CHAPITRE

Sur la modélisation de la concertation entre agents : fusion de bases de croyances

Sébastien Konieczny⋆, Ramón Pino Pérez†

⋆ IRIT
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse Cedex
konieczny@irit.fr

† Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Mérida - Venezuela
pino@ciens.ula.ve

Résumé

Nous étudions dans cet article les opérateurs de fusion de croyances. Ces opérateurs permettent de déterminer les buts (ou les croyances) d'un groupe d'agents à partir de leurs buts (croyances) individuels. Nous montrons de nouveaux résultats sur les deux principales familles d'opérateurs de fusion : les opérateurs majoritaires et les opérateurs d'arbitrage. Nous montrons, en particulier, qu'il existe des opérateurs appartenant simultanément aux deux familles.

Mots-clés : Concertation, Fusion de croyances, Arbitrage, Majorité

1 INTRODUCTION

Lorsque plusieurs agents interagissent pour mener à bien une tâche commune, il est nécessaire que ceux-ci s'entendent à certains moments sur ce que sont les buts (ou les croyances) actuels du groupe. Lorsque des désaccords apparaissent entre les agents sur ces buts (croyances) communs, il est généralement nécessaire de passer par une phase de négociation entre les agents. Le problème est qu'il est parfois (si on s'inspire d'agents humains on pourrait même dire "souvent") possible que la négociation ne permette pas de régler tous les problèmes. Mais, même dans ce cas, il faut bien réaliser un "arbitrage" entre les agents en présence dans ce que l'on pourrait nommer une phase de concertation.

Selon ce modèle (pour expliquer la différence entre les termes *négociation* et *concertation* employés) lorsqu'une décision doit être prise au niveau du groupe, on peut considérer que celle-ci est prise en deux étapes. Une première étape de *négociation* permet aux différents agents d'avancer leurs arguments pour tenter de convaincre les indécis ou les opposants. Et une deuxième étape, de *concertation* qui, à partir des positions (qui sont alors fixes) de chacun, permet de définir ce qu'est la position du groupe. Cette deuxième étape peut être (abusivement) considérée comme une sorte de vote sur les buts/croyances du groupe.

Or, bien que l'étape de négociation soit abondamment traitée dans la communauté multi-agents (voir *e.g* [2, 22]), la seconde, concernant la concertation, n'a généralement droit qu'à un traitement rapide. En effet, dans la plupart des modèles proposés, lorsqu'un désaccord subsiste après la phase de négociation, on utilise des moyens expéditifs pour résoudre ce désaccord. On suppose, par exemple, qu'il existe une relation de préférence entre les agents, certains étant plus fiables que d'autres (cette fiabilité pouvant varier selon les thèmes) [7, 5], ou qu'il existe un oracle dans le système pouvant résoudre le conflit. Or, bien que cette relation de préférence puisse résoudre certains problèmes, il restera toujours des cas où deux agents de même fiabilité sont en désaccord, ou des cas où l'on ne connaît pas cette fiabilité relative des agents. De même, supposer l'existence d'un oracle, bien que ce soit une idée séduisante pour se débarrasser du problème, est simplement irréaliste s'il s'agit d'un agent infaillible, puisqu'alors il détiendrait la solution du problème à résoudre. Si cet agent n'est pas considéré comme infaillible, il ne s'agit alors que de la proposition précédente où un agent est considéré plus fiable que les autres.

Ce que nous proposons ici est d'utiliser les opérateurs de fusion de croyances [8, 6, 4, 19, 24, 14] pour réaliser cet "oracle". Nous ne prétendons pas montrer comment cela doit être implémenté dans un système multi-agents mais nous proposons d'utiliser ces opérateurs comme cadre formel pour la concertation entre agents.

Dans [15, 13], nous avons proposé un ensemble de propriétés logiques souhaitables pour un opérateur de fusion (d'autres auteurs ont également proposé d'autres ensembles de propriétés [23, 24, 19, 18, 17]). Cet ensemble définit une famille d'opérateurs, que nous avons appelés opérateurs de fusion contrainte. Cela permet donc de comparer entre elles des méthodes de fusion existantes et de pouvoir de ce fait choisir la méthode la plus adaptée à une application particulière. Nous définissons également deux sous-classes d'opérateurs particulières : les opérateurs majoritaires et les opérateurs d'arbitrage. Les opérateurs majoritaires résolvent les conflits en tenant compte de la majorité, c'est-à-dire qu'ils tentent de contenter le groupe d'agents dans son ensemble, alors que les opérateurs d'arbitrage ont un comportement plus consensuel, tentant de contenter au mieux chacun des individus du groupe, ne permettant donc pas d'utiliser de compensation entre des agents. Ces deux familles ont donc des politiques de gestion de conflits très différentes.

Une question ouverte jusqu'alors était de savoir si ces deux familles étaient des familles distinctes ou s'il existait des opérateurs qui étaient à la fois des opérateurs majoritaires et des opérateurs d'arbitrage. Bien que l'on soit tenté de croire à une partition stricte, nous montrons ici qu'il est possible d'être à la fois opérateur majoritaire et d'arbitrage. Nous donnons un exemple d'un opérateur trivial qui satisfait cette condition, mais nous montrons aussi que, dans le cas fini, toute une famille d'opérateurs non-triviaux répondent à cette contrainte. La suite de l'article est organisée comme suit : dans la section 2 nous définissons les opérateurs de fusion contrainte et les opérateurs majoritaires et d'arbitrage. Dans la section 3 nous donnons quelques exemples d'opérateurs pour illustrer la différence de comportement entre opérateurs majoritaires et d'arbitrage. Dans la section 4, nous montrons qu'il est toutefois possible d'être à la fois un opérateur majoritaire et un opérateur d'arbitrage. Et nous concluons, dans la section 5, par quelques perspectives et questions ouvertes.

2 Opérateurs de fusion contrainte

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$ sur un alphabet fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles. Une interprétation est une fonction de $\mathcal{P}$ vers $\{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation I est un modèle d'une formule si et seulement si elle rend cette formule vraie. Soit φ une formule, $mod(\varphi)$ dénote l'ensemble des modèles de φ, c'est-à-dire $mod(\varphi) = \{I \in \mathcal{W} \mid I \models \varphi\}$.

Une *base de croyances* φ est un ensemble fini de formules propositionnelles.

Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, n bases de croyances (non nécessairement différentes), on appelle *ensemble de croyance* le multi-ensemble Ψ constitué de ces n bases de croyance : $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. On notera $\bigwedge \Psi$ la conjonction des bases de croyances de Ψ, c'est-à-dire $\bigwedge \Psi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. On dira que l'ensemble de croyances Ψ est consistant, si $\bigwedge \Psi$ est consistant. L'union sur les multi-ensembles sera notée $\sqcup$.

