p_1\, p_2$ *donnent le pré-ordre correspondant à l'état épistémique courant* $(\Psi \circ_{\triangleright} \mu) \circ_{\triangleright} \alpha$, *les colonnes* $p_1\, p_2$ *donnent le pré-ordre correspondant à l'état épistémique précédent* $\Psi \circ_{\triangleright} \mu$ *et la colonne* p_2 *donne le pré-ordre correspondant à* Ψ. *Les coefficients des polynômes montrent que l'interprétation satisfait (valeur* 0*) ou pas (valeur* 1*) les observations successives. Par exemple,* ω_2 *satisfait* α *et* $Bel(\Psi)$ *mais ne satisfait pas* μ. *L'utilisation des polynômes permet de revenir aux états épistémiques précédents et aux pré-ordres précédents. Soit* Ψ' *obtenu après la révision de* Ψ *par* μ. *On peut retrouver* μ *à partir de* Ψ', *en effet,* $Mod(\mu) = \{\omega,\ p^{\omega}(\Psi')(x) \leq_B 1\}$ *et la distribution de poids correspondant à l'état épistémique précédent* Ψ *peut être obtenue à partir de* Ψ' *comme suit : si* $p^{\omega}(\Psi')(x) \leq_B 1$ *alors* $p^{\omega}(\Psi)(x) = x^{-1}p^{\omega}(\Psi')(x)$, *sinon* $p^{\omega}(\Psi)(x) = x^{-1}(p^{\omega}(\Psi')(x) - 1)$.

L'opérateur $\circ_{\triangleright}$ vérifie les postulats AGM et les postulats DP (*cf.* section 5).

4 Représentation syntaxique des états épistémiques

Dans cette section, nous donnons une représentation alternative, mais néanmoins équivalente, des états épistémiques. Au lieu de spécifier la relation d'ordre $\leq_\Psi$, nous disposons d'un ensemble de formules pondérées, appelé base de croyances stratifiée, noté Σ_Ψ. Nous définissons ensuite une fonction κ qui permet de retrouver la relation d'ordre $\leq_\Psi$ à partir de Σ_Ψ, en associant à chaque interprétation ω un polynôme de B[x], noté $\kappa_{\Sigma_\Psi}(\omega)(x)$. Lorsque ce polynôme est égal à $\mathrm{p}^\omega(\Psi)(x)$ pour tout $\omega \in \mathcal{W}$, nous dirons que Σ_Ψ est une représentation compacte (ou syntaxique) de $\leq_\Psi$.

Etant donnée cette représentation compacte, nous nous intéressons à la définition de la contre-partie syntaxique de $\circ_\triangleright$ qui, à partir d'une base de croyances stratifiée Σ_Ψ et d'une nouvelle information μ, produit une nouvelle base de croyances stratifiée $\Sigma_{\Psi\circ_\triangleright\mu}$. Cette nouvelle base de croyances est construite telle que : $\forall\omega \in \mathcal{W}$, $\mathrm{p}^\omega(\Psi \circ_\triangleright \mu) = \kappa_{\Sigma_{\Psi\circ_\triangleright\mu}}(\omega)(x)$.

Définition 6 *Une base de croyances stratifiée Σ_Ψ est un ensemble de couples $\{(\phi_i,\ p^{\phi_i}(\Psi)(x)) : i = 1, ..., n\}$ où ϕ_i est une formule propositionnelle, et $p^{\phi_i}(\Psi)(x)$ est un polynôme de B[x] différent du polynôme 0.*

Les polynômes associés aux formules sont comparés en utilisant la définition 3. $\mathrm{p}^\phi(\Psi)(x) >_B p^\psi(\Psi)(x)$ signifie que ϕ est plus importante (récente, à la priorité sur, etc...) que ψ. Σ_Ψ est cohérente (resp. infère ϕ) si sa base classique (obtenue en ignorant les poids) est également cohérente (resp. infère ϕ). Σ_Ψ n'est pas nécessairement déductivement close. Par ailleurs, il n'est pas interdit d'avoir dans Σ_Ψ deux croyances pondérées $(\phi, p^\phi(\Psi)(x))$ et $(\psi, p^\psi(\Psi)(x))$ telles que ϕ et ψ sont logiquement équivalentes mais ayant deux poids différents $p^\phi(\Psi)(x) \neq p^\psi(\Psi)(x)$. Dans ce cas, nous verrons plus tard que la formule la moins importante peut être supprimée de la base.

