Autour des Réseaux de Contraintes Qualitatives pour le Raisonnement sur le Temps et l'Espace

Jean-François Condotta
condotta@cril.fr

Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL-CNRS)

13-14 avril 2016

Plan général

1. Formalismes qualitatifs pour le temps et l'espace
2. Réseaux de contraintes qualitatives et Problèmes associés
3. Logiques spatio-temporelles à base de contraintes qualitatives
4. Fusion de RCQ - Approche générale

Plan

- Relations de base
- Quelques Exemples
  - Le calcul des instants
  - Le calcul des intervalles d'Allen
  - Le calcul INDU
  - Le calcul RCC (Region Connection Calculus)
  - ...
- Axiomatisations

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,...

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,...
- Un ensemble fini B de relations binaires définies sur D (appelées relations de base)

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,...

- Un ensemble fini B de relations binaires définies sur D (appelées relations de base)
  - $\bigcup\{a \in \mathrm{B}\} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}$ (complétude)

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,. . .
- Un ensemble fini B de relations binaires définies sur D (appelées relations de base)
  - $\bigcup\{a \in \mathrm{B}\} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}$ (complétude)
  - $\forall a, b \in \mathrm{B}$ tels que $a \neq b, a \cap b = \emptyset$ (exclusion mutuelle)

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,...

- Un ensemble fini B de relations binaires définies sur D (appelées relations de base)
  - $\bigcup\{a \in \mathrm{B}\} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}$ (complétude)
  - $\forall a, b \in \mathrm{B}$ tels que $a \neq b, a \cap b = \emptyset$ (exclusion mutuelle)
  - $\mathrm{Id} \in \mathrm{B}$

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,...
- Un ensemble fini B de relations binaires définies sur D (appelées relations de base)
  - $\bigcup\{a \in \mathrm{B}\} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}$ (complétude)
  - $\forall a, b \in \mathrm{B}$ tels que $a \neq b$, $a \cap b = \emptyset$ (exclusion mutuelle)
  - $\mathrm{Id} \in \mathrm{B}$
  - $\forall a \in \mathrm{B},\ a^{-1} \in \mathrm{B}$, avec $a^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in a\}$

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,...
- Un ensemble fini B de relations binaires définies sur D (appelées relations de base)
  - $\bigcup\{a \in \mathrm{B}\} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}$ (complétude)
  - $\forall a, b \in \mathrm{B}$ tels que $a \neq b, a \cap b = \emptyset$ (exclusion mutuelle)
  - $\mathrm{Id} \in \mathrm{B}$
  - $\forall a \in \mathrm{B},\ a^{-1} \in \mathrm{B}$, avec $a^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in a\}$

Relations de base

- Un ensemble D dont les éléments représentent les entités temporelles ou spatiales du système
  - points du plan, intervalles de la droite, polygones du plan,...

- Un ensemble fini B de relations binaires définies sur D (appelées relations de base)
  - $\bigcup\{a \in \mathrm{B}\} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}$ (complétude)
  - $\forall a, b \in \mathrm{B}$ tels que $a \neq b, a \cap b = \emptyset$ (exclusion mutuelle)
  - $\mathrm{Id} \in \mathrm{B}$
  - $\forall a \in \mathrm{B},\ a^{-1} \in \mathrm{B}$, avec $a^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in a\}$

- Parfois des Exceptions à ces propriétés
  - Arité supérieure à 2
  - Identité est l'union de plusieurs relations de base
  - L'ensemble des relations de base non fermé pour l'inverse

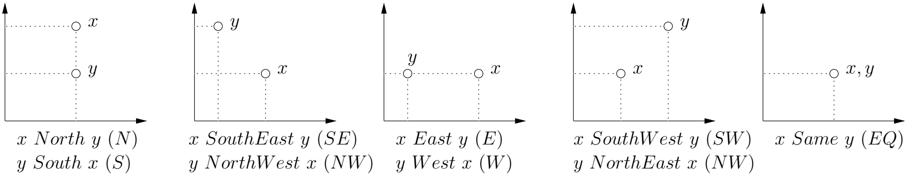
Calcul des instants [Vilain&Kautz86]

- $\mathrm{D} = \mathbb{Q}$
- $\mathrm{B} = \{<, >, =\}$

$x\ precedes\ y\ (<)$ $x\ follows\ y\ (>)$ $y\ same\ x\ (=)$

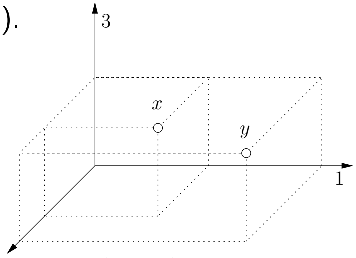
Calcul des directions cardinales [Ligozat98]

- $\mathsf{D} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
- $\mathsf{B} = \{EQ, E, N, S, W, NE, NW, SW, NW\}$



Calcul des *n*-points [Balbiani&Condotta02]

- Généralisation du calcul des instants à l'espace euclidien de dimension n avec $n \geq 1$.
- D est l'ensemble des points de l'espace euclidien de dimension n muni d'un repère orthogonal.
- Chaque relation de base de B est n-uplet formé de n relations de base du calcul des instants (relations de base satisfaites par les projections orthogonales).

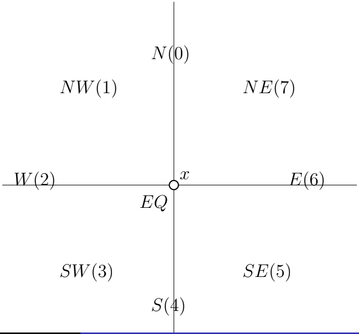


Calcul α-étoile [Mitra02]

- Généralisation du calcul des directions cardinales définie à partir d'un entier α strictement positif
- D est l'ensemble les points du plan

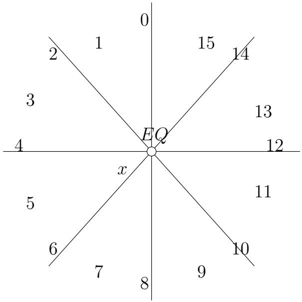
Calcul α-étoile [Mitra02]

- Étant donné un point du plan $x \Rightarrow \alpha$ demi-droites d'origine x *séparées* d' un angle de $(360/\alpha)$ degrés.
- Chaque région correspond à une relation de base du calcul α-étoile, $(2.\alpha)+1$ relations de base. Exemple : $\alpha = 4$



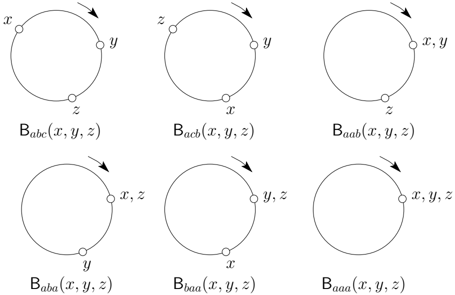
Calcul α-étoile [Mitra02]

- Étant donné un point du plan $x \Rightarrow \alpha$ demi-droites d'origine x *séparées* d' un angle de $(360/\alpha)$ degrés.
- Chaque région correspond à une relation de base du calcul α-étoile, $(2.\alpha) + 1$ relations de base. Exemple : $\alpha = 8$



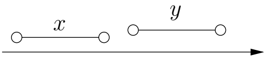
Calcul des points cycliques [Balbiani&Condotta&Ligozat02]

- D est l'ensemble des points d'un cercle orienté
- B est défini par un ensemble de 6 relations ternaires

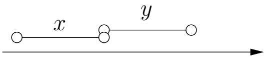


Calcul des intervalles [Allen81]

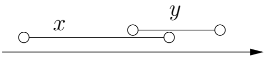
- $\mathsf{D} = \{x = (x^-, x^+) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^- < x^+\}$
- $\mathsf{B} = \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$



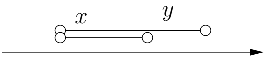
x *precedes* y (p)
y *precededBy* x (pi)



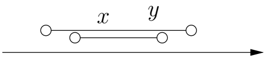
x *meets* y (m)
y *metBy* x (mi)



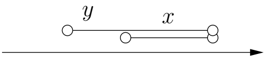
x *overlaps* y (o)
y *overlappedBy* x (oi)



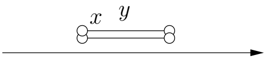
x *starts* y (s)
y *satrtedBy* x (si)



x *during* y (d)
y *contains* x (di)

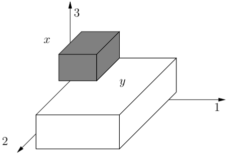


x *finishes* y (f)
y *finishedBy* x (fi)



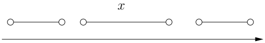
x *equals* y (eq)

Le calcul des *n*-pavés et les calculs des intervalles généralisés



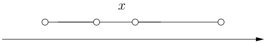
3-pavés

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} eq & p & p \\ pi & eq & p \\ pi & pi & eq \end{pmatrix} \end{array}$$



IG Ladkin

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} eq & m & p \\ mi & eq & m \\ pi & mi & eq \end{pmatrix} \end{array}$$



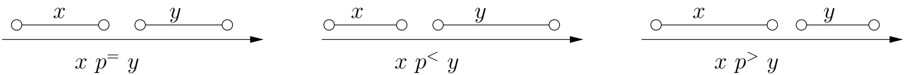
IG Ligozat

Calcul INDU [Pujari&Sattar99]

- $\mathrm{D} = \{x = (x^-, x^+) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^- < x^+\}$
- Une relation de base : i^p avec $i \in \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$ et $p \in \{<, >, =\}$.

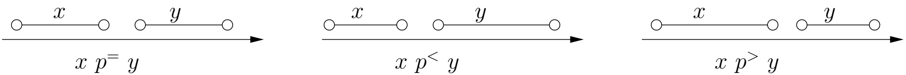
Calcul INDU [Pujari&Sattar99]

- $\mathsf{D} = \{x = (x^-, x^+) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^- < x^+\}$
- Une relation de base : i^p avec $i \in \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$ et $p \in \{<, >, =\}$.
- Raffinement de la relation *precedes* :



Calcul INDU [Pujari&Sattar99]

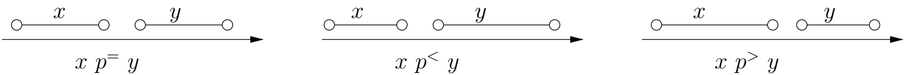
- $\mathrm{D} = \{x = (x^-, x^+) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^- < x^+\}$
- Une relation de base : i^p avec $i \in \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$ et $p \in \{<, >, =\}$.
- Raffinement de la relation *precedes* :



- $\mathrm{B} = \{\ p^<, p^>, p^=, pi^<, pi^>, pi^=, m^<, m^>, m^=, mi^<, mi^>, mi^=, o^<, o^>, o^=, oi^<, oi^>, oi^=,$

Calcul INDU [Pujari&Sattar99]

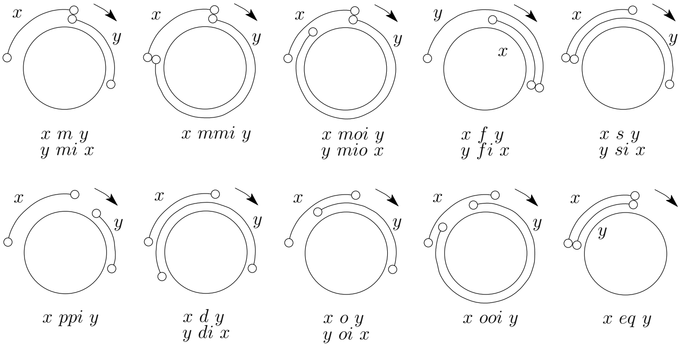
- $\mathrm{D} = \{x = (x^-, x^+) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^- < x^+\}$
- Une relation de base : i^p avec $i \in \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$ et $p \in \{<, >, =\}$.
- Raffinement de la relation *precedes* :



- $\mathrm{B} = \{\ p^<, p^>, p^=, pi^<, pi^>, pi^=, m^<, m^>, m^=, mi^<, mi^>, mi^=, o^<, o^>, o^=, oi^<, oi^>, oi^=, s^<, si^>, d^<, di^>, f^<, fi^>, eq^=\ \}$

Calcul des intervalles cycliques [Balbiani&Osmani00]

- $\mathsf{D} = [0, 2\pi[$
- $\mathsf{B} = \{m, mi, f, fi, s, si, d, di, o, oi, eq, mmi, ppi, moi, pio, ooi\}$



Calcul des régions RCC8 [Randell *et al.* 89]

- D : ensembles fermés réguliers d'un espace topologique
- Le prédicat est connecté $C(x, y)$ est interprété par : les fermetures topologiques de x et y partagent au moins un point.
- À partir de C sont définies les 8 relations de base de RCC8

$$\mathrm{B} = \{DC, EC, PO, EQ, TPP, NTPP, TPP^{\sim}, NTPP^{\sim}\}$$

Calcul des régions RCC8 [Randell *et al.* 89]

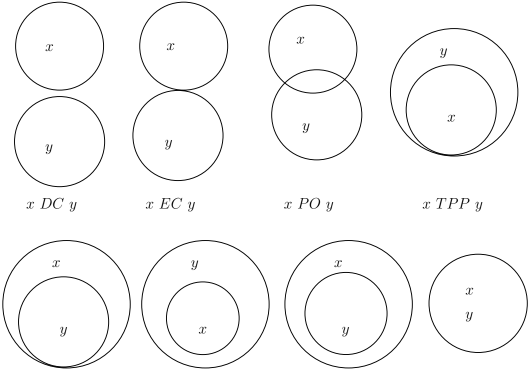
- $DC(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} \neg C(x,y)$ (x est déconnecté de y) ;
- $P(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} \forall z[C(z,x) \rightarrow C(z,y)]$ (x est une partie de y) ;
- $PP(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$ (x est une partie propre de y) ;
- $EQ(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} P(x,y) \wedge P(y,x)$ (x et y sont identiques) ;
- $O(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} \exists z[P(z,x) \wedge P(z,y)]$ (x chevauche y) ;
- $PO(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} O(x,y) \wedge \neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$ (x chevauche partiellement x) ;

Calcul des régions RCC8 [Randell *et al.* 89]

- $EC(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} \neg O(x,y) \wedge C(x,y)$ (x est extérieurement connecté à y) ;
- $TPP(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} PP(x,y) \wedge \exists z[EC(z,x) \wedge EC(z,y)]$ (x est une partie propre tangentielle de y) ;
- $NTPP(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} PP(x,y) \wedge \neg\exists z[EC(z,x) \wedge EC(z,y)]$ (x est une partie propre non tangentielle de y) ;
- $P^{\sim}(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} P(y,x)$; $PP^{\sim}(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} PP(y,x)$;
- $TPP^{\sim}(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} TPP(y,x)$; $NTPP^{\sim}(x,y) \overset{\text{Déf.}}{\equiv} NTPP(y,x)$.