Par abus, si φ est une base de croyances, φ dénotera aussi l'ensemble de croyances singleton $\Psi = \{\varphi\}$.

Soit un entier strictement positif n, on notera Ψ^n le multi-ensemble composé de n fois le multi-ensemble Ψ : $\Psi^n = \{\underbrace{\Psi, \ldots, \Psi}_{n}\}$

Définition 1
Deux ensembles de croyances Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalents, noté $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ si et seulement si il existe une bijection f de $\Psi_1 = \{\varphi_1^1, \ldots, \varphi_n^1\}$ vers $\Psi_2 = \{\varphi_1^2, \ldots, \varphi_n^2\}$, telle que $\vdash f(\varphi) \leftrightarrow \varphi$.

Un pré-ordre $\leq$ est une relation réflexive et transitive. Un pré-ordre défini sur un ensemble A est total si $\forall I, J \in A,\ I \leq J$ ou $J \leq I$. Soit un pré-ordre $\leq$, on définit $<$ comme $I < J$ ssi $I \leq J$ et $J \not\leq I$. De la même manière la relation d'équivalence $\simeq$ associée est définie par $I \simeq J$ ssi $I \leq J$ et $J \leq I$. Si $B \subseteq A$, on écrira $I \in min(B, \leq)$ ssi $I \in B$ et $\forall J \in B\ I \leq J$.

Une base de croyances φ représentera les croyances [1] d'un agent. Un ensemble de croyances Ψ représentera les croyances des différents agents d'un groupe. Le but des opérateurs de fusion est, à partir des croyances des agents et des contraintes particulières du systèmes (contraintes physiques, réglementations, etc), de déterminer la croyance du groupe. Un opérateur de fusion $\triangle$ est donc une fonction qui, à un ensemble de croyances Ψ et à une base de croyances μ représentant les contraintes d'intégrité du système, associe une base de croyances, notée $\triangle_\mu(\Psi)$, contenant la croyance du groupe d'agents.

Les propriétés souhaitables pour un opérateur de fusion sont les suivantes [15, 13] :

[1]Dans la suite de cet article nous nommerons croyances de manière générique les croyances ou les buts d'un agent.

Définition 2
$\triangle$ est un opérateur de fusion contrainte si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :

(IC0) $\triangle_\mu(\Psi) \vdash \mu$

(IC1) *Si μ est consistant, alors $\triangle_\mu(\Psi)$ est consistant*

(IC2) *Si Ψ est consistant avec μ, alors $\triangle_\mu(\Psi) = \bigwedge \Psi \wedge \mu$*

(IC3) *Si $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ et $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$, alors $\triangle_{\mu_1}(\Psi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\Psi_2)$*

(IC4) *Si $\varphi \vdash \mu$ et $\varphi' \vdash \mu$, alors $\triangle_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \bot \Rightarrow \triangle_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$*

(IC5) $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$

(IC6) *Si $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$ est consistant, alors $\triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$*

(IC7) $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$

(IC8) *Si $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ est consistant, alors $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$*

La signification intuitive de ces propriétés est la suivante : (IC0) assure que le résultat de la fusion satisfait les contraintes d'intégrité. (IC1) dit que si les contraintes d'intégrité sont consistantes alors le résultat de la fusion sera consistant, c'est-à-dire que l'on peut toujours extraire une croyance du groupe d'agents. (IC2) demande que, lorsque c'est possible, le résultat de la fusion soit simplement la conjonction des bases de croyance et des contraintes d'intégrité. Donc, lorsqu'il n'y a pas de conflit entre les agents et les contraintes, la fusion est simplement l'union des différentes croyances. (IC3) est le principe d'indépendance de syntaxe, c'est-à-dire que le résultat de la fusion ne dépend pas de la forme syntaxique des croyances ni de celles des contraintes mais simplement des opinions exprimées. (IC4) est la propriété d'équité. Elle assure que lorsque l'on fusionne l'opinion de deux agents, l'opérateur ne peut pas donner de préférences à l'un d'eux. (IC5) exprime l'idée suivante : si un groupe Ψ_1 se met d'accord sur un ensemble d'alternatives qui contient A, et si un autre groupe Ψ_2 se met d'accord sur un autre ensemble d'alternatives qui contient également A, alors si l'on joint les deux groupes A fera encore partie des alternatives acceptables. Et (IC5) et (IC6) ensemble, expriment le fait que, dès que l'on peut trouver deux sous-groupes qui s'accordent sur au moins une alternative, alors le résultat de la fusion sera exactement l'ensemble des alternatives sur lesquelles ces deux groupes s'accordent. (IC7) et (IC8) sont une généralisation directe des postulats (R5) et (R6) de la révision de croyances [1, 10, 11]. Ils expriment des conditions sur les conjonctions de contraintes d'intégrité et s'assurent de ce fait que la notion de *proximité* est bien fondée, c'est-à-dire, par exemple, que si une alternative A est préférée parmi un ensemble d'alternatives possibles et si on restreint le nombre d'alternatives tout en gardant l'alternative A, celle-ci sera toujours préférée parmi les alternatives restantes.

Nous allons à présent définir deux sous classes d'opérateurs de fusion, les opérateurs de fusion majoritaires et les opérateurs d'arbitrage.

Un opérateur de fusion majoritaire est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :

(Maj) $\exists n \ \triangle_{\mu} \, (\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n) \vdash \triangle_{\mu}(\Psi_2)$

Ce postulat exprime le fait que si une opinion a une large audience, ce sera alors l'opinion du groupe. On peut remarquer que cette propriété est très générale, elle ne dit pas exactement le nombre de répétitions nécessaire d'un ensemble de croyances pour s'imposer (cela dépend de l'opérateur), mais elle impose simplement l'existence d'un tel seuil. Cela semble être l'expression la plus faible possible de la notion de majorité. Les opérateurs de fusion majoritaire tentent donc de satisfaire au mieux le groupe dans son ensemble. D'un autre côté, les opérateurs d'arbitrage tentent de satisfaire chacun des éléments du groupe pris individuellement du mieux possible. Un opérateur d'arbitrage est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :

(Arb) $$\left.\begin{array}{l} \triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2) \\ \triangle_{\mu_1 \leftrightarrow \neg \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg \mu_2) \\ \mu_1 \nvdash \mu_2 \\ \mu_2 \nvdash \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow \\ \triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \end{array}$$

