Sur la fusion de croyances égalitaire

Patricia Everaere [1] **Sébastien Konieczny** [2] **Pierre Marquis** [2]
[1] LIFL-CNRS, USTL, France
[2] CRIL-CNRS, Université d'Artois, France
patricia.everaere@univ-lille1.fr {konieczny,marquis}@cril.fr

Résumé

Il y a deux grandes familles d'opérateurs de fusion : les opérateurs majoritaires et les opérateurs d'arbitrage. Alors qu'il existe de nombreux opérateurs majoritaires, très peu d'opérateurs d'arbitrage ont été définis jusqu'à présent. Dans cet article, nous étudions une notion plus générale que la fusion avec arbitrage : la notion de fusion égalitaire. Nous traduisons dans le cadre de la fusion de croyances deux conditions existantes en théorie du choix social, la condition de Sen-Hammond et la propriété de Pigou-Dalton. Nous montrons que les opérateurs de fusion satisfaisant la condition de Sen-Hammond sont essentiellement ceux qui utilisent le $leximax$ comme fonction d'agrégation. Nous introduisons également deux nouvelles familles d'opérateurs de fusion de croyances, basées respectivement sur la médiane et sur les sommes cumulées (courbes de Lorenz). Nous identifions leurs propriétés de rationalité, en particulier nous étudions leur comportement égalitaire.

Abstract

There are two main sub-families of IC merging operators : majority operators and arbitration ones. While many majority belief merging operators have been defined so far, only few arbitration belief merging operators have been identified. In this paper, we study the more general notion of egalitarian belief merging. We translate to the belief merging framework two egalitarian conditions coming from social choice theory : Sen-Hammond equity, and Pigou-Dalton property. We show that the distance-based merging operators satisfying Sen-Hammond equity are mainly those for which $leximax$ is used as the aggregation function. We also introduce two new families of belief merging operators, based respectively on the median and on an aggregated sum (Lorenz curves). We identify the rationality properties satisfied by these operators and study in particular their egalitarian behaviour.

1 Introduction

Le but de la fusion de croyances est de définir une base de croyances cohérentes à partir d'un ensemble de bases de croyances (le plus souvent) conjointement incohérentes, qui représentent les croyances d'un groupe d'agents. Les propriétés de rationalité des opérateurs de fusion de croyances ont été étudiées dans [15, 11, 10, 9, 5]. En particulier, dans [10], un ensemble de postulats caractérisant les opérateurs de fusion de croyances propositionnelles ont été identifiés. Par ailleurs, de nombreux opérateurs de fusion de croyances ont été définis. La plupart de ces opérateurs sont basés sur des distances, ce qui signifie qu'ils sont définis à partir d'une distance entre interprétations et d'une fonction d'agrégation [15, 11, 9, 4].

Deux familles principales d'opérateurs de fusion de croyances ont été introduits dans [10] : les opérateurs majoritaires, qui résolvent les conflits en se servant de critères majoritaires, et les opérateurs d'arbitrage, qui tentent de déterminer le résultat le plus consensuel. Cependant, bien que de nombreux opérateurs de fusion majoritaires basés sur des distances aient été définis dans la littérature, très peu d'opérateurs d'arbitrage ont été exhibés jusqu'à présent. Plus précisément, les seuls opérateurs IC d'arbitrage connus sont basés sur une distance et utilisent le $leximax$ comme fonction d'agrégation.

Le but de cet article est d'introduire et d'étudier de nouveaux opérateurs égalitaires, en définissant d'autres conditions d'équité que l'arbitrage et en définissant des opérateurs de fusion de croyances les satisfaisant. Dans ce but, nous avons considéré les conditions d'équité considérées en théorie du choix social [1] afin de déterminer si ces conditions ont un sens dans le cadre de la fusion de croyances. En effet, on peut considérer que les opérateurs de fusion majoritaires sont similaires aux méthodes de choix liées au bien-être utilitaire en choix social, dans lesquelles le but est de déterminer les solutions qui ont la meilleure utilité agrégée [8, 13, 17]. D'un autre côté, les opérateurs d'arbitrage sont, eux, similaires aux méthodes de choix liées au bien-être égalitaire en choix social, où l'objectif est de déterminer des solutions les plus équitables possibles, ce qui signifie souvent d'essayer de donner le plus possible aux agents les plus pauvres. Ainsi, des mesures de pauvretés [14, 6, 16, 3] peuvent être utilisées pour définir des approches égalitaires.

Dans la suite de cet article, nous adaptons au cadre de la fusion de croyances deux conditions égalitaires issues de la théorie du choix social : l'axiome d'équité de Sen-Hammond, et la propriété de Pigou-Dalton. Nous montrons que les opérateurs de fusion de croyances basés sur des distances qui satisfont l'axiome d'équité de Sen-Hammond sont essentiellement ceux pour lesquels le $leximax$ est la fonction d'agrégation. Nous introduisons également deux nouvelles familles d'opérateurs de fusion de croyances, basés respectivement sur la médiane et sur les sommes cumulées (courbes de Lorenz). Nous identifions les propriétés de rationalité satisfaites par ces opérateurs et étudions en particulier leur comportement égalitaire.