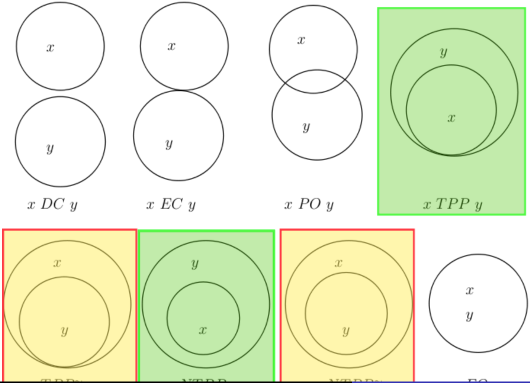
Calcul des régions RCC8 [Randell *et al.* 89]

- D : ensembles fermés réguliers d'un espace topologique
- B $= \{DC, EC, PO, EQ, TPP, NTPP, TPP^{\sim}, NTPP^{\sim}\}$



Calcul des régions RCC5

- $PP = TPP \cup NTPP$ et $PP^{\sim} = TPP^{\sim} \cup NTPP^{\sim}$
- $\mathrm{B} = \{DC, EC, PO, EQ, PP, PP^{\sim}\}$



Relations et opérations

- Une relation (complexe) : une union de relations de base
- L'ensemble des relations : 2^{B}
  - $R = \{p, m, o\}$ correspond à $p \cup m \cup o$

Relations et opérations

- Une relation (complexe) : une union de relations de base
- L'ensemble des relations : 2^{B}
  - $R = \{p, m, o\}$ correspond à $p \cup m \cup o$
- $\forall x, y \in \mathrm{D}, R \in 2^{\mathrm{B}}$, $x \ R \ y$ ssi il existe $a \in R$ tel que $x \ a \ y$

Relations et opérations

- Une relation (complexe) : une union de relations de base
- L'ensemble des relations : 2^{B}
  - $R = \{p, m, o\}$ correspond à $p \cup m \cup o$
- $\forall x, y \in \mathsf{D}, R \in 2^{\mathsf{B}}$, $x\ R\ y$ ssi il existe $a \in R$ tel que $x\ a\ y$
- La relation totale (Ψ), la relation vide $(\emptyset)$

Relations et opérations

- Une relation (complexe) : une union de relations de base
- L'ensemble des relations : 2^{B}
  - $R = \{p, m, o\}$ correspond à $p \cup m \cup o$

- $\forall x, y \in \mathrm{D}, R \in 2^{\mathrm{B}}$, $x\ R\ y$ ssi il existe $a \in R$ tel que $x\ a\ y$
- La relation totale (Ψ), la relation vide $(\emptyset)$

- 2^{B} muni de l'union $(\cup)$, de l'intersection $(\cap)$, de l'inverse $(^{-1})$ et de la faible composition $(\diamond)$

Relations et opérations

Opération de faible composition ($\diamond$)

- $\forall a, b \in \mathrm{B},\ a \diamond b = \{c : \exists x, y, z \in \mathrm{D} \text{ avec } x\ a\ y, y\ b\ z \text{ et } x\ c\ z\}$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, R \diamond R' = \bigcup_{a \in R, b \in R'} a \diamond b$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, \forall x, y, z \in \mathrm{D},\ x\ R\ y \text{ et } y\ S\ z \rightarrow x\ (R \diamond S)\ z$

Relations et opérations

Opération de faible composition ($\diamond$)

- $\forall a, b \in \mathrm{B},\ a \diamond b = \{c : \exists x, y, z \in \mathrm{D}$ avec $x\ a\ y, y\ b\ z$ et $x\ c\ z\}$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, R \diamond R' = \bigcup_{a \in R, b \in R'} a \diamond b$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, \forall x, y, z \in \mathrm{D},\ x\ R\ y$ et $y\ S\ z \rightarrow x\ (R \diamond S)\ z$

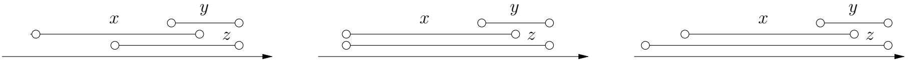
$o \diamond f = ?$ $\qquad x\ o\ y$ et $y\ f\ z$

Relations et opérations

Opération de faible composition ($\diamond$)

- $\forall a, b \in \mathrm{B},\ a \diamond b = \{c : \exists x, y, z \in \mathrm{D} \text{ avec } x\ a\ y, y\ b\ z \text{ et } x\ c\ z\}$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, R \diamond R' = \bigcup_{a \in R, b \in R'} a \diamond b$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, \forall x, y, z \in \mathrm{D},\ x\ R\ y \text{ et } y\ S\ z \rightarrow x\ (R \diamond S)\ z$

$o \diamond f = ?$ $\qquad x\ o\ y$ et $y\ f\ z$



x *overlaps* z (o) $\qquad$ x *starts* z (s) $\qquad$ x *during* z (d)

- $o \diamond f = \{o, s, d\}$

Relations et opérations

Opération de faible composition ($\diamond$)

- $\forall a, b \in \mathrm{B},\ a \diamond b = \{c : \exists x, y, z \in \mathrm{D}$ avec $x\ a\ y, y\ b\ z$ et $x\ c\ z\}$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, R \diamond R' = \bigcup_{a \in R, b \in R'}\ a \diamond b$
- $\forall R, S \in 2^{\mathrm{B}}, \forall x, y, z \in \mathrm{D},\ x\ R\ y$ et $y\ S\ z \rightarrow x\ (R \diamond S)\ z$

- $\{o, di\} \diamond \{m, s\} = (o \diamond m) \cup (o \diamond s) \cup (di \diamond m) \cup (di \diamond s) = \{p\} \cup \{o\} \cup \{di, o, fi\} \cup \{di, o, fi\} = \{p, o, d, fi\}$

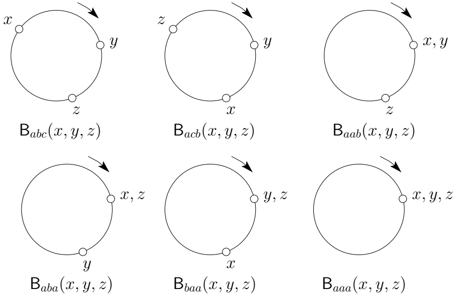
Relations et opérations

Opération de faible composition ($\diamond$)

- $\forall a, b \in \mathsf{B},\ a \diamond b = \{c : \exists x, y, z \in \mathsf{D} \text{ avec } x\ a\ y, y\ b\ z \text{ et } x\ c\ z\}$
- $\forall R, S \in 2^{\mathsf{B}}, R \diamond R' = \bigcup_{a \in R, b \in R'}\ a \diamond b$
- $\forall R, S \in 2^{\mathsf{B}}, \forall x, y, z \in \mathsf{D},\ x\ R\ y \text{ et } y\ S\ z \rightarrow x\ (R \diamond S)\ z$

Calcul des points cycliques [Balbiani&Condotta&Ligozat02]

- D est l'ensemble des points d'un cercle orienté
- B est défini par un ensemble de 6 relations ternaires



Axiomatisation des relations de base des points cycliques

- Axiomatisation de (D, $\prec$), $\prec$ relation d'ordre cyclique dense :
  - non $\prec(x, y, y)$ (P1) ;
  - si $\prec(x, y, z)$ et $\prec(x, z, t)$ alors $\prec(x, y, t)$ (P2 - Transitivité) ;
  - si $x \neq y$ et $x \neq z$ alors $y = z$ ou $\prec(x, y, z)$ ou $\prec(x, z, y)$ (P3 - Totalité) ;
  - $\prec(x, y, z)$ ssi $\prec(y, z, x)$ ssi $\prec(z, x, y)$ (P4 - Cyclicité) ;
  - si $x \neq y$ alors il existe z tel que $\prec(x, z, y)$ et il existe z tel que $\prec(x, y, z)$ (P5 - Densité) ;
  - il existe $x, y \in$ D tels que $x \neq y$ (P6).

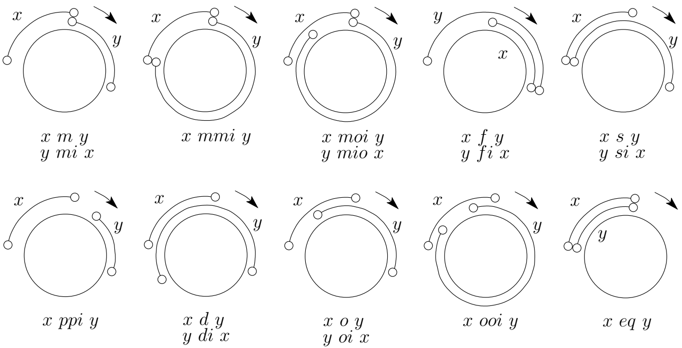
Axiomatisation des relations de base des points cycliques

- Axiomatisation de $(\mathrm{D}, \prec)$, $\prec$ relation d'ordre cyclique dense :
  - non $\prec(x, y, y)$ (P1) ;
  - si $\prec(x, y, z)$ et $\prec(x, z, t)$ alors $\prec(x, y, t)$ (P2 - Transitivité) ;
  - si $x \neq y$ et $x \neq z$ alors $y = z$ ou $\prec(x, y, z)$ ou $\prec(x, z, y)$ (P3 - Totalité) ;
  - $\prec(x, y, z)$ ssi $\prec(y, z, x)$ ssi $\prec(z, x, y)$ (P4 - Cyclicité) ;
  - si $x \neq y$ alors il existe z tel que $\prec(x, z, y)$ et il existe z tel que $\prec(x, y, z)$ (P5 - Densité) ;
  - il existe $x, y \in \mathrm{D}$ tels que $x \neq y$ (P6).

- $\prec = \{(x, y, z) \in \mathrm{D} : x < y < z \text{ ou } y < z < x \text{ ou } z < x < y\}$ avec $<$ la relation d'ordre linéaire habituelle sur les nombres rationnels.

Calcul des intervalles cycliques [Balbiani&Osmani00]

- $\mathrm{D} = [0, 2\pi[$
- $\mathrm{B} = \{m, mi, f, fi, s, si, d, di, o, oi, eq, mmi, ppi, moi, pio, ooi\}$



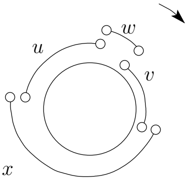
Axiomatisation - CycInt [KR04]

- Toutes les relations de base peuvent s'exprimer à l'aide de la relation *meets* $\Rightarrow$ Axiomatisation de *meets*.

Axiomatisation - CycInt [KR04]

- Toutes les relations de base peuvent s'exprimer à l'aide de la relation *meets* $\Rightarrow$ Axiomatisation de *meets*.

$$u \ \mathbf{ppi} \ v \overset{def}{\equiv} \exists w, x \quad u \ \mathbf{m} \ w \ \mathbf{m} \ v \ \mathbf{m} \ x \ \mathbf{m} \ u$$



$x \ ppi \ y$

Axiomatisation - CycInt

u et v se rencontrent au même endroit que w et x :
$X(u,v,w,x) = u\ \mathbf{m}\ v \wedge w\ \mathbf{m}\ x \wedge (u\ \mathbf{m}\ x \vee w\ \mathbf{m}\ v)$

Axiomatisation - CycInt

u et v se rencontrent au même endroit que w et x :
$X(u,v,w,x) = u \mathbf{~m~} v \wedge w \mathbf{~m~} x \wedge (u \mathbf{~m~} x \vee w \mathbf{~m~} v)$

CycInt

- **A1.** $\forall u,v,w,x,y,z \; X(u,v,w,x) \wedge X(y,z,w,x) \rightarrow X(u,v,y,z)$,
- **A2.** $\forall u,v,w,x,y,z \; X(u,v,w,x) \wedge X(y,u,x,z) \rightarrow \neg u \mathbf{~m~} x \wedge \neg x \mathbf{~m~} u$.
- **A3-A8.** ...

Axiomatisation - CycInt

u et v se rencontrent au même endroit que w et x :
$X(u, v, w, x) = u \textbf{ m } v \wedge w \textbf{ m } x \wedge (u \textbf{ m } x \vee w \textbf{ m } v)$

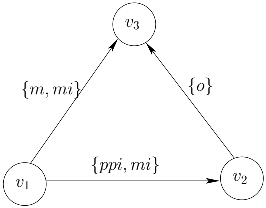
CycInt

- **A1.** $\forall u, v, w, x, y, z \; X(u, v, w, x) \wedge X(y, z, w, x) \rightarrow X(u, v, y, z)$,
- **A2.** $\forall u, v, w, x, y, z \; X(u, v, w, x) \wedge X(y, u, x, z) \rightarrow \neg u \textbf{ m } x \wedge \neg x \textbf{ m } u$.
- **A3-A8.** ...

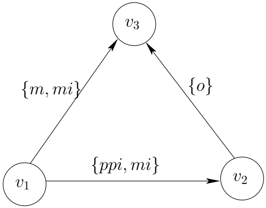
Propriété

Les modèles dénombrables de CycInt sont isomorphes.