Définition 7 *Soit Σ_Ψ une base de croyances stratifiée. Le pré-ordre total $\leq_\Psi$, associée à Σ_Ψ, est obtenu en associant à chaque interprétation ω un poids $\kappa_{\Sigma_\Psi}(\omega)(x)$ défini par :*
$\kappa_{\Sigma_\Psi}(\omega)(x) = max\{p^{\phi_i}(\Psi)(x) : (\phi_i,\ p^{\phi_i}(\Psi)(x)) \in \Sigma_\Psi$ *et* $\omega \not\models \phi_i\}$*, où par convention max($\emptyset$)=0.*

Cette sémantique est principalement la même que celle de la logique possibiliste [6], du System Z [17] et est également utilisée dans les travaux de Williams [20] pour générer une relation d'enracinement épistémique complète à partir d'une relation d'enracinement épistémique partielle. Toutes ces approches utilisent la même idée, qui consiste à associer à chaque interprétation le poids de la plus grande formule qu'elle falsifie. Plus le poids de l'interprétation est petit, plus l'interprétation est préférée. En particulier les modèles de la base (de poids zéro) sont préférés.

Exemple 2 *Soit :* $\Sigma_\Psi = \{(\neg a \vee \neg b,\ x+1), (\neg a,\ 1), (\neg b \vee a,\ 1), (\neg a \vee \neg b,\ x), (\neg b,\ x), (a \vee b,\ x^2)\}$
Alors : $\kappa_{\Sigma_\Psi}(ab) = max\{x+1, 1, x, x\} = x+1$, $\kappa_{\Sigma_\Psi}(a\neg b) = max\{1\} = 1$, $\kappa_{\Sigma_\Psi}(\neg ab) = max\{x, 1\} = 1$ *et* $\kappa_{\Sigma_\Psi}(\neg a\neg b) = max\{x^2\} = x^2$. *En utilisant la définition 3, les interprétations sont rangées par ordre de préférence, d'abord $\neg a\neg b$, ensuite $\neg ab$ et $\neg ba$, enfin ab. Il n'existe aucune interprétation telle que $\kappa_{\Sigma_\Psi}(\omega)(x) = 0$, ceci traduit le fait que Σ_Ψ est incohérente.*

4.1 Calcul syntaxique de Bel(Ψ)

Nous calculons Bel(Ψ) directement à partir de Σ_Ψ, tel que : $\mathrm{Mod}(\mathrm{Bel}(\Psi)) = \{\omega : \nexists\omega'\ tq\ \kappa_\Sigma(\omega') < \kappa_\Sigma(\omega)(x)\}$. Mais dans un premier temps, nous procédons à un pré-traitement de la base qui facilite le calcul, et qui permet de réduire la taille de la base révisée dans la phase de révision. Ce pré-traitement consiste à enlever de la base des formules redondantes, à savoir les tautologies et les formules sous-sommées définies comme suit :

Définition 8 *Soit $(\phi,\ p^\phi(\Psi)(x))$ une formule de Σ_Ψ, et soit A_ϕ la sous-base de Σ_Ψ composée de formules ayant un poids supérieur à $p^\phi(\Psi)(x)$, c'est-à-dire:*

$$A_\phi = \{\psi : (\psi\ p^\psi(\Psi)(x)) \in \Sigma_\Psi\ \text{et}\ p^\psi(\Psi)(x) > p^\phi(\Psi)(x)\}$$

Alors, la formule $(\phi,\ p^\phi(\Psi)(x))$ est dite sous-sommée par Σ_Ψ si ϕ est conséquence logique de A_ϕ.

