

# Sur les distances entre modèles de Kripke KD45<sub>n</sub> et leur utilisation pour la révision des croyances

Thomas Caridroit Sébastien Konieczny Tiago de Lima Pierre Marquis

CRIL, CNRS – Université d’Artois, France

{caridroit, konieczny, delima, marquis}@cril.fr

## Résumé

Dans cet article, des distances entre les modèles de Kripke KD45<sub>n</sub> sont introduites et étudiées. Nous définissons ainsi plusieurs distances entre les modèles de Kripke, basées sur des critères différents, inspirés par plusieurs concepts tels que la bisimulation, les modèles arborescents ainsi que les distances propositionnelles entre les valuations à des degrés modaux différents. Nous étudions les propriétés de ces distances. De telles distances sont utiles pour définir, des opérateurs de changement de croyances dans un cadre multi-agents. Nous montrons qu’elles peuvent être utilisées pour caractériser des opérateurs de révision de croyances basés sur le cadre AGM standard et adaptées aux modèles de Kripke KD45<sub>n</sub>.

## Abstract

In this paper, some distances between KD45<sub>n</sub> Kripke models are introduced and investigated. More in detail, we define several distances between Kripke models, based on different criteria, inspired by various concepts such as bisimulation, tree models and propositional distances between valuations for different modal degrees. We study the properties of these distances. Such distances are useful for defining belief change operators in multi-agent scenarios. We show that they can be used to characterize belief revision operators based on the standard AGM framework and suited to KD45<sub>n</sub> Kripke models.

## 1 Introduction

Le concept de distance se révèle être un concept clé pour un certain nombre d’applications en intelligence artificielle.

En particulier, en représentation des connaissances, les distances entre interprétations (ou entre formules) constituent une notion clé sur laquelle de nombreux opérateurs

de changement de croyance (opérateurs de révision, opérateurs de fusion, etc.) sont ancrés.

Ces opérateurs sont régis par un principe de changement minimal, qui consiste à sélectionner les modèles les plus plausibles d’une contrainte donnée (la nouvelle information en cas de révision de croyances, ou les contraintes d’intégrité en cas de fusion de croyances), étant donné les croyances actuelles de(s) l’agent(s).

Dans certaines applications, une relation de plausibilité peut être facilement obtenue à partir de l’information fournie initialement. Cependant, dans de nombreux cas, une telle relation de plausibilité n’est pas directement disponible. Dans de tels cas, une relation de plausibilité peut être construite à partir d’une distance prédéfinie. Ainsi, par exemple, en logique propositionnelle (finie) classique, la distance de Hamming (aussi appelée distance de Dalal [10, 17]), qui est définie comme le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles deux valuations diffèrent, est souvent considérée. Lorsque nous n’avons pas d’information particulière sur l’application et sur les dépendances logiques des variables propositionnelles, une hypothèse raisonnable est de considérer que plus les valuations ont de variables en commun, plus elles sont proches. Par conséquent, dans le cadre propositionnel classique, de nombreux opérateurs de révision [10, 17, 20, 21], de mise à jour [12, 16], de fusion [19, 18] et d’autres opérateurs de changement sont en fait basés sur des distances.

Les changements de croyances en logique propositionnelle classique ont suscité de nombreux travaux. Cependant, dans de nombreuses applications, les agents ont non seulement des croyances sur le monde, mais aussi des croyances sur les croyances des autres agents, ce qui rend la logique propositionnelle classique inadéquate. La sémantique typique pour le cadre épistémique (en fait, doxastique) multi-agents est basée sur des modèles de Kripke KD45<sub>n</sub>. D’autre part, bien que plusieurs travaux en logique épistémique aient pour objectif de modéliser la ré-

vision comme une modalité dynamique (voir, par exemple, [22, 25, 6, 8, 24, 5]), il y a très peu de travaux qui ont abordé le problème de la définition du changement de croyances pour les logiques épistémiques dans le cadre AGM standard (voir principalement [3, 9]).

Comme définir des opérateurs de révision concrets pour les modèles de Kripke est aujourd'hui attendu (voir [14]), notre objectif dans ce travail est de définir de tels opérateurs de révision pour les modèles de Kripke  $KD45_n$  finis. Pour ce faire, nous examinons d'abord la notion de distance entre ces modèles.

Pour autant que nous le savons, une seule distance a été définie à ce jour pour mesurer à quel point des modèles de Kripke sont différents. Cette distance a été présentée dans [2] et concerne la révision de modèles épistémiques subjectifs. Les modèles épistémiques subjectifs représentent les croyances d'un agent sur le monde et sur les croyances des autres agents, alors que les modèles de Kripke  $KD45_n$  représentent les croyances d'un observateur sur le monde et sur les croyances des agents. Pour être plus précis, Aucher [2] présente un degré de similarité entre les modèles épistémiques subjectifs, qui peuvent être directement traduit en une distance entre les modèles de Kripke  $KD45_n$ .

Dans ce qui suit, nous présentons des distances entre les modèles de Kripke  $KD45_n$  qui sont des alternatives à celle-ci. Ces distances peuvent également être facilement adaptées aux modèles subjectifs de Aucher, et donc être également utilisées pour définir de nouveaux opérateurs de révision [3]. Cinq nouvelles distances entre les modèles de Kripke  $KD45_n$  sont étudiées. Trois d'entre elles sont basées sur un affaiblissement de la relation de bisimulation standard entre les modèles de Kripke. Les deux autres reposent sur une agrégation des distances propositionnelles entre l'ensemble des valuations pour différents degrés modaux dans les deux modèles.

Au-delà des propriétés standard des distances (indiscernabilité, symétrie, sous-additivité et non-négativité), trois autres propriétés, qui ont du sens pour les distances entre les modèles de Kripke  $KD45_n$ , sont introduites. En un mot, la première exprime le fait que plus le degré de discordance modal est grand (à savoir, plus le degré des formules qui ne sont pas satisfaites dans un des deux modèles est grand), plus la distance entre les deux modèles est petite. La deuxième propriété exprime que toutes les discordances à un degré modal donné ne doivent pas être considérées comme équivalentes. Cela signifie que l'on doit aller au-delà de la distance dichotomique drastique (identique/différent) entre les (valuations des) mondes, et ainsi définir des distances qui permettent une évaluation plus fine des différences entre les modèles. La troisième propriété a pour objectif de caractériser les distances qui sont basées sur des distances sur un langage propositionnel classique. Lorsque l'on considère l'application de ces distances pour la révision de croyances, nous introduisons une dernière propriété, appelée propriété de "finitude", qui assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de modèles à considérer

pour le calcul de la révision.

Pour chaque distance introduite, les propriétés qu'elle satisfait sont identifiées. Nous montrons que trois distances parmi les cinq prises en compte satisfont toutes les propriétés considérées et peuvent être utilisées pour caractériser des opérateurs de révision de croyances basés sur le cadre AGM standard, mais adaptés aux modèles de Kripke  $KD45_n$ .

## 2 Préliminaires

Nous nous intéressons ici à la modélisation des croyances de plusieurs agents, chacun d'eux ayant ses propres croyances à propos de l'état du monde. Cela nécessite l'utilisation d'une logique épistémique multi-agent. Soit  $\mathbb{P}$ , un ensemble fini non vide de variables propositionnelles et  $\mathbb{A}$  un ensemble fini, non vide d'agents. Nous considérons le langage  $\mathcal{L}$  contenant un langage propositionnel classique augmenté par un opérateur de croyances modales  $B_a$  pour chaque agent  $a \in \mathbb{A}$ . Formellement,  $\mathcal{L}$  est défini comme suit :

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid B_a\varphi$$

Nous utilisons parfois  $B_a^k$  pour abrégé une suite de  $k$  opérateurs  $B_a$  (i.e.,  $B_a^0\varphi$  abrégé  $\varphi$  et  $B_a^{k+1}\varphi$  abrégé  $B_a B_a^k\varphi$ , pour  $k \geq 0$ ). Une formule de la forme  $B_a\varphi$  est lue "l'agent  $a$  croit que  $\varphi$  est vraie". Le degré modal  $\text{deg}(\varphi)$  est défini comme d'habitude [7] :

$$\begin{aligned} \text{deg}(p) &= 0 & \text{deg}(\varphi \wedge \psi) &= \max(\text{deg}(\varphi), \text{deg}(\psi)) \\ \text{deg}(\neg\varphi) &= \text{deg}(\varphi) & \text{deg}(B_a\varphi) &= 1 + \text{deg}(\varphi) \end{aligned}$$

