Chapitre 1

De la révision à la fusion de bases de croyances

Une des hypothèses de base de la révision de croyances est la primauté de la nouvelle information (*primacy of update*). Or la nouvelle information n'est pas toujours plus fiable que les croyances actuelles et il peut être utile, dans certains cas, de relâcher cette hypothèse. On peut distinguer trois cas :

– *la nouvelle information est plus fiable que les croyances actuelles :* c'est l'hypothèse de base faite dans le cadre de la révision. On peut donc réviser les croyances actuelles par la nouvelle information.

– *la nouvelle information est moins fiable que les croyances actuelles :* un point de vue drastique serait simplement de refuser cette nouvelle information insuffisamment fiable. Mais si on veut être plus constructif, il peut être sensé d'intégrer cette information dans les croyances mais avec moins d'importance que pour une révision classique. Une possibilité est d'inverser le processus de révision, c'est-à-dire de réviser la nouvelle information par les croyances actuelles, ce qui donne donc la priorité aux croyances actuelles. Une autre possibilité est d'utiliser des opérateurs de "révision non prioritaire" qui relâchent l'hypothèse de primauté de la nouvelle information [HAN 98, MAK 98, FER 99, SCH 98].

– *la nouvelle information est aussi fiable que les croyances actuelles :* ici on doit donner la même considération aux deux informations. Vue l'asymétrie inhérente aux opérateurs de révision, une possibilité est de prendre comme résultat la disjonction de la révision des croyances par la nouvelle information et de la révision de la nouvelle information par les croyances, pour rétablir la symétrie (idée directrice dans [LIB 98]). Mais pour gagner un peu en généralité, il faut remarquer que le problème se résume alors à combiner deux informations en une seule. Plus généralement, le problème

Chapitre rédigé par Sébastien KONIECZNY et Ramón PINO PÉREZ.

est donc de savoir comment combiner plusieurs informations ayant toutes la même fiabilité. C'est le champ d'application des opérateurs de fusion de croyances que nous étudierons dans ce chapitre.

Les opérateurs de fusion de croyances [BAR 91, BAR 92, REV 97, KON 99b, CHO 97, CHO 98] permettent de déterminer les croyances (ou les buts) d'un groupe d'agents à partir de leurs croyances (buts) individuelles. Ces opérateurs sont indispensables pour un grand nombre d'applications où l'on doit combiner un ensemble d'informations contradictoires provenant de sources différentes comme les bases de données distribuées, les systèmes multi-agents ou les systèmes d'informations distribués en général.

Ce processus permet donc d'obtenir une information cohérente à partir d'un ensemble d'informations contradictoires, mais également de faire surgir des croyances qu'aucune des informations initiales ne permettait d'inférer. Par exemple si une des sources d'informations sait que a est vrai et qu'une autre source sait que $a \rightarrow b$, alors l'information synthétisée sait que b est vrai alors qu'aucune des deux sources ne le sait. Ce type de croyance a été appelé *croyance implicite* dans [HAL 92].

Nous donnerons une caractérisation axiomatique des opérateurs de fusion, c'est-à-dire, comme pour la révision, un ensemble de propriétés logiques souhaitables pour les opérateurs de fusion. Nous identifierons également deux sous-classes majeures d'opérateurs de fusion : les opérateurs majoritaires qui résolvent les conflits en se fiant à la majorité, et les opérateurs d'arbitrage qui ont un comportement plus consensuel en tentant de satisfaire au mieux chacune des sources. Un théorème de représentation montrera ensuite que chaque opérateur de fusion correspond à une famille de pré-ordres sur les interprétations. Ce théorème montre que fusionner des croyances est très proche du problème de l'agrégation de préférences, sujet abondamment étudié en théorie du choix social [ARR 63, KEL 88, SEN 79, MOU 88]. Nous illustrerons le comportement des différents types d'opérateurs sur un exemple. Nous étudierons ensuite la frontière entre les opérateurs majoritaires et les opérateurs d'arbitrage et les liens forts qui existent entre fusion et révision de bases de croyances.

1.1. Préliminaires

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$ sur un alphabet fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles. Une interprétation est une fonction de $\mathcal{P}$ vers $\{0,1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation I est un modèle d'une formule si et seulement si elle rend cette formule vraie. Soit φ une formule, $mod(\varphi)$ dénote l'ensemble des modèles de φ, c'est-à-dire $mod(\varphi) = \{I \in \mathcal{W}\ I \models \varphi\}$. Soit un ensemble de modèles $A \subseteq \mathcal{W}$, on note φ_A la formule (à équivalence logique près) dont les modèles sont les éléments de A.

Une *base de croyances* φ est un ensemble fini de formules propositionnelles.

Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, n bases de croyances (non nécessairement différentes), on appelle *ensemble de croyances* le multi-ensemble Ψ constitué de ces n bases de croyances : $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. On notera $\bigwedge \Psi$ la conjonction des bases de croyances de Ψ, c'est-à-dire $\bigwedge \Psi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_2$. On dira que l'ensemble de croyances Ψ est consistant, si $\bigwedge \Psi$ est consistant. L'union sur les multi-ensembles sera notée $\sqcup$. Par abus, si φ est une base de croyances, φ dénotera aussi l'ensemble de croyances singleton $\Psi = \{\varphi\}$.

Soit un entier strictement positif n, on notera Ψ^n le multi-ensemble composé de n fois le multi-ensemble Ψ : $\Psi^n = \{\underbrace{\Psi, \ldots, \Psi}_{n}\}$

DÉFINITION 1.1.– *Deux ensembles de croyances Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalents, noté $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ si et seulement si il existe une bijection f de $\Psi_1 = \{\varphi_1^1, \ldots, \varphi_n^1\}$ vers $\Psi_2 = \{\varphi_1^2, \ldots, \varphi_n^2\}$, telle que $\vdash f(\varphi) \leftrightarrow \varphi$.*

Un pré-ordre $\leq$ sur $\mathcal{W}$ est une relation réflexive et transitive sur $\mathcal{W}$. Un pré-ordre est total si $\forall I, J \in \mathcal{W}\ I \leq J$ ou $J \leq I$. Soit un pré-ordre $\leq$, on définit $<$ comme $I < J$ ssi $I \leq J$ et $J \not\leq I$. De la même manière la relation d'équivalence $\simeq$ associée est définie par $I \simeq J$ ssi $I \leq J$ et $J \leq I$. On écrira $I \in min(mod(\varphi), \leq)$ ssi $I \models \varphi$ et $\forall J \models \varphi\ I \leq J$.

1.2. Opérateurs de fusion contrainte

Nous pouvons à présent définir les opérateurs de fusion de croyances. Une base de croyances φ représentera les croyances d'un agent (d'une source). Un ensemble de croyances Ψ représentera un groupe d'agents.

Le but des opérateurs de fusion est, à partir des croyances des agents et des contraintes particulières du système (contraintes physiques, réglementations, etc), de déterminer les croyances du groupe.

Un opérateur de fusion $\triangle$ est donc une fonction qui, à un ensemble de croyances Ψ et à une base de croyances μ représentant les contraintes d'intégrité du système, associe une base de croyances, notée $\triangle_\mu(\Psi)$, contenant les croyances du groupe d'agents.

Les propriétés logiques souhaitables pour un opérateur de fusion sont les suivantes [KON 99b, KON 99a] :

DÉFINITION 1.2.– $\triangle$ *est un opérateur de* fusion contrainte *si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :*

(IC0) $\triangle_\mu(\Psi) \vdash \mu$

(IC1) *Si μ est consistant, alors $\triangle_\mu(\Psi)$ est consistant*

(IC2) *Si Ψ est consistant avec μ, alors $\triangle_\mu(\Psi) = \bigwedge \Psi \wedge \mu$*

(IC3) *Si $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ et $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$, alors $\triangle_{\mu_1}(\Psi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\Psi_2)$*

(IC4) *Si $\varphi \vdash \mu$ et $\varphi' \vdash \mu$, alors $\triangle_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \perp \Rightarrow \triangle_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \perp$*

(IC5) $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$

(IC6) *Si $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$ est consistant, alors $\triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$*

(IC7) $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$

(IC8) *Si $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ est consistant, alors $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$*