Ce postulat dit que si un ensemble d'alternatives préférées sous un ensemble de contraintes d'intégrité μ_1 pour une base de croyance φ_1 correspond à l'ensemble des alternatives préférées par la base φ_2 sous les contraintes μ_2, et si les alternatives qui n'appartiennent qu'à un des deux ensembles de contraintes d'intégrité sont toutes aussi crédibles pour le groupe $(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, alors les alternatives préférées pour le groupe parmi la disjonction des deux ensembles de contraintes seront celles préférées par chacune des bases sous leur contraintes respectives. Ce postulat est bien plus intuitif lorsqu'il est exprimé sous la forme d'assignement syncrétique (voir condition 8). Il exprime le fait que ce sont les alternatives médianes qui sont favorisées. Tentons d'illustrer cela sur un exemple :

Exemple 1 Tom et David ont raté le match de football d'hier entre les rouges et les jaunes. Ils ne connaissent donc pas le résultat du match. Tom a entendu ce matin à la radio que les rouges ont fait un très bon match. Il pense donc qu'une victoire des rouges est plus crédible qu'un match nul, et qu'un match nul est plus crédible qu'une victoire des jaunes. Un ami a dit à David qu'après ce match, les jaunes ont toutes les chances de remporter le championnat. Il déduit de cette information que les jaunes ont très certainement gagné le match, ou sinon, au moins obtenu un match nul. En confrontant leurs points de vue, Tom et David se mettent d'accord sur le fait que les deux équipes sont de la même force et qu'elles avaient donc les mêmes chances de remporter le match. Ce que demande la propriété d'arbitrage est qu'avec ces informations Tom et David doivent se mettre d'accord sur le fait qu'un match nul est le résultat le plus crédible.

A présent que nous disposons d'une définition logique des opérateurs de fusion contrainte, nous allons donner un théorème de représentation qui permet de définir ces opérateurs de manière bien plus intuitive. Ce théorème montre qu'un opérateur de fusion contrainte correspond à une famille de pré-ordres sur les interprétations.

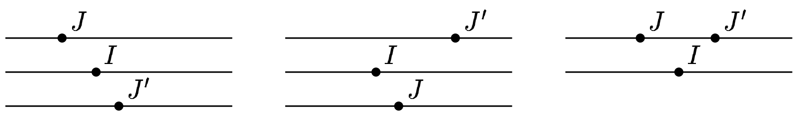
Définition 3
Un assignement syncrétique est une fonction qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre $\leq_\Psi$ sur les interprétations telle que pour tous ensembles de croyances Ψ, Ψ_1, Ψ_2 et pour toutes bases de croyances φ, φ' les conditions suivantes soient satisfaites :

1. *Si $I \models \Psi$ et $J \models \Psi$, alors $I \simeq_\Psi J$*
2. *Si $I \models \Psi$ et $J \not\models \Psi$, alors $I <_\Psi J$*
3. *Si $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$, alors $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$*
4. $\forall I \models \varphi \, \exists J \models \varphi' \; J \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I$
5. *Si $I \leq_{\Psi_1} J$ et $I \leq_{\Psi_2} J$, alors $I \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$*
6. *Si $I <_{\Psi_1} J$ et $I \leq_{\Psi_2} J$, alors $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$*

Un assignement syncrétique majoritaire est un assignement syncrétique qui satisfait la condition suivante :

7. *Si $I <_{\Psi_2} J$, alors $\exists n \; I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2{}^n} J$*

Un assignement syncrétique juste est un assignement syncrétique qui satisfait la condition suivante :



(a) φ_1 (b) φ_2 (c) $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$

FIG. 1 – Arbitrage

8. $$\left.\begin{array}{l} I <_{\varphi_1} J \\ I <_{\varphi_2} J' \\ J \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J' \end{array}\right\} \Rightarrow I <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J$$

La condition 1 dit que deux modèles de l'ensemble de croyances sont équivalents pour le pré-ordre associé et la condition 2 assure qu'un modèle de l'ensemble de croyances est toujours préféré à un contre-modèle. La condition 3 dit que si deux ensembles de croyances sont équivalents alors les deux pré-ordres associés sont identiques. Ces trois conditions sont une généralisation des conditions de l'assignement fidèle pour les opérateurs de révision [11]. La condition 4 demande que pour le pré-ordre associé à un ensemble de croyances composé de deux bases de croyances, pour chaque modèle de l'une, il existe un modèle de l'autre qui est au moins aussi bon. La condition 5 dit que si une interprétation est au moins aussi bonne qu'une autre pour un ensemble de croyances Ψ_1, et que cette interprétation est également au moins aussi bonne pour un ensemble de croyances Ψ_2, alors elle sera au moins aussi bonne que l'autre pour la réunion des deux ensembles de croyances. La condition 6 renforce un peu ce résultat en exigeant que si une interprétation est strictement meilleure qu'une autre pour un ensemble de croyances Ψ_1, et que cette interprétation est au moins aussi bonne pour un ensemble de croyances Ψ_2, alors cette interprétation doit être strictement meilleure que l'autre pour la réunion des deux ensembles de croyances. Les conditions 5 et 6 sont très proches des conditions de Pareto en théorie du choix social [3, 12, 21]. La condition 7 dit que si l'on répète un groupe Ψ_2 suffisamment de fois alors les préférences strictes de ce groupe seront respectées. La condition 8 dit que ce sont les choix médians qui sont préférés pour le groupe. Ce comportement est illustré figure 1 (les interprétations les plus basses sont les interprétations préférées, par exemple pour φ_1 : $J' <_{\varphi_1} I <_{\varphi_1} J$). L'interprétation I, qui n'est jamais aussi mauvaise que J et J' est préférée à celles-ci pour le résultat de la fusion.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de représentation pour les opérateurs de fusion contrainte [15, 13] :

Théorème 1
Un opérateur $\triangle$ est un opérateur de fusion contrainte (respectivement un opérateur majoritaire ou un opérateur d'arbitrage) si et seulement si il existe un assignement syncrétique (respectivement un assignement syncrétique majoritaire ou un assignement syncrétique juste) qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ tel que

$$mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

Pour la preuve, voir [16, 13]. La partie *si* est une simple verification des propriétés. Pour la partie *seulement si* l'idée est de construire une relation $\leq_\Psi$ sur les interprétations de la façon suivante : $I \leq_\Psi J$ ssi $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(E)$. Où $\varphi_{\{I,J\}}$ est une formule ayant I et J comme seuls modèles. Il reste ensuite à vérifier que cette relation est un pré-ordre total, que l'équation du théorème est vérifié et que l'assignement ainsi défini est bien un assignement syncrétique.