En d'autres termes, une formule $(\phi,\ p^{\phi}(\Psi)(x))$ est sous-sommée si elle est une conséquence logique des formules de Σ_Ψ ayant un poids supérieur à $p^{\phi}(\Psi)(x)$.

Théorème 3 *Soit Σ_Ψ une base stratifiée. Soit Σ'_Ψ une nouvelle base stratifiée obtenue à partir de Σ_Ψ en enlevant les tautologies et les formules sous-sommées. Alors Σ_Ψ et Σ'_Ψ sont équivalentes, c'est-à-dire $\forall \omega \in \mathcal{W}$: $\kappa_{\Sigma_\Psi}(\omega)(x) = \kappa_{\Sigma'_\Psi}(\omega)(x)$.*

Dans le reste du papier, on notera Σ^*_Ψ une base stratifiée obtenue à partir de Σ_Ψ en enlevant les tautologies et les formules sous-sommées.

Exemple 3 *Considérons de nouveau l'exemple précédent. Les seules formules sous-sommées sont $(\neg a \vee \neg b,\ x)$ (qui est inférée de $(\neg a \vee \neg b,\ x+1)$) et $(\neg b,\ x)$ (inférée de $(\neg b \vee a,\ 1)$ et $(\neg a,\ 1)$). Par conséquent, on obtient : $\Sigma^*_\Psi = \{(\neg a \vee \neg b,\ x+1), (\neg a,\ 1), (\neg b \vee a,\ 1), (a \vee b,\ x^2)\}$.*

Le théorème suivant montre que le fait d'enlever les formules sous-sommées et les tautologies permet de calculer directement $\mathrm{Bel}(\Psi)$.

Théorème 4 *Si Σ^*_Ψ est cohérente, alors Bel(Ψ) est la base classique (i.e., sans poids) de Σ_Ψ, sinon Bel(Ψ) est la base classique de Σ^*_Ψ - Minpoids, où Minpoids est l'ensemble des croyances de Σ^* ayant un poids minimal.*

Exemple 3 (suite) *Puisque Σ^*_Ψ est incohérente, alors : $Minpoids = \{(a \vee b,\ x^2)\}$. Par conséquent, Bel($\Psi$) est la base classique de : $\Sigma^*_\Psi - Minpoids = \{(\neg a \vee \neg b,\ x+1), (\neg a,\ 1), (\neg b \vee a,\ 1)\}$. Bel($\Psi$) a exactement un modèle qui est $\neg a \neg b$. Il est facile de vérifier que $\neg a \neg b$ a le plus petit poids dans κ_{Σ_Ψ} calculée précédemment dans l'exemple 2.*

4.2 Contrepartie syntaxique de $\circ_\triangleright$

Nous illustrons la construction de $\Sigma_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$ dans le cas simple où Σ_Ψ contient une seule formule $\{(\phi,\ 1)\}$ représentant l'état initial. Dans notre exemple, la nouvelle relation d'ordre $\leq_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$ est codée par : $p^{\omega}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x) = 0$ si $\omega \models \phi \wedge \mu$; $p^{\omega}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x) = x$ si $\omega \models \neg\phi \wedge \mu$; $p^{\omega}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x) = 1$ si $\omega \models \phi \wedge \neg\mu$; $p^{\omega}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x) = x+1$ si $\omega \models \neg\phi \wedge \neg\mu$. Nous retrouvons cet ordre en construisant une base stratifiée $\Sigma_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$ et en utilisant la fonction κ. Rappelons que κ est définie par rapport à la formule falsifiée la plus importante. Par conséquent, pour retrouver la relation d'ordre $\leq_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$, nous affectons à $\phi \vee \mu$ le plus grand poids, ensuite $\neg\phi \vee \mu$ obtient un poids inférieur, mais qui est plus grand que celui de $\phi \vee \neg\mu$. Par conséquent nous obtenons la base stratifiée suivante : $\Sigma_{\Psi \circ_\triangleright \mu} = \{(\phi \vee \mu,\ x+1), (\neg\phi \vee \mu, 1), (\phi \vee \neg\mu, x)\}$. Nous pouvons facilement vérifier que : $\forall \omega \in \mathcal{W},\ \kappa_{\Psi \circ_\triangleright \mu}(\omega)(x) = p^{\omega}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x)$.