La signification intuitive de ces propriétés est la suivante : (IC0) assure que le résultat de la fusion satisfait les contraintes d'intégrité. (IC1) dit que si les contraintes d'intégrité sont consistantes alors le résultat de la fusion est consistant, c'est-à-dire que l'on peut toujours extraire des croyances cohérentes du groupe d'agents. (IC2) demande que, lorsque c'est possible, le résultat de la fusion soit simplement la conjonction des bases de croyances et des contraintes d'intégrité. Donc, lorsqu'il n'y a pas de conflit entre les agents et les contraintes, la fusion est simplement l'union des différentes croyances. (IC3) est le principe d'indépendance de syntaxe, c'est-à-dire que le résultat de la fusion ne dépend pas de la forme syntaxique des croyances mais simplement des opinions exprimées. (IC4) est la propriété d'équité. Elle assure que lorsque l'on fusionne l'opinion de deux agents, l'opérateur ne peut pas donner de préférence à l'un d'eux. (IC5) exprime l'idée suivante : si un groupe Ψ_1 se met d'accord sur un ensemble d'alternatives qui contient l'alternative A, et si un autre groupe Ψ_2 se met d'accord sur un autre ensemble d'alternatives qui contient également A, alors si l'on joint les deux groupes A fera encore partie des alternatives acceptables. Et (IC5) et (IC6) ensembles, expriment le fait que, dès que l'on peut trouver deux sous-groupes qui s'accordent sur au moins une alternative, alors le résultat de la fusion sera exactement l'ensemble des alternatives sur lesquelles ces deux groupes s'accordent. (IC7) et (IC8) sont une généralisation directe des postulats (R5) et (R6) de la révision de croyances [ALC 85, GÄR 88, KAT 91]. Ils expriment des conditions sur les conjonctions de contraintes d'intégrité et s'assurent de ce fait que la notion de *proximité* est bien fondée. C'est-à-dire, par exemple, que si une alternative A est préférée parmi un ensemble d'alternatives possibles et si on restreint le nombre d'alternatives possibles tout en gardant l'alternative A, celle-ci sera toujours préférée parmi les alternatives restantes.

Nous allons à présent définir deux sous classes d'opérateurs de fusion, les opérateurs de fusion majoritaires et les opérateurs d'arbitrage.

Un opérateur de *fusion majoritaire* est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :

(Maj) $\exists n \ \triangle_\mu (\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n) \vdash \triangle_\mu(\Psi_2)$

Ce postulat exprime le fait que si une opinion a une large audience, ce sera alors l'opinion du groupe. On peut remarquer que cette propriété est trés générale. Elle ne dit pas exactement le nombre de répétitions nécessaires d'un ensemble de croyances pour s'imposer (cela dépend de l'opérateur), mais elle impose l'existence d'un tel seuil. Les opérateurs de fusion majoritaire tentent donc de satisfaire au mieux le groupe dans son ensemble. D'un autre côté, les opérateurs d'arbitrage tentent de satisfaire chacun des éléments du groupe pris individuellement du mieux possible. Un *opérateur d'arbitrage* est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :

(Arb) $$\left.\begin{array}{l} \triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2) \\ \triangle_{\mu_1 \leftrightarrow \neg \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg \mu_2) \\ \mu_1 \nvdash \mu_2 \\ \mu_2 \nvdash \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$$

Ce postulat dit que si un ensemble d'alternatives préférées sous un ensemble de contraintes d'intégrité μ_1 pour une base de croyances φ_1 correspond à l'ensemble des alternatives préférées par la base φ_2 sous les contraintes μ_2, et si les alternatives qui n'appartiennent qu'à un des deux ensembles de contraintes d'intégrité sont toutes aussi crédibles pour le groupe ($\varphi_1 \sqcup \varphi_2$), alors les alternatives préférées pour le groupe parmi la disjonction des deux ensembles de contraintes seront celles préférées par chacune des bases sous leurs contraintes respectives. Ce postulat est bien plus intuitif lorsqu'il est exprimé sous la forme d'assignement syncrétique (voir condition 8). Il exprime le fait que ce sont les alternatives médianes qui sont favorisées.

Nous allons illustrer cela sur l'exemple suivant :

EXEMPLE.– Tom et David ont raté le match de football d'hier entre les rouges et les jaunes. Ils ne connaissent donc pas le résultat du match. Tom a entendu ce matin à la radio que les rouges ont fait un très bon match. Il pense donc qu'une victoire des rouges est plus crédible qu'un match nul, et qu'un match nul est plus crédible qu'une victoire des jaunes. Un ami a dit à David qu'après ce match, les jaunes ont a présent toutes les chances de remporter le championnat. Il déduit de cette information que les jaunes ont très certainement gagné le match, ou au moins obtenu un match nul. En confrontant leurs points de vue, Tom et David se mettent d'accord sur le fait que les deux équipes sont de la même force et qu'elles avaient donc les mêmes chances de remporter le match. Ce que demande la propriété d'arbitrage est qu'avec ces informations Tom et David doivent se mettre d'accord sur le fait qu'un match nul est le résultat le plus crédible.

Certains opérateurs ne sont pas suffisamment fins pour satisfaire la propriété (IC6). Dans ce cas, on peut tout de même leur demander de satisfaire la propriété (IC6') suivante, qui est un affaiblissement de (IC6) :

(IC6') Si $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$ est consistant, alors $\triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle_\mu(\Psi_1) \vee \triangle_\mu(\Psi_2)$

Cette propriété demande simplement que s'il existe une alternative commune lors de la fusion de deux sous-groupes, alors les alternatives résultats de la concertation générale sont au moins incluses dans les alternatives convenables pour l'un des deux groupes. On appellera de tels opérateurs – vérifiant (IC0-IC5), (IC6'), (IC7) et (IC8) – des opérateurs de *quasi-fusion*.

Une dernière propriété que nous pouvons noter est la propriété d'indépendance à la majorité :

(MI) $\forall n \;\; \triangle_\mu\, (\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n) \leftrightarrow \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$

Cette propriété est très forte puisqu'elle indique que le résultat de la fusion ne dépend que des opinions différentes exprimées, en ne tenant pas du tout compte de la popularité de chacune. Une conséquence de cette propriété est que pour les opérateurs vérifiant (MI) les ensembles de croyances doivent être considérés comme des ensembles simples et pas des multi-ensembles. Ceci n'est pas souhaitable, comme nous l'illustrerons sur l'exemple de la section 1.3.4.

Cette propriété n'est pas compatible avec celles d'un opérateur de fusion contrainte [KON 98, KON 99a] :

PROPOSITION 1.1.– *Il n'y a pas d'opérateur de fusion contrainte satisfaisant (MI).*

A présent que nous disposons d'une définition logique des opérateurs de fusion contrainte, nous allons donner un théorème de représentation qui permet de définir ces opérateurs de manière bien plus intuitive. Ce théorème montre qu'un opérateur de fusion contrainte correspond à une famille de pré-ordres sur les interprétations.

DÉFINITION 1.3.– *Un* assignement syncrétique *est une fonction qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre $\leq_\Psi$ sur les interprétations telle que pour tous ensembles de croyances Ψ, Ψ_1, Ψ_2 et pour toutes bases de croyances φ, φ' les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) Si $I \models \Psi$ *et* $J \models \Psi$*, alors* $I \simeq_{\Psi} J$
2) Si $I \models \Psi$ *et* $J \not\models \Psi$*, alors* $I <_{\Psi} J$
3) Si $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$*, alors* $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$
4) $\forall I \models \varphi \, \exists J \models \varphi' \; J \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I$
5) Si $I \leq_{\Psi_1} J$ *et* $I \leq_{\Psi_2} J$*, alors* $I \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$
6) Si $I <_{\Psi_1} J$ *et* $I \leq_{\Psi_2} J$*, alors* $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$

Un assignement syncrétique majoritaire *est un assignement syncrétique qui satisfait la condition suivante :*

7) Si $I <_{\Psi_2} J$*, alors* $\exists n \; I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2{}^n} J$

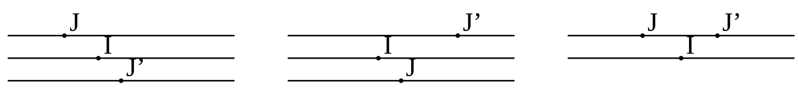
Un assignement syncrétique juste *est un assignement syncrétique qui satisfait la condition suivante :*

8) $\left.\begin{array}{l} I <_{\varphi_1} J \\ I <_{\varphi_2} J' \\ J \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J' \end{array}\right\} \Rightarrow I <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J$

Un assignement quasi-syncrétique *est un assignement vérifiant les propriétés 1 à 5 et la propriété 6' suivante :*

6') Si $I <_{\Psi_1} J$ *et* $I <_{\Psi_2} J$*, alors* $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$