Afin de donner un sens à nos formules, et en particulier aux opérateurs  $B_a$ , nous utilisons le système  $KD45_n$  standard pour  $n$  agents [11]. Un tel système est constitué de l'ensemble des formules de  $\mathcal{L}$  qui peuvent être dérivées en utilisant les axiomes et les règles d'inférence suivants :

(TAU) Toutes les instanciations de tautologies propositionnelles

(K)  $(B_a\varphi \wedge B_a(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow B_a\psi$   
(fermeture par implication)

(D)  $\neg B_a \perp$  (cohérence des croyances)

(4)  $B_a\varphi \Rightarrow B_a B_a\varphi$  (introspection positive)

(5)  $\neg B_a\varphi \Rightarrow B_a \neg B_a\varphi$  (introspection négative)

(RM) De  $\models \varphi \Rightarrow \psi$  et  $\models \varphi$  déduire  $\models \psi$  (modus ponens)

(RN) De  $\models \varphi$  déduire  $\models B_a\varphi$  (nécessité)

Le même ensemble de formules valides peut être capturé à l'aide d'une approche sémantique. La représentation la plus courante est basée sur des modèles de Kripke, définis comme suit :

**Définition 1 (Modèle de Kripke fini pointé).** *Un modèle de Kripke fini pointé est un quadruplet  $\langle W, R, V, w \rangle$  où*

- $W$  est un ensemble fini non vide de mondes ;
- $R = \{R_a \mid a \in \mathbb{A}\}$ , où  $R_a$  est une relation binaire d'accessibilité pour l'agent  $a$  ;
- $V = \{V_v \mid v \in W\}$ , où  $V_v : \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}$  est une fonction de valuation qui définit la valeur de vérité de chaque variable propositionnelle dans le monde  $v$  ;
- $w \in W$ .

Nous utilisons  $R_a(w)$  pour désigner l'ensemble des mondes possibles qui sont accessibles à partir de  $w$  pour l'agent  $a$ , à savoir,  $R_a(w) = \{w' \mid (w, w') \in R_a\}$ .

Soit  $M$  un modèle de Kripke fini pointé. Nous désignons par  $M \models \varphi$  le fait que la formule  $\varphi$  est satisfaite dans  $M$ . Ceci est défini comme d'habitude pour les connecteurs propositionnelles, et comme suit pour les opérateurs  $B_a$  :  $\langle W, R, V, w \rangle \models B_a \varphi$  si et seulement si  $\forall w' \in W$  si  $w' \in R_a(w)$ , alors  $\langle W, R, V, w' \rangle \models \varphi$ .

Deux modèles de Kripke pointés sont équivalents si et seulement si ils sont bisimilaires, dans le sens suivant :

**Définition 2 (Bisimilarité).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke finis pointés.  $M$  et  $M'$  sont bisimilaires, noté  $M \simeq M'$ , si et seulement si il existe une bisimulation  $Z \subseteq W \times W'$ .

**Définition 3 (Bisimulation).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke finis pointés. Soit  $Z \subseteq W \times W'$ .  $Z$  est une bisimulation si et seulement si  $(w, w') \in Z$  et pour tout  $(v, v') \in Z$  :

1.  $V_v = V_{v'}$  ;
2. si  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$ , alors  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$  et  $(u, u') \in Z$  ;
3. si  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$ , alors  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$  et  $(u, u') \in Z$ .

Une formule  $\varphi \in \mathcal{L}$  est valide (noté  $\models \varphi$ ) si et seulement si  $M \models \varphi$ , pour chaque modèle de Kripke pointé  $M \in \text{KD45}_n$ .

Deux modèles bisimilaires peuvent avoir un nombre de mondes différent. Cela implique que, selon la façon dont la distance entre les deux modèles bisimilaires est calculée, deux modèles bisimilaires peuvent être à une distance non nulle l'un de l'autre. Nous devons nous concentrer sur les informations transmises par chaque modèle, et ne pas se laisser distraire par une représentation particulière. Nous avons donc besoin d'utiliser une forme normale. Nous prenons les modèles minimaux correspondants, comme « formes normales » :

**Définition 4 (Modèle de Kripke pointé minimal).** Soit  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  un modèle de Kripke fini pointé.  $M$  est minimal si et seulement si il n'y a aucun modèle  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  tel que  $M \simeq M'$  et  $|W| > |W'|$ .

Les modèles de Kripke finis pointés sont similaires à des automates finis non déterministes. Ces derniers peuvent être transformés en automates déterministes facilement. Le

modèle résultant est cependant parfois exponentiellement plus grand. Étant donné un modèle de Kripke fini pointé  $M$ , le problème de trouver un modèle minimal qui lui est associé est similaire au problème de minimiser le nombre d'états dans un automate fini déterministe. Un algorithme pour cela peut être facilement adapté de celui donné dans [15]. Notons que, comme dans le cas des automates finis déterministes, le modèle minimal est unique. Nous désignons par  $\mu(M)$  le modèle de Kripke fini pointé minimal correspondant à  $M$ . Nous avons clairement  $M \simeq \mu(M)$ .

La profondeur d'un monde possible  $v$  dans un modèle de Kripke fini pointé  $M$ , notée  $\text{height}_M(v)$ , est la taille d'un plus court chemin entre le monde pointé et  $v$ . La profondeur d'un modèle  $M$  (notée  $\text{height}(M)$ ) est, comme d'habitude [7], la valeur  $n$  maximale telle qu'il y a un monde de profondeur  $n$  dans  $M$ .

### 3 Distances entre modèles fini de Kripke

Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des modèles finis pointés de Kripke  $\text{KD45}_n$ . Dans ce qui suit, nous nous référons à des modèles de Kripke comme une abréviation pour les modèles de  $\mathcal{K}$ .

**Définition 5 (Distance).** Une distance entre deux modèles de Kripke est une application  $d$  de  $\mathcal{K}^2$  dans  $\mathbb{R}$  qui satisfait les propriétés suivantes :

- (D1)  $d(M, M') = 0$  si et seulement si  $M \simeq M'$  (**indiscernabilité**)
- (D2)  $d(M, M') = d(M', M)$  (**symétrie**)
- (D3)  $d(M, M'') \leq d(M, M') + d(M', M'')$  (**sous-additivité**)
- (D4)  $d(M, M') \geq 0$  (**non-négativité**)

Les propriétés suivantes [1] sont des conséquences des propriétés (D1) – (D4) :

**Lemme 1.** Soit  $d$  une application de  $\mathcal{K}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $d$  satisfait les propriétés (D1) – (D4), alors  $d$  satisfait :

- (DK1) Si  $M = M'$  alors  $d(M, M') = 0$
- (DK2) Si  $M \simeq M'$  alors  $d(M, M') = 0$
- (DK3) Si  $M' \simeq M''$  alors  $d(M, M') = d(M, M'')$
- (DK4) Si  $M' \simeq M''$  alors  $d(M', M) = d(M'', M)$

Pour définir des distances sur les modèles de Kripke nous considérons certaines propriétés attendues supplémentaires. Premièrement, nous introduisons une fonction de modification qui sera utilisée pour changer la valuation d'un monde  $w'$  dans un modèle  $M$  pour correspondre à une autre valuation  $\vartheta$ .

**Définition 6 (Fonction de modification).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$ ,  $w' \in W$ , et  $\vartheta$  une valuation. Nous désignons par  $M(\vartheta \rightarrow w')$  le modèle obtenu en changeant la valuation de  $w'$  par  $\vartheta$ , défini comme suit :

$$M(\vartheta \rightarrow w') = \langle W, V', R, w \rangle \text{ où}$$

$$V' = \{V_v \mid v \neq w'\} \cup \{V_{w'} \mid \forall p \in \mathbb{P}, V_{w'}(p) = \vartheta(p)\}$$

Nous pouvons maintenant définir les propriétés supplémentaires. Soient  $M = \langle W, V, R, w \rangle$ ,  $w', w'' \in W$ , et  $\vartheta$  et  $\vartheta'$  deux valuations.

- (D5)  $\forall M$ , si  $\text{height}_M(w') < \text{height}_M(w'')$  et  $M' = M(\vartheta \rightarrow w')$  et  $M'' = M(\vartheta \rightarrow w'')$  avec  $V_{w'} \neq \vartheta \neq V_{w''}$ , alors  $d(M, M') > d(M, M'')$ .
- (D6)  $\exists M$ ,  $\exists \vartheta$ ,  $\exists \vartheta'$  tels que  $M' = M(\vartheta \rightarrow w')$  et  $M'' = M(\vartheta' \rightarrow w')$  avec  $\vartheta \neq V_{w'} \neq \vartheta'$ , et  $d(M, M') \neq d(M, M'')$ .
- (D7) Soit  $d_V$  une distance propositionnelle<sup>1</sup>.  $\forall M$ ,  $\forall \vartheta$ ,  $\forall \vartheta'$  si  $M' = M(\vartheta \rightarrow w')$  et  $M'' = M(\vartheta' \rightarrow w')$  et  $d_V(\vartheta, V_{w'}) < d_V(\vartheta', V_{w'})$  alors  $d(M, M') < d(M, M'')$ .