Par ailleurs, on peut facilement vérifier que la base stratifiée ci-dessus est équivalente à la suivante (dans le sens qu'elles ont le même κ) : $\Sigma_{\Psi \circ_\triangleright \mu} = \{(\phi \vee \mu,\ x+1), (\mu, 1), (\phi \vee \neg\mu, x)\}$. Intuitivement, remplacer $(\neg\phi \vee \mu, 1)$ par $(\mu, 1)$ est justifié par le fait que l'on a déjà dans la base la formule $\phi \vee \mu$ avec un poids supérieur, et à partir de $(\phi \vee \mu, x+1)$ et $(\neg\phi \vee \mu, 1)$ on déduit $(\mu, 1)$, par conséquent l'ajout de $(\neg\phi \vee \mu, 1)$ est équivalent à ajouter simplement $(\mu, 1)$.
Pour résumer, la nouvelle base stratifiée $\Sigma_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$ est composée de trois parties :
l'ancienne formule ϕ, de plus petit poids $xp^{\phi}(\Psi)(x) =$ x,
la nouvelle formule μ, de poids 1, et
la disjonction de $\phi \vee \mu$, de plus grand poids $xp^{\phi}(\Psi)(x) + 1 = x + 1$.

La définition suivante généralise le résultat précédent au cas où la base Σ_Ψ contient plus d'une seule formule.

Définition 9 *La base stratifiée $\Sigma_{\Psi \circ_\triangleright \mu}$ associée à l'état épistémique $\Psi \circ_\triangleright \mu$ est composée de :*
- la nouvelle formule μ de poids $p^{\mu}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x) = 1$,
- toutes les formules ϕ de Σ_Ψ de poids $p^{\phi}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x)$=x $p^{\phi}(\Psi)(x)$,
- toutes les disjonctions entre les formules ϕ de Σ_Ψ et μ de poids $p^{\phi \vee \mu}(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x) = xp^{\phi}(\Psi)(x) + 1$.

Après la construction de $\Sigma_{\Psi\circ_\triangleright\mu}$ les tautologies et les formules sous-sommées sont enlevées.

Exemple 4 *Soit* $\Sigma_\Psi = \{(a \vee b,\ 1)\}$ *la base stratifiée associée à l'état épistémique* Ψ *donné dans l'exemple* 1. *Soit* $\mu = \neg b$. *Alors la révision de* Σ_Ψ *par* μ *donne :* $\Sigma_{\Psi\circ_\triangleright\mu} = \{(\neg b,\ 1), (a\vee b,\ x), (\top,\ x+1)\}$, *et après avoir enlevé les tautologies :* $\Sigma_{\Psi\circ_\triangleright\mu} = \{(a\vee b,\ x), (\neg b,\ 1)\}$. *Supposons maintenant que l'on a une nouvelle information* $\alpha = \neg a$, *alors :* $\Sigma_{(\Psi\circ_\triangleright\mu)\circ_\triangleright\alpha} = \{(\neg a,\ 1), (a\vee b,\ x^2), (\neg b,\ x), (\top,\ x^2+1), (\neg a\vee\neg b,\ x+1)\}$ *qui est équivalente à :* $\Sigma_{(\Psi\circ_\triangleright\mu)\circ_\triangleright\alpha} = \{(\neg a, 1), (a\vee b, x^2), (\neg b, x), (\neg a\vee\neg b, x+1)\}$.

Théorème 5 *Soit* Σ_Ψ *la base stratifiée associée à l'état épistémique* Ψ, *c'est-à-dire* $\forall\omega$, $p^\omega(\Psi)(x) = \kappa_{\Sigma_\Psi}(\omega)(x)$. *Soit* μ *une nouvelle formule. Alors,* $\forall\omega \in \mathcal{W}$ *:* $p^\omega(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x) = \kappa_{\Sigma_{\Psi\circ_\triangleright\mu}}(\omega)(x)$.