Ce théorème présente plusieurs avantages. Tout d'abord il est beaucoup plus simple de vérifier qu'un opérateur de fusion vérifie les conditions des assignements syncrétiques plutôt que de vérifier directement les propriétés logiques. Ensuite, le fait qu'un opérateur corresponde à une famille de pré-ordres (un pré-ordre par ensemble de croyances), peut donner des idées pour concevoir de nouveaux opérateurs. En particulier, beaucoup d'opérateurs sont définis de la sorte, en utilisant une fonction qui associe un pré-ordre à l'ensemble de croyances passé en paramètre, c'est le cas de tous les opérateurs basés sur des calculs de distances. Nous en décrivons quelques uns dans la section suivante.

3 Quelques opérateurs de fusion

Nous donnons dans cette partie la définition de trois familles d'opérateurs. Tous ces opérateurs sont basés sur une notion de distance entre interprétations à partir de laquelle on définit le pré-ordre associé à chaque ensemble de croyances. Nous définissons également une nouvelle famille d'opérateurs, généralisation de la famille $\triangle^\Sigma$.

On suppose que l'on dispose d'une distance[2] entre interprétations, c'est-à-dire une fonction $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mapsto I\!N$ telle que :

- $d(I,J) = d(J,I)$
- $d(I,J) = 0$ ssi $I = J$

Un exemple d'une telle distance généralement utilisée est la distance de Dalal [9], qui est la distance de Hamming entre les interprétations, c'est-à-dire que la distance de Dalal entre deux interprétations est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent.

Toute distance entre interprétations induit de manière naturelle une distance entre une interprétation et une base de croyances φ :

$$d(I,\varphi) = \min_{J \models \varphi} d(I,J)$$

Les quatre familles que nous allons définir divergent par la façon dont elles calculent la distance d'une interprétation à l'ensemble de croyance à partir de cette distance entre une interprétation et les bases de croyances. C'est donc dans cette étape d'agrégation des préférences individuelles en une préférence collective que vont se forger les différences de comportement.

La première famille d'opérateurs est la famille $\triangle^{Max}$ [23, 24, 13]. Ces opérateurs ne sont pas des opérateurs de fusion contrainte mais ils ont un comportement proche de celui que l'on attend d'un opérateur d'arbitrage.

Définition 4
Soient un ensemble de croyances Ψ et une distance d, la distance entre une interprétation I et l'ensemble de croyances est :

$$d_{d,Max}(I,\Psi) = \max_{\varphi \in \Psi} d(I,\varphi)$$

On obtient alors le pré-ordre suivant :

$$I \leq_{\Psi}^{d,Max} J \text{ ssi } d_{d,Max}(I,\Psi) \leq d_{d,Max}(J,\Psi)$$

Et l'opérateur $\triangle^{d,Max}$ est défini par :

$$mod(\triangle_{\mu}^{d,Max}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_{\Psi}^{d,Max})$$

[2] On peut noter que l'identité triangulaire n'est pas requise, on a donc, à strictement parler, des pseudo-distances.

La famille $\triangle^{GMax}$ [15, 13] est composée d'opérateurs d'arbitrage. Cette famille est un raffinement de la famille $\triangle^{Max}$.

Définition 5
Soient un ensemble de croyances $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ et une distance d. Pour chaque interprétation I on construit la liste $(d_1^I, \ldots, d_n^I)$ des distances entre cette interprétation et les n bases de l'ensemble de croyances, c'est-à-dire que $d_j^I = d(I, \varphi_j)$. Soit L_I^Ψ la liste obtenue en triant $(d_1^I, \ldots, d_n^I)$ dans l'ordre décroissant. Soit $\leq_{lex}$ l'ordre lexicographique sur des listes d'entiers. On obtient alors le pré-ordre suivant :

$$I \leq_\Psi^{d,GMax} J \textit{ ssi } L_I^\Psi \leq_{lex} L_J^\Psi$$

Et l'opérateur $\triangle^{d,GMax}$ est défini par :

$$mod(\triangle_\mu^{d,GMax}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi^{d,GMax})$$

Comme nous le verrons dans le prochain théorème les opérateurs $\triangle^{GMax}$ sont des opérateurs d'arbitrage. Les opérateurs $\triangle^{GMax}$ sont plus sélectifs que les opérateurs $\triangle^{Max}$, c'est-à-dire que l'on a le résultat suivant :

Théorème 2
Pour toute distance d, tout ensemble de croyances Ψ, et toute base μ, on a $\triangle_\mu^{d,GMax}(\Psi) \vdash \triangle_\mu^{d,Max}(\Psi)$.

La famille $\triangle^\Sigma$ [15, 24, 18, 19] est composés d'opérateurs majoritaires :

Définition 6
Soient un ensemble de croyances Ψ et une distance d, la distance entre une interprétation I et l'ensemble de croyances est :

$$d_{d,\Sigma}(I, \Psi) = \sum_{\varphi \in \Psi} d(I, \varphi)$$

On obtient alors le pré-ordre suivant :

$$I \leq_\Psi^{d,\Sigma} J \textit{ ssi } d_{d,\Sigma}(I, \Psi) \leq d_{d,\Sigma}(J, \Psi)$$

Et l'opérateur $\triangle^{d,\Sigma}$ est défini par :

$$mod(\triangle^{d,\Sigma}{}_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi^{d,\Sigma})$$

Ces familles d'opérateurs vérifient les propriétés suivantes [15, 13] :

Théorème 3
Les opérateurs $\triangle^{Max}$ *vérifient les propriétés (IC1-IC5), (IC7), (IC8) et (Arb). Les opérateurs* $\triangle^{GMax}$ *sont des opérateurs d'arbitrage. Les opérateurs* $\triangle^{\Sigma}$ *sont des opérateurs majoritaires.*

On peut généraliser la famille $\triangle^{\Sigma}$ précédente en la famille $\triangle^{\Sigma^n}$:

Définition 7
Soient un ensemble de croyances Ψ*, une distance* d *et un entier* n*, la distance entre une interprétation* I *et l'ensemble de croyances est :*

$$d_{d,\Sigma^n}(I,\Psi) = \sum_{\varphi \in \Psi} d(I,\varphi)^n$$

On obtient alors le pré-ordre suivant :

$$I \leq_{\Psi}^{d,\Sigma^n} J \textit{ ssi } d_{d,\Sigma^n}(I,\Psi) \leq d_{d,\Sigma^n}(J,\Psi)$$

Et l'opérateur $\triangle^{d,\Sigma^n}$ *est défini par :*

$$mod(\triangle_{\mu}^{d,\Sigma^n}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_{\Psi}^{d,\Sigma^n})$$

On prouve facilement alors que :

Théorème 4
Les opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ *sont des opérateurs majoritaires.*

Voyons à présent sur un exemple le comportement de ces différents opérateurs (on utilise la distance de Dalal, notée d_H, comme distance entre interprétations) :

A une réunion de copropriétaires d'une résidence, le président propose pour l'année à venir la construction d'une piscine, d'un court de tennis et d'un parking privé. On notera respectivement S, T, P la construction de la piscine, du court de tennis et du parking. I dénotera l'augmentation du loyer. Le président souligne le fait que si deux des trois items sont construits le loyer augmentera significativement : $\mu = ((S \wedge T) \vee (S \wedge P) \vee (T \wedge P)) \rightarrow I$.