La suite de cet article est organisée comme suit. La section 2 présente des notions préliminaires sur la fusion de croyances propositionnelle, essentiellement les opérateurs IC et les opérateurs basés sur des distances. La section 3 montre comment la condition d'équité de Sen-Hammond et la propriété de Pigou-Dalton peuvent être traduites dans le cadre de la fusion de croyances. Comme nous cherchons à définir de nouveaux opérateurs égalitaires basés sur des distances, certains postulats IC doivent être relâchés ; nous définissons en section 4 une famille générale d'opérateurs de fusion de croyances, appelés les opérateurs de fusion pré-IC, obtenus en relâchant deux postulats IC. Nous pouvons ensuite définir en section 5 la famille des opérateurs de fusion basés sur des distances et la médiane. Nous montrons que les opérateurs de cette famille basés sur la fonction d'agrégation $leximed^k$ sont des opérateurs pré-IC, et ceux pour qui $k \geq 0.5$ satisfont également le postulat d'arbitrage **(Arb)**, mais pas la propriété de Pigou/Dalton. Enfin, à la section 6 nous introduisons la famille d'opérateurs de fusion basés sur des distances et des sommes cumulées ; nous identifions dans cette familles des opérateurs pré-IC, et parmi eux un opérateur satisfiant la propriété de Pigou-Dalton. La section 7 conclut l'article.

2 Fusion de croyances propositionnelle

Nous considérons un langage $\mathcal{L}$ défini à partir d'un ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et des connecteurs usuels. Nous notons p le cardinal de $\mathcal{P}$.

Une interprétation (ou état du monde) ω est une fonction totale de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. Ω est l'ensemble des toutes les interprétations. Une interprétation est usuellement notée par un vecteur de bits dès qu'un ordre strict total est spécifié sur $\mathcal{P}$. Une interprétation ω est un modèle d'une formule $\phi \in \mathcal{L}$ si et seulement si elle la rend vraie au sens usuel. $[\phi]$ représente l'ensemble des modèles de la formule ϕ, i.e., $[\phi] = \{\omega \in \Omega \mid \omega \models \phi\}$.

Une *base* K représente l'ensemble des croyances d'un agent, c'est un ensemble fini de formules propositionnelles, interprété conjonctivement (i.e. vu comme la conjonction de ses éléments).

Un *profil* E représente un groupe de n agents impliqués dans le processus de fusion ; formellement E est défini par un multi-ensemble de bases $\{K_1, \ldots, K_n\}$. $\bigwedge E$ est la conjonction de tous les éléments de E, et $\sqcup$ l'union multi-ensembliste. Deux multi-ensembles $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ et $E = \{K'_1, \ldots, K'_n\}$ sont équivalents, noté $E \equiv E'$, ssi il existe une permutation π sur $\{1, \ldots, n\}$ t.q. pour chaque $i \in 1, \ldots, n$, on a $K_i \equiv K'_{\pi(i)}$.

Une *contrainte d'intégrité* μ est une formule qui restreint le résultat possible du processus de fusion.

Un *opérateur de fusion* $\triangle$ est une fonction qui associe à un profil E et une contrainte d'intégrité μ une base $\triangle_\mu(E)$, appelée *base fusionnée.*

Les propriétés logiques données dans [10] afin de caractériser les opérateurs de fusion de croyances IC sont les suivantes :

Définition 1 *Un opérateur de fusion* $\triangle$ *est un* opérateur de fusion IC *ssi il satisfait les propriétés suivantes :*

(IC0) $\triangle_\mu(E) \models \mu$

(IC1) *Si* μ *est cohérent, alors* $\triangle_\mu(E)$ *est cohérent*

(IC2) *Si* $\bigwedge E$ *est cohérent avec* μ*, alors* $\triangle_\mu(E) \equiv \bigwedge E \wedge \mu$

(IC3) *Si* $E_1 \equiv E_2$ *et* $\mu_1 \equiv \mu_2$*, alors* $\triangle_{\mu_1}(E_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(E_2)$

(IC4) *Si* $K_1 \models \mu$ *et* $K_2 \models \mu$*, alors* $\triangle_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ *est cohérent si et seulement si* $\triangle_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ *est cohérent*

(IC5) $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \models \triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2)$

(IC6) *Si* $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2)$ *est cohérent, alors* $\triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2)$

(IC7) $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$

(IC8) *Si* $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ *est cohérent, alors* $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \triangle_{\mu_1}(E)$

Voir [10] pour une explication de ces propriétés. Deux familles d'opérateurs de fusion IC ont été aussi définies dans [10] :

Définition 2 *Un* opérateur IC majoritaire *est un opérateur de fusion IC qui satisfait la propriété majoritaire suivante :*

(Maj) $\exists n\ \triangle_\mu(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \models \triangle_\mu(E_2)$

Un opérateur IC d'arbitrage *est un opérateur de fusion IC qui satisfait la propriété d'arbitrage suivante :*

(Arb) $\left.\begin{array}{l} \triangle_{\mu_1}(K_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(K_2) \\ \triangle_{\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2}(\{K_1, K_2\}) \equiv (\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2) \\ \mu_1 \not\models \mu_2 \\ \mu_2 \not\models \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\{K_1, K_2\}) \equiv \triangle_{\mu_1}(K_1)$

Les opérateurs majoritaires résolvent les conflits en utilisant la majorité. **(Maj)** exprime l'idée que si l'on duplique un profil E_2 suffisamment de fois, alors le résultat de la fusion de E_1 avec les copies de E_2 doit suivre les choix du profil E_2. Les opérateurs d'arbitrage essaient de trouver le résultat le plus consensuel. La condition 8 correspondante dans la définition 3 et l'exemple 1 à venir illustrent comment la propriété **(Arb)** donne une préférence aux choix consensuels (médians) parmi les interprétations.