Exemple 4 (suite) *Nous calculons les fonctions* κ *associées aux bases* Σ_Ψ, $\Sigma_{\Psi\circ_\triangleright\mu}$, *et* $\Sigma_{(\Psi\circ_\triangleright\mu)\circ_\triangleright\alpha}$.
Soit $\kappa_1 = \kappa_{\Psi\circ_\triangleright\mu}$ *et* $\kappa_2 = \kappa_{(\Psi\circ_\triangleright\mu)\circ_\triangleright\alpha}$ *nous obtenons :*
$\kappa_\Psi(ab)(x) = 0, \quad \kappa_1(ab)(x) = 1, \quad \kappa_2(ab)(x) = x+1;$
$\kappa_\Psi(a\neg b)(x) = 0, \quad \kappa_1(a\neg b)(x) = 0, \quad \kappa_2(a\neg b)(x) = 1;$
$\kappa_\Psi(\neg ab)(x) = 0, \quad \kappa_1(\neg ab)(x) = 1, \quad \kappa_2(\neg ab)(x) = x;$
$\kappa_\Psi(\neg a\neg b)(x) = 1, \kappa_1(\neg a\neg b)(x) = x, \kappa_2(\neg a\neg b)(x) = x^2.$
On peut facilement vérifier que l'on retrouve exactement les mêmes poids que ceux données dans l'exemple 1, *c'est-à-dire pour tout* $\omega \in \mathcal{W}$ *:*
$\kappa_{\Sigma_\Psi}(\omega)(x) = p^\omega(\Psi)(x)$, $\kappa_1(\omega)(x) = p^\omega(\Psi \circ_\triangleright \mu)(x)$, *et* $\kappa_1(\omega)(x) = p^\omega((\Psi \circ_\triangleright \mu) \circ_\triangleright \alpha)(x)$.

5 Vers une logique générale de l'itération

Dans cette section nous proposons, en suivant [12], une définition logique des opérateurs de révision obéissant à ce que l'on a appelé le principe de primauté forte de la nouvelle information. Nous montrons que de tels opérateurs ont de bonnes propriétés en ce qui concerne la révision itérée et nous donnons une méthode pour construire de tels opérateurs à partir d'opérateurs de révision classiques. Comme souligné dans l'introduction un état épistémique peut être représenté de différentes manières. Nous supposerons ici qu'un état épistémique est une séquence de formules propositionnelles. Les états épistémiques sont, en quelque sorte, un codage d'un historique des révisions. Nous considérerons des opérateurs de révision $\circ$ qui associent à un état épistémique Ψ et à une formule μ un nouvel état épistémique $\Psi \circ \mu$. Le comportement de l'opérateur sera déterminé au niveau des ensembles de croyance. Si $\Psi = [\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n]$ alors $[\Psi \cdot \mu]$ sera la notation de $[\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n \cdot \mu]$. On supposera que $Bel([\,]) \equiv Bel([\top]) \equiv \top$.

Définition 10 *Un opérateur* $\circ$ *qui associe à tout état épistémique* Ψ *et à toute formule* μ *un état épistémique* $\Psi \circ \mu$ *est un opérateur de révision avec mémoire si et seulement si* $\Psi \circ \mu = [\Psi \cdot \mu]$ *et de plus il satisfait les postulats (R1), (R2), (R3), (R5), (R6) et les deux postulats suivants:*
(R4*) *Si* $\Psi_1 = \Psi_2$ *et* $\mu_1 \equiv \mu_2$, *alors* $[\Psi_1 \cdot \mu_1] = [\Psi_2 \cdot \mu_2]$
(R7) $Bel([\Psi \cdot \Psi']) \equiv Bel([\Psi \cdot Bel(\Psi')])$

Le postulat (R4*) est plus fort que R4 donné dans la section 2. Le postulat (R7) exprime l'importance forte de la nouvelle information. Ce postulat dit qu'au niveau des croyances l'opérateur est associatif à droite. De plus il est intéressant de noter que les postulats (R1-R3), (R4*), et (R5-R7) impliquent la propriété suivante:
(C) Si $\varphi \wedge \mu$ est satisfaisable, alors $[S \cdot \varphi \cdot \mu] \equiv [S \cdot \varphi \wedge \mu]$
Ce postulat dit que si l'on révise successivement par deux informations cohérentes entre elles, alors cela revient à réviser directement par leur conjonction. Cette propriété est très proche du postulat *Conjunction* proposé par Nayak et al. [1]. Mais (C) est plus faible que *Conjunction* car il n'impose que l'équivalence entre les états épistémiques résultats alors que *Conjunction* demande l'égalité.