La condition 1 dit que deux modèles de l'ensemble de croyances sont équivalents pour le pré-ordre associé et la condition 2 dit qu'un modèle de l'ensemble de croyances est toujours préféré à un contre-modèle. La condition 3 dit que si deux ensembles de croyances sont équivalents alors les deux pré-ordres associés sont équivalents. Ces trois conditions sont une généralisation des conditions de l'assignement fidèle pour les opérateurs de révision [KAT 91]. La condition 4 dit que pour le pré-ordre associé à un ensemble de croyances composé de deux bases de croyances, pour chaque modèle de l'une, il existe un modèle de l'autre qui est au moins aussi bon. La condition 5 dit que si une interprétation est au moins aussi bonne qu'une autre pour un ensemble de croyances Ψ_1, et que cette interprétation est également au moins aussi bonne pour un ensemble de croyances Ψ_2, alors elle sera au moins aussi bonne que l'autre pour la réunion des deux ensembles de croyances. La condition 6 renforce un peu ce résultat en exigeant que si une interprétation est strictement meilleure qu'une autre pour un ensemble de croyances Ψ_1, et que cette interprétation est au moins aussi bonne pour un ensemble de croyances Ψ_2, alors cette interprétation doit être strictement meilleure que l'autre pour la réunion des deux ensembles de croyances. Il s'avère que les conditions 5 et 6 correspondent aux conditions de Pareto en théorie du choix social [ARR 63, KEL 78]. La condition 7 dit que si l'on répète un groupe Ψ_2 suffisamment de fois alors les préférences strictes de ce groupe seront respectées. La condition 8 dit que ce sont les choix médians qui sont préférés pour le groupe. Ce comportement est illustré figure 1.1 (les interprétations les plus basses sont les interprétations préférées, par exemple pour φ_1 : $J' <_{\varphi_1} I <_{\varphi_1} J$). L'interprétation I, qui n'est jamais aussi mauvaise que J et J' est préférée à celles-ci pour le résultat de la fusion.



(a) φ_1 (b) φ_2 (c) $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$

Figure 1.1. *Arbitrage*

La condition 6' est clairement plus faible que la condition 6 énoncée précédemment. Cette condition exige simplement que si une interprétation est strictement meilleure qu'une autre pour un ensemble de croyances Ψ_1 et si cette interprétation est strictement meilleure que l'autre pour un ensemble de croyances Ψ_2, alors cette interprétation doit être strictement meilleure que l'autre pour la réunion des deux ensembles de croyances.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de représentation pour les opérateurs de fusion contrainte [KON 99b, KON 99a] :

THÉORÈME 1.1.– *Un opérateur $\triangle$ est un opérateur de fusion contrainte (respectivement un opérateur majoritaire, un opérateur d'arbitrage ou un opérateur de quasi-fusion) si et seulement si il existe un assignement syncrétique (respectivement un assignement syncrétique majoritaire, un assignement syncrétique juste ou un assignement quasi-syncrétique) qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ tel que*

$$mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

Ce théorème présente plusieurs avantages. Tout d'abord il est beaucoup plus simple de vérifier qu'un opérateur de fusion vérifie les conditions des assignements syncrétiques plutôt que de vérifier directement les propriétés logiques. Ensuite, le fait qu'un opérateur corresponde à une famille de pré-ordres (un pré-ordre par ensemble de croyances), peut donner des idées pour concevoir de nouveaux opérateurs. En particulier, beaucoup d'opérateurs sont définis de la sorte, en utilisant une fonction qui associe un pré-ordre à l'ensemble de croyances passé en paramètre. C'est le cas de tous les opérateurs basés sur des calculs de distances. Nous en décrivons quelques uns dans la section suivante.

1.3. Quelques opérateurs de fusion contrainte

Nous donnons dans cette partie la définition de trois familles d'opérateurs. Tous ces opérateurs sont basés sur une notion de distance entre interprétations à partir de laquelle on définit le pré-ordre associé à chaque ensemble de croyances.

On suppose que l'on dispose d'une distance entre interprétations. Intuitivement une telle distance $d(I, J)$ indique à quel point un monde possible (une interprétation) J est crédible lorsque l'on se trouve dans le monde I.

DÉFINITION 1.4.– *Une distance* [1] *entre interprétation est une fonction* $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^+$ *telle que :*

– $d(I, J) = d(J, I)$
– $d(I, J) = 0$ *ssi* $I = J$

Un exemple de distance usuellement utilisée est la distance de Dalal [DAL 88], notée d_H, qui est la distance de Hamming entre les interprétations, c'est-à-dire que la distance de Dalal entre deux interprétations est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent.

Toute distance entre interprétations induit de manière naturelle une distance entre une interprétation et une base de croyances φ :

$$d(I, \varphi) = \min_{J \models \varphi} d(I, J)$$

Les trois familles que nous allons définir divergent par la façon dont elles calculent la distance d'une interprétation à l'ensemble de croyances à partir de cette distance entre une interprétation et les bases de croyances. C'est donc dans cette étape d'agrégation des préférences individuelles en une préférence collective que vont se forger les différences de comportement.

1.3.1. *La famille* $\triangle^{Max}$

La première famille d'opérateurs présentée est la famille $\triangle^{Max}$ [REV 93, REV 97, KON 99a]. Ces opérateurs ne sont pas des opérateurs de fusion contrainte mais ils ont un comportement proche de celui que l'on attend d'un opérateur d'arbitrage.

---

1. On peut noter que l'identité triangulaire n'est pas requise, on a donc, à strictement parler, des pseudo-distances.

DÉFINITION 1.5.– *Soit d une distance entre interprétations. Soit un ensemble de croyances Ψ et une interprétation I, la distance entre l'interprétation et l'ensemble de croyances est :*

$$d_{d,Max}(I,\Psi) = \max_{\varphi \in \Psi} d(I,\varphi)$$

On obtient alors le pré-ordre suivant :

$$I \leq_{\Psi}^{d,Max} J \text{ ssi } d_{d,Max}(I,\Psi) \leq d_{d,Max}(J,\Psi)$$

Et l'opérateur $\triangle^{d,Max}$ est défini par :

$$mod(\triangle_{\mu}^{d,Max}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_{\Psi}^{d,Max})$$

PROPOSITION 1.2.– *Les opérateurs $\triangle^{Max}$ sont des opérateurs de quasi-fusion (ils vérifient les propriétés (IC1-IC5), (IC6'), (IC7) et (IC8)) et ils vérifient (Arb) et (MI).*

1.3.2. *La famille $\triangle^{GMax}$*

La famille $\triangle^{GMax}$ [KON 99b, KON 99a] est composée d'opérateurs d'arbitrage. Cette famille est un raffinement de la famille $\triangle^{Max}$.

DÉFINITION 1.6.– *Soit un ensemble de croyances $\Psi = \{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$. Pour chaque interprétation I on construit la liste $(d_1^I \dots d_n^I)$ des distances entre cette interprétation et les n bases de l'ensemble de croyances, c'est-à-dire que $d_j^I = d(I,\varphi_j)$. Soit L_I^{Ψ} la liste obtenue en triant $(d_1^I \dots d_n^I)$ dans l'ordre décroissant. Soit $\leq_{lex}$ l'ordre lexicographique sur des listes d'entiers. On obtient alors le pré-ordre suivant :*

$$I \leq_{\Psi}^{d,GMax} J \text{ ssi } L_I^{\Psi} \leq_{lex} L_J^{\Psi}$$

Et l'opérateur $\triangle^{d,GMax}$ est défini par :

$$mod(\triangle_{\mu}^{d,GMax}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_{\Psi}^{d,GMax})$$

Les opérateurs $\triangle^{GMax}$ sont plus sélectifs que les opérateurs $\triangle^{Max}$, c'est-à-dire que l'on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.3.– *Pour toute distance d, tout ensemble de croyances Ψ, et toute base de croyances μ, on a $\triangle_{\mu}^{d,GMax}(\Psi) \vdash \triangle_{\mu}^{d,Max}(\Psi)$.*

En ce qui concerne les propriétés logiques de ces opérateurs :

PROPOSITION 1.4.– *Les opérateurs $\triangle^{GMax}$ sont des opérateurs d'arbitrage.*

1.3.3. *Les familles $\triangle^{\Sigma}$ et $\triangle^{\Sigma^n}$*

La famille $\triangle^{\Sigma^n}$ donne des opérateurs majoritaires :

DÉFINITION 1.7.– *Soit un ensemble de croyances Ψ et une interprétation I, la distance entre l'interprétation et l'ensemble de croyances est :*

$$d_{d,\Sigma^n}(I,\Psi) = \sqrt[n]{\sum_{\varphi \in \Psi} d(I,\varphi)^n}$$

On obtient alors le pré-ordre suivant :

$$I \leq_{\Psi}^{d,\Sigma^n} J \textit{ ssi } d_{d,\Sigma^n}(I,\Psi) \leq d_{d,\Sigma^n}(J,\Psi)$$

Et l'opérateur $\triangle^{d,\Sigma^n}$ est défini par :

$$mod(\triangle_{\mu}^{d,\Sigma^n}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_{\Psi}^{d,\Sigma^n})$$

On prouve facilement alors que :

PROPOSITION 1.5.– *Les opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ sont des opérateurs majoritaires.*

Lorsque l'on prend $n = 1$ on obtient la famille $\triangle^{\Sigma}$ bien connue en fusion de croyances [KON 99b, REV 97, LIN 95, LIN 99].