Il y a quatre copropriétaires $\Psi = \varphi_1 \sqcup \varphi_2 \sqcup \varphi_3 \sqcup \varphi_4$. Deux d'entre eux veulent construire les trois items et ne se soucient pas de l'augmentation de loyer : $\varphi_1 = \varphi_2 = S \wedge T \wedge P$. Le troisième pense que construire la moindre chose se répercutera inexorablement un jour sur les loyers et ne tient absolument pas à voir son loyer augmenter, il est donc opposé à toute construction : $\varphi_3 = \neg S \wedge \neg T \wedge \neg P \wedge \neg I$. Le dernier trouve que la résidence à réellement besoin d'un court de tennis et d'un parking privé mais ne voudrait pas subir une forte augmentation de loyer : $\varphi_4 = T \wedge P \wedge \neg I$.

On considérera les quatre variables propositionnelles S, T, P, I dans cet ordre pour les interprétations :
$mod(\mu) = \mathcal{W} \setminus \{(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$
$mod(\varphi_1) = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\}$ $mod(\varphi_2) = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\}$
$mod(\varphi_3) = \{(0,0,0,0)\}$ $mod(\varphi_4) = \{(1,1,1,0),(0,1,1,0)\}$

Les calculs sont résumés dans le tableau 1, pour chaque interprétation on donne la distance entre celle-ci et les quatre bases de croyances et la distance entre cette interprétation et l'ensemble de croyances selon les 3 opérateurs que l'on a défini $\triangle^{d_H,Max}$, $\triangle^{d_H,\Sigma}$ et $\triangle^{d_H,GMax}$. Les lignes grisées correspondent aux interprétations rejetées par les contraintes d'intégrité. Le résultat de la fusion doit donc être cherché parmi les interprétations non grisées.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	$\mathbf{dist_{d_H,Max}}$	$\mathbf{dist_{d_H,\Sigma}}$	$\mathbf{dist_{d_H,GMax}}$
$(0,0,0,0)$	3	3	0	2	3	8	(3,3,2,0)
$(0,0,0,1)$	3	3	1	3	3	10	(3,3,3,1)
$(0,0,1,0)$	2	2	1	1	**2**	6	**(2,2,1,1)**
$(0,0,1,1)$	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
$(0,1,0,0)$	2	2	1	1	**2**	6	**(2,2,1,1)**
$(0,1,0,1)$	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
$(0,1,1,0)$	1	1	2	0	2	4	(2,1,1,0)
$(0,1,1,1)$	1	1	3	1	3	6	(3,1,1,1)
$(1,0,0,0)$	2	2	1	2	**2**	7	(2,2,2,1)
$(1,0,0,1)$	2	2	2	3	3	9	(3,2,2,2)
$(1,0,1,0)$	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
$(1,0,1,1)$	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
$(1,1,0,0)$	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
$(1,1,0,1)$	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
$(1,1,1,0)$	0	0	3	0	3	3	(3,0,0,0)
$(1,1,1,1)$	0	0	4	1	4	**5**	(4,1,0,0)

TAB. 1 – Distances

Avec $\triangle^{d_H,Max}$ comme opérateur de fusion, la distance minimum entre une interprétation et l'ensemble de croyances est 2, et les interprétations suivantes sont donc retenues : $mod(\triangle_{\mu}^{d_H,Max}(\ \Psi)) = \{(0,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,0,0)\}$. La décision qui est conforme aux vœux du groupe est alors de ne pas augmenter le loyer et de construire l'un des trois items, ou d'augmenter le loyer et de construire soit le court de tennis, soit le parking privé.

On peut voir sur cet exemple pourquoi les opérateur $\triangle^{Max}$ ne sont pas des opérateurs de fusion contrainte. On voit par exemple que les 2 interprétations $(0,0,1,0)$ et $(0,0,1,1)$ font parties des interprétations sélectionnées par $\triangle^{d_H,Max}$, bien que l'interprétation $(0,0,1,0)$ contente φ_3 et φ_4 plus que l'interprétation $(0,0,1,1)$, alors que ces deux interprétations sont aussi satisfaisantes pour φ_1 et φ_2. Il semble alors naturel de préférer $(0,0,1,0)$ à $(0,0,1,1)$. L'opérateur $\triangle^{d_H,GMax}$ précise justement les choix de $\triangle^{d_H,Max}$. Avec $\triangle^{d_H,GMax}$, on a comme résultat $mod(\triangle_{\mu}^{d_H,GMax}(\Psi)) = \{(0,0,1,0), (0,1,0,0)\}$, la décision prise dans ce cas sera donc de construire soit le court de tennis, soit le parking et de ne pas augmenter le loyer.

Par contre, si on choisit $\triangle^{d_H,\Sigma}$ pour résoudre le conflit en se rangeant au vœux de la majorité, le résultat est alors $mod(\triangle^{d_H,\Sigma}{}_{\mu}(\Psi)) = \{(1,1,1,1)\}$, et la solution adoptée est de construire les trois items et d'augmenter le loyer.

Le "vote" majoritaire, à la $\triangle^{\Sigma}$, semble plus démocratique que les autres méthodes mais par exemple, dans ce cas, cela ne marche que si φ_3 accepte de se conformer à cette décision qui va complètement à l'encontre de ses vœux. Il se pourrait très bien que, fâché de cette décision, il décide de ne pas payer son augmentation de loyer et aucun des trois items ne pourrait être construit.

Donc si une décision nécessite l'adhésion de tous les participants, un opérateur d'arbitrage semble plus adéquat qu'un opérateur majoritaire.