Afin d'énoncer un théorème de représentation pour ces opérateurs nous allons introduire la notion d'assignement conservatif.

Définition 11 *Une fonction qui associe à chaque état épistémique* Ψ *un pré-ordre total* $\leq_\Psi$ *sur les interprétations est un assignement conservatif si et seulement si:*

1. *Si* $\omega_1 \models Bel(\Psi)$ *et* $\omega_2 \models Bel(\Psi)$, *alors* $\omega_1 \simeq_\Psi \omega_2$

2. *Si* $\omega_1 \models Bel(\Psi)$ *et* $\omega_2 \not\models Bel(\Psi)$, *alors* $\omega_1 <_\Psi \omega_2$
3. *Si* $\Psi = [\mu]$, *alors* $min(\mathcal{W}, \leq_\Psi) = Mod(\mu)$
4. *Si* $\omega_1 <_{[\mu]} \omega_2$, *alors* $\omega_1 <_{[\Psi \cdot \mu]} \omega_2$
5. *Si* $\omega_1 \simeq_{[\mu]} \omega_2$, *alors* $\omega_1 \leq_{[\Psi \cdot \mu]} \omega_2$ *ssi* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$

Remarque 2 *Il est facile de voir qu'un assignement conservatif est complètement déterminé par les pré-ordres* $\leq_{[\mu]}$ *associés à chaque état épistémique* $[\mu]$. *En particulier si l'on considère l'assignement fidèle [11] associé à un opérateur de révision et que l'on identifie* $\leq_{[\mu]} = \leq_\mu$, *on peut alors définir un opérateur de révision avec mémoire à partir d'un opérateur de révision AGM.*

On a le théorème de représentation suivant:

Théorème 6 *Un opérateur* $\circ$ *est un opérateur de révision avec mémoire si et seulement si il existe un assignement conservatif qui associe à chaque état épistémique* Ψ *un pré-ordre total* $\leq_\Psi$ *tel que:*

$$Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = \min(Mod(\mu), \leq_\Psi)$$

Théorème 7 *Un opérateur de révision avec mémoire satisfait les postulats (C1), (C3) et (C4). Mais il ne satisfait généralement pas (C2).*

Nous pensons que (C2) est discutable car parfois il engendre le même type de mauvais comportements que ceux qu'il essaie de prévenir. Nous donnons dans la section suivante un exemple d'opérateur qui ne satisfait pas ce postulat.

5.1 Exemples

Nous donnons ici deux exemples d'opérateurs de révision avec mémoire. Le premier que nous appelons opérateur basique ne suppose aucune préférence associée à la nouvelle information. C'est en fait l'opérateur $\circ_\triangleright$ défini à la section 3.2.

Définition 12 $\omega_1 <^b_{[\mu]} \omega_2$ *si et seulement si* $\omega_1 \models \mu$ *et* $\omega_2 \not\models \mu$.
$\omega_1 \simeq^b_{[\mu]} \omega_2$ *si et seulement si* $(\omega_1 \models \mu$ *et* $\omega_2 \models \mu)$ *ou* $(\omega_1 \not\models \mu$ *et* $\omega_2 \not\models \mu)$.

Et, pour $\Psi = [\mu_1 \cdot \ldots \mu_n]$, on définit $\leq^b_\Psi$ inductivement par:
Si $n = 1$, alors $\leq_\Psi = \leq_{[\mu_1]}$
Si $n > 1$ alors $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ si $\omega_1 <_{[\mu_n]} \omega_2$ ou $\omega_1 \simeq_{[\mu_n]} \omega_2$ et $\omega_1 \leq_{[\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_{n-1}]} \omega_2$

Définition 13 *Soient un état épistémique* Ψ *et une nouvelle information* μ, *l'opérateur de révision basique est défini par* $Mod(Bel(\Psi \circ_b \mu)) = \min(Mod(\mu), \leq^b_{[\Psi]})$.