1.3.4. *Un exemple*

Voyons à présent sur un exemple le comportement de ces différents opérateurs (on utilise la distance de Dalal comme distance entre interprétations) :

A une réunion de copropriétaires d'une résidence, le président propose pour l'année à venir la construction d'une piscine, d'un court de tennis et d'un parking privé. On notera respectivement S, T, P la construction de la piscine, du court de tennis et du parking. I dénotera l'augmentation du loyer. Le président souligne le fait que si deux des trois items sont construits le loyer augmentera significativement : $\mu = ((S \wedge T) \vee (S \wedge P) \vee (T \wedge P)) \rightarrow I$.

Il y a quatre copropriétaires $\Psi = \varphi_1 \sqcup \varphi_2 \sqcup \varphi_3 \sqcup \varphi_4$. Deux d'entre eux veulent construire les trois items et ne se soucient pas de l'augmentation de loyer : $\varphi_1 = \varphi_2 = S \wedge T \wedge P$. Le troisième pense que construire la moindre chose se répercutera inexorablement un jour sur les loyers et ne tient absolument pas à voir son loyer augmenter, il est donc opposé à toute construction : $\varphi_3 = \neg S \wedge \neg T \wedge \neg P \wedge \neg I$. Le dernier trouve que la résidence a réellement besoin d'un court de tennis et d'un parking privé mais ne voudrait pas subir une forte augmentation de loyer : $\varphi_4 = T \wedge P \wedge \neg I$.

On considérera les quatre variables propositionnelles S, T, P, I dans cet ordre pour les interprétations : $mod(\mu) = \mathcal{W} \setminus \{(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$
$mod(\varphi_1) = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\}$ $mod(\varphi_2) = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\}$
$mod(\varphi_3) = \{(0,0,0,0)\}$ $mod(\varphi_4) = \{(1,1,1,0),(0,1,1,0)\}$

Les calculs sont résumés dans le tableau 1.1, pour chaque interprétation on donne la distance entre celle-ci et les quatre bases de croyances et la distance entre cette interprétation et l'ensemble de croyances selon les opérateurs $\triangle^{d_H,Max}$, $\triangle^{d_H,\Sigma}$ et $\triangle^{d_H,GMax}$. Les lignes grisées correspondent aux interprétations rejetées par les contraintes d'intégrité. Le résultat de la fusion doit donc être cherché parmi les interprétations non grisées.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	$\mathbf{dist_{d_H,Max}}$	$\mathbf{dist_{d_H,\Sigma}}$	$\mathbf{dist_{d_H,GMax}}$
$(0,0,0,0)$	3	3	0	2	3	8	(3,3,2,0)
$(0,0,0,1)$	3	3	1	3	3	10	(3,3,3,1)
$(0,0,1,0)$	2	2	1	1	**2**	6	**(2,2,1,1)**
$(0,0,1,1)$	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
$(0,1,0,0)$	2	2	1	1	**2**	6	**(2,2,1,1)**
$(0,1,0,1)$	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,2,2)
$(0,1,1,0)$	1	1	2	0	2	4	(2,1,1,0)
$(0,1,1,1)$	1	1	3	1	3	6	(3,1,1,1)
$(1,0,0,0)$	2	2	1	2	**2**	7	(2,2,2,1)
$(1,0,0,1)$	2	2	2	3	3	9	(3,2,2,2)
$(1,0,1,0)$	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
$(1,0,1,1)$	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
$(1,1,0,0)$	1	1	2	1	2	5	(2,1,1,1)
$(1,1,0,1)$	1	1	3	2	3	7	(3,2,1,1)
$(1,1,1,0)$	0	0	3	0	3	3	(3,0,0,0)
$(1,1,1,1)$	0	0	4	1	4	**5**	(4,1,0,0)

Tableau 1.1. *Distances*

Avec $\triangle^{d_H,Max}$ comme opérateur de fusion, la distance minimum entre une interprétation et l'ensemble de croyances est 2, et les interprétations suivantes sont donc retenues : $mod(\triangle_\mu^{d_H,Max}(\Psi)) = \{(0,0,1,0),\ (0,0,1,1),\ (0,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (1,0,0,0)\}$. La décision qui est conforme aux vœux du groupe est alors de ne pas augmenter le loyer et de construire l'un des trois items, ou d'augmenter le loyer et de construire soit le court de tennis, soit le parking privé.

On peut voir sur cet exemple pourquoi les opérateurs $\triangle^{Max}$ (c'est également le problème de tous les opérateurs vérifiant (MI)) ne sont pas des opérateurs de fusion contrainte. On voit par exemple que les 2 interprétations $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1, 1)$ font parties des interprétations sélectionnées par $\triangle^{d_H, Max}$, bien que l'interprétation $(0, 0, 1, 0)$ contente φ_3 et φ_4 plus que l'interprétation $(0, 0, 1, 1)$, alors que ces deux interprétations sont aussi satisfaisantes pour φ_1 et φ_2. Il semble alors naturel de préférer $(0, 0, 1, 0)$ à $(0, 0, 1, 1)$.

L'opérateur $\triangle^{GMax}$ précise justement les choix de $\triangle^{Max}$. Avec l'opérateur $\triangle^{d_H, GMax}$, on a comme résultat $mod(\triangle_{\mu}^{d_H, GMax}(\Psi)) = \{(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$, la décision prise dans ce cas sera donc de construire soit le court de tennis, soit le parking et de ne pas augmenter le loyer.

Par contre, si on choisit $\triangle^{d_H, \Sigma}$ pour résoudre le conflit en se rangeant au vœux de la majorité, le résultat est alors $mod(\triangle^{d_H, \Sigma}{}_{\mu}(\Psi)) = \{(1, 1, 1, 1)\}$, et la solution adoptée est de construire les trois items et d'augmenter le loyer.

Le "vote" majoritaire, à la $\triangle^{\Sigma}$, semble plus démocratique que les autres méthodes mais par exemple, dans ce cas, cela ne marche que si φ_3 accepte de se conformer à cette décision qui va complètement à l'encontre de ses vœux. Il se pourrait très bien que, fâché de cette décision, il décide de ne pas payer son augmentation de loyer et aucun des trois items ne pourrait être construit. Donc si une décision nécessite l'adhésion de tous les participants, un opérateur d'arbitrage semble plus adéquat qu'un opérateur majoritaire.

1.4. Opérateurs d'arbitrage et opérateurs majoritaires

Une question importante est de savoir si les deux sous-classes majeures d'opérateurs de fusion de croyances, les opérateurs majoritaires et les opérateurs d'arbitrage, sont des classes distinctes. En exercice, le lecteur pourra vérifier que sur l'exemple de la section 1.3.4, les opérateurs majoritaires $\triangle^{d_H, \Sigma^n}$ avec $n \geq 2$ donnent le même résultat que l'opérateur d'arbitrage $\triangle^{d_H, GMax}$. Cet exemple ne permet évidemment pas de conclure mais nous montrons dans cette section qu'il est possible d'être à la fois un opérateur d'arbitrage et un opérateur majoritaire.

Nous définissons tout d'abord une distance drastique entre interprétations. Les opérateurs $\triangle^{GMax}$ et $\triangle^{\Sigma}$ définis à partir de cette distance coïncident. Ensuite, nous montrons que, quelle que soit la distance choisie, certains opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ sont à la fois des opérateurs d'arbitrage et des opérateurs majoritaires.

La distance la plus simple que l'on peut définir entre deux interprétations est celle donnant 0 si les deux interprétations sont égales et 1 sinon.

$$d_D(I,J) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = J \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La distance entre une interprétation et une base de croyances est alors 0 ou 1 suivant que l'interprétation satisfait ou non la base de croyances.

Il est facile de voir alors que les opérateurs obtenus à partir des familles $\triangle^{GMax}$ et $\triangle^{\Sigma}$ et de cette distance coïncident. De ce fait :

PROPOSITION 1.6.– *L'opérateur $\triangle^{d_D,\Sigma} = \triangle^{d_D,GMax}$ satisfait les postulats (IC0)-(IC8), (Maj) et (Arb).*

On a donc un résultat qui nous montre qu'il est possible d'être à la fois un opérateur d'arbitrage et un opérateur majoritaire.

Ceci est dû à l'extrême simplicité de la distance utilisée. Mais, dans le cas où le langage est fini [2], on a un résultat similaire quelque soit la distance utilisée :

PROPOSITION 1.7.– *Soit une distance d, $\exists n_0$ tel que*

$$\forall n > n_0 \ \triangle_{\mu}^{d,\Sigma^n}(\Psi) = \triangle_{\mu}^{d,GMax}(\Psi)$$

L'intérêt des opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ par rapport aux opérateurs $\triangle^{\Sigma}$ qui constituent les opérateurs majoritaires canoniques, est qu'en choisissant un n plus ou moins grand, on peut choisir le degré de consensualité de l'opérateur. Plus n sera élevé, plus l'opérateur $\triangle^{\Sigma^n}$ sera consensuel.