(D5) exprime le fait que plus le degré de discordance modal (à savoir, plus le degré de formules qui ne sont satisfaites que dans un des deux modèles) est grand, plus la distance entre les deux modèles est petite. Fondamentalement, cette propriété doit être évaluée en tenant compte de l'utilisation de modèles épistémiques pour prendre des décisions stratégiques. À titre d'illustration, considérons un jeu de cartes, ou tout autre jeu en information imparfaite (comme Cluedo, par exemple). Alors il est plus dommageable pour un joueur  $A$  de faire une erreur sur les croyances d'un autre joueur  $B$  (puisque ces croyances sont utilisées pour prendre de nombreuses décisions stratégiques), plutôt que de se tromper sur les croyances de  $B$  sur les croyances de  $A$  sur les croyances de  $B$ .

(D6) exprime que toutes les discordances au degré modal  $k$  ne sont pas équivalentes, ce qui signifie que l'on doit faire mieux que la distance dichotomique drastique (même/différent) entre les (valuations des) deux mondes. Cette distance, notée  $D$ , est définie par : pour tout  $\vartheta, \vartheta'$  valuations sur  $\mathbb{P}$ , on a  $D(\vartheta, \vartheta') = 0$  si  $\vartheta = \vartheta'$  et  $D(\vartheta, \vartheta') = 1$  sinon.

(D7) stipule que la distance entre deux modèles doit être basée sur une distance propositionnelle classique entre les valuations. Il est clair que (D7) est plus exigeante que (D6) :

**Proposition 1.** Soit  $d$  une distance entre modèles de Kripke. Si  $d$  satisfait (D7), alors  $d$  satisfait (D6).

## 4 Distances existantes entre modèles de Kripke

Dans [1], des mesures entre modèles de Kripke ont été définies. Ces mesures n'ont pas été principalement définies pour les modèles  $KD45_n$ , mais peuvent être adaptées, comme suit.

**Définition 7 ([1]).** Soient  $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w'_0 \rangle$  deux modèles de Kripke.  $\delta_{min}(M, M') = \delta_{\mathcal{K}}(\mu(M), \mu(M'))$ , avec  $\delta_{\mathcal{K}}(M, M') = \sum_{a \in \mathbb{A}} |R_a \setminus R'_a|$ .

1. I.e., une distance entre valuations [17, 10].

En dehors de ne pas être symétrique, le fait que seules les relations  $R$  des deux modèles peuvent être différentes est trop restrictif pour notre but. De plus,  $\delta_{min}$  ne satisfait pas (D5), car elle ne regarde pas la profondeur des mondes provoquant la discordance entre les modèles. Et, comme elle ne considère pas les valuations des mondes, elle ne satisfait ni (D6) ni (D7).

Dans [2], une notion de degré de similarité entre les modèles de Kripke, basée sur la notion de  $n$ -bisimulation, est proposée. Ce degré de similarité peut être directement transformé en une distance. La notion de  $n$ -bisimulation que nous utilisons est légèrement différente de celle de [7, 2, 4]. Nous n'imposons pas de conditions pour la 0-bisimulation. Nous permettons ainsi tout modèle à être 0-bisimilaire à un autre, même si leurs mondes pointés sont différents. Intuitivement, deux modèles sont  $n$ -bisimilaires (avec  $n \geq 1$ ), noté  $M \simeq_n M'$ , si ils sont équivalents jusqu'à la profondeur  $n - 1$ . Par conséquent, deux modèles  $n$ -bisimilaires satisfont les mêmes formules ayant un degré modal d'au plus  $n - 1$ .

**Définition 8 ( $n$ -Bisimilarité).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke.  $M$  et  $M'$  sont  $n$ -bisimilaires, noté  $M \simeq_n M'$ , si et seulement si il existe une  $n$ -bisimulation  $Z \subseteq W \times W'$ .

**Définition 9 ( $n$ -Bisimulation).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soit  $Z \subseteq W \times W'$  :

- $Z$  est une 0-bisimulation ;
- $Z$  est une 1-bisimulation si et seulement si  $(w, w') \in Z$  et  $V_w = V_{w'}$  ;
- $Z$  est une  $(n + 1)$ -bisimulation ( $n \geq 1$ ) si et seulement si  $(w, w') \in Z$  et pour chaque  $(v, v') \in Z$  :
  1.  $V_v = V_{v'}$  ;
  2. si  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$ , alors  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$  et  $(u, u') \in Z$  ;
  3. si  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$ , alors  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$  et  $(u, u') \in Z$ .

et  $Z$  est une  $n$ -bisimulation.

Le lemme suivant découle immédiatement des définitions 2 et 8.

**Lemme 2.** ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $M \simeq_n M'$ ) si et seulement si  $M \simeq M'$ .

Rappelons maintenant la notion de degré de similarité proposée dans [2] :

**Définition 10 (Degré de similarité [2]).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke,  $v \in W$  et  $v' \in W'$ ,  $S$  et  $S'$  deux ensembles finis de mondes possibles. Soient  $n = |W| \cdot |W'| + 1$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Nous définissons le degré de similarité  $s^k(M, M')$  entre  $M$  et  $M'$  par :

- $\sigma(v, v') = \max(\frac{i}{n} | \langle W, R, V, v \rangle \simeq_i \langle W', R', V', v' \rangle \text{ et } i \in \llbracket 0; n \rrbracket)$
- $\sigma(S, S') = \frac{1}{2} (avg\{\sigma(s, S') | s \in S\} + avg\{\sigma(S, s') | s' \in S'\})$  où  $\sigma(s, S') = \max\{\sigma(s, s') | s' \in S'\}$  et  $\sigma(S, s') = \max\{\sigma(s, s') | s \in S\}$
- $s^k(M, M') = (\sigma(w, w'), avg\{\sigma(R_{a_i}(w), R_{a_i}(w')) | a_i \in \mathbb{A}\}, \dots, avg\{\sigma(R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_k}(w), R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_k}(w')) | \forall i, a_i \in \mathbb{A} \text{ and } a_i \neq a_{i+1}\})^2$

$\sigma(v, v')$  mesure un degré de similarité entre les mondes  $v$  et  $v'$ . De même,  $\sigma(S, S')$  mesure un degré de similarité entre les ensembles de mondes  $S$  et  $S'$ . Et plus précisément,  $\sigma(v, v')$  est le degré de similarité entre un monde  $v$  et un ensemble de mondes  $S'$ . Donc, le degré de similarité entre  $S$  et  $S'$  est juste la moyenne de ces deux degrés.  $s^k(M, M')$  est un  $n$ -uplet qui représente à quel point deux modèles Kripke sont similaires par rapport à leur profondeur modale respective. Voir [2] pour plus de détails et justifications sur ce degré de similarité.

Sur la base de ce degré de similarité, nous pouvons définir une distance entre les modèles de Kripke. On additionne les distances entre  $\mu(M)$  et  $\mu(M')$  par rapport à leur profondeur modale, en récupérant l'élément du  $n$ -uplet  $s^k(\mu(M), \mu(M'))$  correspondant à chaque profondeur. La distance entre ces deux modèles à une profondeur  $p \leq k$  est donnée par la différence entre 1 (le degré maximum) et le  $(p + 1)^{\text{ème}}$  élément de  $s^k(\mu(M), \mu(M'))$ .

**Définition 11 (Distance de similarité).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soit  $n = |W| \cdot |W'| + 1$ .

$$dA(M, M') = \sum_{i=0}^n (1 - s_i^n(\mu(M), \mu(M')))$$

où  $s_i^n(\mu(M), \mu(M'))$  est le  $(i + 1)^{\text{ème}}$  élément du tuple  $s^n(\mu(M), \mu(M'))$

Le problème avec ces distances est qu'aucune d'entre elles ne satisfait les propriétés attendues, introduites dans la section précédente :

**Proposition 2.**  $\delta_{min}$  et  $dA$  ne satisfont ni (D5), ni (D6) ni (D7).

Dans la section suivante, nous introduisons de nouvelles distances et prouvons qu'elles satisfont les propriétés attendues.