Axiomatisation - CycInt



Axiomatisation - CycInt



$$(\exists v_1 v_2 v_3)((\phi(v_1\ ppi\ v_2) \vee \phi(v1\ mi\ v2)) \wedge (\phi(v1\ m\ v3) \vee \phi(v1\ mi\ v3)) \wedge \phi(v2\ o\ v3))$$

Plan

- Définition et problèmes
- Classes traitables - Exemples AI
- Résolution efficace
- Classes traitables - Exemples INDU
- Résolution avancée

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

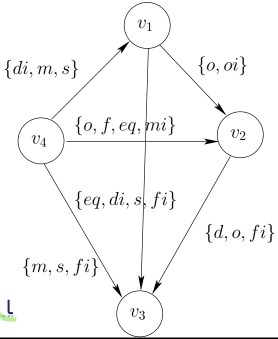
$\mathcal{N} = (V, C)$ où :

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble de variables
- C associe à tout $(v_i, v_j) \in V \times V$ une relation $C(v_i, v_j) \in 2^{\mathsf{B}}$

Réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

$\mathcal{N} = (V, C)$ où :

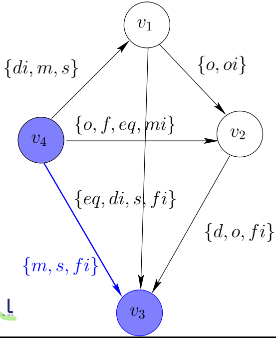
- $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble de variables
- C associe à tout $(v_i, v_j) \in V \times V$ une relation $C(v_i, v_j) \in 2^{\mathsf{B}}$



Réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

$\mathcal{N} = (V, C)$ où :

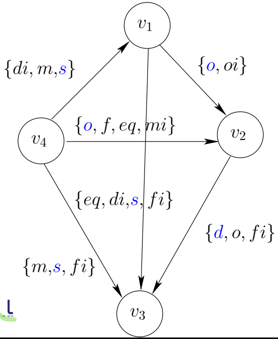
- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble de variables
- C associe à tout $(v_i, v_j) \in V \times V$ une relation $C(v_i, v_j) \in 2^{\mathsf{B}}$

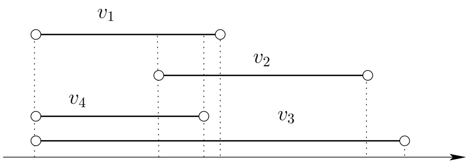


Réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

$\mathcal{N} = (V, C)$ où :

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble de variables
- C associe à tout $(v_i, v_j) \in V \times V$ une relation $C(v_i, v_j) \in 2^{\mathsf{B}}$

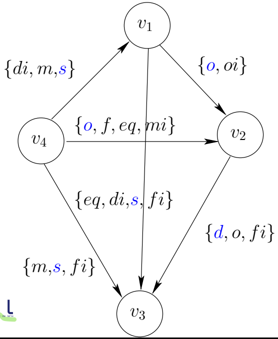


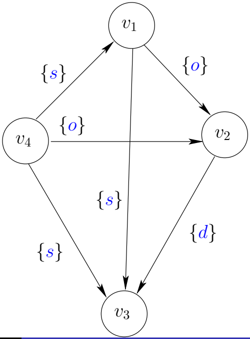


Réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

$\mathcal{N} = (V, C)$ où :

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble de variables
- C associe à tout $(v_i, v_j) \in V \times V$ une relation $C(v_i, v_j) \in 2^{\mathsf{B}}$





Réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

$\mathcal{N} = (V, C)$ où :

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble de variables
- C associe à tout $(v_i, v_j) \in V \times V$ une relation $C(v_i, v_j) \in 2^{\mathsf{B}}$

Problème de la cohérence

- Décider si un RCQ est cohérent ou non.
- Problème NP-complet dans le cas général.

Réseaux de contraintes qualitatives (RCQ)

$\mathcal{N} = (V, C)$ où :

- $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble de variables
- C associe à tout $(v_i, v_j) \in V \times V$ une relation $C(v_i, v_j) \in 2^{\mathsf{B}}$

Problème de l'étiquetage minimal

- Décider si un RCQ ne contient des relations de base faisables (pouvant être satisfaite par une solution).
- Problème NP-complet dans le cas général.

Fermeture par faible composition

$\diamond$-cohérence

$\mathcal{N} = (V, C)$ est $\diamond$-cohérent ssi $\forall v_i, v_j, v_k \in V \; C_{ij} \subseteq (C_{ik} \diamond C_{kj})$.

Fermeture par faible composition

$\diamond$-cohérence

$\mathcal{N} = (V, C)$ est $\diamond$-cohérent ssi $\forall v_i, v_j, v_k \in V \;\; C_{ij} \subseteq (C_{ik} \diamond C_{kj})$.

Fermeture par faible composition

$\diamond(\mathcal{N})$ est le plus grand sous-RCQ $\diamond$-cohérent de $\mathcal{N}$.

Fermeture par faible composition

$\diamond$-cohérence

$\mathcal{N} = (V, C)$ est $\diamond$-cohérent ssi $\forall v_i, v_j, v_k \in V \;\; C_{ij} \subseteq (C_{ik} \diamond C_{kj})$.

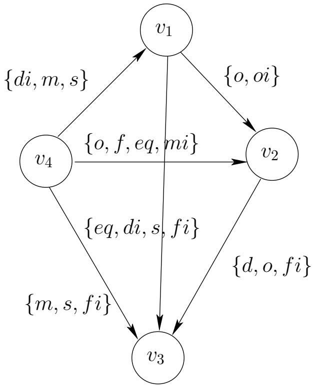
Fermeture par faible composition

$\diamond(\mathcal{N})$ est le plus grand sous-RCQ $\diamond$-cohérent de $\mathcal{N}$.

Calcul de la fermeture par faible composition

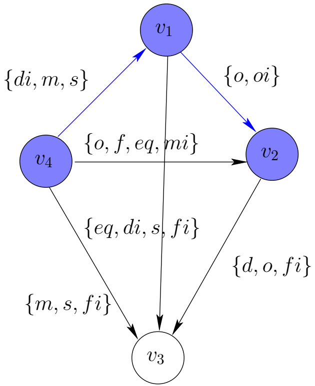
Soit $\mathcal{N} = (V, C)$. Pour tout $v_i, v_j, v_k \in V$, $C_{ij} \leftarrow C_{ij} \cap (C_{ik} \diamond C_{kj})$, jusqu'à ce qu'un point fixe soit atteint.

Fermeture par faible composition



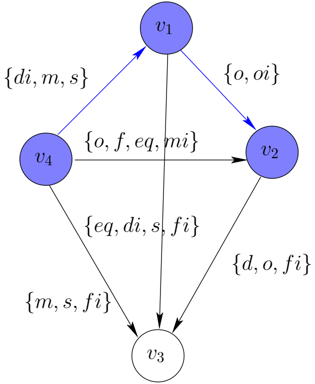
- $C_{41} \diamond C_{12} = \{di, m, s\} \diamond \{o, oi\}$
  $= \{p, di, o, fi, oi, si, d, s, m, f\}$
- $C_{42} \cap (C_{41} \diamond C_{12}) = \{o, f\}$

Fermeture par faible composition



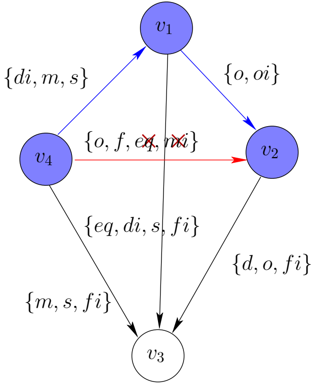
- $C_{41} \diamond C_{12} = \{di, m, s\} \diamond \{o, oi\}$
  $= \{p, di, o, fi, oi, si, d, s, m, f\}$
- $C_{42} \cap (C_{41} \diamond C_{12}) = \{o, f\}$

Fermeture par faible composition



- $C_{41} \diamond C_{12} = \{di, m, s\} \diamond \{o, oi\}$
  $= \{p, di, o, fi, oi, si, d, s, m, f\}$
- $C_{42} \cap (C_{41} \diamond C_{12}) = \{o, f\}$

Fermeture par faible composition

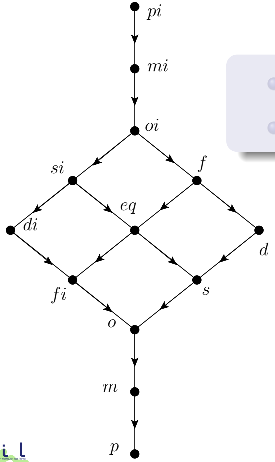


- $C_{41} \diamond C_{12} = \{di, m, s\} \diamond \{o, oi\}$
  $= \{p, di, o, fi, oi, si, d, s, m, f\}$
- $C_{42} \cap (C_{41} \diamond C_{12}) = \{o, f\}$

La fermeture par faible composition

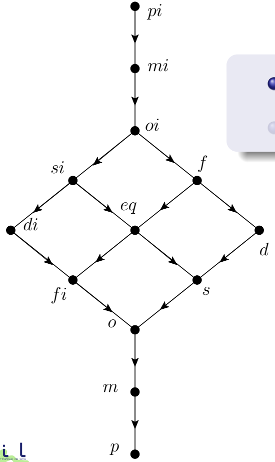
- Méthode polynomiale pour des problèmes NP-complets ⇒ Méthode non complète dans le cas général.
- Méthode saine ⇒ seulement des relations de base non faisables sont enlevées.
- Lorsqu'on obtient une contrainte vide ⇒ RCQ initial est non cohérent.
- Lorsqu'on n'obtient pas une contrainte vide ⇒ RCQ initial est non cohérent ou cohérent.
- Pour certaines classes de relations dites traitables, lorsqu'on n'obtient pas une contrainte vide ⇒ RCQ initial est cohérent.
- Pour certaines classes de relations dites traitables, lorsqu'on n'obtient pas une contrainte vide ⇒ RCQ initial est minimal.

Les relations convexes et préconvexes de AI



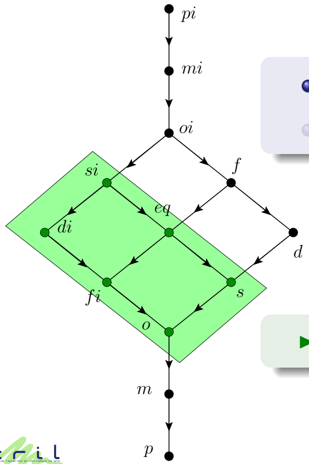
- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

Les relations convexes et préconvexes de AI



- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

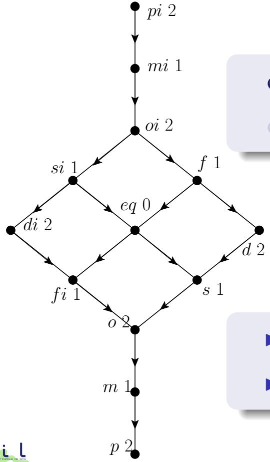
Les relations convexes et préconvexes de AI



- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

- $[o, si] = \{o, s, fi, eq, di, si\}$

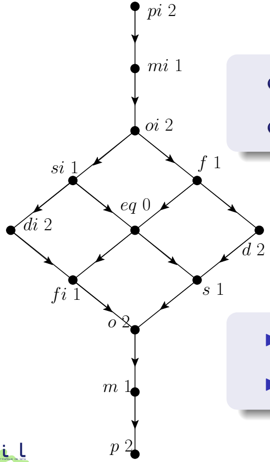
Les relations convexes et préconvexes de AI



- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

- $dim(a) = 2 - \#$égalités de bornes
- $dim(R) = Max\{dim(a) : a \in R\}$

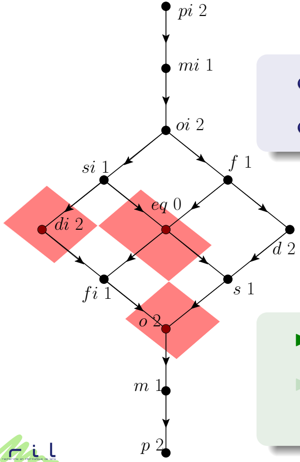
Les relations convexes et préconvexes de AI



- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

- $dim(a) = 2 - \#$égalités de bornes
- $dim(R) = Max\{dim(a) : a \in R\}$

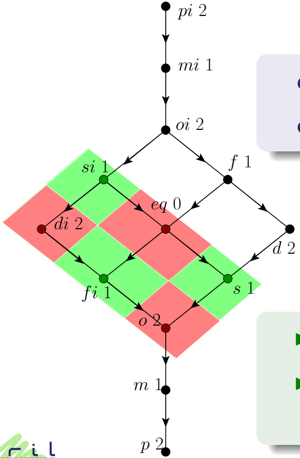
Les relations convexes et préconvexes de AI



- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

- $R = \{di, o, eq\}$, $dim(R) = 2$
- $I(R) = \{di, o, eq, si, fi, s\}$,
  $I(R) \setminus R = \{si, fi, eq\}$, $dim(I(R) \setminus R) = 1$

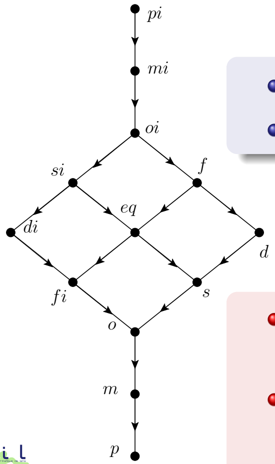
Les relations convexes et préconvexes de AI



- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

- $R = \{di, o, eq\}$, $dim(R) = 2$
- $I(R) = \{di, o, eq, si, fi, s\}$,
  $I(R) \setminus R = \{si, fi, eq\}$, $dim(I(R) \setminus R) = 1$

Les relations convexes et préconvexes de AI



- R convexe ssi $R = [a, b]$
- R préconvexe ssi $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$

- $\mathcal{N}$ est convexe et $\diamond$-cohérent $\Rightarrow$ $\mathcal{N}$ est globalement cohérent [Beek90].
- $\mathcal{N}$ est préconvexe et $\diamond$-cohérent $\Rightarrow$ toute solution partielle maximale de $\mathcal{N}$ peut être étendue en une solution [Ligozat94].

Algorithme de recherche avec retours arrières

À chaque étape :

1. Calcul de la fermeture par faible composition.

Algorithme de recherche avec retours arrières

À chaque étape :

1. Calcul de la fermeture par faible composition.
2. Sans utilisation de classe traitable :

Algorithme de recherche avec retours arrières

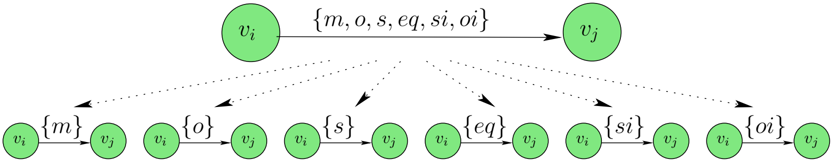
À chaque étape :

1. Calcul de la fermeture par faible composition.
2. Sans utilisation de classe traitable :
   - Itérativement substituer C_{ij} (la contrainte traitée) par chacune de ses relations de base et passer à l'étape suivante.