Des théorèmes de représentation permettent d'interpréter ces propriétés logiques comme des contraintes sur le choix des interprétations pour définir les modèles de la base de croyances fusionnée :

Définition 3 *Un* assignement syncrétique *est une fonction qui associe à chaque profil E un pré-ordre total $\leq_E$* [1] *sur Ω telle que pour tous profils E, E_1, E_2 et pour toutes bases K, K' les conditions suivantes sont vraies :*

1. *Si $\omega \models \bigwedge E$ et $\omega' \models \bigwedge E$, alors $\omega \simeq_E \omega'$*
2. *Si $\omega \models \bigwedge E$ et $\omega' \not\models \bigwedge E$, alors $\omega <_E \omega'$*
3. *Si $E_1 \equiv E_2$, alors $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$*
4. *$\forall \omega \models K\ \exists \omega' \models K'\ \omega' \leq_{\{K,K'\}} \omega$*
5. *Si $\omega \leq_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$, alors $\omega \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$*
6. *Si $\omega <_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$, alors $\omega <_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$*

Un assignement syncrétique majoritaire *est un assignement syncrétique satisfaisant la condition suivante :*

7. *Si $\omega <_{E_2} \omega'$, alors $\exists n\ \omega <_{E_1 \sqcup E_2^n} \omega'$*

Un assignement syncrétique juste *est un assignement syncrétique satisfaisant la condition suivante :*

8. *Si $\omega <_{K_1} \omega'$, $\omega <_{K_2} \omega''$, et $\omega' \simeq_{\{K_1,K_2\}} \omega''$, alors $\omega <_{\{K_1,K_2\}} \omega'$*

Proposition 1 ([10]) *Un opérateur de fusion $\triangle$ est un opérateur de fusion IC (resp. un opérateur de fusion IC majoritaire, un opérateur de fusion IC d'arbitrage) ssi il existe un assignement syncrétique (resp. un assignement syncrétique majoritaire, un assignement syncrétique juste) qui associe chaque profil E à un pré-ordre total $\leq_E$ sur Ω tel que $[\triangle_\mu(E)] = \min([\mu], \leq_E)$.*

On peut à présent donner quelques exemples d'opérateurs de fusion IC en utilisant des opérateurs basés sur des distances [9] :

Définition 4 *Une* (pseudo-)distance *entre interprétations est une fonction $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$:*

- *$d(\omega_1, \omega_2) = d(\omega_2, \omega_1)$*
- *$d(\omega_1, \omega_2) = 0$ ssi $\omega_1 = \omega_2$*

Les distances usuelles considérées pour la fusion [10] sont la distance de Hamming d_H : $d_H(\omega_1, \omega_2)$ est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent (ce qui correspond à la distance 1-normée, connue aussi comme la distance de Manhattan) et la distance drastique d_D, définie comme $d_D(\omega_1, \omega_2) = 0$ si $\omega_1 = \omega_2$, et $= 1$ sinon (ce qui correspond à la distance infini-normée, connue aussi comme la distance de Tchebychev).

Définition 5 *Une* fonction d'agrégation *est une application* [2] *f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, qui satisfait :*

- *si $x_i \geq x'_i$, alors*
  $f(x_1, ..., x_i, ..., x_m) \geq f(x_1, ..., x'_i, ..., x_m)$ **(monotonie)**
- $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ *si* $\forall i,\ x_i = 0$ **(minimalité)**
- $f(x) = x$ **(identité)**
- *Si σ est une permutation de $\{1, \ldots, m\}$, alors*
  $f(x_1, \ldots, x_m) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ **(symétrie)**

Des propriétés supplémentaires peuvent être considérées pour f, en particulier :

- *si $x_i > x'_i$, alors*
  $f(x_1, ..., x_i, ..., x_m) > f(x_1, ..., x'_i, ..., x_m)$ **(stricte monotonie)**

Définition 6 *Soient d et f respectivement une (pseudo-)distance entre interprétations et une fonction d'agrégation. L'* opérateur de fusion basé sur une distance *$\triangle^{d,f}$ est défini par $[\triangle^{d,f}_\mu(E)] = \min([\mu], \leq_E)$, où le pré-ordre total $\leq_E$ sur Ω est défini de la façon suivante (avec $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$) :*

- *$\omega \leq_E \omega'$ ssi $d(\omega, E) \leq d(\omega', E)$*
- *$d(\omega, E) = f(d(\omega, K_1), \ldots, d(\omega, K_n))$*
- *$d(\omega, K) = \min_{\omega' \models K} d(\omega, \omega')$*

Pour les fonctions d'agrégation usuelles, quelle que soit les distances choisies, les opérateurs basés sur une distance associés ont de bonnes propriétés logiques :

Proposition 2 *Pour toute (pseudo-)distance d :*

- *si f est la somme, le leximin, ou la somme des puissances $n^{\text{ième}}$, alors $\triangle^{d,f}$ est un opérateur IC majoritaire.*
- *si f est le leximax, alors $\triangle^{d,f}$ est un opérateur IC d'arbitrage.*

3 Conditions pour la fusion égalitaire

La seule propriété égalitaire ayant été proposée jusqu'à présent pour la fusion de croyances est la propriété d'*arbitrage*, représentée par le postulat **(Arb)** (ou la condition sémantique 8 correspondante sur les assignements syncrétiques). Un objectif important pour nous est donc de déterminer si d'autres propriétés égalitaires peuvent être définies dans le cadre de la fusion de croyances, et, si la réponse est positive, comment elles sont liées à l'arbitrage.

Si l'on observe attentivement la condition 8 de la définition 3, il apparaît clairement que la propriété d'arbitrage impose des contraintes au résultat de la fusion uniquement

1. nous notons $\leq_K$ pour $\leq_{\{K\}}$, et $\leq_\omega$ pour $\leq_{\{K\}}$ lorsque ω est le seul modèle de K.

2. Formellement, c'est une famille d'applications, une pour chaque entier naturel m.

lorsque le profil est composé de deux bases de croyances. Puis les propriétés IC **(IC5)** et **(IC6)** assurent la propagation de ces contraintes aux profils de taille quelconque.