La proposition ci-dessus montre qu'à partir d'un certain n_0 les opérateurs $\triangle^{\Sigma^n}$ sont à la fois des opérateurs majoritaires et d'arbitrage.

1.5. Fusion et Révision

Nous montrons dans cette section que les opérateurs de fusion contrainte sont une généralisation des opérateurs de révision AGM à plusieurs bases de croyances. Nous montrons également comment construire des opérateurs de fusion contrainte à partir d'opérateurs de révision. Nous montrons que les opérateurs de révision donnant des opérateurs de fusion avec de bonnes propriétés sont ceux définis à partir d'une distance.

Intuitivement, en paraphrasant les théorèmes de représentation, les opérateurs de révision sélectionnent dans une formule (la nouvelle information), l'information la plus proche d'une information de base (l'ancienne base de croyances). Identiquement,

2. en fait, il suffit que la distance entre deux interprétations soit bornée.

les opérateurs de fusion contrainte sélectionnent dans une formule (les contraintes d'intégrité), l'information la plus proche d'une information de base (un multi-ensemble de bases de croyance). En suivant cette remarque, il est facile de donner la correspondance suivante entre opérateurs de fusion contrainte et opérateurs de révision :

PROPOSITION 1.8.– *Si $\triangle$ est un opérateur de fusion contrainte, alors l'opérateur $\circ$, défini par $\varphi \circ \mu = \triangle_\mu(\varphi)$ est un opérateur de révision AGM (il satisfait les propriétés (R1-R6) de [KAT 91]).*

Ce résultat montre donc que les opérateurs de révision AGM sont un cas particulier d'opérateurs de fusion contrainte (lorsque l'ensemble de croyances est un singleton).

Inversement, on peut se demander s'il est possible de construire un opérateur de fusion contrainte à partir d'un opérateur de révision AGM donné.

Tout d'abord, en examinant les théorèmes de représentation des deux familles d'opérateurs, il est important de noter qu'un opérateur de révision seul n'est pas suffisant pour définir un opérateur de fusion puisqu'il ne fournit pas d'information sur la manière de combiner les préférences (croyances) individuelles et qu'il n'y a pas de méthode canonique de le faire.

En fait, un opérateur de révision fournit un moyen de déterminer les relations de préférences individuelles associées à chaque base de croyances, c'est-à-dire les pré-ordres donnés par l'assignement fidèle. Mais la définition d'un opérateur de fusion nécessite également une méthode d'agrégation de ces préférences individuelles en une relation de préférence globale.

Il est donc nécessaire d'examiner les propriétés de couples $\langle$opérateur de révision, méthode d'agrégation$\rangle$. Cette méthode d'agrégation peut, par exemple, être une méthode à la $\triangle^{\Sigma}$ ou $\triangle^{GMax}$.

On peut donc construire un opérateur de fusion à partir d'un opérateur de révision $\circ$ et d'une méthode d'agrégation donnés de la façon suivante :

DÉFINITION 1.8.– *Soit un opérateur de révision o et une méthode d'agrégation g, l'opérateur de fusion $\triangle^{\circ,g}$ est défini de la façon suivante :*

– On définit $f^{\circ}_{\varphi}(I) = n$ où n est le niveau où l'interprétation I apparaît dans le pré-ordre $\leq_\varphi$. Plus formellement n est la taille de la plus longue chaîne d'inégalités strictes $I_0 < \ldots < I_n$ avec $I_0 \models \varphi$ et $I_n = I$.

– On définit $f^{\circ}_{\Psi}(I) = g(f^{\circ}_{\varphi_1}(I), \ldots, f^{\circ}_{\varphi_n}(I))$, où $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

– On définit $I \leq_\Psi J$ ssi $f^{\circ}_{\Psi}(I) \leq f^{\circ}_{\Psi}(J)$.

– Finalement $mod(\triangle^{\circ,g}_{\mu}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

La question est alors de trouver quelles sont les conditions sur l'opérateur de révision et sur la méthode d'agrégation pour assurer de bonnes propriétés à l'opérateur de fusion ainsi défini.

Par exemple, si l'on choisit $f^{\circ}_{\Psi}(I) = \sum_{\varphi \in \Psi}(f^{\circ}_{\varphi}(I))$, c'est-à-dire une méthode de fusion à la $\triangle^{\Sigma}$ et sans aucune propriété supplémentaire sur $\circ$, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.9.– *Si un opérateur de fusion $\triangle^{\circ,\Sigma}$ est défini à partir d'un opérateur de révision AGM $\circ$ et de la méthode d'agrégation $f^{\circ}_{\Psi}(I) = \sum_{\varphi \in \Psi}(f^{\circ}_{\varphi}(I))$ alors l'opérateur $\triangle^{\circ,\Sigma}$ satisfait (IC0-IC3), (IC5-IC8) et (Maj).*

Malheureusement, la propriété (IC4) n'est pas toujours satisfaite.

On peut étendre la définition de $f^{\circ}_{\varphi}(I)$ aux bases de croyances naturellement :

$$f^{\circ}_{\varphi}(\varphi') = \min\{f^{\circ}_{\varphi}(I) \ : I \models \varphi'\}$$

PROPOSITION 1.10.– *Si un opérateur de fusion $\triangle^{\circ,\Sigma}$ est défini à partir d'un opérateur de révision AGM $\circ$ et de la méthode d'agrégation $f^{\circ}_{\Psi}(I) = \sum_{\varphi \in \Psi} f^{\circ}_{\varphi}(I)$, alors l'opérateur $\triangle^{\circ,\Sigma}$ est un opérateur de fusion majoritaire si et seulement si la condition suivante de symétrie est satisfaite :* $f^{\circ}_{\varphi}(\varphi') = f^{\circ}_{\varphi'}(\varphi)$ **(symétrie)**

En fait, cette condition de symétrie est également valable pour d'autres méthodes de fusion. En particulier, si on utilise une méthode d'agrégation à la $\triangle^{GMax}$ on peut prouver de manière similaire au théorème 1.10 le résultat suivant :

PROPOSITION 1.11.– *Si un opérateur de fusion $\triangle^{\circ,GMax}$ est défini à partir d'un opérateur de révision AGM $\circ$ et de la méthode d'agrégation $GMax$, alors l'opérateur $\triangle^{\circ,GMax}$ satisfait (IC0-IC3), (IC5-IC8) et (Arb).*
De plus, l'opérateur $\triangle^{\circ,GMax}$ est un opérateur d'arbitrage si et seulement si la condition (Sym) est vérifiée.

En fait, comme nous le montrons ici, la condition (Sym) n'est satisfaite que si et seulement si l'opérateur de révision est défini à partir d'une distance.

DÉFINITION 1.9.– *Un opérateur de révision est défini par une distance d ssi :*

– *d est une distance*[3]

– *soient une base de croyances φ et une interprétation I :*
$$d(I,\varphi) = \min\{d(I,J) \ : J \models \varphi\}$$

– *$I \leq_{\varphi} J$ ssi $d(I,\varphi) \leq d(J,\varphi)$*

---

3. voir définition 1.4

– $mod(\varphi \circ \mu) = \min(mod(\mu), \leq_\varphi)$

PROPOSITION 1.12.– *Soit* $\circ$ *un opérateur de révision. Alors la condition (Sym) est satisfaite ssi* $\circ$ *est défini à partir d'une distance.*

Donc, comme corollaire des propositions 1.10, 1.11 et 1.12 on a :

PROPOSITION 1.13.– *Un opérateur de fusion* $\triangle^{\circ,g}$ *défini à partir d'un opérateur de révision* $\circ$ *et de la méthode d'agrégation* Σ *ou* $Gmax$ *est un opérateur de fusion contrainte si et seulement si* $\circ$ *est défini à partir d'une distance.*

Ce résultat est intéressant puisqu'il montre que pour définir un opérateur de fusion à partir d'un opérateur de révision, il faut que ce dernier soit suffisamment normé. Ceci afin de remplir un critère d'agrégation important.

En particulier, puisqu'il existe des opérateurs de révision qui ne sont pas définis à partir d'une distance, les opérateurs $\triangle^{\circ,g}$ correspondants ne seront pas des opérateurs de fusion contrainte.

1.6. Conclusion

Nous avons évoqué dans ce chapitre les opérateurs de fusion contrainte de bases de croyances. Ces opérateurs servent à extraire des croyances cohérentes d'un ensemble de croyances contradictoires provenant de sources différentes.