Algorithme de recherche avec retours arrières

À chaque étape :

1. Calcul de la fermeture par faible composition.
2. Sans utilisation de classe traitable :
   - Itérativement substituer C_{ij} (la contrainte traitée) par chacune de ses relations de base et passer à l'étape suivante.



Algorithme de recherche avec retours arrières

À chaque étape :

1. Calcul de la fermeture par faible composition.
2. Avec utilisation d'une classe traitable $\mathcal{C}$:

Algorithme de recherche avec retours arrières

À chaque étape :

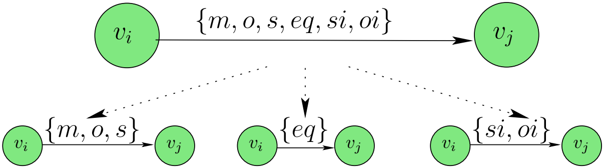
1. Calcul de la fermeture par faible composition.
2. Avec utilisation d'une classe traitable $\mathcal{C}$:
   - Découper C_{ij} en sous-relations de $\mathcal{C}$: $C_{ij} = s_1 \cup \ldots \cup s_k$
   - Itérativement substituer C_{ij} par chacune des relations $s_1, \ldots, s_k$ et passer à l'étape suivante.

Algorithme de recherche avec retours arrières

À chaque étape :

1. Calcul de la fermeture par faible composition.
2. Avec utilisation d'une classe traitable $\mathcal{C}$:
   - Découper C_{ij} en sous-relations de $\mathcal{C}$: $C_{ij} = s_1 \cup \ldots \cup s_k$
   - Itérativement substituer C_{ij} par chacune des relations $s_1, \ldots, s_k$ et passer à l'étape suivante.

Avec la classe des relations convexes :

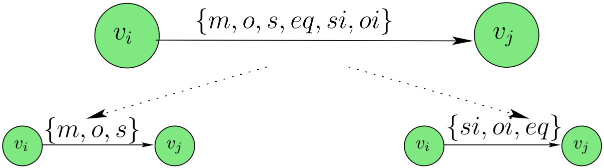


Algorithme de recherche avec retours arrières

À chaque étape :

1. Calcul de la fermeture par faible composition.
2. Avec utilisation d'une classe traitable $\mathcal{C}$:
   - Découper C_{ij} en sous-relations de $\mathcal{C}$: $C_{ij} = s_1 \cup \ldots \cup s_k$
   - Itérativement substituer C_{ij} par chacune des relations $s_1, \ldots, s_k$ et passer à l'étape suivante.

Avec la classe des relations préconvexes :



Calcul INDU [Pujari&Sattar99]

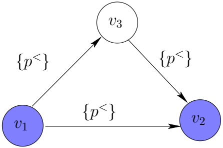
- $\mathrm{D} = \{x = (x^-, x^-) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^- < x^+\}$
- Une relation de base : i^p avec $i \in \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$ et $p \in \{<, >, =\}$
- $\mathrm{B} = \{p^<, p^>, p^=, pi^<, pi^>, pi^=, m^<, m^>, m^=, mi^<, mi^>, mi^=, o^<, o^>, o^=, oi^<, oi^>, oi^=, s^<, si^>, d^<, di^>, f^<, fi^>, eq^=\}$
- Problème de la cohérence des RCQ de INDU $\Rightarrow$ un problème NP-complet

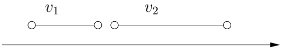
Opération de faible composition

- Opération de faible composition ($\diamond$) $\neq$ opération de composition usuelle ($\circ$)

Opération de faible composition

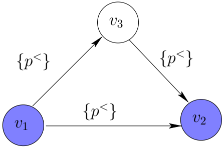
- Opération de faible composition ($\diamond$) $\neq$ opération de composition usuelle ($\circ$)
- $\mathcal{N}$ $\diamond$-cohérent $\not\Rightarrow$ $\mathcal{N}$ 3-cohérent

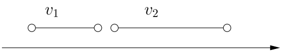




Opération de faible composition

- Opération de faible composition ($\diamond$) $\neq$ opération de composition usuelle ($\circ$)
- $\mathcal{N}$ $\diamond$-cohérent $\not\Rightarrow$ $\mathcal{N}$ 3-cohérent

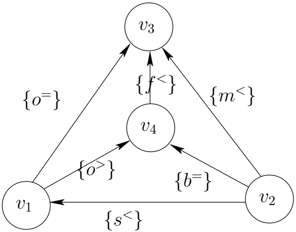


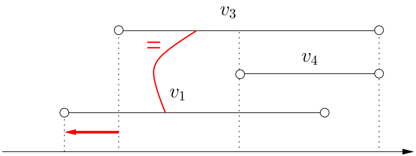


- $\mathcal{N}$ $\diamond$-cohérent $\Rightarrow$ $\mathcal{N}$ $(0,3)$-cohérent

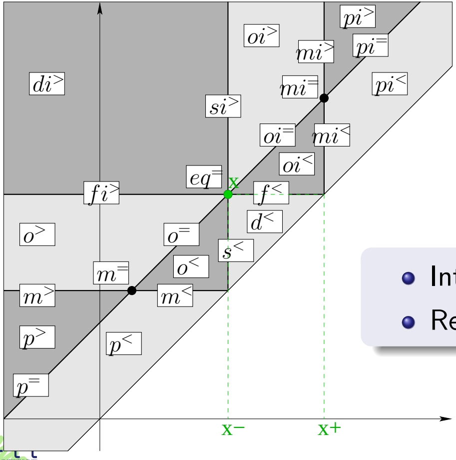
Scénarios et $\diamond$-cohérence

- Soit $\mathcal{N}$ un RCQ atomique. $\mathcal{N}$ $\diamond$-cohérent $\not\Rightarrow$ $\mathcal{N}$ cohérent.



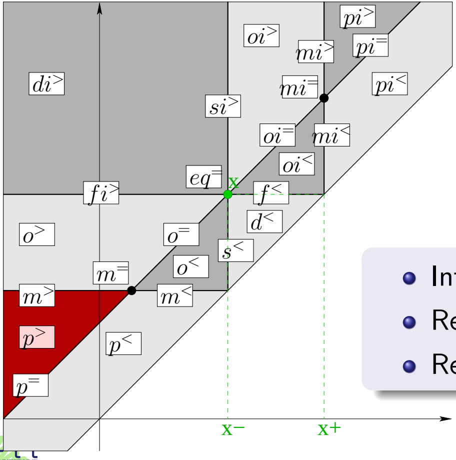


Représentation géométrique



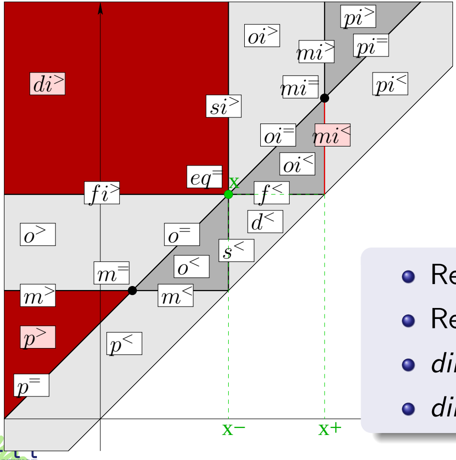
- Intervalle de référence $x = (x^-, x^+)$
- $\mathrm{Reg}(a) = \{y = (y^-, y^+) : y\ a\ x\}$

Représentation géométrique



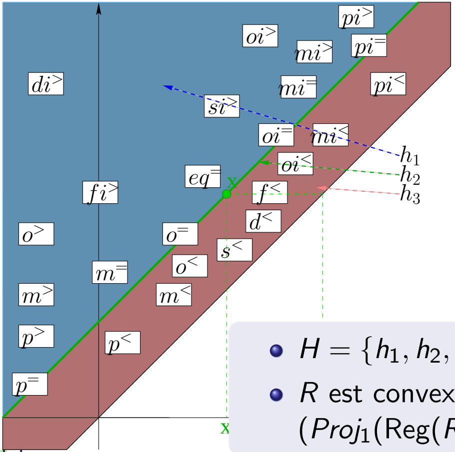
- Intervalle de référence $x = (x^-, x^+)$
- $\mathrm{Reg}(a) = \{y = (y^-, y^+) : y\ a\ x\}$
- $\mathrm{Reg}(p^>)$

Représentation géométrique



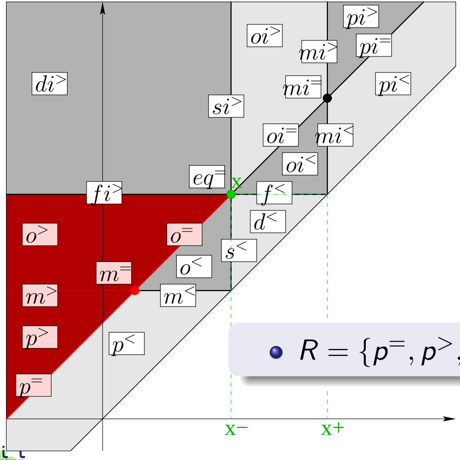
- $\mathrm{Reg}(R) = \bigcup_{a \in R} \mathrm{Reg}(a)$
- $\mathrm{Reg}(\{p^>, di^>, mi^>\})$
- $dim(R) = dim(\mathrm{Reg}(R))$
- $dim(\{p^>, di^>, mi^<\}) = 2$

Représentation géométrique - Relations convexes



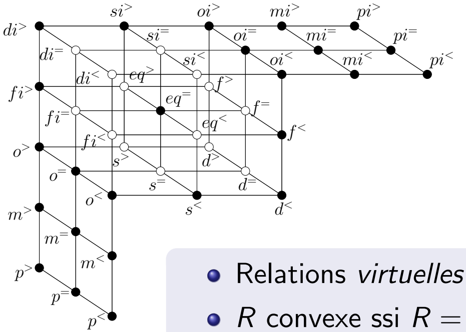
- $H = \{h_1, h_2, h_3, h_1 \cup h_3, h_1 \cup h_2 \cup h_3\}$
- R est convexe ssi $\exists h \in H$, $\text{Reg}(R) = (Proj_1(\text{Reg}(R)) \times Proj_2(\text{Reg}(R))) \cap h$

Représentation géométrique - Relations convexes



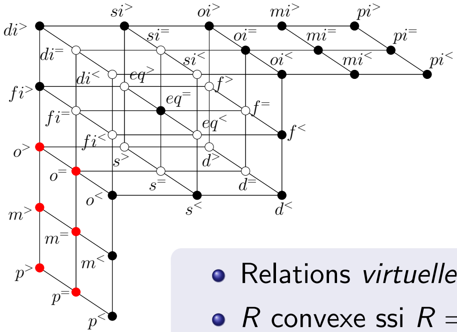
- $R = \{p^=, p^>, m^>, m^=, o^>, o^=\}$

Treillis - Relations convexes



- Relations *virtuelles*
- R convexe ssi $R = [a, b] \cap \mathrm{B}_{\mathrm{INDU}}$

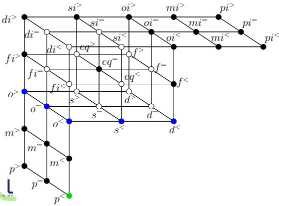
Treillis - Relations convexes

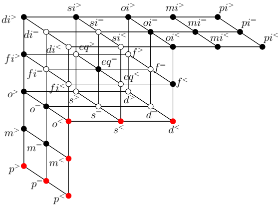


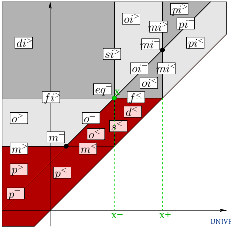
- Relations *virtuelles*
- R convexe ssi $R = [a, b] \cap \mathrm{B}_{\mathrm{INDU}}$
- $R = \{p^=, p^>, m^>, m^=, o^>, o^=\} = [p^=, o^>]$

Relations convexes

- $\mathcal{C}$ contient 240 relations
- $\mathcal{C}$ stable pour -1, $\cap$ mais pas pour $\diamond$
- $\{p^<\} \diamond \{d^<, s^<, o^>, o^=, o^<\} \notin \mathcal{C}_{\text{INDU}}$







Relations convexes - Problème de la cohérence

Contraintes de Horn [Koubarakis96]

Disjonctions d'inéquations $a_1.x_1 + \ldots + a_k.x_k \leq a$ et d'inégalités $a_1.x_1 + \ldots + a_k.x_k \neq a$ contenant au plus une inéquation.

Relations convexes - Problème de la cohérence

Contraintes de Horn [Koubarakis96]

Disjonctions d'inéquations $a_1.x_1 + \ldots + a_k.x_k \leq a$ et d'inégalités $a_1.x_1 + \ldots + a_k.x_k \neq a$ contenant au plus une inéquation.

Propriété

Les relations de $\mathcal{C}$ peuvent s'exprimer à l'aide de contraintes de Horn unitaires.

Relations convexes - Problème de la cohérence

Contraintes de Horn [Koubarakis96]

Disjonctions d'inéquations $a_1.x_1 + \ldots + a_k.x_k \leq a$ et d'inégalités $a_1.x_1 + \ldots + a_k.x_k \neq a$ contenant au plus une inéquation.

Propriété

Les relations de $\mathcal{C}$ peuvent s'exprimer à l'aide de contraintes de Horn unitaires.

Propriété

Le problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{C}$ est un problème polynomial.