Nous proposons une première condition alternative, issue de la théorie du choix social, pour caractériser le comportement égalitaire en fusion de croyances. Dans ce cadre, la condition va être traduite en contraintes sur les pré-ordres associés aux profils initiaux. Ces contraintes concernent des profils de taille quelconque, et non plus seulement ceux formés de deux bases seulement. Cette condition, proposée par Hammond [7] est connue dans la littérature du choix social comme la condition d'équité de Sen-Hammond [18]. Avant de la transcrire dans le cadre de la fusion de croyances, nous devons préciser la notion de "satisfaction" respective de deux bases étant donnée une interprétation :

Définition 7 *Etant donnés un opérateur de fusion $\triangle$ définissant un assignement associant chaque profil E à un pré-ordre total $\leq_E$ sur Ω, une interprétation ω, et deux bases K_1 et K_2, nous posons que K_1 est* meilleur que *K_2 étant donné ω, noté $K_1 <_\omega K_2$, ssi $\exists \omega_1 \models K_1, \forall \omega_2 \models K_2, \omega_1 <_\omega \omega_2$.*

A présent, on peut donner une traduction de la condition d'équité de Sen-Hammond (SHe) :

Définition 8 (Condition (SHe)) *Soit $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$.*

$$\left.\begin{array}{l} \omega <_{K_1} \omega' \\ \omega' <_{K_2} \omega \\ \forall i \neq 1,2\ \omega \simeq_{K_i} \omega' \\ K_1 <_\omega K_2 \\ K_1 <_{\omega'} K_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \omega' \leq_E \omega$$

Lorsque des opérateurs de fusion basés sur des distances sont considérés, cette condition est équivalente à :

Définition 9 (Condition (SHE))

$$\left.\begin{array}{l} d(\omega, K_1) < d(\omega', K_1) < d(\omega', K_2) < d(\omega, K_2) \\ \forall i \neq 1,2\ d(\omega, K_i) = d(\omega', K_i) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$f(d(\omega', K_1), d(\omega', K_2), \ldots, d(\omega', K_n)) \leq$$

$$f(d(\omega, K_1), d(\omega, K_2), \ldots, d(\omega, K_n))$$

Proposition 3 *Un opérateur de fusion basé sur une distance $\Delta^{d,f}$ satisfait (SHE) si et seulement si il satisfait (SHe).*

Cette condition d'équité de Sen-Hammond exprime l'idée suivante : on compare deux "situations" ω_1 et ω_2 qui sont équivalentes pour tous les agents sauf deux. Entre ces deux agents, l'un (K_1) est dans les deux situations mieux satisfait que l'autre (K_2). Alors la solution la plus juste est celle qui satisfait au mieux le moins satisfait des deux agents (K_2).

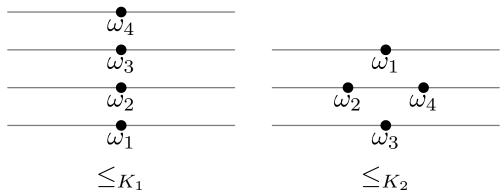

FIGURE 1 – Comportement égalitaire - (Arb)

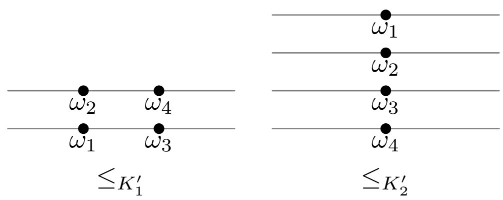

FIGURE 2 – Comportement égalitaire - (SHE)

Cette condition semble proche de la condition d'arbitrage (si l'on compare **(SHe)** avec la condition 8 de la définition 3), mais ces deux conditions sont logiquement indépendantes. L'exemple suivant illustre en quoi ces deux conditions diffèrent :

Exemple 1 *Considérons un langage propositionnel sur deux variables et un opérateur de fusion basé sur une distance $\triangle^{d,f}$. Supposons que la distance d sur laquelle $\triangle^{d,f}$ est construite est la plus courte distance dans le graphe suivant :*

$$\omega_1 \overset{1}{\text{——}} \omega_2 \overset{1}{\text{——}} \omega_3 \overset{1}{\text{——}} \omega_4.$$

La figure 1 illustre la cas où l'unique modèle de K_1 est ω_1 et l'unique modèle de K_2 est ω_3. Il est clair ici que ω_1 et ω_3 jouent des rôles symétriques, donc ils ne peuvent être traités différemment lorsqu'on fusionne K_1 et K_2. Cependant, sur cet exemple, ω_2 apparaît comme un choix plus consensuel que ω_1 et ω_3 pour cette fusion. Ainsi, **(Arb)** *impose que ω_2 soit strictement preféré à ω_1 et ω_3 dans $\leq_{\{K_1, K_2\}}$.*

Suppposons à présent que l'on souhaite fusionner $E' = \{K'_1, K'_2\}$ où K'_1 et K'_2 ont pour ensemble de modèles $[K'_1]$=$\{\omega_1, \omega_3\}$ et $[K'_2]$ =$\{\omega_4\}$, et que le choix soit à faire entre ω_1 et ω_2 (i.e., la contrainte d'intégrité μ satisfait $[\mu] = \{\omega_1, \omega_2\}$). **(Arb)** *n'impose aucune contrainte sur ce choix. Mais clairement, quel que soit le choix, il sera plus proche de K_1 que de K_2. En conséquence, un simple argument d'équité conduit à choisir la solution la meilleure pour le plus lésé des agents K_2, soit de considérer que ω_2 doit être strictement préféré à ω_1 dans $\leq_{E'}$. C'est ce que* **(SHe)** *propose.*

Malheureusement, la famille des opérateurs IC basés sur des distances satisfaisant la condition **(SHE)** est très limitée :

Proposition 4 *Soit d une (pseudo-)distance et f une fonction d'agrégation strictement monotone. Un opérateur de fusion IC $\Delta^{d,f}$ satisfait la condition* **(SHE)** *si et seulement si $f = leximax$.*

Vu le résultat donné par cette proposition, définir d'autres opérateurs de fusion égalitaires va nécessiter soit de définir d'autres pricipes d'équité, soit d'affaiblir certains des postulats IC. Dans la suite, nous explorons chacune des deux possibilités.