4 Opérateurs d'arbitrage et opérateurs majoritaires

Nous montrons dans cette section qu'il est possible d'être à la fois un opérateur d'arbitrage et un opérateur majoritaire. Tout d'abord nous définissons une distance drastique entre interprétations. Les opérateurs $\triangle^{GMax}$ et $\triangle^{\Sigma}$ définis à partir de cette distance coïncident. Ensuite, nous montrons que, quelle que soit la distance choisie, certains opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ sont à la fois des opérateurs d'arbitrage et des opérateurs majoritaires.

4.1 Distance drastique

La distance la plus simple que l'on peut définir entre deux interprétations est celle donnant 0 si les deux interprétations sont égales et 1 sinon.

$$d_D(I,J) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = J \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La distance entre une interprétation et une base de croyances est alors également 0 ou 1 suivant que l'interprétation satisfait ou non la base de croyances.

Il est facile de voir alors que les opérateurs obtenus à partir des familles $\triangle^{GMax}$ et $\triangle^{\Sigma}$ et de cette distance coïncident. On a donc le résultat suivant :

Théorème 5
L'opérateur $\triangle^{d_D,\Sigma} = \triangle^{d_D,GMax}$ satisfait les postulats (IC0)-(IC8), (Maj) et (Arb).

Un aspect intéressant de cet opérateur est que l'on calcule la distance d'une interprétation à une base de croyances par un test de satisfiabilité. La distance obtenue étant la plus simple possible, il n'a qu'un comportement très simple mais cette définition peut sembler moins arbitraire que celles qui utilisent une distance plus évoluée comme la distance de Dalal par exemple.

4.2 Etude graphique

Nous allons montrer dans cette section que certains opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ peuvent, lorsque la cardinalité des ensembles de croyances est fixée, être à la fois des opérateurs majoritaires et d'arbitrage. Pour expliquer cela facilement nous allons examiner graphiquement le comportement de ces opérateurs explorant l'espace des solutions. Pour que la représentation soit simple, on se limitera dans cette section à la fusion de deux bases de croyances.

Tous les résultats de cette section ne dépendent pas de la distance choisie, on considérera donc une distance d quelconque et on omettra cette distance dans les noms des opérateurs pour des raisons de lisibilité.

On place les interprétations dans le plan avec comme abscisse leur distance à la base φ_2 et comme ordonnée leur distance à la base φ_1. Ainsi, le but de la fusion est de déterminer l'ensemble des interprétations les plus proches du point (0,0). La différence entre les différents opérateurs de fusion réside dans

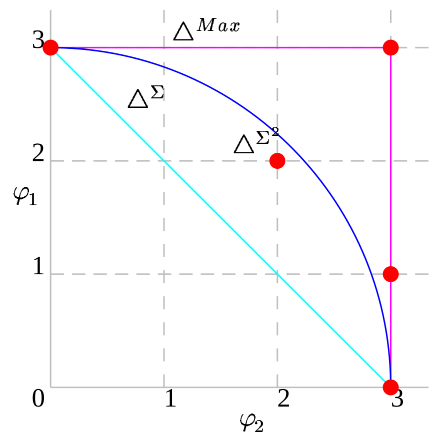


FIG. 2 – Fusion de deux bases de croyances

la définition de la *“distance”* utilisée et dans la définition de cette notion de *“proximité”*.

Sur la figure 2 on a représenté les courbes qui dénotent les interprétations à une distance 3 de l'ensemble de croyances selon les opérateurs $\triangle^{Max}$, $\triangle^{\Sigma}$ et $\triangle^{\Sigma^2}$. $\triangle^{Max}$ est représenté par un carré de coté a, $\triangle^{\Sigma}$ par une droite d'équation $x = a - y$ et $\triangle^{\Sigma^2}$ par un arc de cercle de rayon $\sqrt{a}$, a étant la distance par rapport à l'ensemble de croyances. L'opérateur $\triangle^{GMax}$ est difficilement représentable graphiquement mais il faut imaginer une courbe qui suit celle de $\triangle^{Max}$ mais préférant les interprétations proches des axes. Nous verrons ensuite comment approximer graphiquement l'opérateur $\triangle^{GMax}$.

Ainsi, le résultat de la fusion pour ces trois opérateurs est l'ensemble des interprétations rencontrées en premier par ces courbes lorsque l'on fait varier a de 0 à l'infini.

Sur cet exemple, le résultat pour $\triangle^{Max}$ et $\triangle^{\Sigma^2}$ sera l'interprétation placée en (2,2) et pour $\triangle^{\Sigma}$ le résultat sera les interprétations placées en (3,0) et (0,3).

De la même manière on peut reconstruire les pré-ordres $\leq_{\Psi}^{Max}$,$\leq_{\Psi}^{\Sigma}$ et $\leq_{\Psi}^{\Sigma^2}$ en considérant l'ordre dans lequel sont rencontrées les interprétations (lorsque a varie de 0 à l'infini).

Sur le graphique, on peut se rendre compte de l'insuffisance de $\triangle^{Max}$ qui ne permet pas de faire la distinction entre les points (3,0) et (3,3). C'est pour cette raison que $\triangle^{Max}$ n'est pas un opérateur de fusion contrainte.

D'un autre côté, $\triangle^{\Sigma}$ ne fait aucune distinction sur l'origine du mécontentement. En effet, la distance de l'interprétation à l'ensemble de croyances peut être vue comme une mesure du mécontentement qu'engendre cette interprétation sur l'ensemble de croyances, et l'opérateur $\triangle^{\Sigma}$ n'est absolument pas consensuel car il permet de choisir des interprétations satisfaisant totalement l'une des deux bases (par exemple celle située en (3,0)), alors que d'autres interprétations seraient plus "égalitaires" (comme par exemple celle située en (2,2)).

Cela peut sembler normal pour un opérateur majoritaire mais, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ce n'est pas systématique. En effet, les opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ avec $n > 1$ préféreront des choix plus consensuels, c'est-à-dire ceux situés à proximité de la droite $x = y$. Et donc, sur la figure 2 l'interprétation située en $(2, 2)$ sera préférée à celle située en $(3, 0)$.

L'opérateur $\triangle^{\Sigma^2}$ est un représentant particulier de la classe des opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ puisqu'il utilise la distance euclidienne pour calculer les distances entre les interprétations et l'ensemble de croyances. Cette volonté d'être proche de l'ensemble de croyances peut justifier l'utilisation de l'opérateur $\triangle^{\Sigma^2}$ puisqu'il donne une distance sphérique assez naturelle, qui est majoritaire sans avoir les excès de $\triangle^{\Sigma}$.