Nous avons montré les liens étroits entre fusion et révision de bases de croyances. Nous avons montré que les opérateurs de révision sont un cas particulier d'opérateurs de fusion. Nous avons également montré que si l'on désire construire un opérateur de fusion contrainte à partir d'un opérateur de révision il est nécessaire que cet opérateur soit défini à partir d'une distance.

D'autres familles d'opérateurs d'agrégation de croyances ont été proposées dans la littérature. Les opérateurs de fusion contrainte sont une extension des opérateurs de fusion pure (*i.e.* sans contraintes d'intégrité) définis dans [KON 98]. Cette généralisation, permettant d'introduire des contraintes d'intégrité pour la fusion, est un point clef pour pouvoir donner le théorème de représentation sous forme de familles de pré-ordres sur les interprétations.

Revesz a défini des opérateurs d'adéquation sémantique (*model-fitting*) [REV 97, REV 93] proches de nos opérateurs de fusion contrainte. Malheureusement sa définition des ensembles de croyances comme de simples ensembles (et pas comme des multi-ensembles), ne permet pas de faire une distinction entre opérateurs d'arbitrage et majoritaires. Ces opérateurs sont assez proches de nos opérateurs de quasi-fusion.

Lin et Mendelzon ont étudié un opérateur de fusion contrainte [LIN 98, LIN 99] (l'opérateur $\triangle^{d_H,\Sigma}$) et ont proposé une méthode de calcul syntaxique de cet opérateur lorsque les formules sont exprimées en forme normale disjonctive (DNF).

Liberatore et Schaerf ont proposé une caractérisation des opérateurs de révision commutative [LIB 95, LIB 98], qui sont très proches des opérateurs de révision AGM. Les deux principaux problèmes de ces opérateurs sont que le résultat de l'agrégation des deux bases doit toujours impliquer la disjonction des 2 bases, ce qui n'est pas toujours souhaitable [KON 99a] ; et que l'on ne peut agréger que 2 bases. Or il est possible de généraliser cette définition grâce aux opérateurs de fusion contrainte en obligeant le résultat de l'agrégation de n bases à impliquer la disjonction de ces bases (*i.e.* en prenant $\triangle_{\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n}(\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n)$ comme définition de la "révision commutative") [KON 99a].

Annexe : preuve du théorème 1.1

PREUVE : <u>i. opérateurs de fusion contrainte</u>

(Seulement si) Soit $\triangle$ un opérateur satisfaisant les propriétés (IC0-IC8). On définit un assignement de la façon suivante : pour chaque ensemble de croyances Ψ on définit une relation $\leq_\Psi$ par $\forall I, J \in \mathcal{W}\ I \leq_\Psi J$ si et seulement si $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$. Nous allons montrer que la relation $\leq_\Psi$ est un pré-ordre total et que l'assignement ainsi défini est un assignement syncrétique.

Nous montrons d'abord que $\leq_\Psi$ est un pré-ordre total :
Total : $\forall I, J \in \mathcal{W}$, de (IC1) $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi) \neq \emptyset$ et de (IC0) $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi) \vdash \varphi_{\{I,J\}}$, d'où $I \leq_\Psi J$ ou $J \leq_\Psi I$.
Réflexif : De (IC0) et (IC1) on obtient que $\triangle_{\varphi_I}(\Psi) = \varphi_{\{I\}}$. Donc $I \leq_\Psi I$.
Transitif : Supposons que $I \leq_\Psi J$ et $J \leq_\Psi L$. Par l'absurde, supposons que $I \not\leq_\Psi L$. Donc par définition et de (IC0) et (IC1) $\triangle_{\varphi_{\{I,L\}}}(\Psi) = \varphi_{\{L\}}$. Par (IC7) on peut trouver $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,L\}} \vdash \triangle_{\varphi_{\{I,L\}}}(\Psi)$. On considère deux cas :
<u>Cas 1</u> : $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,L\}}$ est consistant, alors $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,L\}} \leftrightarrow \varphi_{\{L\}}$. On a donc $I \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi)$. Mais par (IC1) $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \neq \emptyset$ donc par (IC0) $mod(\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi)) = \{J, L\}$ ou $mod(\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi)) = \{L\}$. Dans le premier cas par (IC7) et (IC8) on conclut que $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,J\}} \leftrightarrow \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$ et alors $I \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$. Contradiction. Dans le second cas par (IC7) et (IC8) $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{J,L\}} \leftrightarrow \triangle_{\varphi_{\{J,L\}}}(\Psi)$ mais $J \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi)$ donc $J \not\models \triangle_{\varphi_{\{J,L\}}}(\Psi)$. Contradiction.
<u>Cas 2</u> : $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,L\}}$ n'est pas consistant, donc $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) = \varphi_{\{J\}}$. Alors $\triangle_{\varphi_{\{I,J,L\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,J\}} = \varphi_{\{J\}}$. Par (IC7) et (IC8) il s'ensuit que $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi) = \varphi_{\{J\}}$, ce qui par définition est $J <_\Psi I$. Contradiction.

Nous montrons à présent que $mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. Premièrement pour l'inclusion $mod(\triangle_\mu(\Psi)) \subseteq \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$ supposons que $I \models \triangle_\mu(\Psi)$ et par l'absurde, supposons que $I \notin \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. Donc on peut trouver un $J \models \mu$ tel que $J <_\Psi I$, alors $I \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$. Comme $\triangle_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,J\}}$ est consistant, de (IC7) et (IC8) on a $\triangle_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,J\}} \leftrightarrow \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$. Mais $I \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$ donc $I \not\models \triangle_\mu(\Psi)$. Contradiction.

Pour l'autre inclusion $mod(\triangle_\mu(\Psi)) \supseteq \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$ supposons donc que $I \in \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. On désire montrer que $I \models \triangle_\mu(\Psi)$. Or, comme on a $I \in \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$, $\forall J \models \mu\ I \leq_\Psi J$ et donc $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$. Comme $\triangle_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,J\}}$ est consistant, de (IC7) et (IC8) on déduit $\triangle_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{I,J\}} \leftrightarrow \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$. Mais $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$ donc $I \models \triangle_\mu(\Psi)$.

Il reste à vérifier les conditions de l'assignement syncrétique :

1) Si $I \models \Psi$ et $J \models \Psi$, alors par (IC2) on a $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi) = \varphi_{\{I,J\}}$, donc $I \leq_\Psi J$ et $J \leq_\Psi I$ par définition et alors $I \simeq_\Psi J$.

2) Si $I \models \Psi$ et $J \not\models \Psi$, alors par (IC2) $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi) = \varphi_{\{I\}}$, donc $I \leq_\Psi J$ et $J \not\leq_\Psi I$, *i.e.* $I <_\Psi J$.

3) Directement de (IC3)

4) On désire montrer $\forall I \models \varphi\ \exists J \models \varphi'\ J \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I$. On montre d'abord que $\exists J \models \triangle_{\varphi \vee \varphi'}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi'$. Si ce n'est pas le cas on a $\triangle_{\varphi \vee \varphi'}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \vdash \bot$, de (IC0) et (IC1) on a alors $\triangle_{\varphi \vee \varphi'}(\varphi \sqcup \varphi') \vdash \varphi$, à présent par (IC4) on obtient que $\triangle_{\varphi \vee \varphi'}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$. Contradiction.

Soit I un modèle de φ et prenons J tel que $J \models \triangle_{\varphi \vee \varphi'}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi'$. On obtient de (IC7) et (IC8) que $J \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\varphi \sqcup \varphi')$. Donc $J \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I$.

5) Si $I \leq_{\Psi_1} J$ et $I \leq_{\Psi_2} J$, alors $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_2)$. Donc de (IC5) $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$ et par définition $I \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$.

6) Supposons que $I <_{\Psi_1} J$ et $I \leq_{\Psi_2} J$. On veut montrer $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$. Par hypothèse $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_2)$ et $J \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_2)$. Donc de (IC5) et (IC6) $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) = \varphi_{\{I\}}$. Alors $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$ et $J \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$ et par définition $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$.

(Si) Soit un assignement syncrétique qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$. On définit alors l'opérateur $\triangle$ en posant $mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. On montre que $\triangle$ satisfait les postulats (IC0-IC8).

(IC0) Par définition $mod(\triangle_\mu(\Psi)) \subseteq mod(\mu)$.

(IC1) Si μ est consistant, alors $mod(\mu) \neq \emptyset$ et, comme il n'y a qu'un nombre fini d'interprétations, il n'y a pas de chaîne infinie descendante d'inégalités strictes, donc $\min(mod(\mu), \leq_\Psi) \neq \emptyset$. Donc $\triangle_\mu(\Psi)$ est consistant.