Ainsi, nous nous intéressons tout d'abord à une autre condition égalitaire issue de la théorie du choix social, le principe de transfert de Pigou-Dalton [2]. L'idée sous-jacente à ce principe est que chaque transfert d'un plus riche vers un plus pauvre décroît les inégalités :

Définition 10 *Soit f une fonction d'agrégation. f satisfait* la condition de Pigou-Dalton *si pour tous vecteurs $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$,*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x'_1 \leq x'_2 < x_2 \\ x'_1 - x_1 = x_2 - x'_2 \\ \forall i \neq 1, 2, x_i = x'_i \end{array}\right\} \implies f(X) < f(X')$$

Ce principe établit que si X' peut être obtenu à partir de X en faisant un transfert d'un agent mieux satisfait à un agent moins satisfait, sans changer le fait que le premier reste plus satisfait que le second, alors X' est plus juste que X.

On peut traduire comme suit ce principe pour la fusion basée sur une distance :

Définition 11 (Condition (PD)) *Si $\exists k$ et l t.q.*
$d(\omega, K_k) < d(\omega', K_k) \leq d(\omega', K_l) < d(\omega, K_l)$, et
$d(\omega', K_k) - d(\omega, K_k) = d(\omega, K_l) - d(\omega', K_l)$, et
$\forall i \neq k$ et $i \neq l, d(\omega, K_i) = d(\omega', K_i)$
alors $\omega' <_E \omega$.

Bien sûr, tous les opérateurs IC basés sur des distances ne satisfont par la condition **(PD)**. Cependant, cette condition est satisfaite par les opérateurs d'arbitrage bien connus basés sur le $leximax$:

Proposition 5
- $\Delta^{d,leximax}$ *satisfait la condition* **(PD)**.
- *ni $\Delta^{d,\Sigma}$, ni $\Delta^{d,leximin}$ ne satisfont la condition* **(PD)**.

4 Operateurs pré-IC

Nous définissons à présent une famille générale d'opérateurs de fusion de croyances, appelée opérateurs de fusion pré-IC, obtenus en relâchant deux postulats **(IC5)** et **(IC6)** en deux conditions naturelles utilisées aussi dans d'autres contextes de théories de l'agrégation.

Définition 12 *Un opérateur de fusion $\triangle$ est un* opérateur de fusion pré-IC *ssi il satisfait* **(IC0)** *à* **(IC4)**, **(IC7)** *à* **(IC8)** *et les propriétés suivantes :*

(IC5b) $\triangle_\mu(K_1) \wedge \triangle_\mu(K_2) \wedge \ldots \wedge \triangle_\mu(K_n) \models \triangle_\mu(\{K_1, K_2, \ldots, K_n\})$

(IC6b) *Si $\triangle_\mu(K_1) \wedge \triangle_\mu(K_2) \wedge \ldots \wedge \triangle_\mu(K_n)$ est cohérent, alors $\triangle_\mu(\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}) \models \triangle_\mu(K_1) \wedge \triangle_\mu(K_2) \wedge \ldots \wedge \triangle_\mu(K_n)$*

Ainsi, passer des opérateurs IC aux opérateurs pré-IC consiste simplement à remplacer les postulats **(IC5)** et **(IC6)** par les postulats plus faibles **(IC5b)** et **(IC6b)**. En effet, il est facile de vérifier que **(IC5b)** (resp. **(IC6b)**) est impliqué par **(IC5)** (resp. **(IC6)**). En conséquence, on a :

Proposition 6 *Tout opérateur de fusion IC est un opérateur de fusion pré-IC.*

On peut maintenant présenter un théorème de représentation adapté à la famille pré-IC :

Définition 13 *Un* assignement pré-syncrétique *est une fonction associant chaque profil E à un pré-ordre $\leq_E$ sur Ω tel que pour tout profil E, E_1, E_2 et pour toutes bases de croyance K, K', les conditions suivantes sont vraies :*

1. *Si $\omega \models E$ et $\omega' \models E$ alors $\omega \equiv_E \omega'$*

2. *Si $\omega \models E$ et $\omega' \not\models E$ alors $\omega <_E \omega'$*

3. *Si $E_1 \equiv E_2$ alors $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$*

4. $\forall \omega \models K, \exists \omega' \models K'\ \omega' \leq_{\{K,K'\}} \omega$

5b. *Si $\forall i\ \omega \leq_{K_i} \omega'$ alors $\omega \leq_{\{K_1,\ldots,K_n\}} \omega'$*

6b. *Si $\forall i\ \omega \leq_{K_i} \omega'$ et $\exists k\ \omega <_{K_k} \omega'$ alors $\omega <_{\{K_1,\ldots,K_n\}} \omega'$*

Les conditions 5b et 6b sont des traductions directes des conditions de Pareto, qui sont des conditions usuelles en choix social, en décision multi-critères, etc. Ces conditions sont souvent considérées comme des conditions minimales à satisfaire pour une fonction d'agrégation. Les conditions 5 et 6 (définition 3) sont plus contraignantes, puisqu'elles portent sur toutes les unions de deux profils.