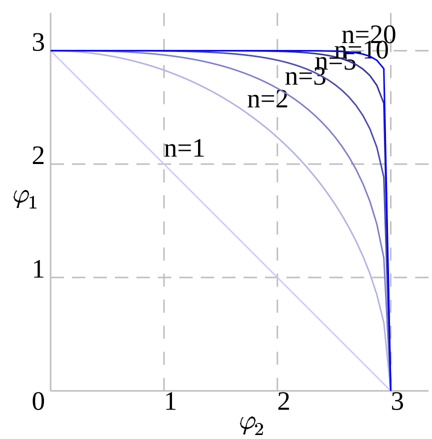


FIG. 3 – La famille $\triangle^{\Sigma^n}$

De plus, on peut remarquer sur la figure 3 que, lorsque l'on augmente la valeur de n, la courbe de $\triangle^{\Sigma^n}$ s'approche de celle de $\triangle^{Max}$. Donc, à partir d'un n suffisamment grand, on peut prendre $\triangle^{Max}$ comme approximation de la courbe de $\triangle^{\Sigma^n}$. Mais, quelle que soit la valeur de n, une interprétation placée en (x, y) sera toujours préférée à une interprétation placée en $(x, y+1)$ ou en $(x + 1, y)$. Mais ce parcours de la courbe $\triangle^{Max}$, en préférant les interprétations les plus proches des axes, est exactement celui de la courbe de $\triangle^{GMax}$. Donc, à partir d'un certain n, $\triangle^{\Sigma^n} = \triangle^{GMax}$. Plus formellement, on a le résultat suivant :

Théorème 6
Pour tout ensemble de croyances fini Ψ, $\exists n_0$ tel que

$$\forall n > n_0 \ \triangle_{\mu}^{\Sigma^n}(\Psi) = \triangle_{\mu}^{GMax}(\Psi)$$

Ce résultat est une autre solution au problème de la partition opérateurs d'arbitrage - opérateurs majoritaires, puisque les opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$, pour tout ensemble de croyances fixé et pour tout n supérieur à un certain n_0 fixé par la distance maximale entre une interprétation et une base de croyances, sont à la fois des opérateurs d'arbitrage et des opérateurs majoritaires. Ces deux ensembles ne sont donc pas disjoints. La frontière entre majorité et arbitrage est assez floue et il est possible, dans un sens, de passer continûment de l'un à l'autre.

Notons tout de même que ce résultat n'est valable que pour tout ensemble de croyances de cardinalité borné (voir en appendice pour la démonstration), ce qui n'est pas une contrainte très forte puisque en pratique on peut toujours donner un majorant du nombre de bases de l'ensemble de croyances.

Mais si le nombre de bases de l'ensemble de croyances n'est pas borné, le résultat précédent n'est plus valable. En effet, on a comme corollaire du théorème précédent :

Théorème 7
Pour toute distance d non drastique, l'opérateur $\triangle^{d,GMax}$ est différent de l'opérateur $\triangle^{d,\Sigma^n}$.

5 DISCUSSION

Une conclusion que l'on pourrait tirer des résultats précédents est que (Arb) n'exprime peut-être pas exactement ce que l'on entend par *arbitrage*.

Nous espérons avoir apporté suffisamment d'éléments en faveur de (Arb), mais voyons dans cette section si nous pouvons trouver d'autres possibilités.

Certains auteurs (voir *e.g.* [20]) prennent la propriété suivante comme expression de l'arbitrage :

(MI) $\forall n \ \triangle_\mu (\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n) \leftrightarrow \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$

Tout d'abord il faut remarquer que cette propriété n'est pas cohérente avec les propriétés des opérateurs de fusion contrainte (voir [16]). Et, indépendemment, nous ne pensons pas que cette propriété exprime l'idée de tenter d'être le plus proche possible des voeux de chacun des membres du groupe. Elle dit simplement que les répétitions n'entrent pas en compte pour la fusion (c'est-à-dire que nous ne travaillons alors plus avec des multi-ensembles mais avec des ensembles classiques), c'est-à-dire que l'on perd des informations sur la localisation des informations, puisque nous n'avons plus une base pour chaque agent.

Une autre approche consiste à considérer les opérateurs d'arbitrage comme les opérateurs permettant aux différents agents d'user d'un *droit de veto* sur certains choix. L'idée est d'exprimer le fait que les plus mauvais choix possibles pour chacun des agents ne seront pas dans le résultat (si possible). Cela peut être exprimé de la façon suivante :

(ArbV) Si $\forall \varphi_i \ \exists \mu_i \ \forall \mu \ \triangle_{\mu_i \vee \mu} (\varphi_i) \vdash \mu$
et $\forall i \ \mu' \wedge \mu_i \vdash \bot$,
alors $\triangle_{\mu' \vee \bigvee \mu_i}(\sqcup \varphi_i) \vdash \mu'$

Chaque μ_i correspond aux plus mauvais choix possibles pour l'agent φ_i. Et cette propriété dit donc que si on peut trouver une interprétation qui n'appartient à aucun des μ_i, alors aucun modèle d'un des μ_i ne sera choisi comme résultat de la fusion.

Cette piste semble intéressante, mais la propriété (ArbV) est trop complexe. On ne pourra donc vraisemblablement pas vérifier directement si un opérateur la satisfait ou pas. De plus, il semble difficile d'en trouver une expression en terme de condition(s) sur l'assignement syncrétique.

6 CONCLUSION

Nous avons proposé dans cet article l'utilisation des opérateurs de fusion de croyances comme cadre formel pour la concertation entre agents. Nous avons défini logiquement ces opérateurs et nous avons donné deux sous-classes d'opérateurs, les opérateurs majoritaires et les opérateurs d'arbitrage, permettant d'accorder la concertation au type de comportement voulu pour un système particulier.

Une question ouverte jusqu'alors était de savoir si ces deux sous-classes étaient disjointes ou pas. Nous avons montré que ce n'était pas le cas et qu'il était donc possible d'être à la fois majoritaire et d'arbitrage. Ces opérateurs semblent former un bon compromis entre la volonté démocratique véhiculée par les opérateurs majoritaires et le comportement consensuel des opérateurs d'arbitrage.

Nous avons, en particulier, introduit une nouvelle famille d'opérateurs de fusion, la famille $\triangle^{\Sigma^n}$, qui permet de choisir le niveau de "consensus" de l'opérateur majoritaire en fonction de l'application.

Une question ouverte est alors de savoir si on peut caractériser exactement quels sont les opérateurs qui appartiennent simultanément aux deux classes.