(IC2) Supposons que $\Psi \wedge \mu$ est consistant. On veut montrer que $\min(mod(\mu), \leq_\Psi) = mod(\bigwedge \Psi \wedge \mu)$. On peut noter d'abord que si $I \models \Psi$ alors des conditions 1 et 2, $I \in \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi)$. Donc si $I \models \Psi \wedge \mu$ alors $I \in \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. Donc $\min(mod(\mu), \leq_\Psi) \supseteq mod(\Psi \wedge \mu)$. Pour l'autre inclusion on considère $I \in \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. Par l'absurde, supposons $I \not\models \Psi \wedge \mu$. Puisque $I \not\models \Psi$ par la condition 2 on a que $\forall J \models \Psi\ J <_{\Psi} I$. En particulier $\forall J \models \Psi \wedge \mu\ J <_{\Psi} I$. Donc $I \notin \min(mod(\mu), \leq_{\Psi})$. Contradiction.

(IC3) Directement par la condition 3 et la définition de $\triangle$.

(IC4) Supposons que $\varphi \vdash \mu$, $\varphi' \vdash \mu$, et $\triangle_{\mu}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \bot$, on veut montrer que $\triangle_{\mu}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$. Considérons $I \models \triangle_{\mu}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi$. Alors $\forall I' \models \mu\ I \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I'$. Mais par la condition 4 on a que $\exists J \models \varphi'$ tel que $J \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I$. Alors $\forall I' \models \mu\ J \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} I'$. Alors $J \models \triangle_{\mu}(\varphi \sqcup \varphi')$ et donc $\triangle_{\mu}(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$.

(IC5) Si $I \models \triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$ alors $I \in \min(mod(\mu), \leq_{\Psi_1})$ et donc $\forall J \models \mu\ I \leq_{\Psi_1} J$. De la même façon on a $\forall J \models \mu\ I \leq_{\Psi_2} J$. Donc par la condition 5 on obtient $\forall J \models \mu\ I \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$. Donc $I \in \min(mod(\mu), \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2})$. Donc par définition $I \models \triangle_{\mu}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$.

(IC6) Supposons que $\triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$ est consistant. On veut montrer que $\triangle_{\mu}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$. Prenons $I \models \triangle_{\mu}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$, donc $\forall J \models \mu\ I \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$. Vers une contradiction, supposons que $I \not\models \triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$. Donc $I \not\models \triangle_{\mu}(\Psi_1)$ ou $I \not\models \triangle_{\mu}(\Psi_1)$. Supposons que $I \not\models \triangle_{\mu}(\Psi_1)$ (l'autre cas est symétrique). Comme $\triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$ est consistant $\exists J \models \triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$. Donc $J <_{\Psi_1} I$ et $J \leq_{\Psi_2} I$ alors par la condition 6 $J <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} I$ et donc $I \not\models \triangle_{\mu}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$. Contradiction.

(IC7) Considérons $I \models \triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. On a $\forall J \models \mu_1\ I \leq_{\Psi} J$. Donc $\forall J \models \mu_1 \wedge \mu_2\ I \leq_{\Psi} J$, alors $I \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$.

(IC8) Supposons que $\triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ est consistant, alors $\exists J \models \triangle_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. Considérons $I \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$ et supposons que $I \not\models \triangle_{\mu_1}(\Psi)$. Donc $J <_{\Psi} I$ et comme $J \models \mu_1 \wedge \mu_2$ alors $I \notin \min(mod(\mu_1 \wedge \mu_2), \leq_{\Psi})$. Et $I \not\models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$. Contradiction.

ii. opérateurs de quasi-fusion

(Seulement si) Soit $\triangle$ un opérateur vérifiant les postulats (IC0-IC5),(IC6'),(IC7) et (IC8). On définit un assignement de la façon suivante : pour chaque ensemble de croyances Ψ on définit une relation $\leq_{\Psi}$ par $\forall I, J \in \mathcal{W}\ I \leq_{\Psi} J$ si et seulement si $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$.

En examinant la preuve de **(i.)** on peut voir que si $\triangle$ vérifie les postulats(IC0-IC5), (IC7) et (IC8), l'assignement correspondant à $\triangle$ satisfait les conditions 1-5. Il reste simplement à prouver la condition 6'. Supposons que $I <_{\Psi_1} J$ et $I <_{\Psi_2} J$. On veut montrer que $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$. Par hypothèse $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_2)$ et $J \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1) \vee \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_2)$. Donc de (IC6') $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) = \varphi_{\{I\}}$. Alors $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$ et $J \not\models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$ et par définition $I <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$.

(Si) Soit un assignement vérifiant les conditions 1-5 et 6' qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_{\Psi}$. On définit l'opérateur $\triangle$ en posant $mod(\triangle_{\mu}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_{\Psi})$. Grace à **(i.)** nous savons que $\triangle$ vérifie (IC0-IC5),(IC7) et (IC8). Il reste à prouver (IC6').

On veut montrer que si $\triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$ est consistant, alors $\triangle_{\mu}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \triangle_{\mu}(\Psi_1) \vee \triangle_{\mu}(\Psi_2)$. Supposons que $\triangle_{\mu}(\Psi_1) \wedge \triangle_{\mu}(\Psi_2)$ est consistant et prenons

$I \models \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$, donc $\forall J \models \mu\ I \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} J$. Par l'absurde, supposons que $I \not\models \triangle_\mu(\Psi_1) \vee \triangle_\mu(\Psi_2)$, c'est-à-dire $I \not\models \triangle_\mu(\Psi_1)$ et $I \not\models \triangle_\mu(\Psi_2)$. Ce qui peut être réécrit en $\exists J_1 \models \mu\ J_1 <_{\Psi_1} I$ et $\exists J_2 \models \mu\ J_2 <_{\Psi_2} I$. Mais $\triangle_\mu(\Psi_1) \wedge \triangle_\mu(\Psi_2)$ est consistant, donc $\exists J_3 \models \mu$ tel que $\forall I' \models \mu\ J_3 \leq_{\Psi_1} I'$ et $J_3 \leq_{\Psi_2} I'$. En particulier on a $J_3 \leq_{\Psi_1} J_1$ et $J_3 \leq_{\Psi_2} J_2$. Par transitivité on trouve $J_3 <_{\Psi_1} I$ et $J_3 <_{\Psi_2} I$, et par la condition 6' on conclut $J_3 <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} I$. Donc $I \not\models \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$. Contradiction.

iii. opérateurs majoritaires

(Seulement si) Soit $\triangle$ un opérateur vérifiant les postulats (IC0-IC8) et (Maj). On définit un assignement de la façon suivante : pour chaque ensemble de croyances Ψ on définit une relation $\leq_\Psi$ par $\forall I, J \in \mathcal{W}\ I \leq_\Psi J$ si et seulement si $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$.

Par **(i.)** c'est un assignement syncrétique. Il reste simplement à prouver la condition 7.

Supposons que $I <_{\Psi_2} J$. Alors $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_2) = \varphi_{\{I\}}$. De (Maj) on a que $\exists n$ tel que $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n) \vdash \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_2)$, donc $\exists n\ \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n) = \varphi_{\{I\}}$, *i.e.* $\exists n\ I <_{\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n} J$.

(Si) Soit un assignement syncrétique majoritaire qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$. On définit l'opérateur $\triangle$ en posant $mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

Par **(i.)** on sait que $\triangle$ vérifie (IC0-IC8). Il reste à montrer (Maj).

Des conditions 6 et 7 on déduit directement la condition suivante :

$$I <_{\Psi_2} J \;\Rightarrow\; \exists n_0 \forall n \geq n_0\ I <_{\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n} J$$

Puisque pour chaque Ψ, $\leq_\Psi$ est total la contraposée de cette condition peut s'écrire

$$\forall n_0 \exists n \geq n_0\ I \leq_{\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n} J \;\Rightarrow\; I \leq_{\Psi_2} J \qquad (*)$$

A présent, par l'absurde, supposons que $\forall n\ \triangle_\mu(\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n) \nvdash \triangle_\mu(\Psi_2)$. Par cette hypothèse on obtient que $\forall n\ \exists I \models \mu\ \forall J \models \mu\ I \leq_{\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n} J$ et $\exists J' \models \mu\ J' <_{\Psi_2} I$. Puisque le nombre d'interprétations est fini, il existe I tel que $I \leq_{\Psi_1 \sqcup {\Psi_2}^n} J$ pour tout $J \models \mu$ et une infinité d'entiers n [4]. Cela est exactement les prémisses de la condition $(*)$, on a donc $I \leq_{\Psi_2} J$ pour tout $J \models \mu$, ce qui contredit le fait $J' <_{\Psi_2} I$.

iv. opérateurs d'arbitrage

(Seulement si) Soit $\triangle$ un opérateur vérifiant les postulats (IC0-IC8) et (Arb). On définit un assignement de la façon suivante : pour chaque ensemble de croyances Ψ on définit une relation $\leq_\Psi$ par $\forall I, J \in \mathcal{W}\ I \leq_\Psi J$ si et seulement si $I \models \triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\Psi)$. Par **(i.)** on sait que cet assignement est un assignement syncrétique, il ne reste donc

4. Nous appliquons ici le "principe du tiroir", *i.e.* si l'on remplit un nombre fini de tiroirs avec une infinité de chaussettes, il y aura nécessairement un tiroir avec une infinité de chaussettes.

plus qu'à montrer la condition 8. Supposons que $J <_{\varphi_1} I$, $J <_{\varphi_2} J'$ et $I \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J'$. D'abord si $I = J'$ alors $J <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} I$ se déduit de la condition 6. A présent si $I \neq J'$, alors $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\varphi_{\{J,J'\}}}(\varphi_2) = \varphi_{\{J\}}$. De plus $\triangle_{\varphi_{\{I,J'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) = \varphi_{\{I,J'\}}$, et $\varphi_{\{I,J\}} \wedge \neg\varphi_{\{I,J'\}}$ et $\varphi_{\{I,J'\}} \wedge \neg\varphi_{\{I,J\}}$ sont tous deux consistants. Alors par (Arb) on a que $\triangle_{\varphi_{\{I,J,J'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) = \varphi_{\{J\}}$. Et par (IC7) et (IC8) on en conclut $\triangle_{\varphi_{\{I,J\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) = \varphi_{\{J\}}$, c'est-à-dire $J <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} I$.