## 5 Nouvelles distances entre modèles de Kripke

Dans ce qui suit, chaque distance introduite sera considéré entre les modèles minimaux associés aux deux modèles de Kripke considérés au départ (notez l'utilisation de

2.  $avg$  désigne ici la moyenne et  $\circ$  est utilisée ici pour désigner la composition de relations.

la fonction de minimisation  $\mu$  dans les définitions). Ceci est nécessaire par exemple pour assurer que les modèles bisimilaires soient à une distance nulle, comme attendu.

### 5.1 Distances et bisimulations

Ici, nous exploitons la notion de bisimulation afin de définir de nouvelles distances entre modèles de Kripke. Tout d'abord, nous introduisons un résultat utile, à savoir qu'il y a un rang  $k$  à partir duquel une  $k$ -bisimulation implique une  $(k + 1)$ -bisimulation, pour un ensemble fini de variables propositionnelles  $\mathbb{P}$ . Dans un premier temps, nous prouvons un lemme qui stipule que pour deux modèles de Kripke  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$ , s'il existe une  $n$ -bisimulation ( $n > 1$ )  $Z$  et  $(w, w') \in Z$ , alors l'existence d'une suite de  $n - 1$  mondes  $w_i$  telle que  $wRw_1Rw_2R \dots Rwn_{-1}$  implique l'existence d'une séquence de  $n - 1$  mondes  $w'_i$  telle que  $w'R'w'_1R'w'_2R' \dots R'w'_{n-1}$ , tel que  $Z$  soit une 1-bisimulation et  $(w_{n-1}, w'_{n-1}) \in Z$ , et inversement.

**Lemme 3.** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soit  $Z \subseteq W \times W'$ . Si  $Z$  est une  $n$ -bisimulation ( $n > 1$ ) et  $(w, w') \in Z$  alors :

1. si  $\exists v \in W$  tel que  $wR_{a_1} \dots R_{a_{n-1}}v$ , alors  $\exists v' \in W'$  tel que  $w'R'_{a_1} \dots R'_{a_{n-1}}v'$  et il existe une 1-bisimulation  $Z'$  et  $(v, v') \in Z'$ <sup>3</sup> ;
2. si  $\exists v' \in W'$  tel que  $w'R'_{a_1} \dots R'_{a_{n-1}}v'$ , alors  $\exists v \in W$  tel que  $wR_{a_1} \dots R_{a_{n-1}}v$  et il existe une 1-bisimulation  $Z'$  et  $(v, v') \in Z'$ .

La proposition suivante, basée sur le lemme 3, montre qu'à partir d'un certain rang  $k$ , si deux modèles sont  $k$ -bisimilaires, alors ils sont  $(k + 1)$ -bisimilaires.  $k$  est pris ici comme la profondeur du monde le plus profond des deux modèles, plus deux. Ce résultat renforce un résultat similaire dû à Balbiani et introduit dans [2].

**Proposition 3.** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soit  $k = \max(\text{height}(M), \text{height}(M')) + 2$ . Si  $M \simeq_k M'$ , alors  $M \simeq M'$ .

Nous utilisons maintenant la notion de  $n$ -bisimulation pour définir une nouvelle distance. Pour ce faire, nous regardons jusqu'à quelle profondeur les deux modèles considérés sont bisimilaires, nous soustrayons ensuite cette valeur à la plus grande valeur possible.

**Définition 12 (Distance et  $n$ -bisimulation).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Nous notons  $dNB(M, M')$  la distance entre  $M$  et  $M'$ , définie comme suit :

$$dNB(M, M') = \frac{1}{n} [n - \max(i | \mu(M) \simeq_i \mu(M') \text{ et } i \in \llbracket 0; n \rrbracket)]$$

où  $n = \max(\text{height}(M), \text{height}(M')) + 2$ .

3. Nous utilisons la notation  $wR_{a_1} \dots R_{a_{n-1}}v$  pour abrégier  $wR_{a_1}w_1R_{a_2}w_2 \dots w_{n-2}R_{a_{n-1}}v$ .

Une illustration de cette distance (ainsi que des autres distances introduites) sera fournie dans l'exemple 1.

Il est facile de vérifier que  $d\mathcal{NB}$  satisfait aussi **(D5)**. En effet, l'idée sous-jacente à cette distance est de regarder à quelle profondeur les deux modèles sont bisimilaires. Ainsi, lorsque le degré modal de la différence augmente, la distance entre les modèles diminue. Mais, étant donné que nous ne considérons pas la valuation des mondes,  $d\mathcal{NB}$  ne satisfait ni **(D6)** ni **(D7)**.

**Proposition 4.**

1.  $d\mathcal{NB}$  satisfait **(D1)-(D4)**.
2.  $d\mathcal{NB}$  satisfait **(D5)**.
3.  $d\mathcal{NB}$  ne satisfait ni **(D6)** ni **(D7)**.

La prochaine distance introduite est basée sur une approximation de la notion de bisimulation dans laquelle les valuations des mondes peuvent différer. Ainsi, deux modèles très proches l'un de l'autre sont considérés comme  $\varepsilon$ -bisimilaires. Dans ce cas, nous utilisons d'abord une distance propositionnelle  $d$  entre valuations, censée satisfaire les propriétés de distance habituelles (indiscernabilité, symétrie, sous-additivité et non-négativité) [23].

**Définition 13 ( $d\varepsilon$ -Bisimilarité).** Soit  $d$  une distance propositionnelle. Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke.  $M$  et  $M'$  sont  $d\varepsilon$ -bisimilaires, noté  $M \stackrel{d, \varepsilon}{\sim} M'$ , si et seulement si il existe une  $d\varepsilon$ -bisimulation  $Z \subseteq W \times W'$ .

**Définition 14 ( $d\varepsilon$ -Bisimulation).** Soit  $d$  une distance propositionnelle. Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soient  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  et  $Z \subseteq W \times W'$ .  $Z$  est une  $d\varepsilon$ -bisimulation si et seulement si  $(w, w') \in Z$  et pour tout  $(v, v') \in Z$  :

1.  $d(V_v, V_{v'}) \leq \varepsilon$ ;
2. si  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$ , alors  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$  et  $(u, u') \in Z$ ;
3. si  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$ , alors  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$  et  $(u, u') \in Z$ .

Comme avec la distance basée sur la  $n$ -bisimulation, nous pouvons utiliser la  $d\varepsilon$ -bisimulation pour définir une nouvelle distance. Nous cherchons ici le plus petit  $\varepsilon$  possible de sorte que les deux modèles soient  $d\varepsilon$ -bisimilaires.

**Définition 15 (Distance et  $d\varepsilon$ -bisimulation).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Nous notons  $d\mathcal{EB}_d(M, M')$  la distance entre  $M$  et  $M'$ , définie comme suit :

$$d\mathcal{EB}_d(M, M') = \min\{\varepsilon \mid \mu(M) \stackrel{d, \varepsilon}{\sim} \mu(M')\}.$$

Il est clair que la distance  $d\mathcal{EB}_d$  ne satisfait pas **(D5)**. En effet, ici, nous cherchons un epsilon quelle que soit la profondeur de la discordance entre les modèles. A contrario, comme nous considérons en quelque sorte la valuation des

mondes provoquant la discordance, si une distance propositionnelle non drastique<sup>4</sup>  $d$  est utilisée,  $d\mathcal{EB}_d$  satisfait **(D7)** et donc **(D6)**.

**Proposition 5.**

1. Pour toute distance propositionnelle  $d$ ,  $d\mathcal{EB}_d$  satisfait **(D1)-(D4)**.
2. Pour toute distance propositionnelle  $d$ ,  $d\mathcal{EB}_d$  ne satisfait pas **(D5)**.
3. Pour toute distance propositionnelle non drastique  $d$ ,  $d\mathcal{EB}_d$  satisfait **(D6)** et **(D7)**.

Les idées sous-tendant les deux bisimulations « faibles » précédentes peuvent être considérées ensemble :

**Définition 16 ( $d\varepsilon$ - $n$ -Bisimilarity).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke.  $M$  et  $M'$  sont  $d\varepsilon$ - $n$ -bisimilaires, noté  $M \stackrel{d, \varepsilon}{\sim}_n M'$ , si et seulement si il existe une  $d\varepsilon$ - $n$ -bisimulation  $Z \subseteq W \times W'$ .

**Définition 17 ( $d\varepsilon$ - $n$ -Bisimulation).** Soit  $d$  une distance propositionnelle. Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soient  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  et  $Z \subseteq W \times W'$ .