Relations préconvexes - Une classe polynomiale

- $R \in \mathcal{P}$ ssi $dim(R \setminus R^{\mathcal{C}}) < dim(R)$
- $\mathcal{P} = 88096$ $\mathcal{P}$ stable pour $^{-1}$ mais pas pour $\cap$ et $\diamond$

- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}^{\cap}$ est NP-complet
- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}$ est NP-complet

Relations préconvexes - Une classe polynomiale

- $R \in \mathcal{P}$ ssi $dim(R \setminus R^{\mathcal{C}}) < dim(R)$
- $\mathcal{P} = 88096$ $\mathcal{P}$ stable pour $^{-1}$ mais pas pour $\cap$ et $\diamond$

- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}^{\cap}$ est NP-complet
- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}$ est NP-complet

Relations préconvexes - Une classe polynomiale

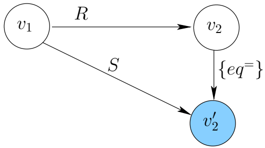
- $R \in \mathcal{P}$ ssi $dim(R \setminus R^{\mathcal{C}}) < dim(R)$
- $\mathcal{P} = 88096$ $\mathcal{P}$ stable pour $^{-1}$ mais pas pour $\cap$ et $\diamond$

- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}^{\cap}$ est NP-complet
- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}$ est NP-complet

Relations préconvexes - Une classe polynomiale

- $R \in \mathcal{P}$ ssi $dim(R \setminus R^{\mathcal{C}}) < dim(R)$
- $\mathcal{P} = 88096$ $\mathcal{P}$ stable pour $^{-1}$ mais pas pour $\cap$ et $\diamond$

- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}^{\cap}$ est NP-complet
- Problème de la cohérence des RCQ définis sur $\mathcal{P}$ est NP-complet



Relations fortement préconvexes

Définition

R est fortement préconvexe ssi pour chaque relation $S \in \mathcal{C}$, $R \cap S \in \mathcal{P}$.

Relations fortement préconvexes

Définition

R est fortement préconvexe ssi pour chaque relation $S \in \mathcal{C}$, $R \cap S \in \mathcal{P}$.

Propriétés

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ contient 45792 relations
- $\mathcal{S}$ fermé pour $^{-1}$ et $\cap$ mais pas pour $\diamond$

Relations fortement préconvexes

Définition

R est fortement préconvexe ssi pour chaque relation $S \in \mathcal{C}$, $R \cap S \in \mathcal{P}$.

Propriétés

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ contient 45792 relations
- $\mathcal{S}$ fermé pour $^{-1}$ et $\cap$ mais pas pour $\diamond$

Propriétés

- Les relations de $\mathcal{S}$ peuvent s'exprimer à l'aide de contraintes de Horn.
- Le problème de la cohérence sur $\mathcal{S}$ est polynomial.

L'ensemble $\mathcal{G}$

Définition

$R \in \mathcal{G}$ ssi $R \in \mathcal{P}$ et pour chaque relation $S \in \mathcal{C}_{\mathsf{CI}}$, $(R \cap S)^{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}_{\mathsf{CI}}$.

L'ensemble $\mathcal{G}$

Définition

$R \in \mathcal{G}$ ssi $R \in \mathcal{P}$ et pour chaque relation $S \in \mathcal{C}_{\mathsf{CI}}$, $(R \cap S)^{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}_{\mathsf{CI}}$.

Propriétés

- $\mathcal{C}_{\mathsf{CI}} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{G}$ contient 11854 relations
- $\mathcal{G}$ fermé pour $^{-1}$, $\cap$ et $\diamond$

L'ensemble $\mathcal{G}$

Définition

$R \in \mathcal{G}$ ssi $R \in \mathcal{P}$ et pour chaque relation $S \in \mathcal{C}_{\mathsf{CI}}$, $(R \cap S)^{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}_{\mathsf{CI}}$.

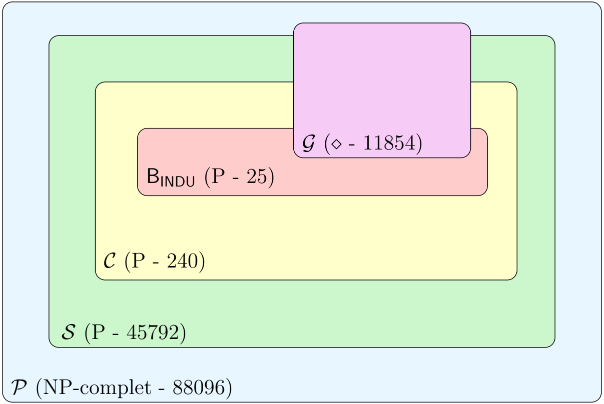
Propriétés

- $\mathcal{C}_{\mathsf{CI}} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{G}$ contient 11854 relations
- $\mathcal{G}$ fermé pour ${}^{-1}$, $\cap$ et $\diamond$

Propriétés

- Tout RCQ $\diamond$-cohérent défini sur $\mathcal{G}$ est cohérent.
- Le problème de la cohérence sur $\mathcal{G}$ est polynomial.

Récapitulatif



Contraintes éligibles - Motivation

Function Coherence($\mathcal{N}$) : Booléen [Nebel96]

$\mathcal{N} \leftarrow \diamond(\mathcal{N})$ **if** $\mathcal{N} = \perp$ **then**
  return *false*

Sélectionne $(v_i, v_j) \in V \times V$ avec $i < j$ tel que (v_i, v_j) non déjà sélectionné et $C_{ij} \notin \mathcal{C}$;

if *un tel couple n'existe pas* **then**
  return *true*

Partager C_{ij} en sous-relations $R_1, \ldots, R_k \in \mathcal{C}$;

foreach $l \in 1, \ldots, k$ **do**
  $C_{ij} \leftarrow R_l$; $C_{ji} \leftarrow R_l^{-1}$;
  if Coherence($\mathcal{N}$) **then**
    return *true*

return *false*

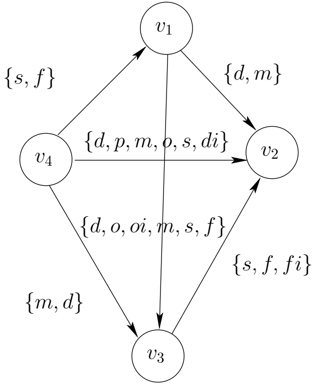
Contraintes éligibles - Motivation

Function Coherence($\mathcal{N}$) : Booléen [Nebel96]

$\mathcal{N} \leftarrow \diamond(\mathcal{N})$ **if** $\mathcal{N} = \bot$ **then**
    return *false*
Sélectionne $(v_i, v_j) \in V \times V$ avec $i < j$ tel que (v_i, v_j) non déjà sélectionné et $C_{ij} \notin \mathcal{C}$;
if *un tel couple n'existe pas* **then**
    return *true*
Partager C_{ij} en sous-relations $R_1, \ldots, R_k \in \mathcal{C}$;
foreach $l \in 1, \ldots, k$ **do**
    $C_{ij} \leftarrow R_l$; $C_{ji} \leftarrow R_l^{-1}$;
    if Coherence($\mathcal{N}$) **then**
        return *true*
return *false*

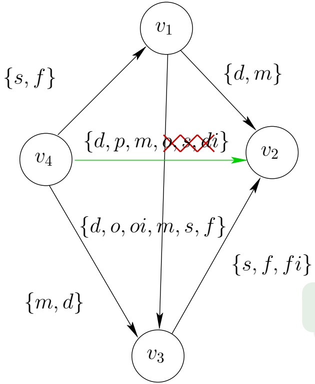
Contraintes éligibles - Motivation

- $\mathcal{C}$ = ensemble des relations préconvexes



Contraintes éligibles - Motivation

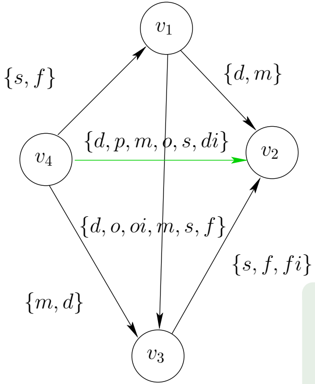
- $\mathcal{C}$ = ensemble des relations préconvexes



- Fermeture par faible composition

Contraintes éligibles - Motivation

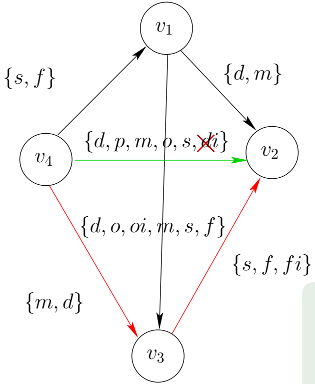
- $\mathcal{C}$ = ensemble des relations préconvexes



- $\{d, p, m, o, s, di\}$ non préconvexe
- $\{d, p, m, o, s\}$ préconvexe
- $\{d, p, m\}$ non préconvexe

Contraintes éligibles - Motivation

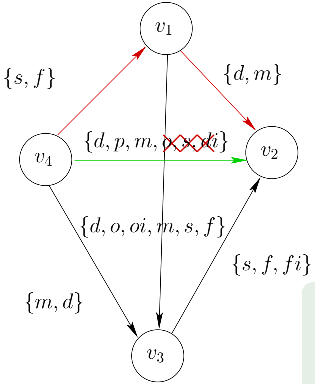
- $\mathcal{C}$ = ensemble des relations préconvexes



- $\{d, p, m, o, s, di\}$ non préconvexe
- $\{d, p, m, o, s\}$ préconvexe
- $\{d, p, m\}$ non préconvexe

Contraintes éligibles - Motivation

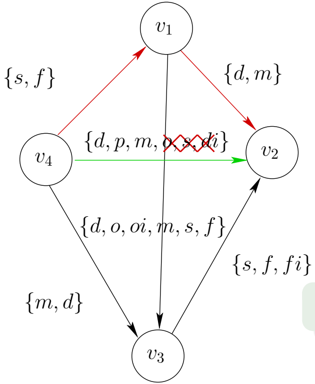
- $\mathcal{C}$ = ensemble des relations préconvexes



- $\{d, p, m, o, s, di\}$ non préconvexe
- $\{d, p, m, o, s\}$ préconvexe
- $\{d, p, m\}$ non préconvexe

Contraintes éligibles - Motivation

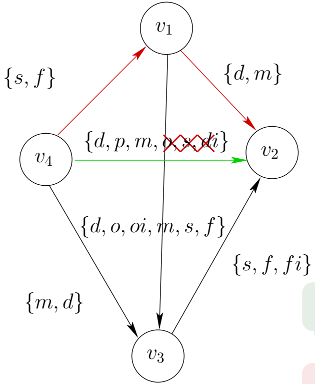
- $\mathcal{C}$ = ensemble des relations préconvexes



- Doit-on vraiment considérer C_{42} ?

Contraintes éligibles - Motivation

- $\mathcal{C}$ = ensemble des relations préconvexes



- Doit-on vraiment considérer C_{42} ?

- Non

Définition - Fermeture pour une classe

Soient $\mathcal{C}$ une classe, $R \in 2^{\mathsf{B}}$, $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ.

- $R^{\mathcal{C}} = \bigcap\{R' : R' \in \mathcal{C} \text{ et } R \subseteq R'\}$
- $\mathcal{N}^{\mathcal{C}} = (V, C')$ avec $\forall v_i, v_j \in V,\ C'_{ij} = (C_{ij})^{\mathcal{C}}$

Définition - Fermeture pour une classe

Soient $\mathcal{C}$ une classe, $R \in 2^{\mathsf{B}}$, $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ.

- $R^{\mathcal{C}} = \bigcap\{R' : R' \in \mathcal{C} \text{ et } R \subseteq R'\}$
- $\mathcal{N}^{\mathcal{C}} = (V, C')$ avec $\forall v_i, v_j \in V,\ C'_{ij} = (C_{ij})^{\mathcal{C}}$

Propriété

Soient $\mathcal{C}$ une classe et un RCQ $\mathcal{N}$.

- Si $\mathcal{N}$ est $\diamond$-cohérent alors $\mathcal{N}^{\mathcal{C}}$ est $\diamond$-cohérent.

Définition - Fermeture pour une classe

Soient $\mathcal{C}$ une classe, $R \in 2^{\mathsf{B}}$, $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ.

- $R^{\mathcal{C}} = \bigcap\{R' : R' \in \mathcal{C} \text{ et } R \subseteq R'\}$
- $\mathcal{N}^{\mathcal{C}} = (V, C')$ avec $\forall v_i, v_j \in V,\ C'_{ij} = (C_{ij})^{\mathcal{C}}$

Propriété

Soient $\mathcal{C}$ une classe et un RCQ $\mathcal{N}$.

- Si $\mathcal{N}$ est $\diamond$-cohérent alors $\mathcal{N}^{\mathcal{C}}$ est $\diamond$-cohérent.

Propriété

Soient $\mathcal{C}$ une classe pour laquelle la $\diamond$-cohérence est complète et deux RCQ $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$.

- Si $\mathcal{N}$ est $\diamond$-cohérent et $\mathcal{N}^{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{N}'$ alors $\mathcal{N}'$ est cohérent.

Contraintes éligibles - Définition

Définition [CP07]

- Une contrainte C_{ij} est non éligible si elle a été définie à un moment donné du traitement par une relation de la classe $\mathcal{C}$.
- Une contrainte C_{ij} est non éligible ssi $(C_{ij})^{\mathcal{C}} \subseteq C_{ij}^{\text{Init}}$.

Contraintes éligibles - Définition

Définition [CP07]

- Une contrainte C_{ij} est non éligible si elle a été définie à un moment donné du traitement par une relation de la classe $\mathcal{C}$.
- Une contrainte C_{ij} est non éligible ssi $(C_{ij})^{\mathcal{C}} \subseteq C_{ij}^{\text{Init}}$.