Théorème 8 *L'opérateur de révision basique est le seul opérateur de révision avec mémoire qui vérifie (C2).*

Cela se prouve simplement en montrant que cet opérateur est le seul à vérifier la condition 7 donnée ci-après, cette condition correspondant à (C2) via le théorème de représentation.

7. Si $I \not\models \mu$ et $J \not\models \mu$, alors $I \leq_{[\Psi \cdot \mu]} J$ ssi $I \leq_\Psi J$

Notons que si l'on associe une information plus fine à la nouvelle formule on peut construire d'autres opérateurs. Si par exemple on utilise la distance de Hamming, proposée par Dalal [4] pour mesurer la vraisemblance des interprétations on obtiendra l'opérateur définit ci-dessous. Rappelons que la distance de Dalal entre deux interprétations, notée $d(\omega_1, \omega_2)$, est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent. La justification de l'utilisation de cette distance peut s'illustrer par l'exemple suivant : si une personne apprend de façon sure que quatre faits atomiques sont vrais, alors non seulement elle aura comme connaissance le fait que ces quatre faits sont vrais, mais cette information l'incitera également à trouver les mondes où trois de ces faits sont vrais plus vraisemblable que les mondes où aucun d'entre eux ne l'est.

Définition 14 $d(\omega_1, \mu) = \min_{\omega_2 \models \mu}(dist(\omega_1, \omega_2))$ *et* $\omega_1 \leq^d_{[\mu]} \omega_2$ *ssi* $d(\omega_1, \mu) \leq d(\omega_2, \mu)$.

On définit de même que pour l'opérateur basique l'assignement conservatif à partir de l'assignement $\leq_{\mu}^{d}$.

Définition 15 *Soient un état épistémique* Ψ *et une nouvelle information* μ*, l'opérateur de Dalal avec mémoire est défini par* $Mod(Bel(\Psi \circ_d \mu)) = \min(\leq_{[\Psi \cdot \mu]}^{d})$.

Par les théorèmes 7 et 8 cet opérateur vérifie les postulats (C1), (C3) et (C4) mais ne vérifie pas le postulat (C2). Considérons l'exemple suivant: Soit un circuit électrique composé d'un additionneur et d'un mutiplieur. On a aucune information initiale à propos de ce circuit, soit $\Psi = \top$, on apprend ensuite que l'additionneur et le multiplieur fonctionnent $\mu = adder\_ok \wedge multiplier\_ok$, mais il s'avère ensuite que l'additionneur ne fonctionne pas correctement $\alpha = \neg adder\_ok$.
On a donc $\alpha \models \neg\mu$ mais $[\Psi \cdot \mu \cdot \alpha] \equiv \neg adder\_ok \wedge multiplier\_ok$ alors que $[\Psi \cdot \alpha] \equiv \neg adder\_ok$. L'application de (C2) nous contraindrez ici à conclure $[\Psi \cdot \mu \cdot \alpha] \equiv \neg adder\_ok$, c'est-à-dire à “oublier” que le multiplieur fonctionne !