- $Z$  est une  $d\varepsilon$ -0-bisimulation ;
  - $Z$  est une  $d\varepsilon$ -1-bisimulation si et seulement si  $(w, w') \in Z$  et  $d(V_w, V_{w'}) \leq \varepsilon$  ;
  - $Z$  est une  $d\varepsilon$ - $(n+1)$ -bisimulation si et seulement si  $(w, w') \in Z$  et pour tout  $(v, v') \in Z$  :
    1.  $d(V_v, V_{v'}) \leq \varepsilon$  ;
    2. si  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$ , alors  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$  et  $(u, u') \in Z$  ;
    3. si  $\exists u' \in W'$  tel que  $(v', u') \in R'_a$ , alors  $\exists u \in W$  tel que  $(v, u) \in R_a$  et  $(u, u') \in Z$ .
- et  $Z$  est une  $d\varepsilon$ - $n$ -bisimulation.

Nous pouvons également tirer profit de la notion de  $d\varepsilon$ - $n$ -bisimulation pour définir une autre distance. Pour chaque profondeur  $p$ , nous cherchons le plus petit  $\varepsilon$  tel que les deux modèles soient  $d\varepsilon$ - $p$ -bisimilaires. Nous appliquons également un facteur d'atténuation  $\gamma \in ]0, 1]$  à chacune de ces distances. Ainsi, plus la différence entre les deux modèles se trouve à une profondeur élevée, moins elle est importante pour définir la distance entre les modèles.

**Définition 18 (Distance et  $d\varepsilon$ - $n$ -bisimulation).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soit  $\gamma \in ]0, 1]$ . Nous notons  $d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M')$  la distance entre  $M$  et  $M'$ , définie comme suit :

$$d\mathcal{ENB}_d^\gamma(M, M') = \sum_{i=1}^n (\min(\varepsilon \mid \mu(M) \stackrel{d, \varepsilon}{\sim}_i \mu(M')) \times \gamma^{(i)})$$

où  $n = \max(\text{height}(M), \text{height}(M')) + 2$ .

<sup>4</sup> Une distance est dite non drastique lorsqu'elle ne est pas la distance drastique.

Il est facile de montrer que, pour un facteur d'atténuation suffisamment petit,  $d\mathcal{NB}_d^\gamma$  satisfait **(D5)**. Comme nous l'avons fait avec  $d\mathcal{EB}_d$ , nous prenons en compte les valuations des mondes provoquant la discordance. Ainsi, encore une fois, si une distance propositionnelle non drastique  $d$  est utilisée,  $d\mathcal{NB}_d^\gamma$  satisfait également **(D7)** et donc **(D6)**.

**Proposition 6.**

1. Pour toute distance propositionnelle  $d$ , et pour tout facteur d'atténuation  $\gamma$ ,  $d\mathcal{NB}_d^\gamma$  satisfait **(D1)-(D4)**.
2. Dans le cas général,  $d\mathcal{NB}_d^\gamma$  ne satisfait ni **(D5)**, ni **(D6)** ni **(D7)**.
3. Néanmoins, pour toute distance propositionnelle  $d$ , il existe  $\lambda \in ]0, 1]$  tel que pour tout  $\gamma < \lambda$ ,  $d\mathcal{NB}_d^\gamma$  satisfait **(D5)**;
4. et pour toute distance propositionnelle non drastique  $d$ ,  $d\mathcal{NB}_d^\gamma$  satisfait **(D6)** et **(D7)**.

**5.2 Distance entre arbres**

Nous définissons maintenant une distance entre les modèles de Kripke sur la base des modèles arborescents qui leur correspondent.

**Définition 19 (Modèle arborescent).** Soit  $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$  un modèle de Kripke. Le modèle arborescent correspondant à  $M$  est le quadruplet  $\langle W', R', V', w_0 \rangle$  où :

- (i)  $W' = \{w_0\} \cup \{\sigma = w_0 a_1 w_1 a_2 \dots a_{n-1} w_{n-1} a_n w_n \mid (w_0, w_1) \in R_{a_1}, \dots, (w_{n-1}, w_n) \in R_{a_n}\}$ ;
- (ii)  $R'_a = \{R'_a \mid a \in \mathbb{A}\}$ ;
- (iii)  $R'_a = \{(\sigma, \sigma a w) \mid \sigma, \sigma a w \in W'\}$ ;
- (iv)  $V'_{w_0}(p) = V_{w_0}(p)$ ;
- (v)  $V'_{\sigma a w}(p) = V_w(p)$ .

**Définition 20 (Fonction d'arborescence).** Soit  $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$  un modèle de Kripke. Nous notons  $\tau(M)$  le modèle arborescent correspondant à  $M$ .

**Proposition 7.** Soit  $M = \langle W, R, V, w_0 \rangle$  un modèle de Kripke.  $\tau(M)$  est bisimilaire à  $M$ .

Supposons que nous voulions mesurer la distance entre  $M$  et  $M'$ . Tout d'abord, nous générons les modèles arborescents correspondants  $A$  et  $A'$ . Ensuite, nous mesurons la distance de Hamming entre les racines des deux arbres et faisons la somme de cette distance avec la distance entre les sous-arbres de  $A$  et  $A'$  définie comme suit : pour chaque sous-arbre  $\alpha$  de  $A$ , nous cherchons récursivement le sous-arbre  $\alpha'$  de  $A'$  qui est à une distance minimale de  $\alpha$ . Une fois tous les couples  $(\alpha, \alpha')$  trouvés, nous faisons la somme des distances et appliquons un facteur d'atténuation  $\gamma \in ]0, 1]$ . Notez qu'un  $\alpha$  ne peut correspondre qu'à un  $\alpha'$ . Dans le cas où un sous-arbre  $\alpha$  n'a pas de sous-arbre correspondant, nous le faisons correspondre à un sous-arbre  $\pi$  qui, par défaut, est à une distance maximale de  $\alpha$  (nous utilisons ici  $\text{card}(\mathbb{P})$  comme distance maximale entre les mondes).

**Définition 21 (Distance entre arbres).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke. Soit  $\gamma \in ]0, 1]$ .

$$d\mathcal{T}\pi^\gamma(M, M') = h(w, w') \cdot \gamma^{\text{height}_M(w)} + \sum_{a \in \mathbb{A}} d\mathcal{T}\pi_a^\gamma(\tau(\mu(M)), \tau(\mu(M')))$$

où  $\text{height}_M(w)$  correspond à la profondeur de  $w$  dans le modèle arborescent  $M$ .

$$h(w, w') = \begin{cases} \text{card}(\mathbb{P}) & \text{si } w = \pi \text{ ou } w' = \pi \\ \sum_{p \in \mathbb{P}} (|V_w(p) - V_{w'}(p)|) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$d\mathcal{T}\pi_a^\gamma(\tau(M), \tau(M')) = \min_{\substack{b \in B_a^{w, w'} \\ (v, v') \in b}} \left( \sum d\mathcal{T}\pi^\gamma \left( \begin{matrix} \langle W, R, V, v \rangle \\ \langle W', R', V', v' \rangle \end{matrix} \right) \right)$$

$$B_a^{w, w'} = \{b \mid b \in \mathcal{P}((R_a(w) \cup \{\pi\}) \times (R'_a(w')) \cup \{\pi\}) \text{ et } R_a(w) \subseteq \text{dom}(b) \text{ et } R'_a(w') \subseteq \text{img}(b)\}$$

Pour un facteur d'atténuation assez petit,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  satisfait **(D5)**. Et, comme nous comparons les valuations des mondes causant la différence entre les modèles,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  satisfait **(D7)** et donc **(D6)**.

**Proposition 8.**

1. Pour tout facteur d'atténuation  $\gamma$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  satisfait **(D1)-(D4)**.
2. Pour tout facteur d'atténuation  $\gamma$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  satisfait **(D6)** et **(D7)**.
3. Il existe  $\lambda \in ]0, 1]$  tel que pour tout  $\gamma < \lambda$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  satisfait **(D5)**.

**5.3 Distance entre ensembles de mondes**

Enfin, nous définissons une distance entre modèles de Kripke basée sur une distance  $d$  entre ensembles de mondes<sup>5</sup>. Ici, nous calculons, pour chaque profondeur  $p$ , la distance entre les deux ensembles de valuations à la profondeur  $p$ . Nous appliquons également un facteur d'atténuation  $\gamma \in ]0, 1]$  à chacune des distances intermédiaires.