Contraintes éligibles - Définition

Function Coherence($\mathcal{N}$) : Booléen

$\mathcal{N} \leftarrow \diamond(\mathcal{N})$ **if** $\mathcal{N} = \perp$ **then**
  return *false*
Sélectionne $(v_i, v_j) \in V \times V$ avec $i < j$ tel que (v_i, v_j) non déjà sélectionné et $C_{ij} \notin \mathcal{C}$;
if *un tel couple n'existe pas* **then**
  return *true*
Partager C_{ij} en sous-relations $R_1, \ldots, R_k \in \mathcal{C}$;
foreach $l \in 1, \ldots, k$ **do**
  $C_{ij} \leftarrow R_l$; $C_{ji} \leftarrow R_l^{-1}$;
  if Coherence($\mathcal{N}$) **then**
    return *true*
return *false*

Contraintes éligibles - Définition

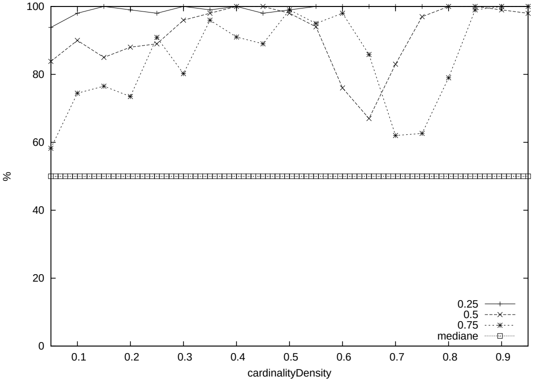
Function Coherence($\mathcal{N}$) : Booléen

$\mathcal{N} \leftarrow \diamond(\mathcal{N})$ **if** $\mathcal{N} = \perp$ **then**
  return *false*
Sélectionne $(v_i, v_j) \in V \times V$ avec $i < j$ tel que $(C_{ij})^{\mathcal{C}} \not\subseteq C_{ij}^{\text{Init}}$;
if *un tel couple n'existe pas* **then**
  return *true*
Partager C_{ij} en sous-relations $R_1, \ldots, R_k \in \mathcal{C}$;
foreach $l \in 1, \ldots, k$ **do**
  $C_{ij} \leftarrow R_l$; $C_{ji} \leftarrow R_l^{-1}$;
  if Coherence($\mathcal{N}$) **then**
    return *true*
return *false*

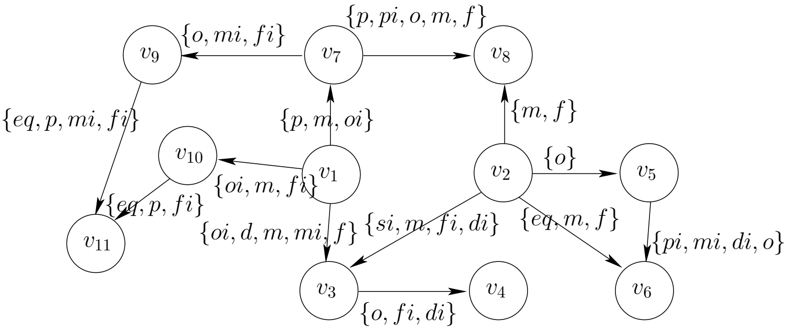
Contraintes éligibles - Résultats expérimentaux

Modèle de génération des RCQ [Nebel97] :
$A(n, nonTrivialDensity, cardinalityDensity, consistant)$

Contraintes éligibles - Résultats expérimentaux



Triangulation et RCQ - Motivation

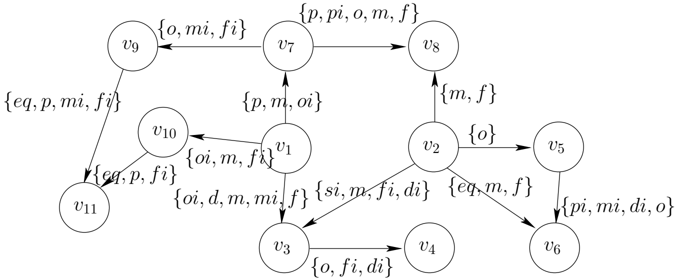


- Écarter des contraintes définies par Ψ lors de la résolution
- Utilisation de la structure du RCQ et de la triangulation de graphes

Structure d'un RCQ

Graphe de contraintes d'un RCQ

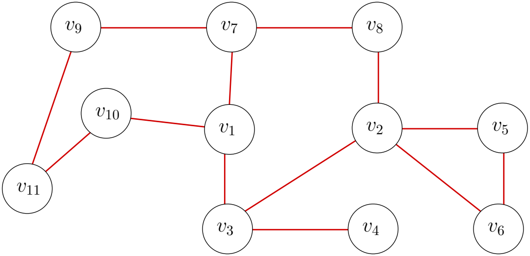
Soit un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$. $G(\mathcal{N})$ est le graphe non orienté (V, E) avec $(v_i, v_j) \in E$ ssi $C_{ij} \neq \Psi$.



Structure d'un RCQ

Graphe de contraintes d'un RCQ

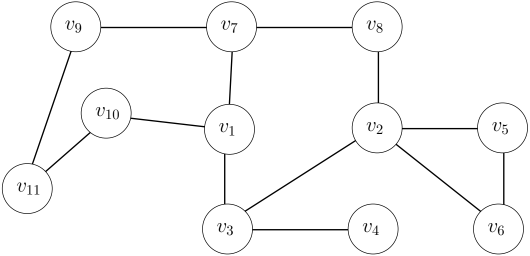
Soit un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$. $G(\mathcal{N})$ est le graphe non orienté (V, E) avec $(v_i, v_j) \in E$ ssi $C_{ij} \neq \Psi$.



Graphes triangulés

Graphe triangulé

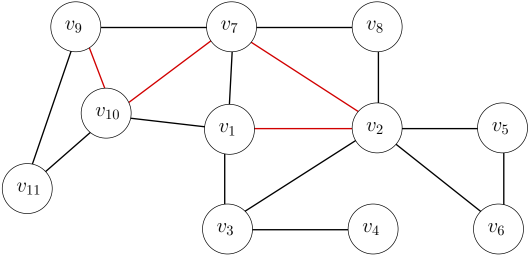
Un graphe $G = (V, E)$ est triangulé ssi chacun de ses cycles de longueur strictement supérieure à 3 possède une corde.



Graphes triangulés

Graphe triangulé

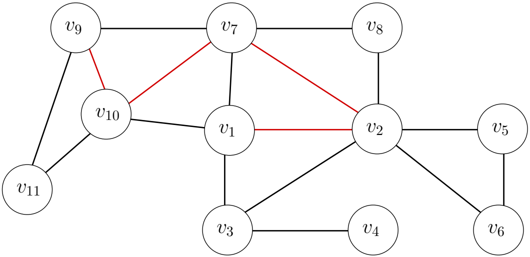
Un graphe $G = (V, E)$ est triangulé ssi chacun de ses cycles de longueur strictement supérieure à 3 possède une corde.



Graphes triangulés

Graphe triangulé

Un graphe $G = (V, E)$ est triangulé ssi chacun de ses cycles de longueur strictement supérieure à 3 possède une corde.



Méthodes de triangulation de graphes (MCS, Lex BFS, GreedyFillIn, ...)

$\diamond$-cohérence partielle

Définition [ICTAI11]

Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ et un graphe $G = (V, E)$. $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{G}$-cohérent ssi pour tout $v_i, v_j, v_k \in V$ tels que $\{(v_i, v_j), (v_i, v_k), (v_k, v_j)\} \subseteq E$ nous avons : $C_{ij} \subseteq C_{ik} \diamond C_{kj}$.

$\diamond$-cohérence partielle

Définition [ICTAI11]

Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ et un graphe $G = (V, E)$. $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{}_{G}$-cohérent ssi pour tout $v_i, v_j, v_k \in V$ tels que $\{(v_i, v_j), (v_i, v_k), (v_k, v_j)\} \subseteq E$ nous avons : $C_{ij} \subseteq C_{ik} \diamond C_{kj}$.

Propriétés

Soient un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ et un graphe $G = (V, E)$.

- Il existe un plus grand sous-RCQ de $\mathcal{N}$ $\overset{\diamond}{}_{G}$-cohérent : $\overset{\diamond}{}_{G}(\mathcal{N})$.
- $\overset{\diamond}{}_{G}(\mathcal{N})$ est équivalent à $\mathcal{N}$.
- Soit $\mathcal{N}'$ un RCQ, si $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ alors $\overset{\diamond}{}_{G}(\mathcal{N}') \subseteq^{\diamond}_{G} (\mathcal{N})$.

$\diamond$-cohérence partielle

Propriété

Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ, $G = (V, E)$ un graphe et une classe de relations $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{G}$-cohérent alors $\mathcal{N}^{\mathcal{C}}$ est $\overset{\diamond}{G}$-cohérent.

$\diamond$-cohérence partielle

Propriété

Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ, $G = (V, E)$ un graphe et une classe de relations $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{G}$-cohérent alors $\mathcal{N}^{\mathcal{C}}$ est $\overset{\diamond}{G}$-cohérent.

Propriété [ICTAI11,TIME11]

Soient $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ préconvexe du calcul des intervalles et $G = (V, E)$ un graphe tel que G($\mathcal{N}$) $\subseteq G$. Nous avons : si G est triangulé et $\mathcal{N}$ $\overset{\diamond}{G}$-cohérent alors $\mathcal{N}$ est cohérent.

Algorithme de recherche avec triangulation

Function Coherence($\mathcal{N}$) : Booléen

$G = (V, E) \leftarrow$ Triangulation($\mathcal{N}$);
$\mathcal{N}_{Init} \leftarrow \mathcal{N}$;
$\mathcal{N} \leftarrow$ PreTraitement($\mathcal{N}$) ;
if $\mathcal{N} = \perp$ **then**
  return *false* ;
return CoherenceAux($\mathcal{N}, G$);

Algorithme de recherche avec triangulation

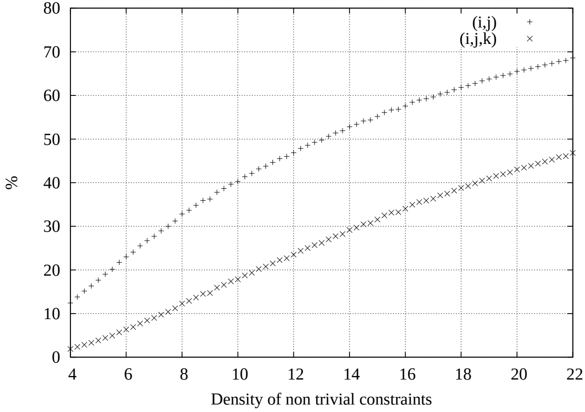
Function CoherenceAux($\mathcal{N}$,G) : Booléen

$\mathcal{N} \leftarrow {}^{\diamond}_{G}(\mathcal{N})$;
if $\mathcal{N} = \bot$ **then**
    return *false*
Sélectionne $(v_i, v_j) \in E$ avec $i < j$ tel que $(C_{ij})^{\mathcal{C}} \not\subseteq C_{ij}^{\mathrm{Init}}$;
if *un tel couple n'existe pas* **then**
    return *true*
Partager C_{ij} en sous-relations $R_1, \ldots, R_k \in \mathcal{C}$;
foreach $l \in 1, \ldots, k$ **do**
    $C_{ij} \leftarrow R_l$; $C_{ji} \leftarrow R_l^{-1}$;
    if CoherenceAux($\mathcal{N}$) **then**
        return *true*
return *false*

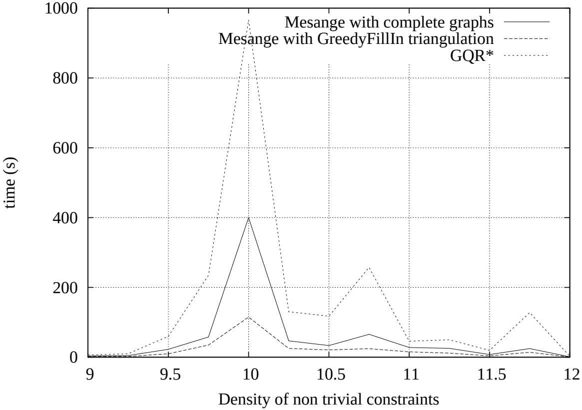
Triangulation et RCQ - Résultats expérimentaux

- A(100,nTD,6.5,non forcé cohérent) avec nTD $\in 4, \ldots, 22$
- Comparaison avec et sans l'utilisation de triangulation (GreedyFillIn)

Triangulation et RCQ - Résultats expérimentaux



Triangulation et RCQ - Résultats expérimentaux



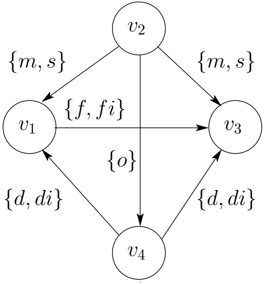
$\diamond_f$-cohérences - Motivation

- La $\diamond$-cohérence : prétraitement + filtrage pendant la recherche

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Motivation

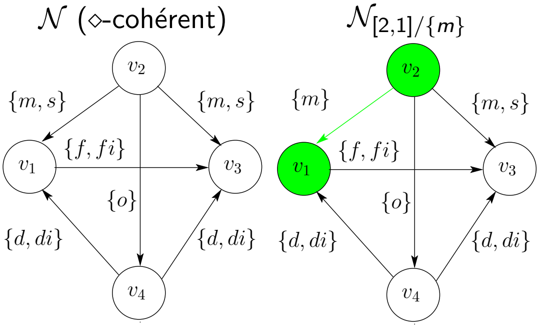
- La $\diamond$-cohérence : prétraitement + filtrage pendant la recherche

$\mathcal{N}$ ($\diamond$-cohérent)



$\diamond_f$-cohérences - Motivation

- La $\diamond$-cohérence : prétraitement + filtrage pendant la recherche

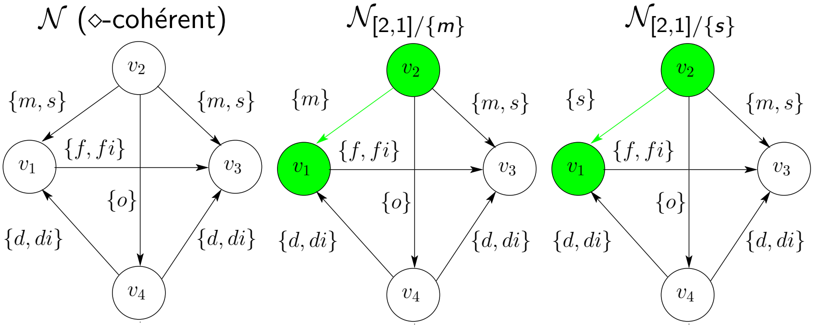


$\diamond(\mathcal{N}_{[2,1]/\{m\}}) = \bot$

m non satisfiable

$\diamond_f$-cohérences - Motivation

- La $\diamond$-cohérence : prétraitement + filtrage pendant la recherche

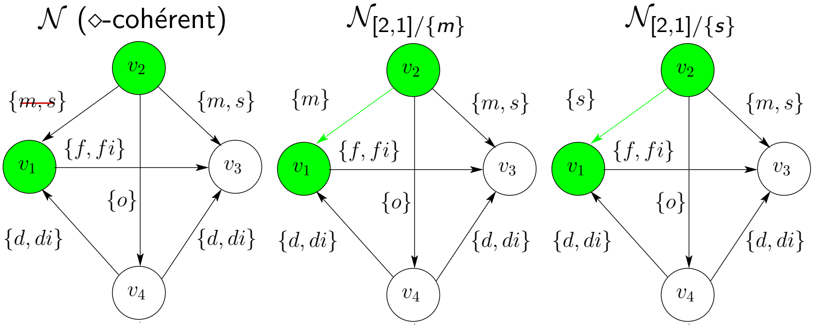


$\diamond(\mathcal{N}_{[2,1]/\{m\}}) = \perp$ — m non satisfiable

$\diamond(\mathcal{N}_{[2,1]/\{s\}}) = \perp$ — s non satisfiable

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Motivation

- La $\diamond$-cohérence : prétraitement + filtrage pendant la recherche



$\mathcal{N}$ non cohérent

$\diamond(\mathcal{N}_{[2,1]/\{m\}}) = \perp$
m non satisfiable

$\diamond(\mathcal{N}_{[2,1]/\{s\}}) = \perp$
s non satisfiable

$\diamond_f$-cohérences - Définition [KR10]

$f \in \mathcal{F}$ ssi f est une application de 2^{B} vers $2^{2^{\mathsf{B}}}$ telle que $\bigcup f(R) = R$ pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Définition $[KR10]$

$f \in \mathcal{F}$ ssi f est une application de 2^{B} vers $2^{2^{\mathsf{B}}}$ telle que $\bigcup f(R) = R$ pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérence

Un RCQ $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{f}$-cohérent ssi pour tout couple (v_i, v_j) de variables et pour tout $R \in f(\mathcal{N}[i,j])$, $\diamond(\mathcal{N}_{[i,j]/R})[i,j] = R$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Définition [KR10]

$f \in \mathcal{F}$ ssi f est une application de 2^{B} vers $2^{2^{\mathrm{B}}}$ telle que $\bigcup f(R) = R$ pour tout $R \in 2^{\mathrm{B}}$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérence

Un RCQ $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{f}$-cohérent ssi pour tout couple (v_i, v_j) de variables et pour tout $R \in f(\mathcal{N}[i,j])$, $\diamond(\mathcal{N}_{[i,j]/R})[i,j] = R$.