Proposition 7 *Un opérateur de fusion Δ est un opérateur de fusion pré-IC ssi il existe un assignement pré-syncrétique qui associe à chaque profil E un pré-ordre total $\leq_E$ sur Ω tel que :*

$$[\Delta_\mu(E)] = min([\mu], \leq_E).$$

Comme on peut s'y attendre, il est plus simple de satisfaire les conditions pré-IC que les conditions IC. On peut par exemple montrer que :

Proposition 8 *Si d est une (pseudo-)distance et f une fonction d'agrégation strictement monotone, alors l'opérateur de fusion $\Delta^{d,f}$ est un opérateur de fusion pré-IC.*

On peut comparer ce résultat avec celui correspondant pour les opérateurs IC basés sur des distances, que l'on peut trouver dans [9], et qui montre que la fonction d'agrégation f doit satisfaire deux conditions supplémentaires pour garantir que l'opérateur basé sur une distance donné par d et f est un opérateur de fusion IC.

5 Opérateurs médians

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle famille d'opérateurs de fusion en utilisant des fonctions d'agrégation basées sur une médiane généralisée. Il est intéressant de noter que certains des opérateurs de cette famille sont des opérateurs pré-IC et satisfont **(Arb)**. L'idée d'utiliser la valeur médiane est bien sûr motivée par le fait d'essayer d'être aussi juste que possible. Au lieu de se focaliser sur une fonction d'agrégation unique, nous étudions une famille complète de fonctions d'agrégation k-median, inspirée par les règles de vote des électeurs fantômes de [13].

Définition 14 *Soit* $k \in]0,1]$ *un nombre réel, le* $k-$median $med^k(\{x_1,\dots,x_n\})$ *d'un multi-ensemble* $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ *de valeurs issues d'un ensemble totalement ordonné, est la valeur* $m^k = x_{\sigma(\lceil n*k \rceil)}$ *de* X, *où* σ *est une permutation de* X *ordonnant les* x_i *dans l'ordre croissant (*$\lceil . \rceil$ *représente la partie entière supérieure).*

Pour $k = 0.5$, on retrouve la médiane usuelle.

Dans de nombreux cas ces fonctions $k-$median med^k ne sont pas suffisamment discriminantes, exactement comme les fonctions min et max. Donc, nous pouvons définir des fonctions k-$leximed$, qui sont au med^k ce que $leximin$ (resp. $leximax$) est au min (resp. max).

Définition 15 *Soient* L_1 *et* L_2 *deux multi-ensembles composés de* n *éléments d'un ensemble totalement ordonné :*
$L_1 \leq^k_{leximed} L_2$ *ssi*
– $med^k(L_1) < med^k(L_2)$ *ou*
– $med^k(L_1) = med^k(L_2)$ *et*
$L_1 \setminus \{med^k(L_1)\} \leq^k_{leximed} L_2 \setminus \{med^k(L_2)\}$

Nous pouvons maintenant définir successivement les opérateurs de fusion k-medians, et les k-leximedians :

Définition 16 *Soient* $E = \{K_1,...,K_n\}$ *un profil,* d *une (pseudo-)distance entre interprétations et* $k \in]0,1]$ *un nombre réel. Soit* $d^{d,k}_{med}(\omega,E) = med^k(d(\omega,K_1), d(\omega,K_2),\dots,d(\omega,K_n))$. *On définit* $[\Delta^{d,med^k}_{\mu}(E)]$ *par*

$$[\Delta^{d,med^k}_{\mu}(E)] = \{\omega \models \mu \mid d^k_{med}(\omega,E) \text{ est minimal}\}.$$

Voici un exemple qui permet d'illustrer le comportement des opérateurs k-median :

Exemple 2 *Soit un profil* $E = \{K_1,K_2,K_3\}$, *avec* $[K_1] = \{000,100\}$, $[K_2] = \{001\}$ *et* $[K_3] = \{100\}$. *Il n'y a pas de contrainte d'integrité (*$\mu = \top$*), la distance de Hamming* d_H *est utilisée, et la valeur* $k = 0.5$ *correspondant à la médiane usuelle. Les calculs sont présentés dans le tableau 1.*

On obtient $[\Delta^{d_H,med^{0.5}}_{\top}(E)] = \{100\}$. *La seule interprétation sélectionnée est* 100, *car le meilleur vecteur est* $(0,0,2)$, *avec une valeur médiane de* 0.

	$[K_1] = \{000,100\}$	$[K_2] = \{001\}$	$[K_3] = \{100\}$	distance vecteur
000	0	1	1	$(0,1,1)$
001	1	0	2	$(0,1,2)$
010	1	2	2	$(1,2,2)$
011	2	1	3	$(1,2,3)$
100	**0**	**2**	**0**	$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{2})$
101	1	1	1	$(1,1,1)$
110	1	3	1	$(1,1,3)$
111	2	2	2	$(2,2,2)$

TABLE 1 – Fusion avec $\Delta^{d_H,med^{0.5}}$

Certaines valeurs spécifiques de k conduisent à des opérateurs de fusion bien connus : $\Delta^{med^{\epsilon}}$, avec $\epsilon \in]0,\frac{1}{n}]$ correspond à l'opérateur min, et $\Delta^{med^{\alpha}}$, avec $\alpha \in]\frac{n-1}{n},1]$ à l'opérateur max.

On peut à présent donner précisément les postulats de rationalité satisfaits par ces opérateurs :

Proposition 9 *Pour tout nombre réel* $k \in]0,1]$ *et toute (pseudo-)distance d,* Δ^{d,med^k} *satisfait* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC7)**, **(IC8)** *et* **(IC5b)**. **(IC2)**, **(IC5)**, **(IC6)**, **(IC6b)**, **(Maj)** *et* **(Arb)** *ne sont pas satisfaits en général.*

Il apparaît que les opérateurs k-medians satisfont une partie seulement des postulats attendus. En particulier, le postulat très naturel **(IC2)**, qui demande que le résultat de la fusion soit la conjonction des bases lorsque cette conjonction est cohérente, n'est pas satisfait (sauf pour les valeurs de k qui rendent l'opérateurs k-median identique au max). Nous avons aussi :

Proposition 10 *Si* $k \geq 0.5$, *alors* Δ^{d,med^k} *satisfait* **(Arb)**.