**Définition 22 (Distance entre ensembles de mondes).** Soient  $M = \langle W, R, V, w \rangle$  et  $M' = \langle W', R', V', w' \rangle$  deux modèles de Kripke et  $d$  une distance entre ensembles de mondes. Soit  $\gamma \in ]0, 1]$ . Nous notons  $d\mathcal{WS}_d^\gamma(M, M')$  la distance entre  $M$  et  $M'$ , définie comme suit :

$$d\mathcal{WS}_d^\gamma(M, M') = \mathcal{F}(\sigma_0(\mu(M), \mu(M')), \dots, \sigma_n(\mu(M), \mu(M'))) \text{ où :}$$

$$\sigma_0(M, M') = d(\{w\}, \{w'\})$$

$$\sigma_1(M, M') = \text{avg}\{d(R_a(w), R'_a(w')) \mid a \in \mathbb{A}\}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n(M, M') = \text{avg}\{d(R_{a_{i_1} \circ \dots \circ a_{i_n}}(w), R'_{a_{i_1} \circ \dots \circ a_{i_n}}(w')) \mid a_{i_k} \neq a_{i_{k+1}} \in \mathbb{A}\}$$

$$\mathcal{F}(\sigma_0, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=0}^n (\sigma_i \cdot \gamma^{(i)}).$$

5.  $d$  est censée satisfaire les propriétés de distance habituelles (indiscernabilité, symétrie, sous-additivité et non négativité).

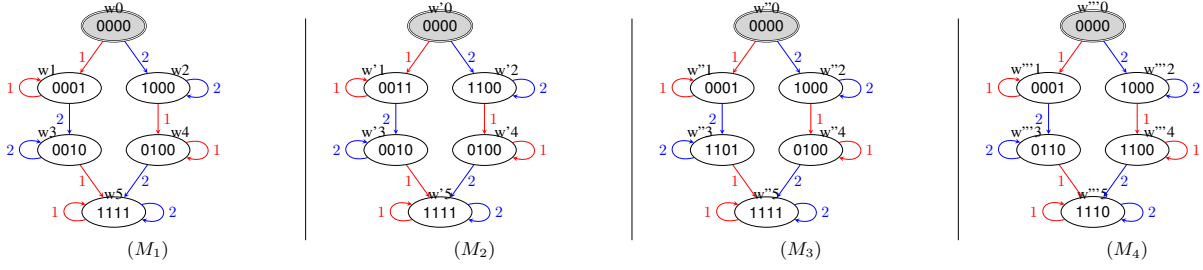


FIGURE 1 – Quatre modèles de Kripke <sup>6</sup>

$\gamma = 1/2$	$M_1, M_2$	$M_1, M_3$	$M_1, M_4$	$M_2, M_3$	$M_2, M_4$	$M_3, M_4$
$d\mathcal{NB}$	0,800	0,600	0,600	0,800	0,800	0,600
$d\mathcal{EB}_h$	1,000	4,000	1,000	4,000	1,000	3,000
$d\mathcal{ENB}_h^\gamma$	0,938	1,750	0,438	2,250	0,938	1,312
$d\mathcal{T}\pi^\gamma$	2,500	1,000	0,500	3,500	3,000	1,000
$d\mathcal{WS}_D^{\gamma,7}$	0,500	0,125	0,469	0,625	0,969	0,469
$d\mathcal{WS}_H^\gamma$	0,500	0,500	0,469	1,000	0,969	0,719

TABLE 1 – Distances entre les modèles de la figure 1

	(D5)	(D6)	(D7)
$d\mathcal{NB}$	✓	×	×
$d\mathcal{EB}_d$	×	✓#	✓#
$d\mathcal{ENB}_d^\gamma$	✓ <sup>γ</sup>	✓#	✓#
$d\mathcal{T}\pi^\gamma$	✓ <sup>γ</sup>	✓	✓
$d\mathcal{WS}_d^\gamma$	✓ <sup>γ</sup>	✓#	✓#

TABLE 2 – Distances et certaines propriétés qu'elles satisfont. ✓ signifie « satisfait par la distance », ✓<sup>γ</sup> signifie « satisfait pour un facteur d'atténuation assez petit », ✓# signifie « satisfait si une distance non drastique est utilisée », et × signifie « non satisfait ».

où  $n = \max(\text{height}(M), \text{height}(M')) + 2$

Par exemple, nous pouvons utiliser la distance de Hausdorff [13] que nous adaptons aux modèles  $\text{KD45}_n$ .

**Définition 23 (Distance de Hausdorff).** Soient  $W$  et  $W'$  deux ensembles de mondes. Nous définissons la distance de Hausdorff entre  $W$  et  $W'$  comme suit :

$$\mathcal{H}(W, W') = \max \left( \begin{array}{l} \max(\min(h(w, w') | w' \in W') | w \in W) \\ \max(\min(h(w, w') | w \in W) | w' \in W') \end{array} \right)$$

Nous désignons par  $d\mathcal{WS}_H^\gamma$  la distance définie par la définition 22 en utilisant la distance de Hausdorff entre les ensembles de mondes.

Pour toute distance propositionnelle  $d$  et un facteur d'atténuation  $\gamma$  assez petit,  $d\mathcal{WS}_d^\gamma$  satisfait (D5). Comme nous prenons en compte la valuation des mondes, en utilisant une distance non drastique  $d$  (telle que la distance de Hausdorff)  $d\mathcal{WS}_d^\gamma$  satisfait également (D7) et donc (D6). Notons que, en utilisant la distance drastique  $D$  entre ensembles de mondes,  $d\mathcal{WS}_D^\gamma$  ne satisfait ni (D7) ni (D6). En effet, dans ce cas, les discordances entre les valuations des mondes ne sont pas considérées.

**Proposition 9.**

1. Pour toute distance propositionnelle  $d$  et tout facteur d'atténuation  $\gamma$ ,  $d\mathcal{WS}_d^\gamma$  satisfait (D1)-(D4).
2. Dans le cas général,  $d\mathcal{WS}_d^\gamma$  ne satisfait ni (D5), ni (D6) ni (D7).
3. Néanmoins, pour toute distance propositionnelle  $d$ , il existe  $\lambda \in ]0, 1]$  tel que pour tout  $\gamma < \lambda$ ,  $d\mathcal{WS}_d^\gamma$  satisfait (D5).
4. Et, pour toute distance non drastique  $d$ ,  $d\mathcal{WS}_d^\gamma$  satisfait (D6) et (D7).

## 5.4 Comparaison entre les distances introduites

Nos distances capturent différentes intuitions sur la façon dont deux modèles de Kripke sont proches. Une question clé est de déterminer à quel point ces distances sont fines. En effet, plus une distance est fine, plus l'opérateur de révision de croyances basé sur celle-ci conserve d'informations.

**Définition 24 (Raffinement).** Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances.  $d_1$  est au moins aussi fine que  $d_2$  (noté  $d_1 \geq_f d_2$ ) si et seulement si  $\forall a, b, c$ , si  $d_1(a, b) < d_1(a, c)$ , alors  $d_2(a, b) < d_2(a, c)$  et si  $d_1(a, b) = d_1(a, c)$ , alors  $d_2(a, b) = d_2(a, c)$ .

Fondamentalement, une distance  $d_1$  entre modèles de Kripke affine une distance  $d_2$  si elle permet de séparer des modèles qui sont indifférents pour  $d_2$ .

Nous pouvons montrer que les distances introduites sont incomparables pour le raffinement :

**Proposition 10.**  $d\mathcal{NB}$ ,  $d\mathcal{EB}_h$ ,  $d\mathcal{ENB}_h^\gamma$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ ,  $d\mathcal{WS}_D^\gamma$  et  $d\mathcal{WS}_H^\gamma$  sont deux à deux incomparables par rapport à  $\geq_f$ .

Ce résultat justifie l'intérêt de considérer les cinq distances.

Illustrons maintenant les différences entre ces distances sur un petit exemple.

**Exemple 1.** Considérons les quatre modèles de la figure 1. Les différences entre les modèles  $M_1$  et  $M_2$  sont dans les mondes  $w'_1$  et  $w'_2$  (height = 1). Dans le premier modèle, l'agent 1 croit 0001 et l'agent 2 croit 1000, et dans

6. Dans cette figure, ainsi que les suivantes, le monde pointé est grisé et doublement cerclé.

7. Nous désignons par  $d\mathcal{WS}_D^\gamma$  la distance définie via la définition 22 en utilisant la distance drastique entre les ensembles de mondes.



le deuxième modèle, l'agent 1 croit 0011 et l'agent 2 croit 1100. La différence entre les modèles  $M_1$  et  $M_3$  est dans le monde  $w_3''$  (height = 2). Les différences entre les modèles  $M_1$  et  $M_4$  sont dans les mondes  $w_3'''$ ,  $w_4'''$  et  $w_5'''$  (height = 2). Le tableau 1 présente les distances entre ces modèles. Nous pouvons vérifier que  $d\mathcal{NB}$ ,  $d\mathcal{EB}_a$ ,  $d\mathcal{ENB}_d^\gamma$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$ ,  $d\mathcal{WS}_D^\gamma$  et  $d\mathcal{WS}_H^\gamma$  n'ordonnent pas ces quatre modèles de la même manière. Notons également que le facteur d'atténuation  $\gamma = 1/2$  n'est pas assez petit pour assurer que (D5) soit satisfaite.