- $f_{\mathrm{B}}(R) = \{\{a\} : a \in R\}$. $f_{\mathrm{B}}(\{p,m,o\}) = \{\{p\},\{m\},\{o\}\}$.
- $f_{\neq}(R) = \{R \setminus \{a\} : a \in R\}$ si $|R| > 1$; $f_{\neq}(R) = \{R\}$ sinon. $f_{\neq}(\{p,m,o\}) = \{\{p,m\},\{p,o\},\{m,o\}\}$.
- $f_{\diamond}(R) = \{R\}$. $f_{\diamond}(\{p,m,o\}) = \{p,m,o\}$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Définition [KR10]

$f \in \mathcal{F}$ ssi f est une application de 2^{B} vers $2^{2^{\mathsf{B}}}$ telle que $\bigcup f(R) = R$ pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérence

Un RCQ $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{f}$-cohérent ssi pour tout couple (v_i, v_j) de variables et pour tout $R \in f(\mathcal{N}[i,j])$, $\diamond(\mathcal{N}_{[i,j]/R})[i,j] = R$.

- $f_{\mathsf{B}}(R) = \{\{a\} : a \in R\}$. $f_{\mathsf{B}}(\{p, m, o\}) = \{\{p\}, \{m\}, \{o\}\}$.
- $f_{\neq}(R) = \{R \setminus \{a\} : a \in R\}$ si $|R| > 1$; $f_{\neq}(R) = \{R\}$ sinon. $f_{\neq}(\{p, m, o\}) = \{\{p, m\}, \{p, o\}, \{m, o\}\}$.
- $f_{\diamond}(R) = \{R\}$. $f_{\diamond}(\{p, m, o\}) = \{p, m, o\}$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Définition $[KR10]$

$f \in \mathcal{F}$ ssi f est une application de 2^{B} vers $2^{2^{\mathsf{B}}}$ telle que $\bigcup f(R) = R$ pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérence

Un RCQ $\mathcal{N}$ est $\overset{\diamond}{f}$-cohérent ssi pour tout couple (v_i, v_j) de variables et pour tout $R \in f(\mathcal{N}[i,j])$, $\diamond(\mathcal{N}_{[i,j]/R})[i,j] = R$.

- $f_{\mathsf{B}}(R) = \{\{a\} : a \in R\}$. $f_{\mathsf{B}}(\{p,m,o\}) = \{\{p\},\{m\},\{o\}\}$.
- $f_{\neq}(R) = \{R \setminus \{a\} : a \in R\}$ si $|R| > 1$; $f_{\neq}(R) = \{R\}$ sinon. $f_{\neq}(\{p,m,o\}) = \{\{p,m\},\{p,o\},\{m,o\}\}$.
- $f_{\diamond}(R) = \{R\}$. $f_{\diamond}(\{p,m,o\}) = \{p,m,o\}$.

$\diamond_f$-cohérences

Soit $P = \{R_1, \ldots, R_k\}$ une partition de B. f_P :
$f(R) = \{R \cap R_i : i \in \{1, \ldots, k\}\} \setminus \{\emptyset\}$ pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$.

$\diamond_f$-cohérences

Soit $P = \{R_1, \ldots, R_k\}$ une partition de B. f_P :
$f(R) = \{R \cap R_i : i \in \{1, \ldots, k\}\} \setminus \{\emptyset\}$ pour tout $R \in 2^{\mathrm{B}}$.

- $P = \{\{p, m, o\}, \{fi, s, d\}, \{pi, mi, oi\}, \{f, si, di, eq\}\}$
  $f_P(\{m, o, pi, si, di, eq\}) = \{\{m, o\}, \{pi\}, \{si, di, eq\}\}$

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Forces relatives

Propriété

Soient $f, f' \in \mathcal{F}$. Si pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$ et $R' \in f'(R)$, il existe $E \subseteq f(R)$ tel que $R' = \bigcup E$, alors $\overset{\diamond}{f}$-cohérence $\trianglerighteq$ $\overset{\diamond}{f'}$-cohérence.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Forces relatives

Propriété

Soient $f, f' \in \mathcal{F}$. Si pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$ et $R' \in f'(R)$, il existe $E \subseteq f(R)$ tel que $R' = \bigcup E$, alors $\overset{\diamond}{f}$-cohérence $\trianglerighteq$ $\overset{\diamond}{f'}$-cohérence.

Propriété

Pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\overset{\diamond}{f_{\mathsf{B}}}$-cohérence $\trianglerighteq$ $\overset{\diamond}{f}$-cohérence $\trianglerighteq$ $\overset{\diamond}{f_{\diamond}}$-cohérence.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Forces relatives

Propriété

Soient $f, f' \in \mathcal{F}$. Si pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}}$ et $R' \in f'(R)$, il existe $E \subseteq f(R)$ tel que $R' = \bigcup E$, alors $\overset{\diamond}{f}$-cohérence $\trianglerighteq$ $\overset{\diamond}{f'}$-cohérence.

Propriété

Pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\overset{\diamond}{f_{\mathsf{B}}}$-cohérence $\trianglerighteq$ $\overset{\diamond}{f}$-cohérence $\trianglerighteq$ $\overset{\diamond}{f_{\diamond}}$-cohérence.

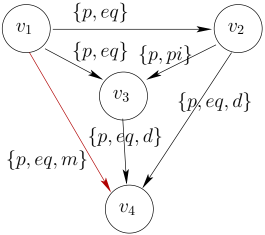
Propriété

$([\overset{\diamond}{\mathcal{F}}], \trianglerighteq)$ forme un treillis complet avec $[\overset{\diamond}{f_{\mathsf{B}}}$-cohérence$]$ comme plus grand élément et $[\overset{\diamond}{f_{\diamond}}$-cohérence$]$ comme plus petit élément.

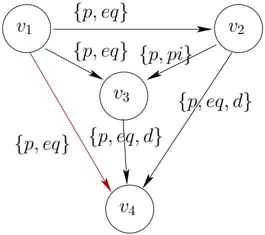
${}^{\diamond}_{f}$-cohérences - Fermeture

$f \in \mathcal{F}$: $f(\{p, eq, m\}) = \{\{p, eq, m\}, \{m\}\}$ et $f(R) = \{R\}$ pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}} \setminus \{\{p, eq, m\}\}$.

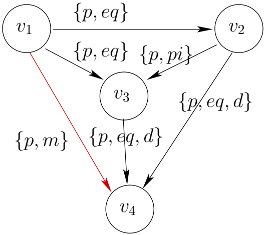
$\mathcal{N}_1$ (non ${}^{\diamond}_{f}$-cohérent)



$\mathcal{N}_2$ (${}^{\diamond}_{f}$-cohérent)

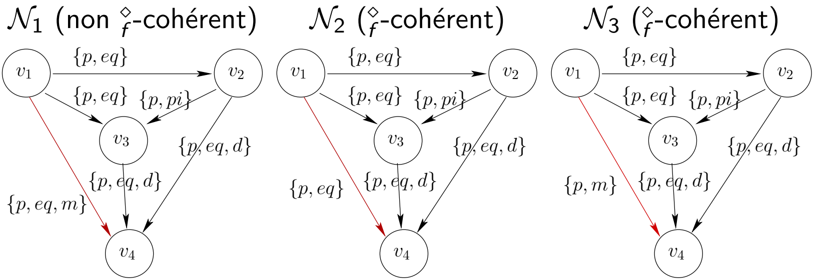


$\mathcal{N}_3$ (${}^{\diamond}_{f}$-cohérent)



$\diamond_f$-cohérences - Fermeture

$f \in \mathcal{F}$: $f(\{p, eq, m\}) = \{\{p, eq, m\}, \{m\}\}$ et $f(R) = \{R\}$ pour tout $R \in 2^{\mathsf{B}} \setminus \{\{p, eq, m\}\}$.



$\Rightarrow$ Pas de fermeture pour $\mathcal{N}_1$ par rapport à $\diamond_f$-cohérence.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Fermeture

$f \in \mathcal{F}^*$ ssi $f \in \mathcal{F}$ et f est une application telle que pour tout $R, R' \in 2^{\mathsf{B}}$ avec $R' \subset R$ et pour tout $S \in f(R)$, nous avons : $S \cap R' \neq \emptyset \Rightarrow \exists E \subseteq f(R')$ tel que $S \cap R' = \bigcup E$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Fermeture

$f \in \mathcal{F}^*$ ssi $f \in \mathcal{F}$ et f est une application telle que pour tout $R, R' \in 2^{\mathsf{B}}$ avec $R' \subset R$ et pour tout $S \in f(R)$, nous avons : $S \cap R' \neq \emptyset \Rightarrow \exists E \subseteq f(R')$ tel que $S \cap R' = \bigcup E$.

propriété

Soient $f \in \mathcal{F}^*$ et deux RCQ $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ définis sur V. Si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont $\overset{\diamond}{f}$-cohérents alors $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$ est $\overset{\diamond}{f}$-cohérent.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Fermeture

$f \in \mathcal{F}^*$ ssi $f \in \mathcal{F}$ et f est une application telle que pour tout $R, R' \in 2^{\mathrm{B}}$ avec $R' \subset R$ et pour tout $S \in f(R)$, nous avons : $S \cap R' \neq \emptyset \Rightarrow \exists E \subseteq f(R')$ tel que $S \cap R' = \bigcup E$.

propriété

Soient $f \in \mathcal{F}^*$ et deux RCQ $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ définis sur V. Si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont $\overset{\diamond}{f}$-cohérents alors $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$ est $\overset{\diamond}{f}$-cohérent.

Propriété

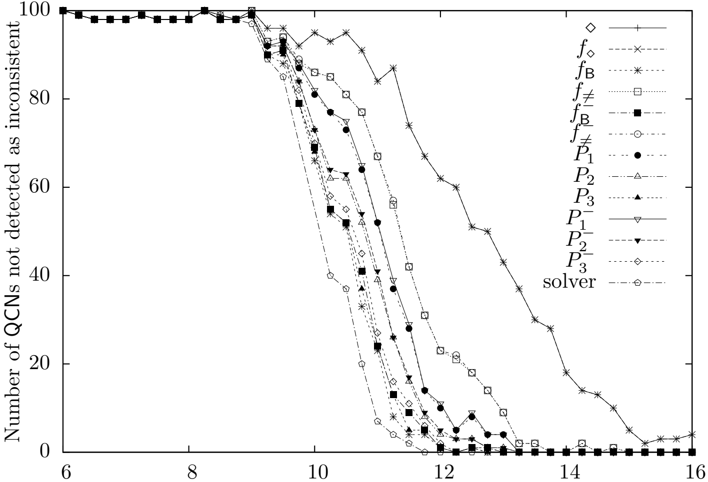
Soient $f \in \mathcal{F}^*$ et un RCQ $\mathcal{N}$. Il existe un unique plus grand sous-RCQ de $\mathcal{N}$ $\overset{\diamond}{f}$-cohérent, noté $\overset{\diamond}{f}(\mathcal{N})$.

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Résultats expérimentaux

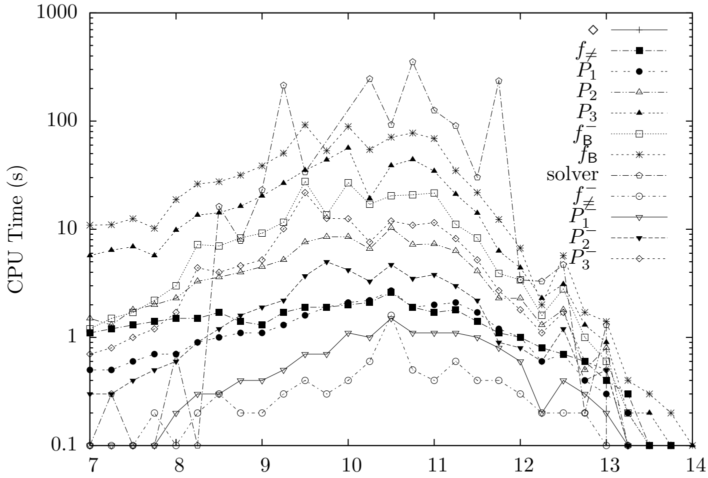
- A(100,nTD,6.5,non forcé cohérent) avec nTD $\in 6, \ldots, 16$
- Comparaison des forces de filtrage et des temps d'exécution

- $P_1 = \{\{p, m, o, fi, s, d\}, \{pi, mi, oi, f, si, di, eq\}\}$
- $P_2 = \{\{p, m, o\}, \{fi, s, d\}, \{pi, mi, oi\}, \{f, si, di, eq\}\}$
- $P_3 = \{\{p\}, \{m, o\}, \{fi\}, \{s, d\}, \{pi\}, \{mi, oi\}, \{f, eq\}, \{si, di\}\}$
- $f^-(R) = f(R)$ si $R \neq \Psi$ sinon $f^-(R) = \Psi$

$\overset{\diamond}{f}$-cohérences - Résultats expérimentaux



$\diamond_f$-cohérences - Résultats expérimentaux



Le langage $\mathcal{L}^{\mathsf{B}}_{\mathsf{PLTL}}$

- Un ensemble de symboles représentant des relations de base B
- Un ensemble de variables V $x, y, z, \ldots$ représentant des élements du domaine D
- $$f ::= \top \mid r(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \mid \neg f \mid (f \vee g) \mid (f \ \mathbf{U} \ g);$$

Sémantique

- Le modèle de temps considéré est linéaire, discret, borné dans le passé, non borné dans le futur et peut donc être représenté par $(\mathbb{N}, <)$, avec $<$ la relation d'ordre usuelle sur les entiers.
- Un modèle associé au langage $\mathcal{L}^{\mathsf{B}}_{\mathsf{PLTL}}$ est défini par une application ϵ qui associe à chaque variable $x \in V$ et à chaque instant $i \in \mathbb{N}$, une valeur de D notée $\epsilon(x, i)$.