Aucune autre condition d'équité n'est satisfaite par ces opérateurs :

Proposition 11 *Quel que soit k,* Δ^{d,med^k} *ne satisfait ni* **(PD)** *ni* **(SHE)**.

Intéressons nous maintenant aux opérateurs k-leximedians :

Définition 17 *Soient* $E = \{K_1,...,K_n\}$ *un profil,* μ *une contrainte d'intégrité,* d *une (pseudo-)distance entre interprétations et* $k \in]0,1]$ *un nombre réel. Soit* $d^k_{leximed}(\omega,E) = leximed^k(d(\omega,K_1),d(\omega,K_2),\dots,d(\omega,K_n))$. *Alors*
$[\Delta^{d,leximed^k}_{\mu}(E)] =$
$\{\omega \models \mu \mid d_{leximed^k}(\omega,E)$ *est minimal*[3]$\}$

De nouveau, des opérateurs standard sont retrouvés en considérant certaines valeurs spécifiques de k : $\Delta^{d,leximed^k}$ avec $k \in]0,\frac{1}{n}[$ correspond à l'opérateur $leximin$ $\Delta^{d,leximin}$, et $\Delta^{d,leximed^1}$ à l'opérateur $leximax$ $\Delta^{d,leximax}$.

La bonne nouvelle est que les opérateurs $\Delta^{d,leximed^k}$ satisfont plus de propriétés intéressantes que Δ^{d,med^k} :

3. pour l'ordre lexicographique.

Proposition 12 *Pour toute distance d et tout $k \in]0,1]$, $\Delta^{d,leximed^k}$ est un opérateur de fusion pré-IC.*

Néanmoins, ces opérateurs ne sont pas des opérateurs de fusion IC :

Proposition 13 *$\Delta^{d,leximed^k}$ ne satisfait pas* **(IC5)**, **(IC6)**, **(Maj)** *et* **(Arb)** *en général.*

Pour les propriétés égalitaires, la propriété d'arbitrage est satisfaite, mais aucune autre :

Proposition 14 *Si $k \geq 0.5$, alors $\Delta^{d,leximed^k}$ satisfait* **(Arb)** *mais ne satisfait ni* **(PD)** *ni* **(SHE)**.

Il est facile d'expliquer pourquoi la condition $k \geq 0.5$ est nécessaire. En effet, nous savons que quand k s'approche de 0, la fonction $leximed^k$ s'approche de $leximin$, et que lorsque k s'approche de 1 $leximed^k$ s'approche de $leximax$. Il est donc naturel d'obtenir un comportement plus égalitaire pour des valeurs comprises entre la médiane usuelle (k=0.5) et le $leximax$.

Comparée à la proposition 4, la proposition 14 montre que relâcher certains des postulats IC permet de déterminer d'autres opérateurs que ceux basés sur le $leximax$ qui satisfont aussi des conditions égalitaires.

6 Sommes cumulées

Une représentation très pratique des inégalités d'une distribution de revenu est la courbe de Lorenz [12]. Le principe est d'étudier le vecteur représentant les sommes cumulées des revenus des k agents les plus pauvres, pour k variant de 1 au nombre total d'agents. Plus précisément, sur une courbe de Lorenz, chaque abscisse k correspond aux k plus pauvres agents et chaque ordonnée représente le pourcentage de revenu détenu par ces agents.

La courbe de Lorenz peut être interprétée de différentes façons pour mesurer à quel point une distribution est juste. En particulier, la distribution la plus juste est lorsque les $n\%$ plus pauvres agents possèdent $n\%$ des revenus. Le coefficient de Gini [6, 16, 3] est le double de l'aire entre la courbe de Lorenz et la distribution la plus juste.

Nous avons repris cette idée de somme cumulée en vue de définir une nouvelle famille d'opérateurs de fusion. Nous traduisons la distance entre une base et une interprétation en un revenu, en renversant l'échelle (plus la distance est faible, plus on est satisfait). Ensuite nous calculons un vecteur cumulé de revenus, qui est comparé aux autres vecteurs cumulés grâce à une fonction d'agrégation.

Formellement, les opérateurs de fusion basés sur ces sommes cumulées peuvent être définis comme suit :

Définition 18 *Soient d une (pseudo-)distance entre interprétations, $\oplus$ une fonction d'agrégation, E un profil et μ une contrainte d'integrité. Pour une interprétation ω, on considère le vecteur $(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \ldots, w_{\sigma(n)})$ où $w_i =$ p $- d(\omega, K_i)$ est la valeur de satisfaction de l'agent i pour l'interprétation ω, et σ est la permutation de $\{1, \ldots, n\}$ ordonnant les w_i en ordre croissant. On définit la satisfaction cumulée de μ par $\oplus(W_d(\omega, E)) = \oplus(W_1, W_2, \ldots, W_n)$, où $W_i = \Sigma_{k=1}^{i} w_{\sigma(k)}$. Les interprétations sélectionnées sont celles qui maximisent la satisfaction cumulée :*

$$[\Delta_{\mu}^{CS(d,\oplus)}(E)] = \{\omega \models \mu \mid \oplus(W_d(\omega, E)) \text{ est maximal }\}.$$