Une autre façon de comparer les distances que nous étudions est de se concentrer sur la satisfaction des propriétés (D5)-(D7). Le tableau 2 résume les résultats obtenus.

## 6 Révision de croyances à base de distances

Nous montrons maintenant comment les distances considérées dans les sections précédentes peuvent être exploitées pour réviser des modèles de Kripke, ou plus généralement des ensembles finis de modèles de Kripke. La révision d'un modèle de Kripke par une formule pouvant conduire à plusieurs (mais un nombre fini de) modèles, pouvoir prendre en compte de tels ensembles est, en effet, indispensable pour pouvoir itérer la révision.

Soit  $\mathcal{M}$  un ensemble fini de modèles de Kripke (KD45n finis, pointés) et soit  $\alpha$  une formule de  $\mathcal{L}$ . On note  $Mod(\alpha)$  l'ensemble des modèles  $M$  de Kripke qui satisfont  $\alpha$ . La révision de  $\mathcal{M}$  par  $\alpha$  est un ensemble de modèles de Kripke, noté  $\mathcal{M} \circ \alpha$ . On attend de l'opérateur de révision  $\circ$  qu'il satisfasse un ensemble de conditions de rationalité, qui rappellent celles proposées par Katsuno et Mendelzon dans le cas de la logique propositionnelle classique [17] :

- (R1)  $\mathcal{M} \circ \alpha \subseteq Mod(\alpha)$
- (R2) si  $\mathcal{M} \cap Mod(\alpha) \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{M} \circ \alpha = \mathcal{M} \cap Mod(\alpha)$
- (R3) si  $Mod(\alpha) \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{M} \circ \alpha \neq \emptyset$
- (R4) si  $Mod(\alpha) = Mod(\beta)$  alors  $\mathcal{M} \circ \alpha = \mathcal{M} \circ \beta$
- (R5)  $(\mathcal{M} \circ \alpha) \cap Mod(\beta) \subseteq \mathcal{M} \circ (\alpha \wedge \beta)$
- (R6) si  $(\mathcal{M} \circ \alpha) \cap Mod(\beta) \neq \emptyset$   
alors  $\mathcal{M} \circ (\alpha \wedge \beta) \subseteq (\mathcal{M} \circ \alpha) \cap Mod(\beta)$

Dans le cas de la logique propositionnelle classique, Katsuno et Mendelzon ont proposé un théorème de représentation permettant de caractériser tous les opérateurs de révision satisfaisant les conditions attendues. Ce théorème repose sur la notion d'assignement fidèle. Il est intéressant d'adapter ce concept à notre cadre pour obtenir des conditions qui suffisent à garantir la rationalité d'un opérateur de révision :

**Définition 25 (Assignement fidèle).** Un assignement fidèle est une application associant à tout ensemble fini  $\mathcal{M}$  de modèles de Kripke un pré-ordre  $\leq_{\mathcal{M}}$  sur l'ensemble des modèles de Kripke, tel que :

- si  $M_1 \in \mathcal{M}$  et  $M_2 \in \mathcal{M}$  alors  $M_1 \simeq_{\mathcal{M}} M_2$  ;

- si  $M_1 \in \mathcal{M}$  et  $M_2 \notin \mathcal{M}$  alors  $M_1 <_{\mathcal{M}} M_2$  ;

On a le résultat suivant :

**Proposition 11.** Soit  $\circ$  un opérateur de révision associant à tout ensemble fini  $\mathcal{M}$  de modèles de Kripke et à toute formule  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  un ensemble de modèles de Kripke. S'il existe un assignement fidèle associant à tout ensemble fini  $\mathcal{M}$  de modèles de Kripke à un pré-ordre total naïthérien<sup>8</sup>  $\leq_{\mathcal{M}}$  tel que  $\mathcal{M} \circ \alpha = \min(Mod(\alpha), \leq_{\mathcal{M}})$  alors  $\circ$  vérifie (R1)-(R6).

Etant donnée une distance  $d$  entre modèles de Kripke et un ensemble fini  $\mathcal{M}$  de modèles de Kripke, on note pour tout modèle de Kripke  $M$ ,  $d(M, \mathcal{M}) = \min_{M' \in \mathcal{M}} (d(M, M'))$  et  $height(\mathcal{M}) = \max_{M \in \mathcal{M}} (height(M))$ . Comme  $\mathcal{M}$  est bien fini, on peut assurer que  $d(M, \mathcal{M})$  et  $height(\mathcal{M})$  sont bien définis. Sur cette base, on peut facilement associer à  $d$  et à  $\mathcal{M}$  un pré-ordre total  $\leq_{\mathcal{M}}$  en posant  $M_1 \leq_{\mathcal{M}} M_2$  ssi  $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$ .

Pour garantir que  $\leq_{\mathcal{M}}$  est naïthérien, on va considérer deux conditions supplémentaires sur  $d$  :

**Définition 26 (Distance bornée).** Une distance  $d$  entre modèles de Kripke est dite bornée si et seulement si pour tout ensemble fini de modèles de Kripke  $\mathcal{M}$ , pour toute formule  $\alpha \in \mathcal{L}$  telle que  $deg(\alpha) = k$ , pour tout modèle de Kripke  $M_2$  tel que

- $M_2$  satisfait  $\alpha$  ;
- $height(M_2) > \max(k + 1, height(\mathcal{M}))$ ,

il existe un modèle de Kripke  $M_1$  tel que

- $M_1$  satisfait  $\alpha$  ;
- $height(M_1) \leq \max(k + 1, height(\mathcal{M}))$  ;
- $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$ .

**Définition 27 (Condition du modèle minimal).** Une distance  $d$  entre modèles de Kripke satisfait la condition du modèle minimal si et seulement si pour tout modèle  $M_1$  et  $M_2$ ,  $d(M_1, M_2) = d(\mu(M_1), \mu(M_2))$ .

Quand  $d$  est bornée, pour tout modèle  $M_2 \in Mod(\alpha)$ , on sait qu'il existe un modèle  $M_1 \in Mod(\alpha)$  tel que  $height(M_1) \leq \max(deg(\alpha) + 1, height(\mathcal{M}))$  et  $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$ . Or, il n'y a qu'un nombre fini de modèles  $M_1$  de  $Mod(\alpha)$  (à la bisimulation près) vérifiant  $height(M_1) \leq \max(deg(\alpha) + 1, height(\mathcal{M}))$ , ce qui assure que  $\leq_{\mathcal{M}}$  est naïthérien.

**Proposition 12.** Soit  $d$  une distance bornée et vérifiant la condition du modèle minimal. L'opérateur de révision  $\circ_d$ , défini par l'assignement fidèle associant à tout ensemble de modèles de Kripke  $\mathcal{M}$  le pré-ordre  $\leq_{\mathcal{M}}$  défini par  $M_1 \leq_{\mathcal{M}} M_2$  si et seulement si  $d(M_1, \mathcal{M}) \leq d(M_2, \mathcal{M})$ , satisfait (R1)-(R6).

8. Un pré-ordre sur un ensemble  $E$  est naïthérien s'il n'existe pas de suite d'éléments de  $E$  qui soit infinie et strictement décroissante pour le pré-ordre.

Le dernier point consiste à déterminer si certaines des distances introduites vérifient les conditions posées. Nous avons :

**Proposition 13.**  $d\mathcal{NB}$ ,  $d\mathcal{EB}_d$ ,  $d\mathcal{ENB}_h^\gamma$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  et  $d\mathcal{WS}_H^\gamma$  sont bornées et vérifient la condition du modèle minimal.

Par conséquent, nous pouvons définir des opérateurs de révision AGM sur les ensembles de modèles  $KD45_n$  basés sur les cinq distances  $d\mathcal{NB}$ ,  $d\mathcal{EB}_d$ ,  $d\mathcal{ENB}_h^\gamma$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  et  $d\mathcal{WS}_H^\gamma$ . Les distances  $d\mathcal{ENB}_h^\gamma$ ,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  et  $d\mathcal{WS}_H^\gamma$  apparaissent comme les plus intéressantes (parmi celles qui sont considérées ici), car elles satisfont également toutes les propriétés attendues **(D1)-(D7)**.

Nous allons maintenant illustrer les cinq opérateurs de révision basés sur ces distances.