Sémantique

La satisfiabilité d'une formule f de $\mathcal{L}^{\mathsf{B}}_{\mathsf{PLTL}}$ à un instant $i \in \mathbb{N}$ par un modèle ϵ, notée $\epsilon, i \models f$, est définie inductivement par :

- $\epsilon, i \models \top$;
- $\epsilon, i \models r(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$ ssi $\epsilon(x, i+m)\ r\ \epsilon(y, i+n)$;
- $\epsilon, i \models \neg f$ ssi non $\epsilon, i \models f$;
- $\epsilon, i \models f \vee g$ ssi $\epsilon, i \models f$ ou $\epsilon, i \models f$;
- $\epsilon, i \models f\ \mathbf{U}\ g$ ssi il existe $k \geq i$ tel que $\epsilon, i \models g$ et pour tout $j \in \{i, \ldots, k-1\}\ \epsilon, j \models f$.

Une formule f est satisfiable si et seulement s'il existe un modèle ϵ tel que $\epsilon, 0 \models f$.

Sémantique

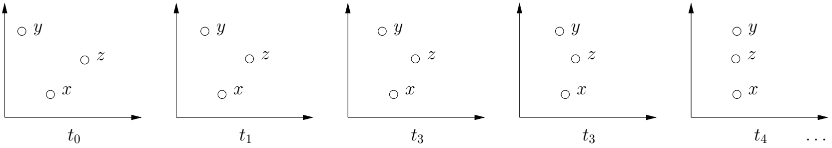
- Intuitivement, $r(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$ exprime que la valeur de x à l'instant $i+m$ satisfait la relation de base r avec la valeur de y à l'instant $i+n$.
- f **U** g exprime à l'instant i que dans le futur f sera satisfaite jusqu'à ce que g le soit.
- Les opérateurs temporels **F** (pour un instant dans le futur) et **G** (pour tous les instants futurs) peuvent s'exprimer à partir de l'opérateur temporel **U** par $\mathbf{F}\ f \equiv \top\ \mathbf{U}\ f$ et $\mathbf{G}\ f \equiv \neg(\top\ \mathbf{U}\ \neg f)$.
- L'opérateur temporel $\bigcirc$ sur une formule f (à l'instant suivant la formule f est vraie) peut s'exprimer par l'opérateur $\bigcirc$ sur les variables puisque x et y satisfont r à l'instant suivant ssi $r(\bigcirc^1 x, \bigcirc^1 y)$ est satisfaite à l'instant courant.

Exemple

- Dans les exemples suivants, pour une variable x, x et $\bigcirc x$ correspondent respectivement à $\bigcirc^0 x$ et $\bigcirc^1 x$.
- B correspond à l'ensemble des relations de base du calcul des directions cardinales et considérons trois variables x, y, z représentant trois entités spatiales ponctuelles du plan.
- $f = NW(y,x) \wedge NE(z,x) \wedge \mathbf{G}(E(\bigcirc y, y) \wedge W(\bigcirc y, y) \wedge EQ(\bigcirc x, x)) \wedge \mathbf{F}(N(y,x) \wedge N(z,x))$.
- f exprime les informations suivantes :y est au nord-ouest de x et se déplacera vers l'est au cours du temps, z est au nord-est de x et se déplacera vers l'ouest au cours du temps, x ne bouge pas, à un moment donné y et z seront au nord de x.

Exemple

- $f = NW(y,x) \wedge NE(z,x) \wedge \mathbf{G}(E(\bigcirc y, y) \wedge W(\bigcirc y, y) \wedge EQ(\bigcirc x, x)) \wedge \mathbf{F}(N(y,x) \wedge N(z,x))$.
- f exprime les informations suivantes :y est au nord-ouest de x et se déplacera vers l'est au cours du temps, z est au nord-est de x et se déplacera vers l'ouest au cours du temps, x ne bouge pas, à un moment donné y et z seront au nord de x.



Opérateurs de fusion de RCQ

Opérateur de fusion (Δ)

- Entrée : un multi-ensemble fini $\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ de RCQ définis sur un même ensemble V
- Sortie : $\Delta(\mathcal{K})$ un ensemble de scénarios cohérents sur V

Opérateurs de fusion de RCQ

Opérateur de fusion (Δ)

- Entrée : un multi-ensemble fini $\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ de RCQ définis sur un même ensemble V
- Sortie : $\Delta(\mathcal{K})$ un ensemble de scénarios cohérents sur V

Différents types d'opérateurs

- Opérateurs de fusion homogènes / hétérogènes
- Opérateurs de fusion sémantiques / syntaxiques

Opérateurs de fusion de RCQ

Opérateur de fusion (Δ)

- Entrée : un multi-ensemble fini $\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ de RCQ définis sur un même ensemble V
- Sortie : $\Delta(\mathcal{K})$ un ensemble de scénarios cohérents sur V

Différents types d'opérateurs

- Opérateurs de fusion homogènes / hétérogènes
- Opérateurs de fusion sémantiques / syntaxiques

Caclul des scénarios cohérents les plus proches du profil $\mathcal{K}$ à l'aide de distances et de fonctions d'agrégations.

Opérateur de fusion homogène [FLAIRS08,ECSQARU09]

$\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ avec $\forall \mathcal{N}_i \in \mathcal{K}$, $\mathcal{N}_i$ défini sur V et B

Processus de fusion en trois étapes

1. Calcul d'une distance locale $d(S, \mathcal{N})$ pour tout $S \in [V]$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$.
2. Calcul d'une distance globale $d(S, \mathcal{K})$ pour tout $S \in [V]$ par agrégation des distances locales.

$$d(S, \mathcal{K}) = Max\{d(S, \mathcal{N}) : \mathcal{N} \in \mathcal{K}\})$$

3. Sélection des scénarios $S \in [V]$ les plus proches de $\mathcal{K}$: $\Delta(\mathcal{K}) = \{S \in [V] : d(S, \mathcal{K}) = min_{S' \in [V]}\{d(S', \mathcal{K})\}\}$.

Opérateur de fusion homogène [FLAIRS08,ECSQARU09]

$\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ avec $\forall \mathcal{N}_i \in \mathcal{K}$, $\mathcal{N}_i$ défini sur V et B

Processus de fusion en trois étapes

1. Calcul d'une distance locale $d(S, \mathcal{N})$ pour tout $S \in [V]$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$.
2. Calcul d'une distance globale $d(S, \mathcal{K})$ pour tout $S \in [V]$ par agrégation des distances locales.

$$d(S, \mathcal{K}) = Max\{d(S, \mathcal{N}) : \mathcal{N} \in \mathcal{K}\})$$

3. Sélection des scénarios $S \in [V]$ les plus proches de $\mathcal{K}$: $\Delta(\mathcal{K}) = \{S \in [V] : d(S, \mathcal{K}) = min_{S' \in [V]}\{d(S', \mathcal{K})\}\}$.

Opérateur de fusion homogène [FLAIRS08,ECSQARU09]

$\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ avec $\forall \mathcal{N}_i \in \mathcal{K}$, $\mathcal{N}_i$ défini sur V et B

Processus de fusion en trois étapes

1. Calcul d'une distance locale $d(S, \mathcal{N})$ pour tout $S \in [V]$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$.
2. Calcul d'une distance globale $d(S, \mathcal{K})$ pour tout $S \in [V]$ par agrégation des distances locales.

$$d(S, \mathcal{K}) = Max\{d(S, \mathcal{N}) : \mathcal{N} \in \mathcal{K}\})$$

3. Sélection des scénarios $S \in [V]$ les plus proches de $\mathcal{K}$: $\Delta(\mathcal{K}) = \{S \in [V] : d(S, \mathcal{K}) = min_{S' \in [V]}\{d(S', \mathcal{K})\}\}$.

Opérateur de fusion homogène

1. Calcul d'une distance locale $d(S, \mathcal{N})$ pour tout $S \in [V]$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$.

Opérateur de fusion homogène

1. Calcul d'une distance locale $d(S, \mathcal{N})$ pour tout $S \in [V]$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$.

Calcul d'une distance $d(S, S')$ pour chaque scénario cohérent S' de $\mathcal{N}$ puis calcul de $d(S, \mathcal{N})$:

$$d(S, \mathcal{N}) = min\{d(S, S') \text{ tel que } S' \text{ scénario cohérent de } \mathcal{N}\}$$

Opérateur de fusion homogène

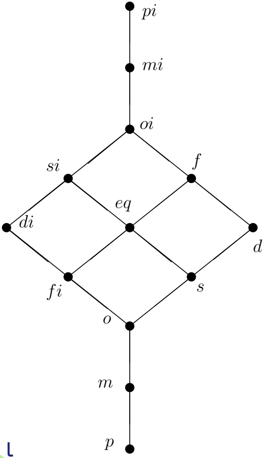
1. Calcul d'une distance locale $d(S, \mathcal{N})$ pour tout $S \in [V]$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$.

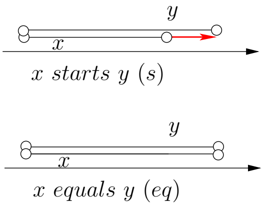
Calcul d'une distance $d(S, S')$ pour chaque scénario cohérent S' de $\mathcal{N}$ puis calcul de $d(S, \mathcal{N})$:

$$d(S, \mathcal{N}) = min\{d(S, S') \text{ tel que } S' \text{ scénario cohérent de } \mathcal{N}\}$$

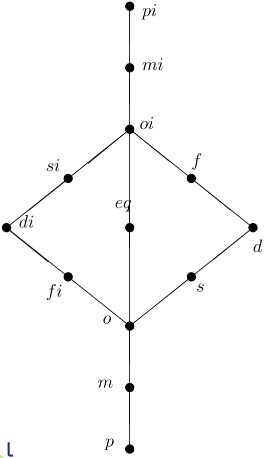
- $d_D(S, S') = 0$ si $S = S'$, 1 sinon.
- $d_H(S, S') = |\{(v_i, v_j) \in V \times V \text{ tel que } S[v_i, v_j] \neq S'[v_i, v_j]\}|$.

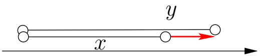
Graphes de voisinages conceptuels [Freksa90]



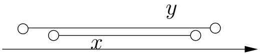


Graphes de voisinages conceptuels [Freksa90]





x *starts* y (s)



x *during* y (d)

Distances à partir de graphes de voisinages conceptuels

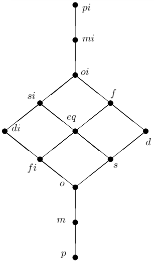
Soit un graphe de voisinage conceptuel G.

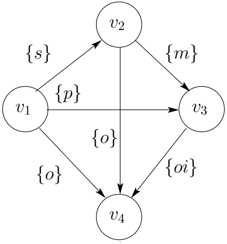
$$d_G(S, S') = \sum \{d_G(S[v_i, v_j], S'[v_i, v_j])\} \quad \text{(distance de voisinage)}$$

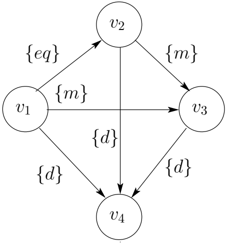
Distances à partir de graphes de voisinages conceptuels

Soit un graphe de voisinage conceptuel G.

$$d_G(S, S') = \sum\{d_G(S[v_i, v_j], S'[v_i, v_j])\} \quad \text{(distance de voisinage)}$$







$$d_G(S, S') = d_G(s, eq) + d_G(p, m) + d_G(m, m) + d_G(o, d) + d_G(o, d) + d_G(oi, d) = 1 + 1 + 0 + 2 + 2 + 2 = 8$$

Opérateur de fusion sémantique hétérogène [COSIT09]

$\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ avec $\mathcal{N}_i$ défini sur l'ensemble de relations de base B_i. Le domaine D est unique.

Opérateur de fusion sémantique hétérogène [COSIT09]

$\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ avec $\mathcal{N}_i$ défini sur l'ensemble de relations de base B_i. Le domaine D est unique.

Définition

Soient B et B′ définies sur D. B est un raffinement de B′ ssi $\forall a \in \mathrm{B}'$ il existe $R \subseteq \mathrm{B}$ tel que $\bigcup\{b \in R\} = a$. B est une abstraction de B′ ssi B′ est un raffinement de B.

Opérateur de fusion sémantique hétérogène [COSIT09]

$\mathcal{K} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k\}$ avec $\mathcal{N}_i$ défini sur l'ensemble de relations de base B_i. Le domaine D est unique.

Définition

Soient B et B′ définies sur D. B est un raffinement de B′ ssi $\forall a \in \mathrm{B}'$ il existe $R \subseteq \mathrm{B}$ tel que $\bigcup\{b \in R\} = a$. B est une abstraction de B′ ssi B′ est un raffinement de B.

Processus de fusion en trois étapes

1. B : une abstraction commune ou un raffinement commun à tous les $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_k$
2. $\mathcal{K}, \mathrm{B} \Rightarrow \mathcal{K}' = \{\mathcal{N}'_1, \ldots, \mathcal{N}'_k\}$

Conclusion

1. Merci de votre attention !

2. Des questions ?