Remerciements

Les auteurs tiennent a remercier les relecteurs pour leurs remarques, ainsi que Laurence Cholvy et Christophe Garion pour leurs commentaires sur la version préliminaire de cet article.

Appendice : Preuves

Preuve du théorème 6 : Nous montrons que, étant donnés un ensemble de croyances Ψ composé de m bases de croyances, et une distance d, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$ les deux pré-ordres $\leq_\Psi^{d,\Sigma^n}$ et $\leq_\Psi^{d,GMax}$ coïncident. Et on conclut par le théorème 1.

Soit $n_0 = m.N$, où N est la valeur maximale donnée par la distance d, nous allons montrer que $\forall n > n_0\ \forall I\ \forall J\ \ I \leq_\Psi^{d,GMax} J$ ssi $I \leq_\Psi^{d,\Sigma^n} J$.

- Soient I et J tels que $I \leq_\Psi^{d,GMax} J$. Montrons que $I \leq_\Psi^{d,\Sigma^n} J$. Considérons deux cas :
  - $I \simeq_\Psi^{d,GMax} J$, alors les deux listes ordonnées $(d^I_{\sigma(1)}, \ldots, d^I_{\sigma(m)})$ et $(d^J_{\sigma(1)}, \ldots, d^J_{\sigma(m)})$ sont identiques. Ainsi les deux distances $d_{d,\Sigma^n}(I, \Psi) = \Sigma_{i=1\ldots m} {d^I_{\sigma(i)}}^n$ et $d_{d,\Sigma^n}(J, \Psi)$ sont les mêmes pour tout n. Donc si $I \simeq_\Psi^{d,GMax} J$, alors pour tout n $I \simeq_\Psi^{d,\Sigma^n} J$.

- $I <_{\Psi}^{d,GMax} J$. Cela signifie que pour les deux listes ordonnées ($d^I_{\sigma(1)}, \ldots$, $d^I_{\sigma(m)}$) et $(d^J_{\sigma(1)}, \ldots, d^J_{\sigma(m)})$ il existe $k \leq m$ tel que $\forall i < k\ d^I_{\sigma(i)} = d^J_{\sigma(i)}$ et $d^I_{\sigma(k)} < d^J_{\sigma(k)}$. Considérons le pire cas, où $k = 1$ et tel que $(d^I_{\sigma(1)}, \ldots, d^I_{\sigma(m)}) = (x, \ldots, x)$ et $(d^J_{\sigma(1)}, \ldots, d^J_{\sigma(m)}) = (y, 0, \ldots, 0)$ avec $x < y$. Les autres cas seront retrouvés directement grâce aux propriétés de la somme. Notons alors qu'avec $n_0 = m.N$ (et puisque $x < y$ et $x < N$) on a $m.x^{n_0} < y^{n_0}$. On a donc $\Sigma_{i=1\ldots m} {d^I_{\sigma(i)}}^{n_0} < \Sigma_{i=1\ldots m} {d^J_{\sigma(i)}}^{n_0}$. Donc $I <_{\Psi}^{d,\Sigma^{n_0}} J$.

- Supposons $I \leq_{\Psi}^{d,\Sigma^n} J$, montrons alors $I \leq_{\Psi}^{d,GMax} J$. Remarquons simplement que la contraposée est : si $J <_{\Psi}^{d,GMax} I$, alors $J <_{\Psi}^{d,\Sigma^n} I$, c'est-à-dire ce que l'on a montré dans le second cas du point précédent (on montre cela pour $n_0 = m.N$, puis on dérive le résultat pour tout $n > n_0$).

$\square$

Preuve du théorème 7 : Cette preuve est implicite dans la preuve du théorème 6. Il suffit de trouver I, J et Φ tels que le vecteur de distances de I à Φ soit $(x, x, ..., x)$; celui de distances de J à Φ soit $(x+1, 0, 0, ..., 0)$ et m (le nombre de bases de croyances de Φ) soit h tel que $m > [(x+1)/x]^n$. Or, il est clair que l'on peut toujours trouver de tels I, J et Φ.

$\square$

RÉFÉRENCES

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors et D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[2] L. Amgoud, S. Parsons et N. Maudet. Arguments, dialogue and negociation. In *Proceedings of the Fourteenth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'00)*, pages 338–342, 2000.

[3] K. J. Arrow. *Social choice and individual values*. Wiley, New York, second edition, 1963.

[4] C. Baral, S. Kraus, J. Minker et V. S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8(1) :45–71, 1992.

[5] L. Cholvy. Reasoning about data provided by federated deductive databases. *Journal of Intelligent Information Systems*, 10 :49–80, 1998.

[6] L. Cholvy. Reasoning about merged information. In D. M. Gabbay et Ph. Smets, éditeurs, *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 3, pages 233–263. Kluwer, 1998.

[7] L. Cholvy et R. Demolombe. Reasoning with information sources ordered by topics. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Artificial Intelligence : Methods, Systems and Application (AIMSA'94)*, 1994.

[8] L. Cholvy et T. Hunter. Fusion in logic : a brief overview. In *Proceedings of the Fourth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'97)*, Lecture Notes in Computer Science 1244, pages 86–95, 1997.

[9] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 475–479, 1988.

[10] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT Press, 1988.

[11] H. Katsuno et A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.

[12] J. S. Kelly. *Arrow impossibility theorems*. Series in economic theory and mathematical economics. Academic Press, New York, 1978.

[13] S. Konieczny. *Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance*. PhD thesis, LIFL - Université de Lille 1, 1999.

[14] S. Konieczny. On the difference between merging knowledge bases and combining them. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 135–144, 2000.

[15] S. Konieczny et R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proceedings of the Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1638, pages 233–244, 1999.

[16] S. Konieczny et R. Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[17] P. Liberatore et M. Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1) :76–90, 1998.

[18] J. Lin. *Frameworks for dealing with conflicting information and applications*. PhD thesis, University of Toronto, 1995.

[19] J. Lin et A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. In *Dynamic Worlds : From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer, 1999.

[20] T. Meyer. On the semantics of combination operators. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2) :59–84, 2001.

[21] H. Moulin. *Axioms of cooperative decision making*. Monograph of the Econometric Society. Cambridge University Press, 1988.

[22] S. Parsons et N. R. Jennings. Negotiation through argumentation : a preliminary report. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Multi Agent Systems*, pages 267–274, 1996.

[23] P. Z. Revesz. On the semantics of theory change : arbitration between old and new information. In *Proceedings of the* 12^{th} *ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*, pages 71–92, 1993.

[24] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.