(Si) Soit un assignement syncrétique juste qui associe à chaque ensemble de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$. On définit alors l'opérateur $\triangle$ en posant $mod(\triangle_\mu(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

Nous savons grâce à **(i.)** que $\triangle$ satisfait (IC0-IC8), il est donc suffisant de montrer (Arb).

Supposons que $\triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2)$, $\triangle_{\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2)$, $\mu_1 \wedge \neg\mu_2 \nvdash \perp$ et $\mu_2 \wedge \neg\mu_1 \nvdash \perp$. On veut montrer que $\triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$.
On montre d'abord $\triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \vdash \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$. Soit $I \models \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$, supposons vers une contradiction que $I \not\models \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$. Alors $\exists J \models \mu_1 \vee \mu_2$ $J <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} I$.

Nous considérons 3 cas : $J \models \mu_1 \wedge \mu_2$, $J \models \mu_1 \wedge \neg\mu_2$ ou $J \models \neg\mu_1 \wedge \mu_2$.

cas 1 : $J \models \mu_1 \wedge \mu_2$. Puisque $I \models \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$, $I \leq_{\varphi_1} J$. Par hypothèse $\triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2)$. Donc $I \models \triangle_{\mu_2}(\varphi_2)$ et alors $I \leq_{\varphi_2} J$. Alors par la condition 5 on a $I \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J$. Contradiction.

cas 2 : $J \models \mu_1 \wedge \neg\mu_2$ (le *cas 3*, $J \models \neg\mu_1 \wedge \mu_2$, est symétrique). Puisque $J \not\models \varphi_2$ et $\triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2)$ on a $J \not\models \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$, donc $I <_{\varphi_1} J$. Par hypothèse on peut trouver un $J' \models \mu_2 \wedge \neg\mu_1$ et avec un argument analogue $I <_{\varphi_2} J'$. On sait également que $\triangle_{\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2)$, cela implique $J \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J'$. Et par la condition 8 on obtient $I <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} J$. Contradiction.

A présent, montrons $\triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \vdash \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$. Supposons que $I \models \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$ et, par l'absurde, supposons que $I \not\models \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$. On considère les trois cas suivants :

cas 1 : $I \models \mu_1 \wedge \mu_2$ alors $\exists J \models \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$, donc $J <_{\varphi_1} I$. Et, comme $\triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2)$, $J <_{\varphi_2} I$. Donc par la condition 6 on a que $J <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} I$, donc $I \not\models \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$. Contradiction.

cas 2 : $I \models \mu_1 \wedge \neg\mu_2$ (le *cas 3*, où $I \models \neg\mu_1 \wedge \mu_2$, est symétrique). Par hypothèse on sait que $\exists I' \models \neg\mu_1 \wedge \mu_2$. Puisque $\triangle_{\mu_1}(\varphi_1) \leftrightarrow \triangle_{\mu_2}(\varphi_2)$ $\exists J \models \triangle_{\mu_1}(\varphi_1)$ tel que $J <_{\varphi_1} I$ et $J <_{\varphi_2} I'$. On déduit également de $\triangle_{\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \leftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2)$ que $I \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} I'$, donc par la condition 8 on a que $J <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} I$. Donc $I \not\models \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$. Contradiction. $\square$

1.7. Bibliographie

[ALC 85] ALCHOURRÓN C. E., GÄRDENFORS P., MAKINSON D., « On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions », *Journal of Symbolic Logic*, vol. 50, p. 510-530, 1985.

[ARR 63] ARROW K. J., *Social choice and individual values,* Wiley, New York, second édition, 1963.

[BAR 91] BARAL C., KRAUS S., MINKER J., « Combining multiple knowledge bases », *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,* vol. 3, n°2, p. 208-220, 1991.

[BAR 92] BARAL C., KRAUS S., MINKER J., SUBRAHMANIAN V. S., « Combining knowledge bases consisting of first-order theories », *Computational Intelligence,* vol. 8, n°1, p. 45-71, 1992.

[CHO 97] CHOLVY L., HUNTER T., « Fusion in Logic : a brief overview », *Proceedings of the Fourth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'97),* Lecture Notes in Computer Science 1244, p. 86-95, 1997.

[CHO 98] CHOLVY L., « Reasoning about merged information », GABBAY D. M., SMETS P., Eds., *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, vol. 3, p. 233-263, Kluwer, 1998.

[DAL 88] DALAL M., « Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report », *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88),* p. 475-479, 1988.

[FER 99] FERMÉ E., HANSSON S. O., « Selective revision », *Studia Logica,* vol. 63, n°3, p. 331-342, 1999.

[GÄR 88] GÄRDENFORS P., *Knowledge in flux,* MIT Press, 1988.

[HAL 92] HALPERN J., MOSES Y., « A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief », *Artificial Intelligence*, vol. 54, n°3, p. 319-379, 1992.

[HAN 98] HANSSON S. O., « What's new isn't always best », *Theoria*, vol. 63, p. 1-13, 1998, Special issue on non-prioritized belief revision.

[KAT 91] KATSUNO H., MENDELZON A. O., « Propositional knowledge base revision and minimal change », *Artificial Intelligence*, vol. 52, p. 263-294, 1991.

[KEL 78] KELLY J. S., *Arrow impossibility theorems,* Series in economic theory and mathematical economics, Academic Press, New York, 1978.

[KEL 88] KELLY J. S., *Social Choice Theory : An Introduction,* Springer-Verlag, 1988.

[KON 98] KONIECZNY S., PINO PÉREZ R., « On the logic of merging », *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, p. 488-498, 1998.

[KON 99a] KONIECZNY S., Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance, PhD thesis, LIFL - Université de Lille 1, 1999.

[KON 99b] KONIECZNY S., PINO PÉREZ R., « Merging with Integrity Constraints », *Proceedings of the Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1638, p. 233-244, 1999.

[LIB 95] LIBERATORE P., SCHAERF M., « Arbitration : A commutative operator for belief revision », *Proceedings of the Second World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, p. 217-228, 1995.

[LIB 98] LIBERATORE P., SCHAERF M., « Arbitration (or how to merge knowledge bases) », *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, vol. 10, n° 1, p. 76-90, 1998.

[LIN 95] LIN J., Frameworks for dealing with conflicting information and applications, PhD thesis, University of Toronto, 1995.

[LIN 98] LIN J., MENDELZON A. O., « Merging databases under constraints », *International Journal of Cooperative Information System*, vol. 7, n° 1, p. 55-76, 1998.

[LIN 99] LIN J., MENDELZON A. O., « Knowledge base merging by majority », *Dynamic Worlds : From the Frame Problem to Knowledge Management*, Kluwer, 1999.

[MAK 98] MAKINSON D., « Screened revision », *Theoria*, vol. 63, p. 14-23, 1998, Special issue on non-prioritized belief revision.

[MOU 88] MOULIN H., *Axioms of cooperative decision making*, Monograph of the Econometric Society, Cambridge University Press, 1988.

[REV 93] REVESZ P. Z., « On the semantics of theory change : arbitration between old and new information », p. 71-92, 1993.

[REV 97] REVESZ P. Z., « On the semantics of arbitration », *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 7, n° 2, p. 133-160, 1997.

[SCH 98] SCHLECHTA K., « Non-prioritized belief revision based on distances between models », *Theoria*, vol. 63, p. 34-53, 1998, Special issue on non-prioritized belief revision.

[SEN 79] SEN A. K., *Collective Choice and Social Welfare*, Advanced Textbooks in Economics, Elsevier, 1979.