	$[K_1] = \{000, 100\}$	$[K_2] = \{001\}$	$[K_3] = \{100\}$	satisfaction cumulée
000	**3**	**2**	**2**	$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{7})$
001	2	3	1	$(1, 3, 6)$
010	2	1	1	$(1, 2, 4)$
011	1	2	0	$(0, 1, 3)$
100	3	1	3	$(1, 4, 7)$
101	2	2	2	$(2, 4, 6)$
110	2	0	2	$(0, 2, 4)$
111	1	1	1	$(1, 2, 3)$

TABLE 2 – Fusion avec $\Delta^{CS(d_H,\Sigma)}$

Le comportement de ces opérateurs de fusion basés sur des sommes cumulées est illustré par l'exemple suivant :

Exemple 3 *Nous considérons à nouveau l'exemple 2. Les calculs sont présentés dans le tableau 2, dans lequel les valeurs représentent la satisfaction des bases (au plus au mieux), et non plus des distances (au moins au mieux).*

On obtient $[\Delta_{\top}^{CS(d_H,\Sigma)}(E)] = \{000\}$. L'interprétation choisie est 000, car la somme de son vecteur de satisfaction cumulé donne la valeur maximale de 13.

Nous retrouvons certains opérateurs existants comme cas particuliers de ces nouveaux opérateurs :

Proposition 15
– $\Delta^{CS(d,leximin)} = \Delta^{d,leximax}$
– $\Delta^{CS(d,leximax)} = \Delta^{d,leximin}$

Concernant les propriétés logiques, nous avons le résultat suivant :

Proposition 16 *Si d est une distance et $\oplus$ une fonction d'agrégation strictement monotone, alors $\Delta^{CS(d,\oplus)}$ est un opérateur de fusion pré-IC.*
– *$\Delta^{CS(d,\oplus)}$ ne satisfait pas* **(Arb)** *et* **(Maj)** *en général.*
– *$\Delta^{CS(d,\oplus)}$ ne satisfait pas* **(IC5)** *and* **(IC6)** *en général.*

Bien que **(Arb)** ne soit pas satisfait en général, la condition de Pigou-Dalton est vérifiée lorsque la somme est utilisée comme fonction d'agrégation :

Proposition 17 *$\Delta^{CS(d,\Sigma)}$ satisfait* **(PD)**, *mais pas* **(SHE)**.

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons défini des conditions d'équité pour la fusion, alternatives au postulat d'arbitrage.

En particulier, nous avons traduit dans le cadre de la fusion de croyances deux conditions égalitaires : la condition d'équité de Sen-Hammond, et la propriété de Pigou-Dalton.

Nous avons montré que les opérateurs de fusion basés sur des distances qui satisfont la condition d'équité de Sen-Hammond sont essentiellement ceux qui utilisent le $leximax$ comme fonction d'agrégation. Cela nous a conduit à introduire une nouvelle famille d'opérateurs de fusion de croyances, les opérateurs pré-IC, qui inclut les opérateurs IC. Nous avons obtenu un théorème de représentation pour cette famille, qui nous permet de définir simplement des opérateurs pré-IC basés sur des distances. Afin d'enrichir la famille des opérateurs de fusion égalitaires, nous avons considéré deux nouvelles familles d'opérateurs de fusion de croyances, basées respectivement sur la médiane et sur la somme cumulée (courbe de Lorenz). Nous avons montré que les opérateurs basés sur la fonction d'agrégation $leximed^k$ (avec $k \geq 0.5$) sont des opérateurs pré-IC et satisfont le postulat d'arbitrage **(Arb)**. Nous avons aussi prouvé que les opérateurs $\Delta^{CS(d,\Sigma)}$ utilisant la somme cumulée et la somme sont des opérateurs pré-IC satisfaisant **(PD)**.

Références

[1] K.J. Arrow, A. K. Sen, and K. Suzumura, editors. *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1. North-Holland, 2002.

[2] H. Dalton. The measurement of the inequality of incomes. *Economic Journal*, 30 :pp. 348–461, 1920.

[3] B. Dutta. Chapter 12 inequality, poverty and welfare. In K. J. Arrow, A. K. Sen, and K. Suzumura, editors, *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1 of *Handbook of Social Choice and Welfare*, chapter 12, pages 597–633. Elsevier, 2002.

[4] P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. Disjunctive merging : Quota and gmin merging operators. *Artificial Intelligence*, 174(12-13) :824–849, 2010.

[5] P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. The epistemic view of belief merging : Can we track the truth ? In *Proceedings of the Nineteenth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'10)*, pages 621–626, 2010.

[6] C. Gini. Measurement of inequality of incomes. *The Economic Journal*, 31(121) :pp. 124–126, 1921.

[7] P. J. Hammond. Equity, Arrow's conditions, and Rawls' difference principle. *Econometrica*, 44(4) :pp. 793–804, 1976.

[8] J. C. Harsanyi. Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. *Journal of Political Economy*, 63 :309, 1955.

[9] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. DA^2 merging operators. *Artificial Intelligence*, 157 :49–79, 2004.

[10] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[11] J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. In *Dynamic Worlds : From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer, 1999.

[12] M. O. Lorenz. Methods of measuring the concentration of wealth. *Publications of the American Statistical Association*, 9(70) :pp. 209–219, 1905.

[13] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*, chapter 9. Econometric society monographs. Cambridge University Press, 1988.

[14] J. Rawls. *A Theory of Justice*. Harvard University Press, 1971.

[15] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.

[16] A. Sen. *On Economic Inequality*. Oxford University Press, 1973.

[17] A. Sen. Social choice theory. In K. J. Arrow and M.D. Intriligator, editors, *Handbook of Mathematical Economics*, volume 3 of *Handbook of Mathematical Economics*, chapter 22, pages 1073–1181. Elsevier, 2005.

[18] K. Suzumura. *Rational choice, collective decisions and social welfare*. Cambridge University Press, 1983.