**Exemple 2.** Considérons le modèle de Kripke de la figure 2. Dans cette situation, l'agent 1 croit  $\neg x \wedge y$ , l'agent 2 croit  $x \wedge \neg y$  et l'agent 3 croit  $x \wedge y$ . L'agent 1 croit que les agents 2 et 3 croient  $x \wedge y$ , l'agent 2 croit que l'agent 1 croit  $x \wedge y$  et que l'agent 3 croit  $\neg x \wedge y$ , l'agent 3 croit que les agents 1 et 2 croient  $\neg x \wedge y$ .

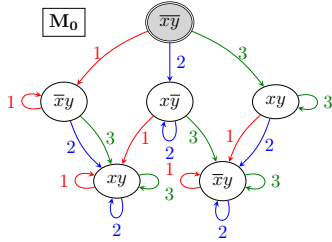


FIGURE 2 – Modèle de Kripke avant la révision

Penchons-nous sur le résultat de la révision de ce modèle par la formule  $\alpha = x \wedge B_1(\neg y) \wedge B_2(\neg x) \wedge B_3(\neg x \wedge \neg y)$  pour nos cinq opérateurs de révision  $\circ_{d\mathcal{NB}}$ ,  $\circ_{d\mathcal{EB}_d}$ ,  $\circ_{d\mathcal{ENB}_d^\gamma}$ ,  $\circ_{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$  et  $\circ_{d\mathcal{WS}_H^\gamma}$ . Nous révisons donc ce modèle en changeant le monde réel et les croyances au sujet du monde réel des trois agents.

La figure 3 montre deux modèles de Kripke  $M_1$  et  $M_2$ . Bien que les deux modèles  $M_1$  et  $M_2$  soient sélectionnés comme modèles du résultat de la révision<sup>9</sup> par les opérateurs  $\circ_{d\mathcal{NB}}$ ,  $\circ_{d\mathcal{EB}_d}$  et  $\circ_{d\mathcal{ENB}_d^\gamma}$ ,  $M_2$  est le seul modèle issu de la révision de  $M_0$  par  $\alpha$  par les opérateurs de révision  $\circ_{d\mathcal{WS}_H^\gamma}$  et  $\circ_{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$ .

Considérons  $\circ_{d\mathcal{NB}}$ . Puisque la valuation du monde pointé doit changer pour satisfaire  $\alpha$ , tous les modèles de  $\alpha$  seront à égale distance de  $M_0$ . Considérons maintenant  $\circ_{d\mathcal{EB}_d}$  et  $\circ_{d\mathcal{ENB}_d^\gamma}$ . Puisque la valuation du monde accessible par l'agent 3 doit changer complètement (de  $xy$  à  $\bar{x}\bar{y}$ ) pour satisfaire  $\alpha$ , cette fois encore, tous les modèles de  $\alpha$  seront à égale distance de  $M_0$ . Finalement, pour  $\circ_{d\mathcal{T}\pi^\gamma}$  et  $\circ_{d\mathcal{WS}_H^\gamma}$ , comme les distances associées considèrent les valuations de chaque monde à chaque hauteur du modèle,

9. Ainsi que plusieurs autres modèles que nous ne pouvons pas énumérer ici par manque de place.

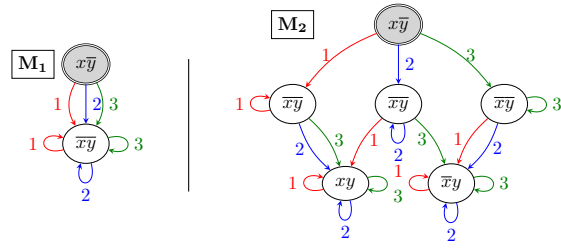


FIGURE 3 – Modèles de Kripke après la révision

le modèle le plus proche est celui où les seuls changements sont les valuations correspondantes. Ainsi,  $d\mathcal{T}\pi^\gamma$  et  $d\mathcal{WS}_H^\gamma$  apparaissent comme les distances les plus adéquates pour définir les opérateurs de révision à base de distance.

Dans [2] la révision modélisée est une révision subjective, ce qui signifie que la nouvelle information est reçue par l'un des agents du système (ainsi, après la révision, les modèles subjectifs de cet agent seront modifiés). Ici, la révision qui est définie est celle de l'observateur du système multi-agent, qui a une description du monde réel et des croyances des agents.

## 7 Conclusion

Nous avons introduit et étudié des distances entre modèles de Kripke  $KD45_n$ . L'objectif était de caractériser les opérateurs de révision basés sur ces distances. Nous avons identifié les propriétés que toutes les distances étudiées satisfont, et avons montré qu'elles sont incomparables par rapport au raffinement. Nous avons montré que le théorème de représentation en termes d'assignements fidèles définis par Katsuno et Mendelzon [16] peut être adapté pour définir la révision d'un ensemble fini de modèles de Kripke  $KD45_n$  par une formule. Enfin, nous avons montré que toutes les distances que nous avons définies peuvent être utilisées pour définir des opérateurs de révision. Néanmoins, deux d'entre elles apparaissent comme meilleures que les autres.

Clairement, les distances définies ici ont un sens pour les autres classes de modèles de Kripke que les modèles  $KD45_n$ . Cependant, l'ensemble de propriétés attendues ne doit pas nécessairement rester le même. Identifier les conditions raisonnables que les distances doivent satisfaire pour réviser des préférences, des programmes, etc. est une perspective pour des recherches futures.

## Références

- [1] T. Ågotnes, W. van der Hoek, and M. Wooldridge. Conservative social laws. In *ECAI*, pages 49–54, 2012.

- [2] G. Aucher. *Perspectives on belief and change*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III; University of Otago, 2008.
- [3] G. Aucher. Generalizing AGM to a multi-agent setting. *Logic Journal of the IGPL*, 18(4) :530–558, 2010.
- [4] P. Balbiani and A. Herzig. Talkin’bout kripke models. *International Workshop on Hybrid Logic 2007*, pages 3–12, 2007.
- [5] A. Baltag, V. Fiutek, and S. Smets. *Krister Segerberg on Logic of Actions*, chapter DDL as an “Internalization” of Dynamic Belief Revision, pages 253–280. Springer Netherlands, Dordrecht, 2014.
- [6] A. Baltag and S. Smets. Dynamic belief revision over multi-agent plausibility models. In *Proc. of LOFT’06*, pages 11–24, 2006.
- [7] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.
- [8] O. Board. Dynamic interactive epistemology. *Games and Economic Behavior*, 49(1) :49–80, 2004.
- [9] T. Caridroit, S. Konieczny, T. de Lima, and P. Marquis. Private expansion and revision in multi-agent settings. In *Proceedings of ECSQARU’15*, pages 175–185, 2015.
- [10] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI’88)*, pages 475–479, 1988.
- [11] R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi. *Reasoning about Knowledge*. The MIT Press, 1995.
- [12] K. D. Forbus. Introducing actions into qualitative simulation. In *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Detroit, MI, USA, August 1989*, pages 1273–1278, 1989.
- [13] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit and Company, Leipzig, 1914. Das Hauptwerk von Felix Hausdorff.
- [14] A. Herzig. Logics of knowledge and action : critical analysis and challenges. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 29(5) :719–753, 2014.
- [15] J. E. Hopcroft. An  $n \log n$  algorithm for minimizing states in a finite automaton. Technical report, Stanford, CA, USA, 1971.
- [16] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR’91)*, pages 387–394, 1991.
- [17] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52(3) :263–294, 1992.
- [18] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis.  $Da^2$  merging operators. *Artif. Intell.*, 157(1-2) :49–79, 2004.
- [19] S. Konieczny and R. P. Pérez. Merging information under constraints : A logical framework. *J. Log. Comput.*, 12(5) :773–808, 2002.
- [20] D. Lehmann, M. Magidor, and K. Schlechta. Distance semantics for belief revision. *Journal of Symbolic Logic*, 66(1) :295–317, 2001.
- [21] K. Schlechta. Non-prioritized belief revision based on distances between models. *Theoria*, pages 34–53, 1998. Special issue on non-prioritized belief revision.
- [22] K. Segerberg. *Frontiers in Belief Revision*, chapter The Basic Dynamic Doxastic Logic of AGM, pages 57–84. Springer Netherlands, Dordrecht, 2001.
- [23] A. Sutherland, W. *Introduction to metric and topological spaces*. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [24] J. van Benthem. Dynamic logic for belief revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2) :129–155, 2007.
- [25] H. P. van Ditmarsch. Prolegomena to dynamic logic for belief revision. *Synthese*, 147(2) :229–275, 2005.