6 Conclusion et Perspectives

L'approche de la révision itérée de Darwiche et Pearl semble la plus aboutie, cependant le concept d'état épistémique n'est pas clairement défini et les postulats proposés ne semblent pas aussi généraux que ce que les auteurs prétendent. Nous avons montré que le postulat $C2$ n'est généralement pas satisfait par les opérations de révision obéissant au principe de primauté de la nouvelle information. Dans l'approche présentée, la formule avec laquelle on révise un état épistémique est toujours supposée plus fiable que les informations contenues dans l'état épistémique courant. Cependant une telle restriction ne s'applique pas toujours [9, 14]. O. Papini [16] a proposé une opération de révision dans laquelle l'état épistémique courant est prioritaire par rapport à toute information plus récente. Les pré-ordres associés aux états épistémiques sont représentés par des polynômes, et l'opération de révision utilise des décalages vers la gauche, c'est à dire, en termes de polynômes, des multiplications par x^{-1}. Ce sont là des cas extrêmes d'un cadre plus général où les informations contenues dans l'état épistémique courant sont jugées ou pas plus fiables que des informations plus récentes. Il s'agit de traiter un problème plus général, c'est à dire, la fusion des deux états épistémiques. L'idée intuitive est que les informations contenues dans les deux états épistémiques doivent, en quelque sorte, fusionner afin de produire un nouvel état épistémique. La fusion de deux états épistémiques Φ et Ψ produit un nouvel état épistémique Θ et conduit à la construction d'une nouvelle base de connaissances $Bel(\Theta)$ et à la construction d'un nouveau pré-ordre total $\leq_{\Theta}$. Afin de fournir un cadre abstrait pour des opérations de fusion, il est nécessaire de considérer les propriétés générales que toute opération de fusion doit satisfaire, et de considérer les façons de caractériser la fusion.

Par ailleurs, l'utilisation de l'information géographique, par exemple dans l'étude des données environnementales, est confrontée de manière permanente au problème de la diversité de données de qualités très inégales [10]. Aussi, les systèmes d'information géographiques (SIG), semblent fournir un champ d'application intéressant pour la fusion d'états épistémiques.

Références

[1] M. Pagnucco A. C. Nayak, N. Y. Foo and A. Sattar. Changing Conditional Beliefs Unconditionally. In *Proceedings of 6th Conference Rationality and Knowledge*, pages 119–135, 1996.

[2] C. Alchourron, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the Logic of Theory Change: Partial Meet Functions for Contraction and Revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[3] C. Boutilier. Revision Sequences and Nested Conditionals. In *Proccedings of IJCAI93*, pages 519–531, 1993.

[4] M. Dalal. Updates in propositional databases. Technical report, Rutgers University, 1988.

[5] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated revision. *Artificial Intelligence*, 89:1–29, 1997.

[6] D. Dubois and H. Prade. Belief change and possibility theory. In P. Gärdenfors Eds, editor, *Belief Revision*, pages 142–182. Cambridge University Press, 1992.

[7] N. Friedman and J. Halpern. Conditional Logics of Belief Change. In *Proceedings of the AAAI International Conference*, pages 915–921, 1994.

[8] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux.* MIT Press, 1988.

[9] S. O. Hansson. Semi-revision. *Journal of applied non-classical logic*, 1998.

[10] R. Jeansoulin. Using spatial constraints as redundancy information to improve geographical knowledge. *Data quality in Geographic Information*, 17:192, 1998.

[11] H. Katsuno and A. Mendelzon. Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.

[12] S. Konieczny. Operators with memory for iterated revision. Technical Report No IT-314, LIFL, 1998.

[13] D. Lehmann. Belief revision revised. In *Proceedings of 14th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, pages 1534–1539, 1995.

[14] D. Makinson. Screened revision. *Theoria*, 1998. Special issue on non-prioritized belief revision.

[15] O. Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations. In *workshop NMR98 on belief revision. KR'98*, page 15, 1998.

[16] O. Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations (extended version). In Applied Logic Series (to appear), editor, *Frontiers of Belief revision*, page 20. Kluwer ed., 1999.

[17] J. Pearl. System z: A natural ordering of defaults with tractableapplications to default reasoning. In R. Parikh. Eds, editor, *Proc. of the 3rd Conf. on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK'90)*, pages 121–135. Morgan Kaufmann, 1995.

[18] W. Spohn. Ordinal conditiona functions: a dynamic theory of epistemic states. *Causation in Decision, Belief Change, and Statistics*, 2:105–134, 1987.

[19] M. A. Williams. Transmutations of Knowledge Systems. In *Proceedings of 4th Principle of Knowledge Representation and Reasoning Conference*, pages 619–629, 1994.

[20] M. A. Williams. Iterated Theory Base Change:A Computational Model. In *Proceedings of 14th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, pages 1541–1547, 1995.